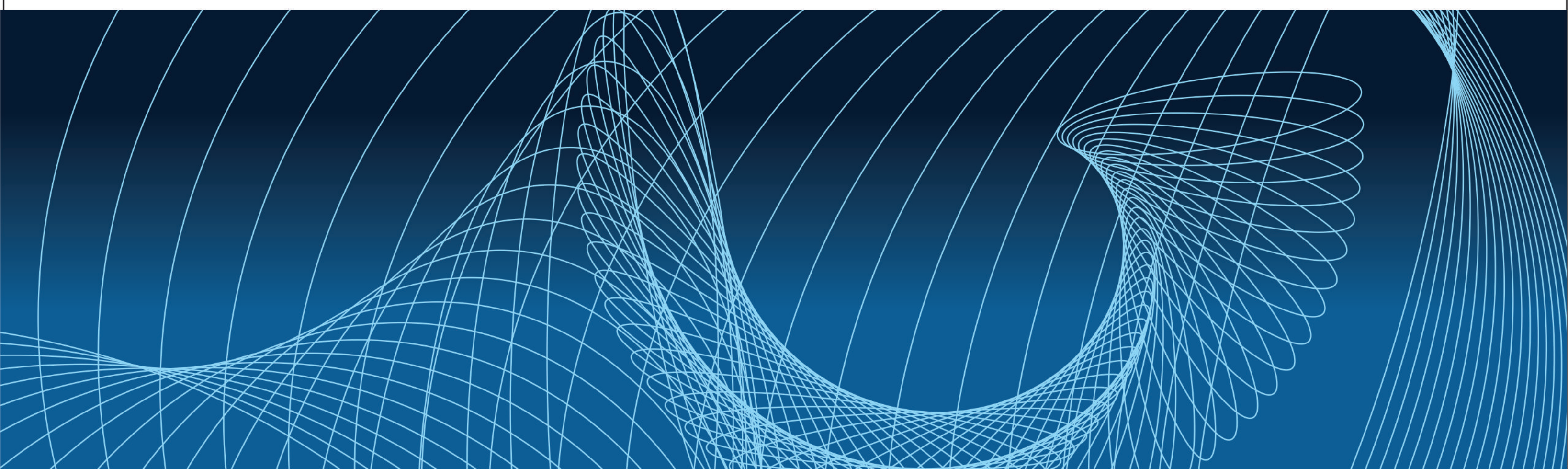
Dirección General de Publicaciones



Topología y sus aplicaciones 10

J. JUAN ANGOA AMADOR
AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO
RAÚL ESCOBEDO CONDE
MARÍA DE JESÚS LÓPEZ TORIZ

editores

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Topología y sus aplicaciones 10

Editores literarios

Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo,
María de Jesús López Toriz

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Primera edición: 2024
ISBN 978-607-8957-90-3

4 sur 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tel.: 01 (222) 229 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 norte 1404, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tels.: 222 246 85 59
222 229 55 00
Ext. 5768
publicaciones.buap.mx
librosdgp@correo.buap.mx

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Presentación

Apreciada persona que nos lees, el cuerpo académico de topología y sus aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, pone ante tí el décimo cuarto volumen de su serie de textos en topología[1]. Nuestra propuesta es ofrecer un espacio para generar y difundir conocimiento en topología y temas afines, con artículos expositivos y de investigación, que pueden ser motivación para los estudiantes y herramienta para los especialistas.

Entre los once capítulos que contiene este volumen se exponen temas de grupos topológicos, de análisis topológico de datos, de dinámica topológica, de hiperespacios de conjuntos, de topología general, de continuos y de álgebra: particularmente se presenta un bello trabajo sobre grupos topológicos, que recurre al álgebra lineal y al análisis funcional para investigar sobre un problema de isomormorfismo topológico; se exponen las ideas básicas de la topología de datos, área de reciente creación; se tratan relaciones de sistemas dinámicos débilemente mezclantes con la propiedad de la intersección finita; se estudian el hiperespacio de los subconjuntos finitos con la topología de Pixley-Roy y el hiperespacio de las sucesiones convergentes con la topología de Vietoris; en topología general se expone sobre conexidad relativa, y sobre asignaciones y estrellas; en continuos se investiga sobre las propiedades de Kelly y semi-Kelley; además, se incluyen tres artículos en temas de álgebra y categorías. Resaltamos que los trabajos en este libro aportan resultados originales o pruebas nuevas de hechos conocidos.

En esta entrega colaboran investigadores y estudiantes de las siguientes instituciones: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH), Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx), Univesidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSH), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

Agradecemos a los autores por elegir nuestro libro para publicar sus trabajos, y a los árbitros por el tiempo para revisarlos; especialmente te agradecemos a tí porque nos lees.

Los editores
Marzo de 2024

---

[1] La serie inició en 2007; los primeros volúmenes se denominan Topología y sistemas dinámicos I-IV, los siguientes Topología y sus aplicaciones 1-10. Contacto de editores: jangoa@fcfm.buap.mx, acontri@fcfm.buap.mx, escobedo@fcfm.buap.mx, mjlopez@fcfm.buap.mx,

Contenido

CAPÍTULO 1

El problema del isomorfismo topológico

Alejandro Ríos Herrejón
Universidad Nacional Autónoma de México,Ciudad de México, México

1. Introducción

Comienzo la exposición del presente escrito de una forma inusual: con una renuncia de responsabilidad. Resulta que desconozco si alguna otra persona le llama el "<problema del isomorfismo topológico"> al enunciado matemático con el que estaremos trabajando a lo largo de estas páginas. No obstante, a pesar de esta incertidumbre, considero que el nombre es acertado puesto que captura la idea esencial detrás de la interrogante central de este texto.

Formalmente, el "<problema del isomorfismo topológico"> es la siguiente pregunta:

PROBLEMA 1.1. *Si G y H son un par de grupos topolgicos, G es homeomorfo a H y G es isomorfo a H, ¿es cierto que G es topológicamente isomorfo a H?*

Mi primer encuentro con este problema fue en un curso de posgrado impartido por el Dr. Ángel Tamariz Mascarúa en el año 2019. En una de las clases, con la destreza impresionante que tiene para hacer preguntas interesantes, Ángel cuestionó a los asistentes del curso si alguno de nosotros sabíamos cuál era la respuesta para la pregunta 1.1.

Previsiblemente, ninguno de nosotros supo responderla y, en consecuencia, el Dr. Tamariz seleccionó aleatoriamente una persona para que reflexionara y compartiera con todos su opinión informada al respecto. Si en este punto de la narración el lector conjetura que el autor de estas palabras fue la "<víctima matemática"> de esa tarea, está en lo correcto.

Para mi inmensa fortuna, en la incansable búsqueda de la respuesta descubrí que el "<problema del isomorfismo topológico"> establece una hermosa intersección entre el álgebra abstracta, la topología general y el análisis funcional. El propósito de este artículo es exponer las nociones básicas necesarias de estas tres áreas con el objetivo de contestar negativamente la pregunta 1.1 y unos fortalecimientos de ella.

2. Preliminares de grupos topológicos

Cualquier concepto algebraico, topológico o conjuntista que no sea mencionado explícitamente en este escrito deberá respectivamente. Nuestros textos de consulta para el material relacionado con grupos topológicos serán [**2**] y [**8**].

Utilizaremos el símbolo ω para denotar al conjunto de los números naturales, es decir, ω es precisamente el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Por otra parte, $\mathbb{N}$ representará el conjunto de los números naturales positivos; en símbolos, $\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$.

Una pareja (X, τ_X) es un *espacio topológico* si X es un conjunto no vacío y τ_X es una familia de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset \in \tau_X$ y $X \in \tau_X$;
(2) si $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$; y
(3) para cualesquiera $U, V \in \tau_X$ se cumple que $U \cap V \in \tau_X$.

En estas circunstancias, la colección τ_X es una *topología en* X y a los elementos de τ_X se les llama *conjuntos abiertos*.

Por ejemplo, en cualquier conjunto no vacío X se satisface que las colecciones $\{\emptyset, X\}$ y $P(X)$ son topologías en X conocidas, respectivamente, como la *topología indiscreta* y la *topología discreta*.

Una función entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es *continua* si para cualquier $U \in \tau_Y$ se cumple que $f^{-1}[U] \in \tau_X$. Además, f es *abierta* si para todo $U \in \tau_X$ se constata que $f[U] \in \tau_Y$. Finalmente, f es un *homeomorfismo* si es una función biyectiva, continua y abierta.

Una terna $(G, \cdot_G, e_G)$ es un *grupo algebraico* si G es un conjunto no vacío, e_G es un elemento de G y $\cdot_G : G \times G \to G$ es una función[1] que satisface las siguientes condiciones:

(1) para cualesquiera $x, y, z \in G$, $x \cdot_G (y \cdot_G z) = (x \cdot_G y) \cdot_G z$;
(2) para toda $x \in G$, $x \cdot_G e_G = x = e_G \cdot x$ y
(3) para cualquier $x \in G$ existe $x^{-1} \in G$ con $x \cdot_G x^{-1} = e_G = x^{-1} \cdot_G x$.

Verbigracia, si n es un entero positivo, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros, y para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ expresamos $x \sim_n y$ si y sólo si $x - y$ es divisible entre n, entonces $\sim_n$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Si $\mathbb{Z}_n$ es el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\sim_n$ y $[x]_n$ representa la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{Z}$ inducida por $\sim_n$, un argumento rutinario muestra que $[0]_n$ y la función $+_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ definida por $[x]_n +_n [y]_n := [x+y]_n$ satisfacen que la terna $\left(\mathbb{Z}_n, [0]_n, +_n\right)$ es un grupo algebraico.

Una función entre grupos algebraicos $f : G \to H$ es un *homomorfismo* si para cualesquiera $x, y \in G$ se cumple que $f(x \cdot_G y) = f(x) \cdot_H f(y)$. Además, f es un *isomorfismo* si f es una homomorfismo biyectivo.

Con estos antecedentes, estamos posicionados para demostrar nuestro primer resultado auxiliar.

Lema 2.1. *No existen homomorfismos inyectivos de* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *en* $\mathbb{Z}_4$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos primero que si $z \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, entonces el subgrupo cíclico de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ generado por z, $\langle z \rangle$, no coincide con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Por otra parte, es sencillo comprobar que $\left\langle [1]_4 \right\rangle$ es precisamente $\mathbb{Z}_4$.

---

[1] Para continuar la tradición literaria, en este texto denotamos por $x \cdot_G y$ a la evaluación $\cdot_G(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in G$.

Ahora supongamos, en busca de una contradicción, que $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ es un homomorfismo inyectivo. Resulta que, como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4$ tienen cuatro elementos, f es una función biyectiva y, por lo tanto, f es un isomorfismo. Finalmente, la relación $\langle [1]_4 \rangle = \mathbb{Z}_4$ implica que $z := f^{-1}\left([1]_4\right)$ es un elemento de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ que satisface la relación $\langle z \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, una contradicción a lo establecido en el primer párrafo de la prueba. $\square$

Lo que sigue es fusionar de manera adecuada las nociones de "<espacio topológico"> y "<grupo algebraico">.

Una cuarteta $(G, \cdot_G, e_G, \tau_G)$ es un *grupo topológico* si las siguientes propiedades se cumplen:

(1) $(G, \cdot_G, e_G)$ es un grupo algebraico;
(2) (G, τ_G) es un espacio topológico y
(3) la operación $\cdot_G$ y la función $G \to G$ dada por $x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

Observe que en la condición (3) de la definición anterior la operación $\cdot_G$ es continua con respecto a la topología producto en $G \times G$. Por ejemplo, cualquier grupo algebraico equipado con la topología discreta, o bien, con la topología indiscreta, es un grupo topológico.

Una función $f : G \to H$ entre grupos topológicos es un *isomorfismo topológico* si f es un homeomorfismo y un isomorfismo simultáneamente.

Finalmente, si G y H son grupos topológicos, el producto cartesiano $G \times H$ tiene una estructura natural como grupo topológico, conocida como el *grupo topológico producto*, que está inducida por la topología producto y la operación

$$(x, y) \cdot_{G\times H} (x', y') := \left(x \cdot_G x', y \cdot_H y'\right).$$

En [**2**, Theorem 1.2.7, p. 16] se puede encontrar la demostración de este hecho para familias arbitrarias de grupos topológicos.

3. Primer contraejemplo

Posiblemente este cambio de sección tan repentino genere sorpresa en el lector puesto que, en el apartado del texto que acaba de terminar, únicamente mencionamos un par de topologías, una familia simple de grupos algebraicos y un resultado auxiliar. Resulta que eso es todo lo que necesitamos para construir una pareja de grupos topológicos que respondan negativamente la pregunta 1.1.

Sean $G_0 := \mathbb{Z}_4$ equipado con la topología discreta, $H_0 := \mathbb{Z}_4$ equipado con la topología indiscreta, $H_1 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ equipado con la topología discreta, $G_1 := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ equipado con la topología indiscreta, G el grupo topológico producto $G_0 \times G_1$ y H el grupo topológico producto $H_0 \times H_1$.

Proposición 3.1. *Si G y H son como en el párrafo anterior, entonces G es homeomorfo e isomorfo a H, pero G no es topológicamente isomorfo a H.*

Demostración: Dividiremos esta prueba en tres afirmaciones.

Afirmación 1. G y H son isomorfos.

Esta parte del argumento es la más simple en virtud de que G y H son el mismo grupo algebraico. Por esta razón, es suficiente observar que la función identidad $G \to H$ es un isomorfismo.

Afirmación 2. G y H son homeomorfos.

Para este enunciado hay que notar primero que G_0 y H_1 son espacios discretos de la misma cardinalidad, mientras que H_0 y G_1 son espacios indiscretos de la misma cardinalidad. Esta observación implica la existencia de un par de homeomorfismos $f : G_0 \to H_1$ y $g : H_0 \to G_1$. Luego, un argumento ruinario muestra que la función $h : G \to H$ determinada mediante $h(x,y) := \big(g^{-1}(y), f(x)\big)$ es un homeomorfismo.

Afirmación 3. G y H no son topológicamente isomorfos.

Por contradicción, supongamos que $f : G \to H$ es un isomorfismo y un homeomorfismo simultáneamente. Observemos que

$$U := \big\{[0]_4\big\} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

es un subgrupo abierto de G que es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Luego, como f es un isomorfismo topológico, $f[U]$ es un subgrupo abierto de H con cuatro elementos. En consecuencia, si $\pi_B : H \to B$ denota la proyección canónica, el hecho de que $\pi_B\big[f[U]\big]$ es un abierto no vacío de B implica que $\pi_B\big[f[U]\big] = \mathbb{Z}_4$.

El párrafo anterior garantiza la existencia de $z \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tal que $f[U] = \mathbb{Z}_4 \times \{z\}$. De esta manera, como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es isomorfo a U, f es un isomorfismo entre U y $f[U]$, y $f[U]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, deducimos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, una contradicción al lema 2.1. $\square$

La demostración previa la expuse alrededor de una semana después de que Ángel me encargara la tarea de responder la pregunta 1.1. Al término de la prueba escuché la onomatopeya clásica "<mmm"> que expresaba cierta intranquilidad por parte de él. Ni corto ni perezoso, el Dr. Tamariz me felicitó por encontrar un contraejemplo tan elemental y a continuación formuló una segunda pregunta:

PROBLEMA 3.2. *Si G y H son un par de grupos topológicos T_0, G es homeomorfo a H y G es isomorfo a H, ¿es cierto que G es topológicamente isomorfo a H?*

Esta aparente pequeña modificación de la pregunta 1.1 en realidad escondía un gran detalle. Un hecho fundamental de la teoría de grupos topológicos es que todos ellos son completamente regulares (véase [**8**, Teorema 4.14, p. 96]). De esta forma, cualquier grupo topológico T_0 es automáticamente un espacio de Tychonoff (es decir, un espacio de Hausdorff completamente regular). Resulta que este salto tan grande en la separación del espacio complicó bastante las cosas.

La siguiente tarea era evidente: había que descubrir cuál era la respuesta para la pregunta 3.2. Esta vez tardé un poco más que en la ocasión anterior, pero mi encomienda abrió un paisaje matemático espectacular y me guió por el sendero de los espacios vectoriales topológicos.

4. Breviario de álgebra lineal y análisis funcional

De ahora en adelante, los conceptos de análisis funcional y análisis matemático que no sean definidos expresamente deberán entenderse como en [**1**] y [**6**], respectivamente. En cuanto a las nociones de álgebra lineal, nuestro texto básico de consulta será [**10**], pero el material correspondiente a los espacios de dimensión infinita deberá ser entendido como en [**12**].

Todos los espacios vectoriales considerados serán sobre el campo $\mathbb{R}$. Además, el término "<base de Hamel"> describirá un subconjunto linealmente independiente y generador de un espacio vectorial (véase [**12**, § 3, p. 73]).

Nuestro primer resultado de álgebra lineal permite extender funciones definidas en bases de Hamel. Las personas versadas en esta disciplina reconocerán la proposición 4.1 como la *propiedad universal de las bases*.

Proposición 4.1. *Sean V y W un par espacios vectoriales. Además, sean B y B' bases de Hamel para V y W, respectivamente. Finalmente, sea $f : B \to W$ una función.*

(1) *Existe una única transformación lineal $F : V \to W$ que extiende a f, es decir, $|_{F[B]} = f$.*

Para los incisos restantes asuma que $f : B \to B'$.

(2) *Cuando f es inyectiva se satisface que F es inyectiva.*
(3) *F es suprayectiva siempre que f es suprayectiva.*
(4) *Si f es biyectiva, entonces F es un isomorfismo lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Para el inciso (1) observemos que si $v \in V$, entonces existen únicos $n \in \omega$, $\{v_i : i \leq n\} \subseteq B$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, de tal modo que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = v$. La unicidad de esta combinación lineal permite definir sin ambigüedad la función $F : V \to W$ mediante la regla

$$F(v) := \sum_{i=0}^{n} a_i f(v_i).$$

En estas circunstancias, un argumento rutinario muestra que F es la única transformación lineal de V en W que extiende a f.

Con la hipótesis $f : B \to B'$ en mente, para demostrar el inciso (2) supongamos que f es inyectiva y comprobemos que el núcleo de F, $\operatorname{Ker}(F) := \{v \in V : F(v) = 0_W\}$, es trivial. Dado un elemento v de $\operatorname{Ker}(F)$, existen $n \in \omega$, $\{v_i : i \leq n\} \subseteq B$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$, con el conjunto de vectores enumerado fielmente, de tal forma que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = v$. Observemos que, como f es una función inyectiva, el conjunto $\{f(v_i) : i \leq n\}$ está indizado sin repeticiones. De esta manera, la condición $\sum_{i=0}^{n} a_i f(v_i) = 0_W$ (es decir, $v \in \operatorname{Ker}(F)$) y la independencia lineal de B' implica que $a_i = 0$ para cualquier $i \leq n$. En consecuencia, $v = 0_V$.

La demostración del inciso (3) es más simple: supongamos que f es suprayectiva y fijemos $w \in W$. Sean $n \in \omega$, $\{w_i : i \leq n\} \subseteq B'$ y $\{a_i : i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$, con el conjunto de vectores enumerado sin repeticiones, tales que $\sum_{i=0}^{n} a_i w_i = w$. Luego, si para cada $i \leq n$ tomamos $v_i \in B$ con $f(v_i) = w_i$, es evidente que $v := \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$ satisface $F(v) = w$.

Finalmente, si f es una función biyectiva, entonces una combinación de los incisos (1), (2) y (3) garantiza que F es un isomorfismo lineal. □

Una función $f : V \to W$ entre espacios vectoriales es *aditiva* si para cualesquiera $v, w \in V$ se satisface que $f(v + w) = f(v) + f(w)$. Por otra parte, f es $\mathbb{Q}$-*lineal* si para cualesquiera $v, w \in V$ y $q \in \mathbb{Q}$ se constata que $f(qv + w) = qf(v) + f(w)$.

Lema 4.2. *Sean V y W un par de espacios vectoriales. Si $f : V \to W$ es una función aditiva, entonces f es $\mathbb{Q}$-lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea v un elemento de V. Primero, un argumento inductivo muestra que para cualquier $n \in \omega$ se cumple la relación $f(nv) = nf(v)$. Luego, como $0_W = f(0_V) = f(v - v) = f(v) + f(-v)$, se deduce que $f(-v) = -f(v)$. Por lo tanto, si n es entero negativo, entonces

$$f(nv) = f\big((-n)(-v)\big) = -nf(-v) = -n\big(f(-v)\big) = nf(v).$$

En suma, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se verifica la ecuación $f(nv) = nf(v)$.

Ahora, cuando $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ observemos que las relaciones

$$f(v) = f\left(n\frac{v}{n}\right) = nf\left(\frac{v}{n}\right)$$

implican $\frac{f(v)}{n} = f\left(\frac{v}{n}\right)$. Finalmente, si $w \in V$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}v + w\right) = f\left(\frac{mv}{n}\right) + f(w) &= \frac{f(mv)}{n} + f(w) \\ &= \frac{mf(v)}{n} + f(w) = \frac{m}{n}f(v) + f(w). \end{aligned}$$

□

Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial $(V, +_V, 0_V, \cdot_V)$ que está equipado con una topología τ_V de tal forma que la operación $+_V : V \times V \to V$ y la multiplicación por escalares $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \to V$ son funciones continuas cuando $V \times V$ y $\mathbb{R} \times V$ tienen la topología producto. En particular, todo espacio vectorial topológico es un grupo topológico abeliano.

Una función $f : V \to W$ entre espacios vectoriales topológicos es un *homeomorfismo lineal* si es, simultáneamente, un homeomorfismo y un isomorfismo lineal. Observemos que si V y W son linealmente homeomorfos, entonces V y W son topológicamente isomorfos.

Por ejemplo, el espacio vectorial formado por las sucesiones de números reales, ${}^{\omega}\mathbb{R}$, es un espacio vectorial topológico cuando está equipado con la topología producto.

Nosotros estaremos particularmente interesados en ciertos subespacios de ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Específicamente, el subespacio de sucesiones convergentes a cero, c_0, y los subespacios ℓ_p cuando $1 \leq p < \infty$; en símbolos,

$$c_0 := \left\{x \in {}^{\omega}\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\right\} \text{ y } \ell_p := \left\{x \in {}^{\omega}\mathbb{R} : \sum_{n\in\omega}\{x(n)^p\} \text{ converge}\right\}.$$

En [**6**, Proposición 2.15, p. 16] se comprueba que la función $\|\cdot_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n\in\omega} \left|x(n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en ℓ_p para cualquier $1 \leq p < \infty$. Además, es sencillo ver que la función $\|\cdot\|_{c_0} : c_0 \to \mathbb{R}$ definida como

$$\|x\|_{c_0} := \sup\left\{|x(n)| : n \in \omega\right\} \tag{4.1}$$

determina una norma en c_0.

Observemos que si V es un espacio vectorial normado, V es un espacio métrico con la métrica inducida por su norma. Además, tanto la operación $+_V : V \times V \to V$ como la multiplicación por escalares $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \to V$ son funciones continuas. En suma, cualquier espacio vectorial normado es un espacio vectorial topológico.

La noción de continuidad de una función entre espacios vectoriales topológicos permite destacar una propiedad notable de las funciones aditivas.[2]

Lema 4.3. *Sean V y W un par de espacios vectoriales topológicos. Si $f : V \to W$ es una función aditiva y continua, entonces f es una transformación lineal.*

DEMOSTRACIÓN: En virtud del lema 4.2, es suficiente comprobar que si $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces se satisface la relación $f(\alpha v) = \alpha f(v)$. Para cada $n \in \omega$ sea q_n un elemento de $\left(\alpha - 2^{-n}, \alpha + 2^{-n}\right) \cap \mathbb{Q}$. Luego, como las sucesiones $(q_n v)$ y $\left(q_n f(v)\right)$ convergen a (αv) y $\left(\alpha f(v)\right)$ en V y W, respectivamente, la continuidad de f implica que

$$f\left(\alpha v\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n v\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(q_n v\right) = \lim_{n\to\infty} q_n f\left(v\right) = \alpha f(v).$$

□

Corolario 4.4. *Sean V y W un par de espacios vectoriales topológicos. Si $f : V \to W$ es isomorfismo topológico, entonces f es un homeomorfismo lineal.*

Un resultado sobresaliente del análisis funcional es el *teorema de Anderson-Kadec* que establece que todo espacio de Fréchet, infinito-dimensional y separable[3] es homeomorfo a ${}^{\omega}\mathbb{R}$ (véase [**4**, Theorem 5.2, p. 189]). Nosotros únicamente necesitaremos el siguiente debilitamiento de ese resultado:

Teorema 4.5. *Todo espacio de Banach, infinito-dimensional y separable es homeomorfo a ${}^{\omega}\mathbb{R}$.*

La demostración del teorema 4.5 escapa significativamente del alcance de este escrito y, por esta razón, será omitida; no obstante, se le recomienda al lector interesado consultar los detalles en [**4**, Theorem 5.1, p. 188].

Si V es un espacio vectorial, una transformación lineal $f : V \to \mathbb{R}$ es una *funcional lineal en V*. Nosotros estamos interesados en las funcionales lineales *continuas* en espacios vectoriales topológicos. Formalmente, el espacio compuesto por todas las funcionales lineales continuas en un espacio vectorial topológico V es el *espacio dual topológico de V* y se denota por V^*.

Con la notación del párrafo anterior, no es difícil comprobar que si V es un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|_V$ y $B_V := \left\{v \in V : \|v\|_V \leq 1\right\}$, entonces la función $\|\cdot\|_{V^*} : V^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\|_{V^*} := \sup\left\{|f(v)| : v \in B_V\right\}$$

es una norma en V^*.

Definición 4.6. *Para un espacio vectorial normado V, el símbolo V^{**} denota al segundo espacio dual de V, es decir, al espacio $\left(V^*\right)^*$. El encaje natural es la función $j : V \to V^{**}$ donde para cada $v \in V$ la funcional $j(v) : V^* \to \mathbb{R}$ está determinada mediante $j(v)(f) := f(v)$. Finalmente, V es reflexivo si j es una función suprayectiva.*

---

[2]En [**11**, § 2.2, p. 31] se pueden encontrar algunos resultados interesantes al respecto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son discontinuas y aditivas.

[3]Un espacio topológico es *separable* si admite un subconjunto denso y numerable. Por otra parte, la definición de "<espacio de Fréchet"> se puede encontrar en [**4**, § 4, p. 184].

La noción de reflexividad de un espacio normado es, esencialmente, el concepto fundamental de este trabajo en virtud del siguiente resultado:

Lema 4.7. *Sean V y W un par de espacios vectoriales normados. Si V y W son topológicamente isomorfos, entonces V^* y W^* están en correspondencia biyectiva. Más aún, si V es reflexivo, entonces W es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : V \to W$ un isomorfismo topológico y $\varphi : V^* \to W^*$ la función determinada mediante $\varphi(g) := g \circ f^{-1}$. Observe que la hipótesis sobre f implica que φ es una función bien definida (véase el corolario 4.4). Además, la función $\psi : W^* \to V^*$ dada por $\psi(g) := g \circ f$ coincide con φ^{-1}. En suma, φ es una función biyectiva entre V^* y W^*.

Ahora, supongamos que V es un espacio reflexivo (es decir, el encaje natural $j_V : V \to V^{**}$ es suprayectivo) y mostremos que el encaje natural $j_W : W \to W^{**}$ es suprayectivo. Si $\alpha \in W^{**}$, entonces la composición $\alpha \circ \varphi$ es un elemento de V^{**} y, por ende, existe $v \in V$ con $j_V(v) = \alpha \circ \varphi$. Buscamos probar que $j_W\big(f(v)\big) = \alpha$. Efectivamente, si $g \in W^*$ y $h \in V^*$ satisface $\varphi(h) = g$, entonces

$$\begin{aligned} j_W\big(f(v)\big)(g) &= g\big(f(v)\big) = \varphi(h)\big(f(v)\big) = \Big(h \circ f^{-1}\Big)\big(f(v)\big) = h\Big(f^{-1}\big(f(v)\big)\Big) \\ &= h(v) = j_V(v)(h) = (\alpha \circ \varphi)(h) = \alpha\big(\varphi(h)\big) = \alpha(g). \end{aligned}$$

En consecuencia, W es un espacio reflexivo. □

Nuestro siguiente objetivo es analizar qué sucede con el siguiente fortalecimiento de la pregunta 3.2:

PROBLEMA 4.8. *Si V y W son un par de espacios vectoriales normados, V es homeomorfo a W y V es linealmente isomorfo a W, ¿es cierto qué V es linealmente homeomorfo a W?*

5. El caso finito-dimensional

A lo largo de esta sección, V y W serán espacios vectoriales normados. Nuestra meta en este apartado del texto es comprobar que la pregunta 4.8 tiene una respuesta positiva en el caso en que V tiene dimensión finita. De hecho, en presencia de la finitud es posible obtener un par de resultados mucho más fuertes (véanse los teoremas 5.1 y 5.7).

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base para V. Si cada $v \in V$ lo expresamos de manera única como $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ con $\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$, es asequible comprobar que la función $\|\cdot\|_V^* : V \to \mathbb{R}$ establecida por

$$\|v\|_V^* := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2}$$

determina una norma en V. Más aún, si a V lo equipamos con la norma $\|\cdot\|_V^*$, entonces la función $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ dada por $\phi(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$ es una isometría lineal biyectiva; en especial, ϕ es un homeomorfismo lineal.

La última herramienta que necesitamos para lo que sigue es que la identidad $Id_V : (V, \|\cdot\|_V) \to (V, \|\cdot\|_V^*)$ es un homeomorfismo lineal. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [**6**, Teorema 4.19, p. 64].

Teorema 5.1. *Si V tiene dimensión finita y V es linealmente isomorfo a W, entonces V y W son linealmente homeomorfos.*

Demostración: Si V tiene dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces nuestras hipótesis producen bases de Hamel $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $\{w_i : 1 \leq i \leq n\}$ para V y W, respectivamente. Sean $f : (V, \|\cdot\|_V^*) \to \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \to (W, \|\cdot\|_W^*)$ las funciones definidas mediante

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) := (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad g(b_1, \ldots, b_n) := \sum_{i=1}^{n} b_i w_i.$$

En virtud de que todas las funciones involucradas en el diagrama

$$(V, \|\cdot\|_V) \xrightarrow{Id_V} (V, \|\cdot\|_V^*) \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\ g\ } (W, \|\cdot\|_W^*) \xrightarrow{Id_W} (W, \|\cdot\|_W)$$

son homeomorfismos lineales, se satisface que $\phi := Id_W \circ g \circ f \circ Id_V$ es un homeomorfismo lineal entre $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$. $\square$

Resulta que si en el teorema 5.1 cambiamos la hipótesis "$<V$ es linealmente isomorfo a W"$>$ por "$<V$ es homeomorfo a W"$>$, entonces también es cierto que V y W son linealmente homeomorfos (véase el teorema 5.7). A continuación trazamos un camino para demostrar este resultado.

Lema 5.2. *Si W es un subespacio vectorial de dimensión finita de V, entonces W es cerrado en V.*

Demostración: Primero, como W tiene dimensión finita, [**6**, Teorema 5.8, p. 78] garantiza que W es un espacio de Banach. Por esta razón, para comprobar que W es cerrado basta con demostrar que si $w \in V$ y (w_n) es una sucesión en W convergente a w en V, entonces $w \in W$. En efecto, como (w_n) es una sucesión convergente en V, (w_n) es una sucesión de Cauchy en V, lo cual a su vez implica que (w_n) es una sucesión de Cauchy en W. De esta manera, como W es un espacio de Banach, (w_n) es una sucesión convergente en W. Por la unicidad del límite, concluimos que $w \in W$. $\square$

El símbolo S_V representa la esfera unitaria en V, es decir,

$$S_V := \left\{v \in V : \|v\|_V = 1\right\}.$$

El siguiente resultado es conocido como el *lema de Riesz*.

Lema 5.3. *Si W es un subespacio vectorial de V, W es cerrado en V y $W \neq V$, entonces para cada $\delta \in (0,1)$ existe $v_\delta \in S_V$ tal que, para cualquier $w \in W$, se satisface la relación $\|v_\delta - w\|_V > \delta$.*

Demostración: Sean $\delta \in (0,1)$ y $v \in V \setminus W$. En vista de que W es cerrado en V, el término

$$\alpha := \inf\left\{\|v - w\|_V : w \in W\right\}$$

es un número real positivo. Además, observemos que la condición $\delta \in (0,1)$ implica que $\frac{1-\delta}{\delta} > 0$. De esta manera, el número real $\beta := \alpha + \frac{1-\delta}{\delta}\alpha$ es estrictamente mayor que α y, por ende, no es una cota inferior del conjunto $\left\{\|v - w\|_V : w \in W\right\}$, es decir, existe $u \in W$ con $\alpha \leq \|v - u\|_V < \beta$.

Luego, $v_\delta := \frac{v-u}{\|v-u\|_V}$ cumple que $v_\delta \in S_V$ y, para cualquier $w \in W$, el hecho de que $u + \|v-u\|_V\, w$ pertenezca a W constata que

$$\begin{aligned}\|v_\delta - w\|_V &= \left\| \frac{v-u}{\|v-u\|_V} - w \right\|_V = \frac{1}{\|v-u\|_V} \left\| v - \left(u + \|v-u\|_V\, w\right) \right\|_V \\ &\geq \frac{1}{\|v-u\|_V}\alpha > \frac{1}{\beta}\alpha = \delta.\end{aligned}$$

□

Utilizaremos el lema de Riesz para demostrar una parte del *teorema de Riesz* que está enunciada a continuación.

Teorema 5.4. *Si la esfera unitaria S_V es compacta, entonces V tiene dimensión finita.*

Demostración: Realizaremos la prueba de este resultado por contrapuesta, es decir, supondremos de ahora en adelante que V tiene dimensión infinita y comprobaremos que S_V no es compacta. Para ello demostraremos primero el siguiente enunciado.

Afirmación. Existe una sucesión (v_k) contenida en S_V tal que, para cualesquiera $k, j \in \omega$, la condición $k \neq j$ implica $\left\|v_k - v_j\right\|_V > \frac{1}{2}$.

La construcción será hecha por recursión sobre k. Con el propósito de facilitar el entendimiento del paso recursivo, haremos explícitamente los primeros dos pasos de la construcción.

Sea v_0 un elemento de V distinto de 0_V. Si W es el subespacio vectorial de V generado por v_0, el hecho de que W tiene dimensión 1 (y por ende, que $W \neq V$) permite emplear una combinación del lema 5.2 con el lema 5.3 para hallar $v_1 \in S_V$ con $\|v_1 - w\|_V > \frac{1}{2}$ para cualquier $w \in W$. Claramente, $\|v_1 - v_0\|_V > \frac{1}{2}$.

Ahora, supongamos que para alguna $k \in \omega$ hemos construido $\{v_j : j \leq k\} \subseteq S_V$ con la propiedad deseada. Si W es el subespacio vectorial de V generado por la colección $\{v_j : j \leq k\}$, entonces W es un subespacio de V que tiene dimensión finita; en especial, $W \neq V$. De esta manera, el lema 5.2 permite utilizar el lema 5.3 para encontrar $v_{k+1} \in S_V$ con $\|v_{k+1} - w\|_V > \frac{1}{2}$ para toda $w \in W$. En consecuencia, $\{v_j : j \leq k+1\}$ satisface las condiciones deseadas.

Para terminar nuestra demostración, es evidente que la sucesión de la Afirmación no tiene subsucesiones de Cauchy y, por lo tanto, no tiene subsucesiones convergentes. Por esta razón, S_V no es compacta (véase [**6**, Teorema 7.4, p. 127]). □

Un espacio topológico X es *localmente compacto* si para cualquier $x \in X$ existe $U \in \tau_X$ con $x \in U$ y $\overline{U}$ compacto.

Lema 5.5. *Si V es localmente compacto, entonces V tiene dimensión finita.*

Demostración: En virtud del teorema 5.4, es suficiente comprobar que S_V es compacta. Para ello, como S_V es cerrada y está contenida en B_V, basta demostrar que B_V es compacta. Con este objetivo presente, observemos que por compacidad local existe $U \in \tau_V$ con $0_V \in U$ y $\overline{U}$ compacto. Luego, si $\delta > 0$ satisface $B_V(0_V, \delta) \subseteq U$, entonces la bola cerrada $\overline{B_V}(0_V, \delta)$ – que es la cerradura de la bola $B_V(0_V, \delta)$ (véase [**6**, Proposición 3.23, p. 41])) – está contenida en $\overline{U}$ y, por lo tanto, es compacta. Finalmente, como la función $V \to V$ determinada mediante $v \mapsto \frac{v}{\delta}$ es una función continua que transforma a $\overline{B_V}(0_V, \delta)$ en B_V, se deduce que B_V es compacta. $\square$

Conviene mencionar que, con un poco más de esfuerzo, es posible demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) V tiene dimensión finita.
(2) S_V es compacta.
(3) B_V es compacta.
(4) V es localmente compacto.

No obstante, como para nuestros fines es suficiente el resultado del lema 5.5, no presentaremos los detalles restantes de esta equivalencia.

Únicamente falta invocar un resultado fundamental de la topología algebraica. El *teorema de la invarianza de la dimensión* establece lo siguiente:

Teorema 5.6. *Si m y n son enteros positivos, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto y no vacío, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y U es homeomorfo a V, entonces $m = n$. En particular, si $\mathbb{R}^m$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces $m = n$.*

Una manera de probar el teorema 5.6 es mediante la herramienta conocida como *grupos de homología*. Sin embargo, como los detalles de este hecho se alejan de la línea expositoria del presente escrito, prescindiremos de ellos. Naturalmente, se le recomienda al lector interesado consultar [**7**, Theorem 2.26, p. 126].

Con todos estos precedentes disponibles, estamos listos para presentar el último resultado de la sección.

Teorema 5.7. *Si V tiene dimensión finita y V es homeomorfo a W, entonces V y W son linealmente homeomorfos.*

Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es la dimensión de V, entonces V y $\mathbb{R}^n$ son linealmente isomorfos y, por ende, el teorema 5.1 constata que V y $\mathbb{R}^n$ son linealmente homeomorfos. En especial, como $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto y V es homeomorfo a W, se deduce que W es localmente compacto y, por lo tanto, el lema 5.5 garantiza que W tiene dimensión finita.

Ahora, si la dimensión de W es $m \in \mathbb{N}$, entonces W y $\mathbb{R}^m$ son linealmente isomorfos y, por consiguiente, el teorema 5.1 asegura que W y $\mathbb{R}^m$ son linealmente homeomorfos. A partir de lo anterior se sigue que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y así, el teorema 5.6 implica que $m = n$; en particular, V y W son espacios linealmente isomorfos. Finalmente, el teorema 5.1 certifica que V y W son linealmente homeomorfos. $\square$

6. El caso infinito-dimensional

Nuestro propósito en esta sección es contestar negativamente la pregunta 4.8. Observe además que una respuesta de esta índole produce una respuesta negativa para la pregunta 3.2. Alcanzaremos nuestro objetivo con el razonamiento denominado coloquialmente como "<demostración por sucesión convergente de lemas">.

Lema 6.1. *c_0 es un espacio de Banach.*

Demostración: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en c_0 equipado con la norma definida en (4.1). Esta sucesión induce el siguiente arreglo matricial infinito:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_0: & x_0(0) & x_0(1) & x_0(2) & \dots & x_0(i) & \dots & \to & 0 \\
x_1: & x_1(0) & x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(i) & \dots & \to & 0 \\
x_2: & x_2(0) & x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(i) & \dots & \to & 0 \\
x_3: & x_3(0) & x_3(1) & x_3(2) & \dots & x_3(i) & \dots & \to & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_n: & x_n(0) & x_n(1) & x_n(2) & \dots & x_n(i) & \dots & \to & 0
\end{array}
$$

FIGURE 1. La sucesión (x_n).

Nuestro primer objetivo es comprobar que todas las columnas en el arreglo

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0(0) & x_0(1) & x_0(2) & \dots & x_0(i) & \dots \\
x_1(0) & x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(i) & \dots \\
x_2(0) & x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(i) & \dots \\
x_3(0) & x_3(1) & x_3(2) & \dots & x_3(i) & \dots \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_n(0) & x_n(1) & x_n(2) & \dots & x_n(i) & \dots
\end{array}
$$

son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. Efectivamente, si $i < \omega$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $k < \omega$ de tal manera que si $n \geq k$ y $m \geq k$, entonces $\|x_n - x_m\|_{c_0} < \varepsilon$. De esta manera, para $n \geq k$ y $m \geq k$ se satisfacen las relaciones $\big|x_n(i) - x_m(i)\big| \leq \|x_n - x_m\|_{c_0} < \varepsilon$; en consecuencia, $\big|x_n(i) - x_m(i)\big| < \varepsilon$.

Luego, como $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach por ser un espacio normado de dimensión finita (véase [**6**, Teorema 5.8, p. 78]), existe una función $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ con $\big(x_n(i)\big)$ convergente a $x(i)$ en $\mathbb{R}$ para toda $i \in \omega$. La demostración termina si logramos ver que x es un elemento de c_0 de tal forma que (x_n) converge a x en c_0 (véase la Figura 2). Dividiremos el argumento en tres afirmaciones.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_0: & x_0(0) & x_0(1) & x_0(2) & \dots & x_0(i) & \dots & \to & 0 \\
x_1: & x_1(0) & x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(i) & \dots & \to & 0 \\
x_2: & x_2(0) & x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(i) & \dots & \to & 0 \\
x_3: & x_3(0) & x_3(1) & x_3(2) & \dots & x_3(i) & \dots & \to & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_n: & x_n(0) & x_n(1) & x_n(2) & \dots & x_n(i) & \dots & \to & 0 \\
\text{Â¿}\downarrow? & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ddots & \downarrow & \ddots & \vdots & \downarrow \\
x: & x(0) & x(1) & x(2) & \dots & x(i) & \dots & \text{Â¿}\to? & 0
\end{array}
$$

FIGURE 2. La sucesión (x_n) y la sucesión x.

Afirmación 1. Para toda $\varepsilon > 0$ existe $k \in \omega$ con $\left|x_n(i) - x(i)\right| < \varepsilon$, siempre que $n \geq k$ e $i \in \omega$.

Si $\varepsilon > 0$, el hecho de que (x_n) es de Cauchy produce $k \in \omega$ de tal forma que si $n \geq k$ y $m \geq k$, entonces $\|x_n - x_m\|_{c_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, la convergencia de cada columna genera una función $k : \omega \to \omega$ tal que, para toda $i \in \omega$, cualquier $n \geq k(i)$ satisface $\left|x_n(i) - x(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, si $n \geq k$ e $i \in \omega$, entonces

$$\left|x_n(i) - x(i)\right| \leq \left|x_n(i) - x_{k+k(i)}(i)\right| + \left|x_{k+k(i)}(i) - x(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Afirmación 2. x es un elemento de c_0.

Dado $\varepsilon > 0$, la Afirmación 1 devuelve $k \in \omega$ con $\left|x_n(i) - x(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, siempre que $n \geq k$ e $i \in \omega$. Luego, como x_k pertenece a c_0, existe $j \in \omega$ tal que $\left|x_k(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $i \geq j$. De esta manera, para $i \geq j$,

$$\left|x(i)\right| \leq \left|x_k(i) - x(i)\right| + \left|x_k(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Afirmación 3. (x_n) converge a x en c_0.

Para $\varepsilon > 0$ la Afirmación 1 produce $k \in \omega$ de tal modo que, si $n \geq k$ e $i \in \omega$, entonces $\left|x_n(i) - x(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, la condición previa combinada con la Afirmación 2 implican $\|x_n - x\|_{c_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

En síntesis, las Afirmaciones 2 y 3 permiten concluir que c_0 es un espacio de Banach. □

La demostración del lema 6.2 tiene la virtud de presentar muchas similitudes con la prueba del lema 6.1.

Lema 6.2. *ℓ_2 es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en ℓ_2. Un razonamiento similar al expuesto en la demostración del lema 6.1 produce una función $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ de tal manera que, para cualquier $i \in \omega$, $\big(x_n(i)\big)$ converge a $x(i)$ en $\mathbb{R}$. Una vez más, dividiremos el resto del argumento en tres afirmaciones.

Afirmación 1. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k \in \omega$ tal que, si $n \geq k$, entonces

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left|x_n(i) - x(i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Dada $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy sobre (x_n) implica la existencia de $k \in \omega$ de tal suerte que, si $n \geq k$ y $m \geq k$, entonces $\|x_n - x_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, si $n \geq k$, $m \geq k$ y $\ell \in \omega$, se satisface la relación

$$\left(\sum_{i=0}^{\ell} \left|x_n(i) - x_m(i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta manera, al tomar los límites $m \to \infty$ y $\ell \to \infty$ obtenemos la expresión

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left|x_n(i) - x(i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Afirmación 2. x es un elemento de ℓ_2.

Por la Afirmación 1 existe $k \in \omega$ de tal modo que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left| x_n(i) - x(i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

siempre que $n \geq k$. Observemos que para cualquier $i \in \omega$ se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \left| x(i) \right|^2 &\leq \left(\left| x_k(i) - x(i) \right| + \left| x_k(i) \right| \right)^2 \leq \left(2 \max \left\{ \left| x_k(i) - x(i) \right|, \left| x_k(i) \right| \right\} \right)^2 \\ &\leq 4 \max \left\{ \left| x_k(i) - x(i) \right|^2, \left| x_k(i) \right|^2 \right\} \leq 4 \left(\left| x_k(i) - x(i) \right|^2 + \left| x_k(i) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

De esta forma, al sumar sobre $i \in \omega$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left| x(i) \right|^2 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} 4 \left(\left| x_k(i) - x(i) \right|^2 + \left| x_k(i) \right|^2 \right) \\ &= 4 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left| x_k(i) - x(i) \right|^2 + \left| x_k(i) \right|^2 \right) \\ &= 4 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left| x_k(i) - x(i) \right|^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left| x_k(i) \right|^2 \right) \leq 4 \left(1 + \left(\| x_k \|_2 \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, x pertenece a ℓ_2.

Afirmación 3. (x_n) converge a x en ℓ_2.

Si $\varepsilon > 0$, una combinación de las Afirmaciones 1 y 2 garantiza la existencia de $k \in \omega$ con $\| x_n - x \|_2 < \varepsilon$, siempre que $n \geq k$.

En conclusión, las Afirmaciones 2 y 3 certifican que ℓ_2 es un espacio de Banach.

□

Para fines del lema 6.3 diremos que $x \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ es una *sucesión racional de longitud* $n \in \omega$ si para cualquier $i \in \omega$ la condición $i > n$ implica $x(i) = 0$, mientras que $i \leq n$ implica $x(i) \in \mathbb{Q}$.

Lema 6.3. *c_0 y ℓ_2 son espacios separables.*

Demostración: Para cada $n \in \omega$ sea

$$D_n := \{ x \in {}^{\omega}\mathbb{R} : x \text{ es una sucesión racional de longitud } n \}.$$

Nuevamente, dividiremos el argumento en una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. $\{ D_n : n \in \omega \}$ es una familia de conjuntos numerables.

Efectivamente, si $n \in \omega$ entonces la regla ${}^{n}\mathbb{Q} \to D_n$ establecida por

$$x \mapsto x \cup \left\{ (i, 0) : i \in \omega \text{ y } i > n \right\}$$

determina una función suprayectiva. En consecuencia, como ${}^{n}\mathbb{Q}$ es numerable por estar en correspondencia biyectiva con una potencia finita de un conjunto numerable, deducimos que D_n es numerable.

Por la Afirmación 1, $D := \bigcup_{n\in\omega} D_n$ es un subconjunto numerable de ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Además, como todo elemento del conjunto D es una sucesión de tipo semiconstante cero (es decir, todos los elementos de la sucesión son cero a partir de cierto momento), es claro que D es un subconjunto de $c_0 \cap \ell_2$.

Afirmación 2. D es denso en c_0.

Sean $x \in c_0$, $\varepsilon > 0$ y $j \in \omega$ de tal forma que $\left|x(i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $i \geq j$. Sea $q : \omega \to \mathbb{Q}$ la función determinada del siguiente modo: $q(i) := 0$ para toda $i \geq j$, y $q(i)$ es un elemento del intervalo

$$\left(x(i) - \frac{\varepsilon}{2}, x(i) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

si $i < j$. Claramente, $q \in D_j$ y $\|x - q\|_{c_0} < \varepsilon$.

Afirmación 3. D es denso en ℓ_2.

Sean $x \in \ell_2$, $\varepsilon > 0$ y $j \in \omega$ de tal manera que $\sum_{i=j+1}^{\infty}\left|x(i)\right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Sea $q : \omega \to \mathbb{Q}$ la función establecida de la siguiente forma: $q(i) := 0$ para cada $i \geq j+1$, y $q(i)$ es un elemento del intervalo

$$\left(x(i) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(j+1)}}, x(i) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(j+1)}}\right)$$

si $i < j+1$. Evidentemente, $q \in D_{j+1}$ y $\|x - q\|_2 < \varepsilon$. $\square$

Para los siguientes resultados emplearemos el símbolo "$<\mathfrak{c}$"$>$ para denotar al continuo, es decir, el número cardinal de $\mathbb{R}$.

Lema 6.4. *c_0 y ℓ_2 tienen dimensión $\mathfrak{c}$.*

Demostración: Para cada $s \in \mathbb{R}$ la función $\overline{s} : \omega \to \mathbb{R}$ está determinada por $\overline{s}(n) := s^n$. En [**12**, Proposición 3.5, p. 77] se demuestra que $\left\{\overline{s} : s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$ es un subconjunto linealmente independiente de ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Así, como $(0,1)$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}$, $\left\{\overline{s} : s \in (0,1)\right\}$ es un subconjunto[4] de $c_0 \cap \ell_2$, y ${}^{\omega}\mathbb{R}$ tiene dimensión $\mathfrak{c}$ (véase [**12**]), se satisfacen las relaciones

$$\mathfrak{c} \leq \min\left\{\dim\left(c_0\right), \dim\left(\ell_2\right)\right\} = \max\left\{\dim\left(c_0\right), \dim\left(\ell_2\right)\right\} \leq \dim\left({}^{\omega}\mathbb{R}\right) \leq \mathfrak{c};$$

en consecuencia, $\dim\left(c_0\right) = \mathfrak{c} = \dim\left(\ell_2\right)$. $\square$

Para cada $n \in \omega$ sea $e_n : \omega \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$e_n(m) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Observemos que $\{e_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto de $c_0 \cap \ell_2$. Por otra parte, la función $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ está definida como

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

[4] La *prueba del cociente* para la convergencia de series garantiza que $\left\{\overline{s} : s \in (0,1)\right\}$ está contenido en ℓ_2.

Finalmente, antes de comenzar con el enunciado y la demostración de los resultados que terminan este trabajo, es recomendable tomar un respiro y volver unas páginas atrás para refrescar en su memoria la definición 4.6.

Lema 6.5. *c_0 no es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: Dividiremos la prueba en cinco afirmaciones.

Afirmación 1. Para cualesquiera $x \in \ell_1$ y $y \in c_0$, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i)$ es absolutamente convergente.

En efecto, basta con observar que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left|x(i)y(i)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|x(i)\right| \|y\|_{c_0} = \|y\|_{c_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left|x(i)\right| = \|y\|_{c_0} \|x\|_1 .$$

Ahora, para cada $x \in \ell_1$ definamos una función $\varphi(x) : c_0 \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$\varphi(x)(y) := \sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i).$$

Afirmación 2. Para todo $x \in \ell_1$ se satisface que $\varphi(x)$ pertenece $(c_0)^*$.

Sea x un elemento de ℓ_1. Claramente, $\varphi(x)$ es una funcional lineal. En virtud de esto último, comprobar que $\varphi(x)$ es continua es equivalente a verificar que es un operador acotado (véase [**6**, Proposición 9.1, p. 170]), es decir, que existe $M > 0$ de tal forma que $\left|\varphi(x)(y)\right| \leq M\|y\|_{c_0}$ para cada $y \in c_0$. Efectivamente, el número $M := \|x\|_1 + 1$ cumple que si $y \in c_0$, entonces

$$\left|\varphi(x)(y)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|x(i)y(i)\right| \leq \|x\|_1 \|y\|_{c_0} < M\|y\|_{c_0} .$$

La Afirmación 2 implica que $\varphi[\ell_1]$ es un subconjunto de $(c_0)^*$; en particular, $\varphi : \ell_1 \to (c_0)^*$ es una función bien definida.

Afirmación 3. φ es un isomorfismo isométrico entre ℓ_1 y $(c_0)^*$.

No es difícil ver que φ es una transformación lineal. Además, si x es un elemento del núcleo $Ker(\varphi)$ y $n \in \omega$, entonces la condición $\varphi(x)(e_i) = 0$ (es decir, $\sum_{i=0}^{\infty} x(i)e_n(i) = 0$) implica que $x(n) = 0$. En consecuencia, $x = 0_{\ell_1}$.

Para comprobar que φ es una función suprayectiva, tomemos $f \in (c_0)^*$ y demostremos que si $x : \omega \to \mathbb{R}$ está dada por $x(n) := f(e_n)$, entonces $x \in \ell_1$ y $\varphi(x) = f$. Primero observemos que si $n \in \omega$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \left|f(e_i)\right| &= \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}\left(f(e_i)\right) f(e_i) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}\left(f(e_i)\right) e_i\right) \\ &\leq \left| f\left(\sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}\left(f(e_i)\right) e_i\right)\right| \leq \|f\|_{(c_0)^*} .\end{aligned}$$

La última desigualdad es porque la sucesión $\sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}\left(f(e_i)\right) e_i$ pertenece a B_{c_0}. De esta manera, $\sum_{i=0}^{\infty} \left|x(i)\right|$ está acotada superiormente por $\|f\|_{(c_0)^*}$ y, por ende, $x \in \ell_1$.

Para demostrar la relación $\varphi(x) = f$ notemos que si $y \in c_0$, entonces una combinación de la continuidad de f con el hecho de que la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=0}^{n} y(i)e_i$ converge a y en c_0 certifica que

$$\begin{aligned}\varphi(x)(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i) = \sum_{i=0}^{\infty} f(e_i)y(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(e_i)y(i) \\ &= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=0}^{n} y(i)e_i\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} y(i)e_i\right) = f(y).\end{aligned}$$

Hasta este momento hemos probado que φ es un isomorfismo lineal. Para ver que es una isometría fijemos $x \in \ell_1$ y demostremos que $\left\|\varphi(x)\right\|_{(c_0)^*} = \|x\|_1$, es decir,

$$\sup\left\{\left|\varphi(x)(y)\right| : y \in B_{c_0}\right\} = \|x\|_1 .$$

La desigualdad de izquierda a derecha es porque si $y \in B_{c_0}$, entonces

$$\left|\varphi(x)(y)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|x(i)y(i)\right| \leq \|x\|_1 \|y\|_{c_0} \leq \|x\|_1 .$$

La desigualdad restante es porque si para toda $n \in \omega$ definimos $z_n : \omega \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$z_n(i) := \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(x(i)\right), & \text{si } i \leq n, \\ 0, & \text{si } i > n, \end{cases}$$

entonces $\{z_n : n \in \omega\} \subseteq B_{c_0}$ y para cada $n \in \omega$ se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left|x(i)\right| = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}\left(x(i)\right) x(i) &= \sum_{i=0}^{\infty} z_n(i)x(i) \\ &= \varphi(x)(z_n) \leq \left|\varphi(x)(z_n)\right| \leq \left\|\varphi(x)\right\|_{(c_0)^*} .\end{aligned}$$

En resumen, $\varphi : \ell_1 \to (c_0)^*$ es un isomorfismo isométrico

Afirmación 4. La función $\alpha : \ell_1 \to \mathbb{R}$ determinada mediante

$$\alpha(x) := \sum_{i=0}^{\infty} x(i)$$

es una funcional continua.

Es fácil ver que α es una transformación lineal. Por otra parte, para cualquier $x \in \ell_1$ se satisface que

$$\left|\alpha(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} x(i)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|x(i)\right| = \|x\|_1 .$$

En consecuencia, [**6**, Proposición 9.1, p. 170] implica que α es continua.

A partir de la Afirmación 4 se deduce que $\alpha \circ \varphi^{-1} : (c_0)^* \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal continua, es decir, $\alpha \circ \varphi^{-1}$ es un elemento de $(c_0)^{**}$.

Afirmación 5. Si $j : c_0 \to (c_0)^{**}$ es el encaje natural, no existe $x \in c_0$ con $j(x) = \alpha \circ \varphi^{-1}$.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $x \in c_0$ satisface $j(x) = \alpha \circ \varphi^{-1}$. Para cada $n \in \omega$, sean $f_n : c_0 \to \mathbb{R}$ y $x_n : \omega \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f_n(y) := y(n) \text{ y } x_n(i) := f_n(e_i).$$

Notemos que $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq (c_0)^*$, $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq \ell_1$ y $\varphi(x_n) = f_n$ para toda $n \in \omega$. Observemos que si $n \in \omega$, entonces

$$\begin{aligned} x(n) = f_n(x) = j(x)(f_n) &= \left(\alpha \circ \varphi^{-1}\right)(f_n) = \alpha\left(\varphi^{-1}(f_n)\right) \\ &= \alpha(x_n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_n(i) = \sum_{i=0}^{\infty} f_n(e_i) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(n) = 1. \end{aligned}$$

Así, x es la función constante uno, lo cual implica el absurdo $x \notin c_0$.

Finalmente, la Afirmación 5 garantiza que j no es una función suprayectiva; equivalentemente, c_0 no es un espacio reflexivo. □

Antes de continuar se le recomienda al estimado lector que revise nuevamente la demostración de las Afirmaciones 1, 2 y 3 del lema 6.5 puesto que las ideas subyacentes en las pruebas de esos enunciados se pueden adaptar para justificar gran parte de la demostración del lema 6.6.

Lema 6.6. *ℓ_2 es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN: Primero, la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz[5] implica que si $x, y \in \ell_2$, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i)$ es una serie convergente. En particular, si x es un elemento de ℓ_2, la función $\psi(x) : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x)(y) := \sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i)$$

está bien definida.

En estas circunstancias, argumentos similares a los expuestos en el lema 6.5 constatan que ψ es un isomorfismo isométrico entre ℓ_2 y $(\ell_2)^*$. Resta demostrar por qué este hecho implica que el encaje natural $j : \ell_2 \to (\ell_2)^{**}$ es una función suprayectiva.

Una razonamiento sencillo muestra que si $\psi^* : (\ell_2)^{**} \to (\ell_2)^*$ es tal que, para cada $\alpha \in (\ell_2)^{**}$, la función $\psi^*(\alpha) : \ell_2 \to \mathbb{R}$ está definida como

$$\psi^*(\alpha)(x) := \alpha\left(\psi(x)\right),$$

entonces ψ^* es una función biyectiva; de hecho, es posible mostrar que $(\psi^*)^{-1} = \left(\psi^{-1}\right)^*$. El siguiente enunciado prácticamente concluye nuestra demostración.

Afirmación. $\psi^* \circ j = \psi$.

Si $x \in \ell_2$, nuestra meta es probar que $(\psi^* \circ j)(x)$ y $\psi(x)$ son la misma función. Para ello fijemos $y \in \ell_2$ y observemos que

$$\begin{aligned} (\psi^* \circ j)(x)(y) &= \left(\psi^*\left(j(x)\right)\right)(y) = \left(j(x)\right)\left(\psi(y)\right) = \\ &= \psi(y)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)x(i) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)y(i) = \psi(x)(y). \end{aligned}$$

[5]Esta relación es el caso $p = 2 = q$ en la desigualdad de Hölder (véase [**6**, Proposición 2.12, p. 14]).

Finalmente, la Afirmación implica que $j = (\psi^*)^{-1} \circ \psi$ y así, como j es una composición de funciones suprayectivas, concluimos que j es una función suprayectiva, es decir, ℓ_2 es un espacio reflexivo. $\square$

Teorema 6.7. *c_0 es homeomorfo y linealmente isomorfo a ℓ_2, pero c_0 no es linealmente homeomorfo a ℓ_2.*

Demostración: Dividiremos el argumento en tres afirmaciones.

Afirmación 1. c_0 y ℓ_2 son linealmente isomorfos.

Sean B_0 y B_2 un par de bases de Hamel para c_0 y ℓ_2, respectivamente. En virtud del lema 6.4, existe una función biyectiva $f : B_0 \to B_2$. De esta manera, la proposición 4.1 genera un isomorfismo lineal entre c_0 y ℓ_2.

Afirmación 2. c_0 y ℓ_2 son homeomorfos.

Los lemas 6.1–6.4 garantizan que c_0 y ℓ_2 son espacios de Banach, infinito-dimensionales y separables. Por esta razón, el teorema 4.5 produce un homeomorfismo entre c_0 y ℓ_2.

Afirmación 3. c_0 y ℓ_2 no son linealmente homeomorfos.

En vista de que c_0 no es reflexivo por el lema 6.5 y ℓ_2 sí es reflexivo por el lema 6.6, el lema 4.7 constata que no existe un homeomorfismo lineal entre c_0 y ℓ_2. $\square$

7. Una pregunta más

Deseo terminar este escrito con una breve reflexión. Toda persona que haya analizado con detenimiento el contenido de este artículo notará que la "<propiedad de la discordia"> es la reflexividad. Específicamente, el hecho de que c_0 no es reflexivo y ℓ_2 sí lo es permitió demostrar en el teorema 6.7 que la pregunta 4.8 tiene una respuesta negativa. Esto parece ser un indicador de que, posiblemente, al añadir la reflexividad a nuestras hipótesis tendremos más posibilidades de obtener una respuesta positiva. En este momento de la vida, debería ser natural el siguiente fortalecimiento de la pregunta 4.8:

Problema 7.1. *Si V y W son un par de espacios vectoriales normados reflexivos, V es homeomorfo a W y V es linealmente isomorfo a W, ¿es cierto que V es linealmente homeomorfo a W?*

Resulta que todavía es posible demostrar que la pregunta 7.1 tiene una respuesta negativa, pero esta prueba requiere dos resultados sobresalientes del análisis funcional: el *teorema de la función abierta* (véase [**1**, D.9, p. 338]) y el *teorema de Pitt* (véase [**1**, Theorem 2.1.4, p. 32]).

Para concluir tranquilamente este texto únicamente haremos un esbozo del argumento para contestar negativamente la pregunta 7.1. De entrada, las demostraciones de los lemas 6.2 – 6.4 y 6.6 se pueden adaptar para constatar que ℓ_3 es un espacio de Banach separable de dimensión $\mathfrak{c}$. Ahora, si suponemos la existencia de un homeomorfismo lineal $\ell_3 \to \ell_2$, entonces una combinación de los teoremas mencionados en el párrafo anterior garantiza que hay $U \in \tau_{\ell_2}$ con $0_{\ell_2} \in U$ y $\overline{U}$ compacto. En consecuencia, ℓ_2 es localmente compacto y, por lo tanto, el lema 5.5 implica que ℓ_2 es finito-dimensional, una contradicción al lema 6.4.

De esta manera, ℓ_2 y ℓ_3 son espacios vectoriales normados reflexivos, ℓ_2 es homeomorfo y linealmente isomorfo a ℓ_3, pero ℓ_2 no es linealmente homeomorfo a ℓ_3.

Pienso que en este punto existen dos caminos viables a seguir: el primero es aceptar que las hipótesis de la pregunta 7.1 son lo suficientemente fuertes para que la respuesta negativa que producen ℓ_2 y ℓ_3 es tan satisfactoria como para dejar de pensar en cuestiones de esta índole; el segundo es hacer una ostentación de "<resistencia a los contraejemplos"> y continuar tratando de encontrar la "<hipótesis dorada"> que permita obtener una respuesta positiva en el caso infinito-dimensional para la variante respectiva de la pregunta 7.1.

Por mi parte, no he detectado una propiedad que verdaderamente me convenza para postularla para el puesto de "<hipótesis dorada"> y, por ende, me inclino por el sosiego que brinda la primera opción. Sin embargo, no descarto la posibilidad de que algún lector perspicaz motivado por este artículo descubra la "<hipótesis dorada"> que permita al fin conseguir una respuesta positiva. Si esto sucede, por favor, ¡escríbanme para avisarme que la han encontrado!

Bibliografía

[1] Albiac, F., Kalton, N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag New York, Graduate Texts in Mathematics, (233), 2006.

[2] Arhangel'skiĭ, A. V., Tkachenko, M., *Topological groups and related structures*, Atlantis press, Atlantis studies in mathematics, 2008.

[3] Avella Alaminos, D., Mendoza Hernández, O., Sáenz Valadez, E. C., Souto Salorio, M. J., *Grupos I*, Colección *Papirhos*, Aportaciones matemáticas, Serie *Textos*, núm. 1, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[4] Bessaga, C., Pelczyński, A., *Selected topics in infinite-dimensional topology*, Polish Scientific Publishers, 1975.

[5] Casarrubias Segura, F., Tamariz Mascarúa, Á., *Elementos de topología general*, Aportaciones matemáticas, Serie *Textos*, núm. 37, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.

[6] Clapp, M., *Análisis matemático*, Colección *Papirhos*, Serie *Textos*, núm. 2, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.

[7] Hatcher, A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2001.

[8] Hernández García, C., Rendón Gómez, O. J., Tkachenko, M., Villegas Silva, L. M., *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1997.

[9] Hernández Hernández, F., *Teoría de conjuntos: una introducción*, 3.ª ed., Aportaciones matemáticas, Serie *Textos*, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[10] Friedberg, H., Insel, J., Spence, E., *Linear Algebra*, Pearson, Fourth edition, 2002.

[11] Ríos Herrejón, A., *Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos al Álgebra Lineal y al Análisis Matemático*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.

[12] Ríos Herrejón, A., *Una introducción a los espacios vectoriales de dimensión infinita*, Miscelánea Matemática, (75), (2022), url https://doi.org/10.47234/mm.7506, 71-86.

Correo electrónico:
`chanchito@ciencias.unam.mx` (Alejandro Ríos Herrejón).

CAPÍTULO 2

Gráficas de Reeb para el análisis de bases de datos

Juan Ahtziri González Lemus
Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Michoacán, México.
Brayan Hernández Calvillo, María Maximov Cortés
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez", Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Michoacán, México.

1. Introducción

El análisis topológico de datos (ATD) es una técnica que apareció durante la década de los 2000, la cual, a pesar de sus pocos años de existencia ha adquirido una gran popularidad entre las comunidades científica, tecnológica, médica, deportiva, etcétera. Esto se puede comprobar con la vasta cantidad de artículos relacionados con el ATD que se publican en los últimos años, por ejemplo, en el buscador Scopus aparecen 1048 artículos en 2020 y 1143 en 2021. Actualmente, el ATD se utiliza para estudiar nubes de datos que provienen de casi todas las áreas del conocimiento, por ello es que esta técnica se ha establecido como una de las mejores para el análisis de datos.

La motivación principal del ATD es utilizar la Topología y la Geometría como poderosas herramientas para obtener información cualitativa y cuantitativa de la estructura de una nube de datos. De manera muy resumida, la aplicación del ATD se divide en los siguientes tres pasos:

(1) Aproximar la nube de datos con una sucesión de complejos simpliciales (Definición 2.3) construida a partir de los puntos.
(2) Calcular la homología y los números de Betti (Sección 2.4) para conocer las propiedades topológicas de los complejos en dicha sucesión.
(3) Obtener propiedades topológicas significativas de los datos a través de las características que persisten durante varios complejos simpliciales en la sucesión.

Computacionalmente pueden ser muy pesados los cálculos para aproximar la nube de datos y después obtener la persistencia de las homologías, es por ello que una necesidad del ATD es disminuir el costo computacional al aplicarlo.

La Teoría de Morse originalmente se desarrolló como una herramienta para obtener información geométrico/topológica de una variedad diferenciable. Las gráficas de Reeb fueron definidas por Georges Reeb como una herramienta de la teoría de Morse, éstas se han utilizado para el estudio de formas de objetos [**1**], reconocimiento de patrones [**2, 3**], para realizar animaciones [**4**], para análisis de bases de datos [**5, 6**], etcétera. Debido a la gran utilidad de las gráficas de Reeb, sus ideas principales se han copiado a otros ámbitos de las matemáticas. En particular, sobre complejos-CW y teoría de Morse discreta se tienen resultados similares a los de teoría de Morse sobre variedades diferenciables [**7**].

En este documento mostramos cómo se puede aprovechar la enorme flexibilidad que tienen las gráficas de Reeb para disminuir el gasto computacional y facilitar la aplicación del ATD sobre una nube de datos. La idea global de la estrategia que seguiremos es la siguiente: Dar una función real valuada sobre la nube de datos, construir las gráficas de Reeb de los complejos simpliciales que aproximan a los datos determinadas por dicha función, después, a través de la homología y los números de Betti de las gráficas, recuperar la homología y los números de Betti de los complejos simpliciales. Aunque sólo podemos recuperar las 0- y 1-homologías de los complejos, la ventaja de trabajar con gráficas de Reeb es que el gasto computacional es bastante más bajo ya que se requieren menos cálculos y poca memoria para almacenar la información.

Los temas tratados en el documento se dividen en tres capítulos de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se introducen complejos simpliciales geométricos y abstractos, funciones-PL, superficies trianguladas y se mencionan los resultados topológicos que utilizaremos en este texto. En el Capítulo 2 se definen las gráficas de Reeb y las funciones de Morse lineales por pedazos, además se demuestra que las gráficas de Reeb de funciones de Morse sobre superficies trianguladas recuperan el género de la superficie. Finalmente, la idea de cómo se pueden utilizar las gráficas de Reeb para facilitar la aplicación del ATD sobre una nube de datos se explica en el Capítulo 3.

Cabe mencionar que este documento no es precisamente introductorio al ATD, aunque en el Capítulo 3 damos un repaso breve de la técnica. El lector interesado puede consultar [**8**] para una introducción más completa y detallada o [**9**] para una introducción simple y en español.

La idea de crear esta monografía nació en el segundo semestre del 2021 en el cual realizamos un seminario de ATD con: Dra. Yesenia Villicaña Molina, MCIC Eduardo López Bolaños, M. C. Gilberto González Arroyo y Lic. Marco Antonio Nava Aguilar, quienes expresaron su interés en tener un documento donde pudieran consultar los temas tratados. Los autores agradecemos a todos ellos por su participación en dicho seminario y sus valiosas observaciones durante las exposiciones.

2. Preliminares

Comenzamos con un repaso breve de los espacios, las funciones y los resultados que utilizaremos a lo largo del documento. En este capítulo se introducen las herramientas que constituyen la estructura básica sobre la que descansan la homología persistente y las gráficas de Reeb. En la última sección del capítulo se mencionan los resultados matemáticos necesarios para las construcciones que realizaremos.

2.1. Complejos simpliciales geométricos y abstractos. Definimos los complejos simpliciales contenidos en $\mathbb{R}^n$ (geométricos) y en conjuntos más generales (abstractos).

Recordemos que un conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_d\} \subset \mathbb{R}^n$ está en **posición general**, si el conjunto de vectores $\{x_1 - x_0, \ldots, x_d - x_0\}$ es linealmente independiente. Se puede verificar que la propiedad de estar en posición general sólo depende de la posición de los puntos y no de la numeración de éstos.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualesquiera par de puntos $p, q \in A$, el segmento $\{(1-t)p + tq \colon t \in [0,1]\}$ está contenido en A. La **envolvente convexa** de un conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_\ell\} \subset \mathbb{R}^n$ es el menor convexo que lo contiene.

Definición 2.1. *Si el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_d\} \subset \mathbb{R}^n$ está en posición general, entonces su envolvente convexa se denota por $\langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$ y se nombra el **simplejo de dimensión d o d-simplejo generado por $x_0, x_1, \ldots, x_d$**.*

Notar que un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo es un segmento, un 2-simplejo es un triángulo, un 3-simplejo es un tetraedro, etcétera. Todo punto $p \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$ se puede escribir de manera única como (ver [**8**, Prop. 3.1.2])

$$p = \sum_{i=0}^{d} t_i x_i, \quad \text{con} \quad t_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{d} t_i = 1.$$

Los escalares $t_0, t_1, \ldots, t_d$ se nombran las **coordenadas baricéntricas** de p.

Definición 2.2. *Supongamos que $\langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$ es d-simplejo.*

*a. Los **vértices** de $\langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$ son los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_d$.*
*b. Si $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\} \subset \{x_0, x_1, \ldots, x_d\}$ es cualquier subconjunto, entonces decimos que $\langle x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k} \rangle$ es una **cara** de $\langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$ y denotamos $\langle x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k} \rangle < \langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle$.*

La siguiente definición formaliza la idea de que los complejos simpliciales se obtienen pegando simplejos a través de sus caras.

Definición 2.3. *Un **complejo simplicial finito K**, es una colección finita de simplejos que satisface las siguientes condiciones:*

i. Toda cara de un simplejo en K pertenece a K.
ii. Si $\sigma, \gamma \in K$, entonces $\sigma \cap \gamma = \emptyset$ o $\sigma \cap \gamma$ es cara de ambos simplejos.

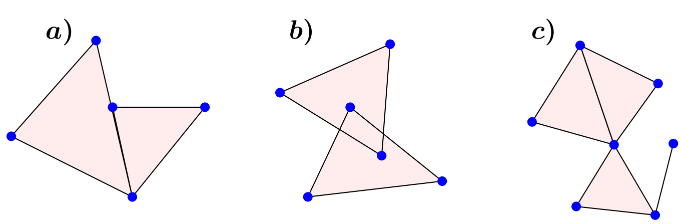


FIGURE 1. En complejos simpliciales los pegados en $a)$ y $b)$ no están permitidos, pero el pegado en $c)$ sí lo está ya que se realiza a través de caras comunes.

Definición 2.4. *Supongamos que K es un complejo simplicial finito.*

a. *La* ***dimensión*** *de K es el número $máx_{\sigma \in K}\{dim(\sigma)\}$.*
b. *Al espacio $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n$ con la topología de subconjunto le llamamos el* ***espacio subyacente*** *de K. En este caso decimos que K es una triangulación del espacio topológico $|K|$.*
c. *Si $K' \subset K$ es una subcolección de simplejos que por sí misma es un complejo simplicial, entonces decimos que K' es un* ***subcomplejo*** *de K y denotamos $K' < K$.*
d. *Al subcomplejo que consiste de todos los l-simplejos con $l \leq d$, lo llamamos el* ***l-esqueleto*** *de K y lo denotamos con $K^{(l)}$.*

Notar que $K^{(0)}$ es el conjunto de vértices de K y $K^{(1)}$ es la gráfica formada por los vértices y los 1-simplejos en K.

Las técnicas presentadas en este trabajo funcionan para nubes de datos que viven en cualquier espacio métrico. Por ello y por su utilidad en construcciones posteriores, necesitamos ampliar la definición de complejo simplicial para que no dependa del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.5. *Un* ***complejo simplicial abstracto*** *contenido en un conjunto Y es una colección L de subconjuntos de $\{y_0, y_1, \ldots, y_\ell\} \subset Y$ tal que si $\sigma \in L$ y $\beta \subset \sigma$, entonces $\beta \in L$.*

En la definición anterior, los puntos y_j son los vértices de L y el conjunto $L^{(0)} = \{y_0, y_1, \ldots, y_\ell\}$ es el 0-esqueleto. Un d-simplejo en L es sólo un conjunto con $d+1$ vértices y sus caras son subconjuntos de dicho conjunto. La dimensión de L es $máx_{\sigma \in L}\{dim(\sigma)\}$.

Supongamos que L es complejo simplicial abstracto. Si K es complejo simplicial y existe biyección $f\colon L^{(0)} \to K^{(0)}$ tal que para todo $\{y_{j_0}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_d}\} \in L$, se cumple que $\langle f(y_{j_0}), f(y_{j_1}), \ldots, f(y_{j_d})\rangle \in K$, entonces decimos que ***K* es una realización geométrica de *L***. El siguiente resultado es clásico y se puede consultar en [**10**, Teo. 1.10].

Teorema 2.6. *Si L es complejo simplicial abstracto de dimensión d, entonces tiene realización geométrica en $\mathbb{R}^{2d+1}$.*

Por este resultado es que durante el documento manejaremos la mayoría de las construcciones sobre complejos simpliciales geométricos (Definición 2.3).

Ejemplo 2.7. *Se invita al lector a construir una realización geométrica de los siguientes complejos simpliciales abstractos.*

(1) $L = \Big\{\{0\}, \{\sqrt{2}\}, \{-\pi\}, \{\sqrt{2}, -\pi\}, \{-\pi, 0\}\Big\}$ *complejo simplicial abstracto contenido en $\mathbb{R}$.*
(2) $L' = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\Big\}$ *complejo simplicial abstracto contenido en $\mathbb{N}$.*

2.2. Funciones lineales por pedazos. Los complejos simpliciales están determinados por subconjuntos de un número finito de puntos, esta propiedad facilita su manejo y permite utilizarlos para aproximar bases de datos. Los mapeos naturales en complejos simpliciales son las funciones lineales por pedazos, las cuales también están determinadas por un número finito de imágenes.

Definición 2.8. *Supongamos que K es un complejo simplicial. Decimos que una función $f\colon |K| \to \mathbb{R}$ es* ***lineal por pedazos*** *si para todo $p \in |K|$,*

$$f(p) = \sum_{i=0}^{d} t_i f(x_i)$$

donde $p \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_d \rangle \in K$ y $t_0, t_1, \ldots, t_d$ son las coordenadas baricéntricas de p. Llamaremos ***funciones-PL*** *a las funciones lineales por pedazos.*

Las siguientes propiedades de las funciones-PL se siguen de la definición:

I. Si $f\colon K^{(0)} \to \mathbb{R}$ es función, entonces extendiendo linealmente sobre las coordenadas baricéntricas de cada simplejo, definimos una única función-PL $f\colon |K| \to \mathbb{R}$.
II. Las funciones-PL son continuas. Más aún, la restricción de una función-PL al interior de un d-simplejo con $d \geq 1$, es diferenciable.
III. Toda función-PL alcanza su máximo y su mínimo en los vértices de un complejo simplicial (los complejos simpliciales finitos son compactos).

De la Propiedad *I* se concluye que las funciones-PL están determinadas por sus valores en el 0-esqueleto. Aprovechando esta propiedad mostraremos a las funciones-PL sólo marcando sus valores en los vértices de los complejos simpliciales. Un ejemplo se muestra en la Figura 2.

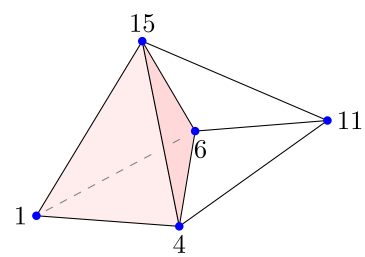


FIGURE 2. Función-PL sobre un complejo simplicial de dimensión 2.

2.3. Superficies trianguladas. En esta sección introducimos las superficies trianguladas y mostramos cómo son los contornos de nivel de funciones-PL en ellas.

Definición 2.9. *Supongamos que S es un complejo simplicial de dimensión 2. Decimos que S es una* ***superficie triangulada*** *si todo 1-simplejo pertenece a exactamente dos 2-simplejos y todo vértice tiene una vecindad en $|S|$ que es homeomorfa a la bola abierta $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$.*

Por ejemplo, las fronteras de un tetraedro y un octaedro son superficies trianguladas y ambos espacios subyacentes son homeomorfos a la esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Dos triangulaciones distintas sobre el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se muestran en las Figuras 3 y 6. El complejo simplicial de la Figura 2 no es superficie triangulada.

En todo el documento las superficies serán cerradas, es decir, son conexas, compactas y no tienen frontera.

Definición 2.10. *Supongamos que S es una superficie triangulada y que $x_j \in S$ es un vértice.*

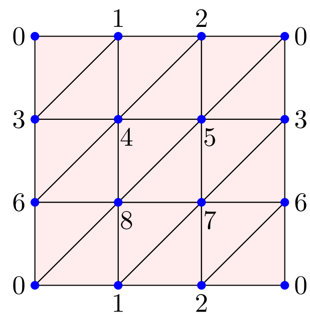


FIGURE 3. Una triangulación y una función-PL sobre el toro $\mathbb{T}$. El lector debe tener presente que los vértices y las aristas de las fronteras del cuadrado deben identificarse según los valores de la función para obtener el toro.

a. *La **estrella de x_j**, denotada $St(x_j)$, es el conjunto de simplejos de los cuales x_j es cara (Figura 5.a)), es decir,*

$$St(x_j) := \{\tau \in S \colon x_j < \tau\}.$$

b. *El **link de x_j**, denotado $Lk(x_j)$, es el conjunto de 1-simplejos en $St(x_j)$ de los cuales x_j no es cara (ver Figura 5.a)), es decir,*

$$Lk(x_j) := \{\tau \in St(x_j) \colon \tau \cap x_j = \emptyset\}.$$

Se puede probar que la estrella $St(x_j)$ siempre es homeomorfa al disco cerrado $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y que el link $Lk(x_j)$ es un polígono con tantos lados como triángulos hay en $St(x_j)$.

Lema 2.11. *Supongamos que S es un superficie triangulada y $f : S^{(0)} \to \mathbb{R}$ es función inyectiva que define la función-PL $f : |S| \to \mathbb{R}$. Si $\sigma = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset S$ es un 2-simplejo y $c \in \mathbb{R}$, entonces existen las siguientes tres posibilidades:*

$$f^{-1}(c) \cap \sigma = \begin{cases} \emptyset \\ \{x_j\} \quad \text{para algún} \quad x_j \in \{x_1, x_2, x_3\} \\ \text{un segmento} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: La restricción de f a σ alcanza su mínimo t_0 y su máximo l_0 en los vértices. Es claro que si $c \in \mathbb{R} \smallsetminus (t_0, l_0)$, entonces $f^{-1}(c) \cap \sigma = \emptyset$ si $c < t_0$ o $l_0 < c$ y $f^{-1}(c) \cap \sigma = \{x_i\}$ si $c = t_0$ o $c = l_0$.

Para el caso $c \in (t_0, l_0)$ pensemos sin pérdida de generalidad que $f(x_1) = t_0$ y $f(x_2) = l_0$. Por la continuidad de f existen unos únicos $P \in \langle x_1, x_2 \rangle$ y $Q \in \langle x_1, x_3 \rangle \cup \langle x_3, x_2 \rangle$ tales que $f(P) = f(Q) = c$. Notar que para todo $s \in [0, 1]$ se cumple

$$f\big(sP + (1-s)Q\big) = sf(P) + (1-s)f(Q) = sc + (1-s)c = c.$$

De manera que $f^{-1}(c) \cap \sigma$ es el segmento con extremos en los puntos P y Q. $\square$

2.4. Preliminares topológicos. Mencionamos de manera intuitiva y sin demostración las herramientas topológicas y los resultados clásicos que utilizaremos en el documento. Una referencia general para los temas de esta sección es [**11**].

Si X y Y son espacios topológicos, entonces **una copia de *Y* en *X*** es un subconjunto de X que es homeomorfo a Y.

Un ***j*-hoyo en *X*** es un "hueco de X" que evita que una copia de la esfera $\mathbb{S}^j := \{x \in \mathbb{R}^{j+1} : \|x\| = 1\}$ en X pueda deformarse continuamente hasta que se degenera a un punto. Por ejemplo:

(1) Una copia de $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ es una pareja de puntos en X. Notar que si existe una trayectoria que une a dos puntos de X, entonces éstos se pueden deformar a un punto a través de ella. De manera que los 0-hoyos corresponden a las componentes conexas por trayectorias de X.

(2) Una copia de $\mathbb{S}^1$ es una curva cerrada $\alpha \subset X$. Si en X existe una copia de $\mathbb{D}^2$ que tiene como frontera a α, entonces α se puede deformar continuamente a un punto a través de dicho disco. Concluimos que los 1-hoyos en X son los que se pueden rodear con curvas cerradas que no están "rellenas" y por lo tanto no se contraen a un punto. Por ejemplo, el complejo simplicial en la Figura 2 tiene tres 1-hoyos.

Supongamos que $j \geq 0$. En este texto denotamos con $H_j(X)$ al espacio vectorial de homología con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ (campo de enteros módulo 2). Los elementos de $H_j(X)$ se pueden pensar como los j-hoyos en X. A la dimensión $\beta_j(X) := dim\big(H_j(X)\big)$ se le conoce como el j-ésimo número de Betti de X. Intuitivamente, $\beta_j(X)$ es la cantidad de "j-hoyos básicos" que tiene X.

Definición 2.12. *La **Característica de Euler** de un espacio topológico X es el número*

$$\chi(X) = \beta_0(X) - \beta_1(X) + \beta_2(X) - \beta_3(X) + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \beta_j(X).$$

Supongamos que K es un complejo simplicial finito de dimensión d. En este caso se cumple que $\beta_j(K) = 0$ para $j > d$. Además, si $k_j(K)$ denota al número de j-simplejos en K, entonces se satisface (ver [**11**, Teo. 2.44])

$$\chi(K) = k_0(K) - k_1(K) + k_2(K) - \cdots + k_d(K) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j k_j(K) \tag{2.1}$$

En una superficie triangulada S se cumple que toda arista pertenece a dos triángulos y cada triángulo tiene tres aristas, luego $3k_2(S) = 2k_1(S)$ y por lo tanto, $\chi(S) = k_0(S) - \frac{1}{2}k_2(S)$. Por ejemplo, del tetraedro y de la Figura 3 se concluye que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ y $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

Definición 2.13. *Supongamos que S_1, S_2 son superficies, $D_1 \subset S_1, D_2 \subset S_2$ son copias de $\mathbb{D}^2$ con interiores D_1° y D_2° y $f\colon \partial D_1 \to \partial D_2$ es homeomorfismo entre las fronteras. A la superficie obtenida por el cociente topológico*

$$S_1 \# S_2 := \Big[\big(S_1 \smallsetminus D_1^\circ\big) \cup \big(S_2 \smallsetminus D_2^\circ\big)\Big] \Big/ \{x \sim f(x)\}$$

*se le llama la **suma conexa** de S_1 con S_2.*

Del Teorema de clasificación de superficies cerradas [**12**, Teo. 4.14] sabemos que todas las superficies orientables son la esfera o $\mathbb{T}_g := \mathbb{T} \# \mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}$ que es la suma conexa de g toros. Al número g se le llama **el género de la superficie** $\mathbb{T}_{\boldsymbol{g}}$. Así, la esfera $\mathbb{S}^2$ tiene género 0 y el toro $\mathbb{T}$ tiene género 1. Del Teorema de clasificación también se sigue que la suma conexa $S_1\#S_2$ es independiente de los discos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ escogidos y del homeomorfismo $f\colon \partial D_1 \to \partial D_2$.

Supongamos que S_1, S_2 son superficies trianguladas. Si realizamos la suma conexa de S_1 con S_2 a través del interior de un triángulo en cada superficie y pegamos con un homeomorfismo que identifique vértices, entonces $S_1\#S_2$ es superficie triangulada y satisface

$$\chi(S_1\#S_2) = k_0(S_1\#S_2) - k_1(S_1\#S_2) + k_2(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Usando el Teorema de clasificación se sigue que para toda superficie S que es cerrada, orientable y de género g, se cumple la fórmula

$$\chi(S) = 2 - 2g. \tag{2.2}$$

3. Gráficas de Reeb de superficies trianguladas

En este capítulo se definen las gráficas de Reeb de funciones-PL en complejos simpliciales y se demuestra que para ciertas funciones-PL (de Morse) la gráfica de Reeb de una superficie triangulada nos permite obtener el primer número de Betti de la superficie.

3.1. Gráficas de Reeb. Pensemos que K es un complejo simplicial y $f\colon K^{(0)} \to \mathbb{R}$ es función inyectiva con extensión lineal $f\colon |K| \to \mathbb{R}$. En esta sección definimos la Gráfica de Reeb de la pareja (K, f).

Definición 3.1. *Supongamos que $c \in \mathbb{R}$.*

*a. A las componentes conexas de los conjuntos de nivel $f^{-1}(c)$ les llamamos los **contornos a nivel c** de $f\colon |K| \to \mathbb{R}$.*
*b. Decimos que c es **valor crítico** de $f\colon |K| \to \mathbb{R}$ si existe $\varepsilon > 0$ pequeño, tal que el número de contornos en $f^{-1}(c-\varepsilon)$ es distinto al número de contornos en $f^{-1}(c+\varepsilon)$.*

En la gráfica $graf(f) = \{(x, f(x)) \colon x \in K, f(x) \in \mathbb{R}\}$ definimos la relación de equivalencia: $(x, f(x)) \sim (y, f(y)) \iff f(x) = f(y) = c$ y x, y pertenecen al mismo contorno de $f^{-1}(c)$.

Definición 3.2. *Al cociente topológico $R_f(K) := graf(f)/\sim$ le llamamos la **Gráfica de Reeb de la pareja (K, f)**. Los vértices de $R_f(K)$, son los puntos determinados por los contornos en $f^{-1}(c)$ tales que en dicha componente conexa se cumple que el número de contornos en $f^{-1}(c-\varepsilon)$ es distinto al de $f^{-1}(c+\varepsilon)$.*

Ejemplo 3.3. *Ejemplos de gráficas de Reeb.*

(1) La gráfica con 2 vértices y una arista entre ellos es la gráfica de Reeb de cualquier función-PL sobre el tetraedro. El lector puede notar que el tetraedro relleno y el vacío tienen la misma gráfica de Reeb.
(2) La Figura 4.a) muestra la gráfica de Reeb $R_f(K)$ de la pareja (K, f) dada en Figura 2.
(3) La Figura 4.b) muestra la gráfica de Reeb de la función-PL en el toro $\mathbb{T}$ dada en la Figura 3.

$$\begin{tikzcd} {|K|} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R} \\ R_f(K) \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

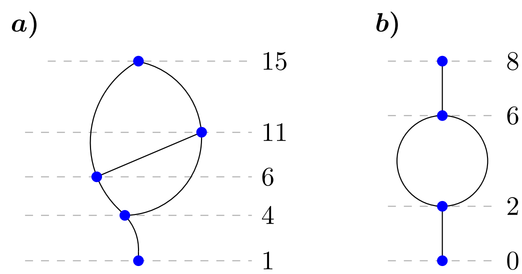


FIGURE 4. Gráficas de Reeb de los anteriores ejemplos 2) y 3). En a) se muestra la gráfica de Reeb asociada a la Figura 2. El 1-hoyo de la gráfica en b) corresponde al género del toro $\mathbb{T}$ (Figura 3).

Si $\phi : |K| \to R_f(K)$ es la proyección al cociente, entonces por la propiedad universal de los cocientes existe una única función $\hat{f} \colon R_f(K) \to \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

Algunas propiedades de la gráfica $R_f(K)$ de una pareja (K, f) son:

I. Si K es de dimensión 1, entonces $|K|$ es homeomorfo a $|R_f(K)|$. Como complejo simplicial, $R_f(K)$ es igual a K sin considerar los vértices de grado dos que no son máximos ni mínimos locales de f.
II. La proyección $\phi : |K| \to R_f(K)$ no junta componentes, por lo tanto los 0-números de Betti satisfacen $\beta_0(R_f(K)) = \beta_0(K)$.
III. La preimagen bajo ϕ de una curva cerrada que no es contraíble en $R_f(K)$, es no contraíble en $|K|$. Concluimos que $\beta_1(R_f(K)) \leq \beta_1(K)$.
IV. Para todo $j > 1$ se cumple que $\beta_j(R_f(K)) = 0$, de manera que $R_f(K)$ está determinada por el 2-esqueleto $K^{(2)}$.

3.2. Funciones de Morse-PL en superficies. Definimos las funciones de Morse lineales por pedazos en superficies trianguladas y mostramos cómo son los contornos de nivel de dichas funciones. Durante toda la sección S será una superficie triangulada y $f \colon S^{(0)} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con extensión $f : |S| \to \mathbb{R}$.

Definición 3.4. *Si x_j es un vértice de S, entonces*

*a. el **link superior de x_j**, denotado $Lk_f^+(x_j)$, es el conjunto (Figura 5.b))*

$$\{x_i \in Lk(x_j) \colon f(x_i) > f(x_j)\} \cup \{\langle x_i, x_l \rangle \in Lk(x_j) \colon f(x_i), f(x_l) > f(x_j)\}.$$

*b. el **link inferior de x_j**, denotado $Lk_f^-(x_j)$, es el conjunto(Figura 5.c))*

$$\{x_i \in Lk(x_j) \colon f(x_i) < f(x_j)\} \cup \{\langle x_i, x_l \rangle \in Lk(x_j) \colon f(x_i), f(x_l) < f(x_j)\}$$

Denotamos con $\#(Lk_f^+(x_j))$ y $\#(Lk_f^-(x_j))$ al número de componentes conexas en los links superior e inferior respectivamente.

Es claro que $Lk_f^+(x_j) \cap Lk_f^-(x_j) = \emptyset$, además, si $\#(Lk_f^+(x_j)) > 0$ y $\#(Lk_f^-(x_j)) > 0$, entonces ambos números necesariamente son iguales.

Definición 3.5. *Si $x_j \in S$ es un vértice, entonces decimos que*

a. x_j *es **máximo** de f si* $\#(Lk_f^+(x_j)) = 0$ *y* $\#(Lk_f^-(x_j)) = 1$.
b. x_j *es **mínimo** si* $\#(Lk_f^+(x_j)) = 1$ *y* $\#(Lk_f^-(x_j)) = 0$.
c. x_j *es **regular** si* $\#(Lk_f^+(x_j)) = \#(Lk_f^-(x_j)) = 1$. *En este decimos que* $f(x_j) \in \mathbb{R}$ *es **valor regular**.*
d. x_j *es **punto silla** si* $\#(Lk_f^+(x_j)) = \#(Lk_f^-(x_j)) = 2$. *En este decimos que* $f(x_j) \in \mathbb{R}$ *es **valor crítico no degenerado**.*
e. x_j *es **crítico** si* $\#(Lk_f^+(x_j)) = \#(Lk_f^-(x_j)) \geq 3$.

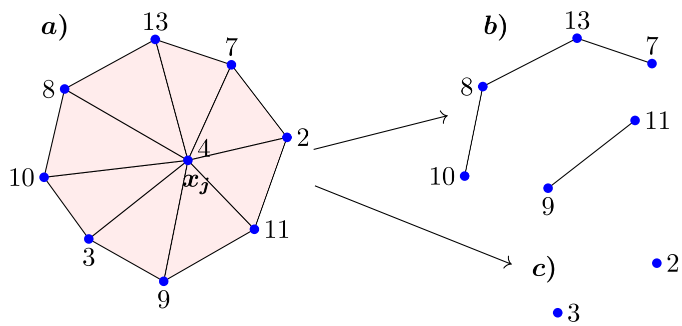


FIGURE 5. En a) se muestra la estrella $St(x_j)$ con una función-PL y el octágono en su frontera es el link $Lk(x_j)$. En b) y c) se muestran los links superior e inferior de x_j, respectivamente.

El lector familiarizado puede notar que esta definición es análoga a la de puntos críticos en una función diferenciable en superficies diferenciables.

Definición 3.6. *Decimos que $f\colon |S| \to \mathbb{R}$ es **función de Morse lineal por pedazos**, denotada **FM-PL**, si los vértices de S son puntos regulares, máximos, mínimos o puntos silla de f.*

Ejemplo 3.7. *Ejemplos de funciones de Morse lineales por pedazos.*

(1) La Figura 3 muestra una FM-PL sobre el toro $\mathbb{T}$.
(2) En la Figura 7.a) se ilustra una FM-PL sobre la Botella de Klein.
(3) La función-PL sobre el toro de la Figura 6 no es de Morse, ya que el vértice con valor 6 no cumple la Definición 3.6.

Observación 3.8. *Notar que los vértices críticos de una función-PL necesariamente tienen 6 o más vértices adyacentes (Definición 3.5.e). De manera que si S es una superficie triangulada tal que sus vértices tienen a lo más 5 vértices adyacentes, entonces toda función-PL en S es una FM-PL.*

Teorema 3.9. *Si $c \in \mathbb{R}$, S es una superficie triangulada y orientable, $f\colon S^{(0)} \to \mathbb{R}$ es inyectiva y tal que la extensión $f\colon |S| \to \mathbb{R}$ es FM-PL, entonces existen las siguientes tres posibilidades:*

(1) $f^{-1}(c) = \emptyset$.

(2) $f^{-1}(c) \subset |S|$ *es conexo y es homeomorfo a un punto, a un círculo o a un conjunto 8, es decir, dos círculos que se intersectan en un punto.*
(3) $f^{-1}(c) \subset |S|$ *es unión disjunta de círculos tal vez con un punto o un 8.*

Demostración: Supongamos que $f(|S|) = [l_0, l_1]$. Para $c \in \mathbb{R} \setminus [l_0, l_1]$ es claro que $f^{-1}(c) = \emptyset$. Si $c = l_0$ o $c = l_1$, es decir, si c es mínimo o máximo global de f, entonces $f^{-1}(c) = \{x_j\}$ es un vértice de S.

Supongamos que $c \in (l_0, l_1)$ es un valor regular y que $\sigma = \langle x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3} \rangle \in S$ es un 2-simplejo tal que $f^{-1}(c) \cap \sigma \neq \emptyset$. Por el Lema 2.11, existen dos casos:

(1) $f^{-1}(c) \cap \sigma = \{x_{j_i}\}$ es vértice de σ. Como x_{j_i} no es punto crítico de f, existen exactamente dos 2-simplejos $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ que contienen a x_{j_i} y que $f(x_{j_i})$ no es máximo ni mínimo de $f|_{\sigma_1}$ ni de $f|_{\sigma_2}$. Del Lema 2.11 se sigue que la intersección $f^{-1}(c) \cap (\sigma_1 \cup \sigma_2)$ está formada por dos segmentos que se intersectan en x_{j_i}.
(2) $f^{-1}(c) \cap \sigma$ es el segmento entre los puntos P y Q. Si P y Q no son vértices de σ, entonces el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ intersecta en segmentos a los dos 2-simplejos adyacentes a σ en las aristas a las que pertenecen P y Q. Si $P = x_{j_i}$ es vértice de σ, entonces existe un 2-simplejo $\sigma' \in St(x_{j_i})$ distinto de σ sobre el cual $f(x_{j_i})$ no es máximo ni mínimo (c es valor regular). Del Lema 2.11 concluimos que $f^{-1}(c) \cap \sigma'$ es un segmento que une a x_{j_i} con un punto en su arista opuesta.

De manera que si $c \in (l_0, l_1)$ es valor regular, entonces el conjunto $f^{-1}(c) \cap \sigma$ se extiende a segmentos comprendidos en 2-simplejos adyacentes a σ. Por la compacidad de $|S|$, esta extensión se continúa hasta regresar a σ. Esto demuestra que los contornos de $f^{-1}(c)$ son círculos.

Si $x_j \in f^{-1}(c)$ es máximo o mínimo local de f, entonces $\{x_j\}$ es un contorno de $f^{-1}(c)$. Luego, usando el caso en que c es valor regular para los otros contornos y la inyectividad de f en $S^{(0)}$, concluimos que $f^{-1}(c)$ es unión de círculos y un punto (por conexidad de $|S|$ no puede suceder que $f^{-1}(c) = \{x_j\}$).

Por último, si $c \in \mathbb{R}$ es valor crítico no degenerado y $x_j \in S$ es el único vértice silla tal que $f(x_j) = c$, entonces existen exactamente cuatro 2-simplejos que contienen a x_j y sobre los cuales $f(x_j)$ no es máximo ni mínimo. Por el Lema 2.11, el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ intersecta a estos 2-simplejos en segmentos. Continuando el conjunto de nivel de manera análoga al caso en que c es valor regular, concluimos que estos segmentos se pueden extender hasta que regresan al vértice x_j. Por lo tanto, el contorno de $f^{-1}(c)$ que contiene a x_j es homeomorfo a un 8. Usando el caso en que c es regular en el resto de los contornos, concluimos que $f^{-1}(c)$ es unión disjunta de círculos con un 8. $\square$

3.3. Gráficas de Reeb de funciones de Morse-PL. En esta sección mostraremos que la gráfica de Reeb de una FM-PL recupera el género de la superficie triangulada.

Pensaremos que S es superficie triangulada y orientable, $f\colon S^{(0)} \to \mathbb{R}$ es inyectiva y tal que $f\colon |S| \to \mathbb{R}$ es FM-PL y $R_f(S)$ es la gráfica de Reeb asociada a la pareja (S, f).

Del Teorema 3.9 se sigue que si $c \in \mathbb{R}$ es valor crítico de f y $\varepsilon > 0$ es pequeño, entonces los números de contornos en $f^{-1}(c + \varepsilon)$ y $f^{-1}(c - \varepsilon)$ difieren por 1. Dos propiedades sencillas de $R_f(S)$ son:

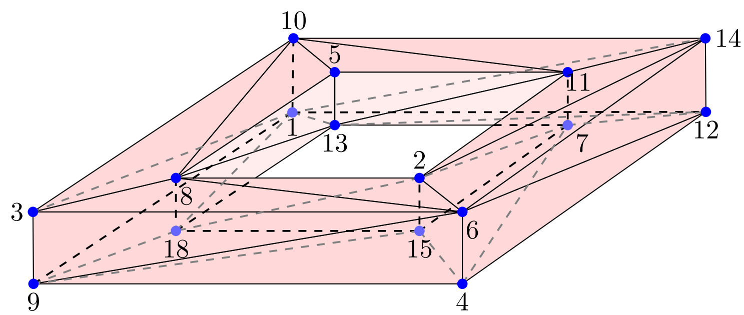


FIGURE 6. Una triangulación en $\mathbb{T}$ con una función-PL que no es de Morse ya que el vértice con valor 6 no satisface la Definición 3.6.

I. Los máximos y mínimos de f corresponden a vértices de grado 1 en $R_f(S)$, esto se debe a que en los mínimos inicia una familia de contornos y en los máximos finaliza una familia de contornos.

II. Los puntos silla de f corresponden a contornos que son 8's y determinan vértices de grado 3 en $R_f(S)$.

De estas propiedades se sigue que las gráficas de Reeb de FM-PL en superficies orientables sólo tienen vértices de grado 1 y 3. Las Figuras 7.b) y 8 muestran que la Propiedad II no se cumple para FM-PL sobre superficies no orientables y para funciones-PL que no son de Morse, respectivamente.

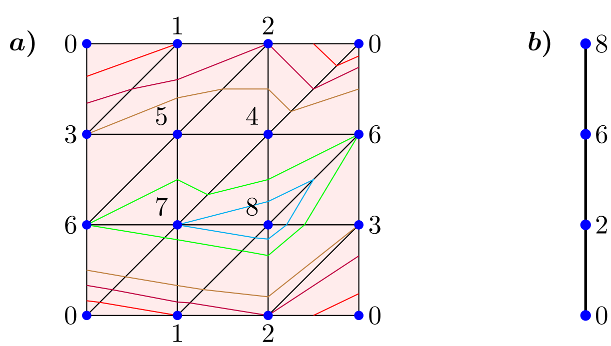


FIGURE 7. a) Triangulación de la Botella de Klein con una FM-PL y con algunos contornos de nivel marcados en color. b) Gráfica de Reeb de la función en a). Notar que los vértices con valores 2 y 6 son puntos silla pero no generan vértices de grado 3 en la gráfica.

Definición 3.10. *Si $c \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in S$, entonces decimos que σ es un **simplejo-cruzado a c** si satisface una de las siguientes condiciones:*

i. σ es un vértice y $f(\sigma) = c$.

ii. Existen vértices x_i, x_j en σ, tales que $f(x_i) < c < f(x_j)$.

De la inyectividad de $f\colon S^{(0)} \to \mathbb{R}$ se sigue que todo 2-simplejo en S es cruzado a la imagen de exactamente uno de sus vértices.

Definición 3.11. *Si $x_j \in S$ es vértice con $f(x_j) = c$ y $t_c(x_j)$ es el número de triángulos-cruzados a c en $St(x_j)$, entonces el **índice discreto de x_j** es*

$$i(x_j) = 1 - \frac{t_c(x_j)}{2}.$$

De la Definición 3.5 se sigue que los máximos y los mínimos de f tienen índice 1, los puntos regulares tienen índice 0 y los puntos silla tienen índice -1.

Lema 3.12. *Si m es el número de vértices en S que son máximos o mínimos de f y s es el número de puntos silla de f en S, entonces se satisface*

$$\chi(S) = \sum_{x_j \in S^{(0)}} i(x_j) = m - s\,.$$

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $\chi(S) = k_0(S) - \frac{1}{2}k_2(S)$ (ver Sección 2.4). Luego

$$\sum_{x_j \in S^{(0)}} i(x_j) = \sum_{x_j \in S^{(0)}} \Big(1 - \frac{t_c(x_j)}{2}\Big) = k_0(S) - \sum_{x_j \in S^{(0)}} \frac{1}{2} t_c(x_j) = \chi(S)$$

donde la ú ltima igualdad se sigue de que todo triángulo en S es cruzado a exactamente uno de sus vértices. □

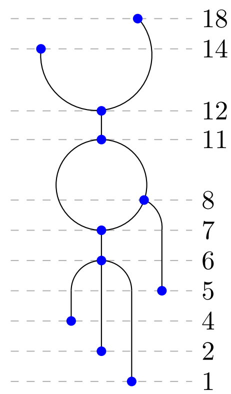


FIGURE 8. Gráfica de Reeb de la pareja $(\mathbb{T}, f)$ en la Figura 6. Notar que el vértice a altura 6 tiene grado 4, lo cual refleja el hecho de que la función-PL en este caso no es de Morse.

Teorema 3.13. *Si S es superficie de género g y $f\colon |S| \to \mathbb{R}$ es FM-PL, entonces se satisface $\beta_1(R_f(S)) = g$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos m al número de vértices de S que son máximos o mínimos de f y s al número de puntos silla de f en S.

Notar que $\beta_0(R_f(S)) = 1$ ya que $R_f(S)$ es gráfica conexa. Utilizando la ecuación 2.1 se concluye

$$\chi(R_f(S)) = k_0(R_f(S)) - k_1(R_f(S)) = \beta_0(R_f(S)) - \beta_1(R_f(S)) = 1 - \beta_1(R_f(S)).$$

Sabemos que $k_0(R_f(S)) = m + s$, además, de las Propiedades I y II de esta sección, se sigue que $k_1(R_f(S)) = \frac{1}{2}(m + 3s)$ ya que al contar los grados de los vértices contamos cada arista dos veces. De la igualdad anterior se sigue que $\beta_1(R_f(S)) = 1 - \frac{m-s}{2}$. Utilizando el Lema 3.12 y la ecuación 2.2 concluimos que

$$\beta_1(R_f(S)) = 1 - \frac{m-s}{2} = 1 - \frac{1}{2}\chi(S) = g.$$

$\square$

La Figura 8 muestra la gráfica de Reeb de la pareja $(\mathbb{T}, f)$ de la Figura 6. Notar que aunque la función-PL $f\colon |T| \to \mathbb{R}$ no es de Morse, también se cumple que el 1-número de Betti de la gráfica es igual al género de la superficie.

4. Gráficas de Reeb y persistencia

La herramienta principal del análisis topológico de datos es la homología persistente, la cual ha demostrado ser muy útil para extraer información geométrico-topológica de la forma de una nube de datos. En este capítulo presentamos una estrategia que permite reducir considerablemente los cálculos necesarios para obtener las homologías persistentes de dimensiones 0 y 1.

4.1. Idea general de la homología persistente. Comenzamos el capítulo con una explicación breve e intuitiva de cómo funciona la homología persistente para estudiar la forma de una nube de datos $N = \{x_0, x_1, \ldots, x_\ell\} \subset \mathbb{R}^n$. Para una introducción más completa y formal a la homología persistente el lector puede consultar [**8, 13, 14**]. La explicación se dará en dos pasos:

Paso 1: Aproximar a N con complejos simpliciales sobre los cuales podamos calcular los grupos de homología y los números de Betti.

Existen diferentes formas de construir complejos simpliciales que aproximen a N utilizando los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_\ell$. Aquí introducimos la filtración de Vietoris-Rips ya que es sencilla de definir y de manejar computacionalmente.

Definición 4.1. *Supongamos que $\varepsilon > 0$. El* ***complejo de Vietoris-Rips de radio ε de N****, es el complejo simplicial abstracto $\mathcal{VR}_\varepsilon(N)$ tal que sus d-simplejos son $\{x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_d}\} \subset N$ donde toda pareja x_{j_i}, x_{j_r} cumple que $\|x_{j_i} - x_{j_r}\| < \varepsilon$.*

Notar que para $\varepsilon < \min\{\|x_i - x_j\|\}$, $\mathcal{VR}_\varepsilon(N) = N$ y para $\varepsilon \geq max\{\|x_i - x_j\|\}$ se cumple que un ℓ-simplejo es realización geométrica de $\mathcal{VR}_\varepsilon(N)$. Además, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $\mathcal{VR}_{\varepsilon_1}(N)$ es subcomplejo de $\mathcal{VR}_{\varepsilon_2}(N)$ (ver Definición 2.4.c).

Como no existe un radio tal que el complejo de Vietoris-Rips asociado sea el que mejor aproxima a N, por ello se construye una sucesión de complejos de la siguiente manera:

Si $s > 0$ y $\varepsilon_0 < \min\{\|x_i - x_j\|\}$ son tales que $\min\{\|x_i - x_j\|\} < \varepsilon_0 + s$, entonces a la sucesión anidada de complejos simpliciales abstractos

$$N = \mathcal{VR}_{\varepsilon_0}(N) < \mathcal{VR}_{\varepsilon_1}(N) < \mathcal{VR}_{\varepsilon_2}(N) < \cdots < \mathcal{VR}_{\varepsilon_m}(N),$$

donde $\varepsilon_j := \varepsilon_0 + js$ y m es tal que $\varepsilon_{m-1} < \max\{\|x_i - x_j\|\} < \varepsilon_m$, se le llama **filtración de Vietoris-Rips de N** asociada a ε_0 y s. Algunos ejemplos de complejos de Vietoris-Rips de una nube de datos se muestra en la Figura 9

Paso 2: Calcular la homología de los complejos simpliciales en una filtración que aproxima a N y estudiar qué tanto persisten las clases de homología a través de dicha filtración.

Supongamos que $K_0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_m$ es una filtración con complejos simpliciales que aproxima a N (no necesariamente de Vietoris-Rips). Si $j < l$, entonces denotamos con $i_{j,l}\colon |K_j| \to |K_l|$ a la inclusión y con $i_{j,l*}\colon H_r(|K_j|) \to H_r(|K_l|)$ al correspondiente homomorfismo en homología.

Definición 4.2. *Supongamos que $0 \leq j < l \leq m$, $r \geq 0$ y $0 \neq \alpha \in H_r(|K_j|)$.*

a. *Decimos que α **nació** en K_j si α pertenece al cociente $H_r(|K_j|)/Im(i_{j-1,j*})$. Denotamos $n(\alpha)$ al índice de nacimiento de α (en este caso $n(\alpha) = j$).*
b. *Decimos que α **persiste** en K_l si $i_{j,l*}(\alpha) \in H_r(|K_l|)$ es no cero.*
c. *Decimos que α **murió** en K_{l+1} si α pertenece a $Ker(i_{l,l+1*})$. Denotamos $m(\alpha)$ al índice de fallecimiento de α (en este caso $m(\alpha) = l + 1$).*
d. *La **persistencia de α en la filtración** es el número $m(\alpha) - n(\alpha)$.*

Todas las clases (no nulas) de homología de los complejos en la filtración tienen índices de nacimiento y fallecimiento y su persistencia es al menos 1. Calculando las homologías de $K_0, K_1, \ldots, K_m$ y sus persistencias, obtenemos un panorama global de cómo se crean y se cubren hoyos cuando aumenta el índice en la filtración (cuando aumenta el radio, en caso de que la filtración sea de Vietoris-Rips). Una manera de presentar la información de las persistencias de homologías es mediante un código de barras.

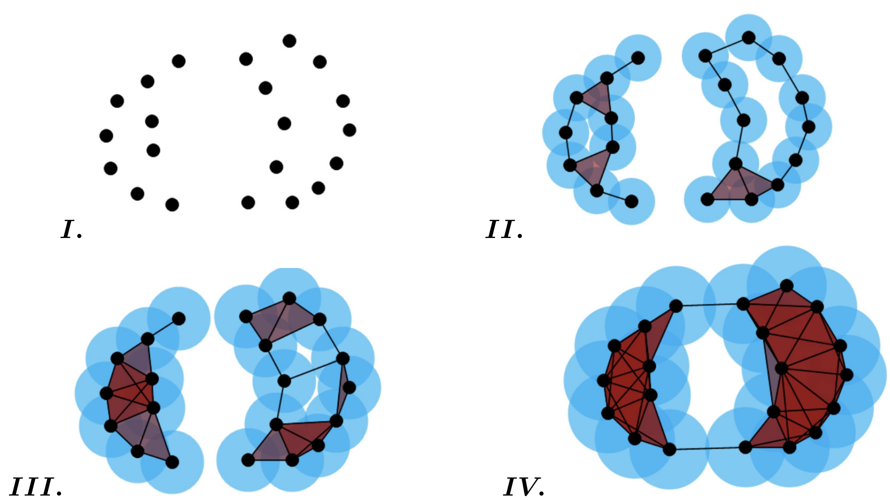


FIGURE 9. Cuatro etapas de una filtración de Vietoris-Rips de la nube de datos en I. Los complejos en II y III tienen dos componentes. El complejo en IV es conexo y tiene un 1-hoyo formado por las componentes de las etapas anteriores.

Definición 4.3. *El **código de barras de dimensión $r \geq 0$** de la filtración $K_0 < K_1 < \cdots < K_m$, se construye con un eje horizontal que representa al parámetro discreto $0 \leq j \leq m$ y un conjunto de intervalos con extremos enteros $[s, t)$ tales que $0 \leq s < t \leq m$. Los intervalos representan a las clases de homología y satisfacen:*

I. *Para $0 \leq j \leq m$, $\beta_r(|K_j|)$ es igual al número de intervalos que contienen a j, es decir, cada intervalo se corresponde con un r-hoyo básico en K_j.*

II. Si el intervalo $[s,t)$ *representa a* $\alpha \in H_r(|K_j|)$*, entonces* $n(\alpha) = s$ *y* $m(\alpha) = t$*, por lo tanto la longitud de* $[s,t)$ *es igual a la persistencia de* α*.*

Para una filtración de Vietoris-Rips, el código de barras se construye de forma análoga, sólo que en este caso el parámetro discreto j se puede sustituir por el parámetro continuo que representa al radio ε con el que se calculan los complejos en la filtración (Definición 4.1).

Comúnmente los códigos de barras se presentan por gráficas de barras horizontales. Un ejemplo se muestra en la Figura 10.

Observación 4.4. *Los códigos de barras de dimensiones 0 y 1 tienen las siguientes propiedades:*

A. Los intervalos en el código de dimensión 0 son de la forma $[0,t)$ *con* $t < m$ *y exactamente un intervalo es de la forma* $[0,m)$*. Esto se debe a que las componentes conexas en* $K_0 = N$ *son los puntos* x_i *(i.e.* $\beta_0(K_0) = \ell + 1$*) y dichas componentes mueren cuando dos o más puntos se unen. El intervalo* $[0,m)$ *representa a la componente conexa final.*

B. En el código de dimensión 1 los intervalos son de la forma $[s,t)$ *con* $0 < s < t < m$*, ya que en los complejos simpliciales* $K_0 = N$ *y* K_m *no existen 1-hoyos.*

Las clases de homología que tienen una persistencia grande representan propiedades geométricas significativas de la base de datos N. Calculando todas las homologías y sus persistencias es como el análisis topológico de datos estudia la forma de N. Procedemos a describir brevemente la información que contiene el código de barras de la Figura 10.

(1) La diferencia de longitudes entre las barras rojas antepenúltima y penúltima indica que la nube de datos está dividida en dos componentes conexas. Como se puede verificar en las Figuras 9.I, 9.II y 9.III.

(2) Las tres barras azules que aparecen cuando aún hay dos barras rojas, reflejan que las dos componentes en la nube de datos tienen 1-hoyos, ver Figura 9.II.

(3) La última barra azul que nace cuando el complejo de Vietoris-Rips ya es conexo (ya que hay sólo una barra roja), indica que las dos componentes forman entre sí un 1-hoyo. Además, dicho 1-hoyo es el bastante persistente y por lo tanto representa una propiedad topológica significativa de los datos, ver Figura 9.IV.

4.2. Gráficas de Reeb y persistencia. En esta sección mostramos que a través de las Gráficas de Reeb se puede estudiar la homología persistente a los niveles 0 y 1 de una nube de datos $N = \{y_0, y_1, \ldots, y_\ell\} \subset \mathbb{R}$. La construcción presentada aquí se basa en [**15**, Sec. 5.1].

Durante toda la sección supondremos que $f\colon N \to \mathbb{R}$ es inyectiva y $N = K_0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_m$ es filtración con complejos simpliciales que aproxima a N.

Supongamos que $0 \leq j \leq m$. Extendiendo linealmente a f sobre cada simplejo en K_j definimos una función-PL $f_j\colon |K_j| \to \mathbb{R}$. Denotamos con R_j a la gráfica de Reeb de la pareja (K_j, f_j) y con $\phi_j\colon |K_j| \to R_j$ a la proyección cociente.

Si $p \in |K_j|$, entonces $f_j(p) = (f_{j+1} \circ i_{j,j+1})(p)$, de manera que la inclusión $i_{j,j+1}\colon |K_j| \to |K_{j+1}|$ respeta la relación de equivalencia definida por f_j en $|K_j|$.

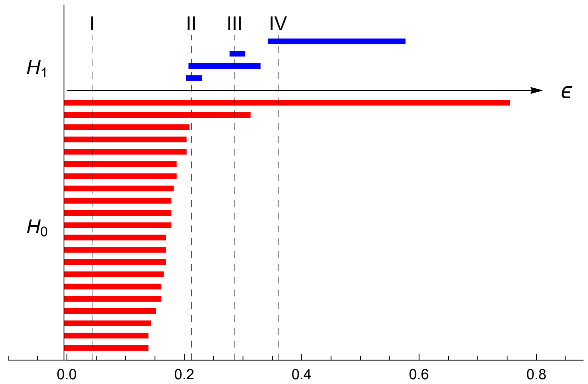


FIGURE 10. Códigos de barras de dimensión 0 (barras rojas) y 1 (barras azules) para la filtración de Vietoris-Rips de la nube de datos en la Figura 9.I. Las líneas punteadas indican los radios con los que se construyeron los complejos de Vietoris-Rips de la Figura 9.

Concluimos que existe función continua $\eta_j\colon R_j \to R_{j+1}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} |K_j| \arrow[r, "i_{j,j+1}"] \arrow[d, "\phi_j"'] & |K_{j+1}| \arrow[d, "\phi_{j+1}"] \\ R_j \arrow[r, "\eta_j"] & R_{j+1} \end{tikzcd}$$

La sucesión de funciones continuas $\{\eta_j\colon R_j \to R_{j+1}\}$ induce una sucesión de homomorfismos en los primeros grupos de homología de las gráficas R_j de la siguiente manera

$$H_1(R_0) \xrightarrow{\eta_{0*}} H_1(R_1) \xrightarrow{\eta_{1*}} H_1(R_2) \xrightarrow{\eta_{2*}} \cdots \xrightarrow{\eta_{(m-1)*}} H_1(R_m).$$

Podemos estudiar la persistencia de las homologías y de los números de Betti a niveles 0 y 1 a través de los homomorfismos η_{j_*}.

La 0-homología persistente de las gráficas de Reeb R_j es isomorfa a la 0-homología persistente de los complejos simpliciales K_j (Propiedad II en Sección 3.1). La 1-homología persistente de las R_j es isomorfa a la 1-homología persistente vertical de los complejos simpliciales K_j, la idea intuitiva es que en la homología vertical se ignoran los 1-hoyos contenidos en los contornos de los conjuntos de nivel, sólo se consideran los 1-hoyos que se forman variando los contornos de nivel. La definición precisa de homología vertical se puede consultar en [**15**, Sec. 3]. Por ejemplo, del Teorema 3.13 sabemos que si los K_j son superficies trianguladas, entonces los 1-números de Betti persistentes de las gráficas de Reeb R_j coinciden con la persistencia de los "géneros de la superficies K_j". Para toda $m \geq 2$, la m-homología persistente de las gráficas de Reeb R_j es trivial (Propiedad IV en Sección 3.1).

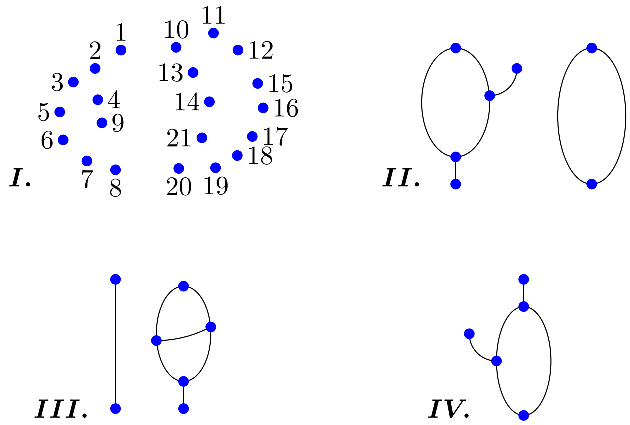


FIGURE 11. En I se ilustra una función inyectiva en la nube de datos en $\mathbb{R}^2$. En II, III y IV se muestran las gráficas de Reeb de los complejos de Vietoris-Rips correspondientes en la Figura 9 con las funciones-PL determinadas por extensión lineal de la función en I.

Al igual que para la filtración $K_0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_m$, la información de los 0- y 1-números de Betti persistentes para la sucesión de gráficas de Reeb $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_m$ se puede presentar en códigos de barras. En la Figura 11 se muestran las gráficas de Reeb de los complejos simpliciales de la Figura 9 con una función-PL en ellos. Cabe recalcar que el correspondiente código de barras para las gráficas de Reeb es idéntico al código en la Figura 9.

Finalizamos mencionando que en [**15**, Sec. 5.2] se proporciona un algoritmo computacional para calcular la 1-homología persistente de las gráficas de Reeb R_j. Dicho algoritmo corre en tiempo $O(mn_e^3)$ donde m es el tamaño del 2-esqueleto de K_j y n_e es el número de aristas de K_j.

Bibliografía

[1] J. E. Martis, R. Balasubramani. *Reckoning of emotions through recognition of posture features.* Journal of Applied Security Research, Vol. 15 (2): 230-254, 2020.

[2] N. Mohsin, S. Payandeh. *Clustering and identification of key body extremities through topological analysis of multi-sensors 3d data.* The visual computer, Vol 38: 1097-1120, 2022.

[3] T. Uda, T. Sakajo, M. Inatsu, K. Koga. *Identification of atmospheric blocking with morphological type by topological ow data analysis.* Journal of the Meteorological Society of Japan, Ser. II, Vol 99 (5): 1169-1183, 2021.

[4] P. Kanongchaiyos, Y. Shinagawa. *Articulated Reeb graphs for interactive skeleton animation.* Multimedia Modeling, 451-467, 2000.

[5] W. Wang, Y. You, W. Liu, C. Lu. *Point cloud classification with deep normalized Reeb graph convolution.* Image and Vision Computing, Vol 106: 104092, 2021.

[6] M. Hajij, P. Rosen. *An efficient data retrieval parallel Reeb graph algorithm.* Algorithms, Vol. 13 (10), 2020.

[7] R. Forman. *Morse Theory for cell complexes.* Advances in Mathematics, Vol. 134 (1), 90-145, 1998.

[8] Z. Virk. *Introduction to persistent homology.* ZaloÅ¾ba UL FRI, 2022.

[9] J. C. Gómez-Larrañaga, J. A. M. Cortez. *Una aplicación de la topología al análisis de datos.* Topología y sus aplicaciones 5, BUAP, 2017.
[10] A. González. *Introducción a la teoría de Morse discreta.* Topología y sus aplicaciones 7, BUAP, 2019.
[11] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge 2002.
[12] L. C. Kinsey. *Topology of Surfaces.* Undergraduate Text in Mathematics, Springer New York, 1997.
[13] H. Edelsbrunner, J. Harer. *Computational topology: an introduction.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
[14] F. Chazal, B. Michel. *An introduction to topological data analysis: Fundamental and practical aspects for data scientists.* Frontiers in Artificial Intelligence, Vol. 4, 2021.
[15] T. K. Dey, Y. Wang. *Reeb graphs: Approximation and persistence.* Discrete & Computational Geometry, Vol. 49: 46-73, 2011.

Correos electrónicos:
ahtziri.lemus@umich.mx(Juan Ahtziri González Lemus)
hernandezbrayan067@gmail.com (Brayan Hernández Calvillo)
marmax118@gmail.com (María Maximov Cortés)

CAPÍTULO 3

Un estudio sobre algunas familias de Furstenberg

Daniel Enrique Osorio-Castillo y Alicia Santiago-Santos
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México

1. Introducción

Un sistema dinámico discreto será una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico compacto, conexo con más de un elemento y $f : X \to X$ es una función continua y suprayectiva. Para $k \in \mathbb{N}$, denotemos por f^k a la composición de f consigo misma k veces. Sea $x \in X$. Consideremos la siguiente sucesión de puntos en X: $x, \quad f(x), \quad f^2(x), \quad f^3(x), \ldots$, al conjunto formado por estos puntos, se le llama la órbita del punto x. El objetivo principal de los sistemas dinámicos discretos es estudiar el comportamiento de estas sucesiones de puntos. Se sabe que los conceptos de sistema mezclante, débilmente mezclante y transitivo son fundamentales para investigar el comportamiento de las órbitas y el caos de los sistemas dinámicos. Por eso se da el interés de muchos investigadores en relación con estos conceptos. En [**2**] se estudió algunas propiedades sobre los sistemas dinámicos y se realizó una revisión de funciones que poseen algún tipo de periodicidad, estudiaron las funciones puntualmente periódica, a lo más periódica, puntualmente a lo más periódica, entre otras, con la finalidad de difundir estos temas de una manera más accesible. Más tarde, continuando con el trabajo de difundir esta área, en [**19**] se analizó sistemas dinámicos que comparten algunas propiedades con los sistemas mezclantes, fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, etc. Finalmente, en [**15**] se estudió un tipo de sistemas dinámicos que se introdujeron en el 2016, a saber los sistemas compacto transitivos. Otras publicaciones y libros donde analizan propiedades sobre sistemas dinámicos son las siguientes [**5, 6, 12, 13, 18, 21**].

Por otro lado, es bien sabido que un sistema dinámico (X, f) induce un sistema dinámico $(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(f))$, donde $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X, considerado con la topología de Vietoris, y $\mathcal{H}(f)$ es la función inducida por f a $\mathcal{H}(X)$. En este contexto, un problema natural es el siguiente. Dado un sistema dinámico (X, f) y los sistemas dinámicos inducidos $(\mathcal{H}_1(X), \mathcal{H}_1(f))$ y $(\mathcal{H}_2(X), \mathcal{H}_2(f))$ estudiar que relación existe entre los sistemas dinámicos antes mencionados. En [**3**] analizaron el concepto de transitividad en el sistema (X, f) y en algunos sistemas dinámicos inducidos. Con respecto a este tema otras publicaciones son las siguientes [**23, 24**].

Por otra parte, dado un conjunto X, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X, es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}$. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ es una *familia de Furstenberg*, si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ implica que $F_2 \in \mathcal{F}$. Usar las familias de Furstenberg para estudiar sistemas dinámicos se remontan a 1955 con los estudios de Gottschalk y Hedlund [**10**]. En [**16**] utilizaron estas familias para analizar puntos transitivamente. En [**15**] se dió el concepto de familia de Furstenberg para definir sistemas compacto transitivos pero como no es la finalidad del trabajo no se estudia a profundidad este tema.

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio a fondo sobre algunas familias de Furstenberg en sistemas dinámicos. Además, mostrar que en la clase de los sistemas débilmente mezclantes estas familias cumplen una propiedad adicional. Cabe mencionar que este trabajo está inspirado en la sección 2.2 de [**11**]. Además, presentamos este trabajo para los lectores no expertos en esta área con la finalidad de que este trabajo sea útil y despierte el interés en nuestros lectores para realizar investigaciones respecto al tema. Por tal motivo, la estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección 2 iniciamos mencionando una serie de notaciones y conceptos que usaremos a lo largo de este escrito, hacemos un repaso rápido de los conceptos importantes en sistemas dinámicos, para posteriormente, en la Sección 3, introducirnos en el concepto de familias de Furstenberg, y de algunas familias de Furstenberg en particular. Finalmente, en la Sección 4, mostramos algunos resultados relacionados con ciertas familias de Furstenberg en la clase de sistemas débilmente mezclantes.

2. Introducción a la dinámica

Como es usual denotamos por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros no negativos, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales, respectivamente. Dado un conjunto X y $A \subseteq X$, denotamos por $|A|$ a la cardinalidad de un conjunto A. A continuación definimos algunos subconjuntos de los enteros no negativos que cumplen cierta propiedad, y que sirven para definir clases de sistemas dinámicos.

Definición 2.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Se dice que el conjunto A es:*

(1) Cofinito si $\mathbb{Z}_+ \setminus A$ es finito.
(2) Grueso si para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subseteq A$.
(3) Sindético si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap A \neq \emptyset$.
(4) Gruesamente sindético si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, n\} \subseteq A\}$ es sindético.

Una prueba del siguiente resultado puede encontrarlo en [**13**, Proposición 3.1.9, pág. 47].

Proposición 2.2. *Sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $A \subseteq B$. Si A es grueso, entonces B es grueso.*

Sea X un espacio métrico con métrica d. Todos los sistemas dinámicos con los que estaremos trabajando en este capítulo son definidos sobre un espacio métrico, por tal motivo analizaremos algunos conceptos y estableceremos algo más de notación. Si $f \colon X \to X$ es una función, entonces: f^0 denotará la función identidad sobre X, id_X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f^n es f compuesta con f^{n-1}, es decir:

$$f^n = f \circ f^{n-1}.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq X$, la preimagen de A bajo f^n se indica por $f^{-n}(A)$ y si $x \in X$, la preimagen de $\{x\}$ bajo f la representamos por $f^{-1}(x)$. Si $A \subseteq X$ no vacío y acotado, se define el *diámetro de* A, denotado por diám(A), como:

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Además:

(1) una **cubierta** de X es una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X tales que $\bigcup_{s\in S} A_s \subseteq X$.
(2) una **cubierta es abierta (o cerrada)** de X si todos los elementos de la cubierta son abiertos (o cerrados).

A continuación mostramos algunos ejemplos de cubiertas de un espacio métrico específico.

Ejemplo 2.3. [**7**, pág. 32] *Sea $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana. La colección de intervalos abiertos $\{(-n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una cubierta abierta para $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.4. [**7**, pág. 108] *Sean (X,d) un espacio métrico. La colección $\mathcal{C} = \{B(x,r_x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X.*

Antes de continuar recordemos que dado un conjunto X y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{A}$ tiene la **Propiedad de la Intersección Finita (PIF)** si la intersección de todos los conjuntos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{A}$ es diferente del vacío. Además, recordemos que un espacio métrico X es un **espacio compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

El siguiente resultado, Proposición 2.5, nos proporciona una caracterización de la compacidad en términos del concepto de familia con la PIF.

Proposición 2.5. *Un espacio métrico X es compacto si y sólo si para cada familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados en X con la PIF, la intersección de todos los elementos de la familia es no vacía. Es decir, $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X con la PIF cuya intersección es vacía. Sea $\mathcal{A} = \{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$. Como

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} X\backslash F,$$

por las leyes de De Morgan se tiene que

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} X\backslash F = X \backslash \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F.$$

Dado que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, se tiene que, $\bigcup \mathcal{A} = X$. De aquí se obtiene que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe un conjunto finito $\{F_1, ..., F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que:

$$X = (X\backslash F_1) \cup \cdots \cup (X\backslash F_n) = \bigcup_{i=1}^{n} X\backslash F_i = X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} F_i.$$

Lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{F}$ tiene la PIF.

Inversamente, sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X y denotemos por $\mathcal{F} = \{X \backslash U : U \in \mathcal{A}\}$. Luego,

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{U \in \mathcal{A}} X \backslash U = X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U = \emptyset.$$

Así, $\mathcal{F}$ no tiene la PIF. Por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ y elementos $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ tales que $(X \backslash U_1) \cap \cdots \cap (X \backslash U_n) = \emptyset$. Es decir,

$$X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \emptyset.$$

Esto implica que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. En consecuencia, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, X es compacto. $\square$

Por otra parte, otro de los conceptos importantes en este trabajo es el siguiente.

Definición 2.6. *Un sistema dinámico discreto es una pareja (X, f), donde X es un espacio métrico, compacto y $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva.*

A continuación damos algunos ejemplos de sistemas dinámicos, esperando que estos ayuden a aclarar la definición antes mencionada.

Ejemplo 2.7. *Consideremos el intervalo cerrado $[0,1]$ con la métrica del subespacio de la recta real y $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{2}; \\ \\ 2(1-x), & si \quad \dfrac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Como $[0,1]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y f está bien definida, es continua y suprayectiva, se obtiene que $([0,1], f)$ es un sistema dinámico discreto. A la función f se le conoce como la ***función tienda****.*

La Figura 1 muestra la gráfica de la función tienda f.

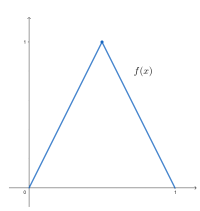


Figure 1. Gráfica de la función f.

Ejemplo 2.8. *Consideremos el intervalo cerrado* $[0,1]$ *con la métrica del subespacio de la recta real y* $g:[0,1]\to[0,1]$ *definida por*

$$g(x)=\begin{cases} 2x, & si \quad 0\le x\le \dfrac{1}{4}; \\[2ex] x+\dfrac{1}{4}, & si \quad \dfrac{1}{4}< x\le \dfrac{1}{2}; \\[2ex] \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & si \quad \dfrac{1}{2}< x\le 1. \end{cases}$$

Como $[0,1]$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *y* g *está bien definida, es continua y suprayectiva, se obtiene que* $([0,1],g)$ *es un sistema dinámico discreto.*

La Figura 1 muestra el comportamiento de la función g.

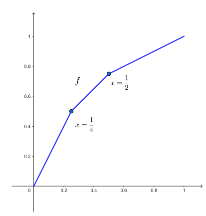


FIGURE 2. Gráfica de la función g.

Definición 2.9. *Sean* (X,f) *un sistema dinámico y* $x\in X$. *Se define la* ***órbita*** *de* x *bajo* f*, denotada por* $Orb_f(x)$*, como el conjunto:*

$$Orb_f(x)=\{f^n(x):n\in\mathbb{Z}_+\}=\{x,f(x),f^2(x),f^3(x),...\}.$$

Se observa que la órbita del punto x es una sucesión en el espacio X. La interpretación que se le da a la sucesión, $Orb_f(x)$, es la siguiente: en el tiempo $t=0$ el objeto se encuentra en la posición x_0; en el tiempo $t=1$, el objeto habrá cambiado a la posición $f(x_0)$; en el tiempo $t=2$, el objeto habrá cambiado a la posición $f^2(x_0)=f(f(x_0))$ y así sucesivamente. Se sabe que el objeto principal de estudio de los sistemas dinámicos son las órbitas de los puntos, ya que son estas las que nos dan la información referente a las iteraciones de una función a través del tiempo.

La Figura 3 muestra un ejemplo del comportamiento de la órbita de x_0.

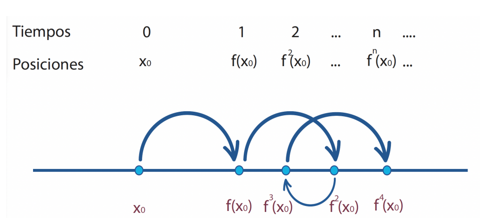


FIGURE 3. Muestra los primeros elementos de la órbita de x_0.

Ejemplo 2.10. *Consideremos la función definida en el Ejemplo 2.8. Calculemos la órbita de algunos puntos de* X*. Primero consideremos el punto* $x = \frac{1}{4}$ *se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
Orb_f\left(\frac{1}{4}\right) &= \left\{\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right), f^2\left(\frac{1}{4}\right), f^3\left(\frac{1}{4}\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right), f\left(f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{4}, 2\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{\frac{3}{4}}{2}+\frac{1}{2}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots\right\}.
\end{aligned}
$$

De manera similar podemos calcular la órbita del punto $x = \frac{1}{2}$ *y concluir que:*

$$
Orb_f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right), f^2\left(\frac{1}{2}\right), f^3\left(\frac{1}{2}\right), \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots\right\}.
$$

Otras nociones básicas en teoría de sistemas dinámicos son las siguientes.

Definición 2.11. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Un subconjunto* A *de* X *es* ***f-invariante*** *si* $f(A) = A$*, y* ***positivamente f-invariante*** *si* $f(A) \subseteq A$*.*

Definición 2.12. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* $x \in X$*. Se dice que:*

- x *es* ***un punto fijo*** *de* X *si* $f(x) = x$*.*
- $y \in X$ *es un* ***punto ω-límite de*** x *bajo* f*, si para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y para cualquier abierto* U *en* X *tal que* $y \in U$*, existe* $n \geq k$ *tal que* $f^n(x) \in U$*. Al conjunto de todos los puntos* ω*-límite de* x *bajo* f*, lo denotamos por* $\omega_f(x)$ *y lo llamamos el* ***conjunto ω-límite de*** x*.*

El conjunto ω-límite de un punto nos indica hacia dónde se dirige la órbita de dicho punto. Dicho de otra forma, $\omega_f(x)$ es el conjunto de todos los puntos límites de las subsucesiones convergentes de la órbita de x. De la definición de punto ω-límite se sigue que dado un sistema dinámico (X, f) y $x \in X$, si x es un punto fijo de X, entonces se tiene que $\omega_f(x) = \{x_0\}$.

La Figura 4 ilustra geométricamente el comportamiento de las iteraciones de la función f cuando existe un punto ω-límite de x.

A continuación calculamos el conjunto $\omega_f(x)$ de algunos puntos, esperando que esto ayude a aclarar la definición.

Ejemplo 2.13. *Sea* X *un espacio métrico compacto y consideremos la función identidad* $id\colon X \to X$*. Se tiene que,* $\omega_f(x) = \{x\}$*, para cada* $x \in X$*.*

Ejemplo 2.14. *Consideremos la función definida en el Ejemplo 2.7. Observe que los puntos fijos de* f *son* 0 *y* $\frac{2}{3}$ *ya que son los únicos puntos donde interseca la función* f *a la función identidad. Luego* $\omega_f(0) = \{0\}$*,* $\omega_f\left(\frac{2}{3}\right) = \left\{\frac{2}{3}\right\}$*.*

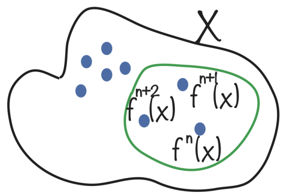


FIGURE 4. Se observa que a partir de la n-ésima iteración, todos los puntos caen dentro de U.

Ahora determinemos el conjunto $\omega_f(x)$, para $x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}\right\}$. Se tiene que

$$Orb_f\left(\frac{2}{5}\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \quad Orb_f\left(\frac{2}{7}\right) = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\} \quad y \quad Orb_f\left(\frac{2}{9}\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}.$$

Esto implica que $\omega_f\left(\frac{2}{5}\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, $\omega_f\left(\frac{2}{7}\right) = \left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ y $\omega_f\left(\frac{2}{9}\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$.

Actualmente encontramos una gran variedad de sistemas dinámicos discretos definidos y clasificados dependiendo de las propiedades que posea el espacio base o bien la función. A continuación mencionamos algunos tipos de sistemas dinámicos que usaremos en este trabajo.

Definición 2.15. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que (X, f) es:*

(1) ***Débilmente mezclante*** *si para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos U_1, U_2, V_1 y V_2 de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$.*
(2) ***Transitivo*** *si para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*
(3) ***Minimal*** *si no existe un subconjunto propio A de X el cual es no vacío, cerrado y $f(A) = A$. Equivalentemente, si la órbita de todo punto de X es denso en X.*

Para mayor información de los sistemas presentados en la Definición 2.15 vea [**12, 13, 18**]. En la Figura 5 se muestra la relación entre las clases de funciones mencionadas en la Definición 2.15. Para consultar las pruebas de dichas afirmaciones puede revisar [**17**].

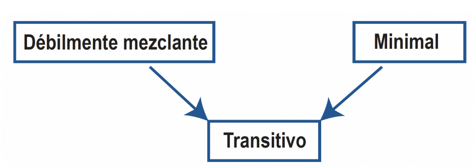


FIGURE 5. Diagrama que muestra la relación entre los diferentes tipos de sistemas dinámicos.

Por otra parte, existen conjuntos importantes en sistemas dinámicos discretos que se consideran para poder plantear algunas clases de sistemas. A continuación, mencionamos algunos.

Definición 2.16. *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es un espacio con métrica d. Sean $x \in X$, U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$. Se definen los siguientes conjuntos:*

(1) $N_f(x,V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(x) \in V\}$.
(2) $N_f(U,V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}$.
(3) $N_f(U,\delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ :$ *existen* $x, y \in U$ *tales que* $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\}$.

En el Ejemplo 2.17 mostramos como se calculan los conjuntos dados en la Definición 2.16 sobre un sistema dinámico, esperando que estos ayuden a aclarar la Definición 2.16. En [**14**] puede encontrar un estudio detallado de los conceptos presentados en la Definición 2.16.

Ejemplo 2.17. *Consideremos el intervalo cerrado* $[0,1]$ *con la métrica del subespacio de la recta real y* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definida por* $f(x) = x^2$, *para cada* $x \in [0,1]$. *Sean* $U = (\frac{1}{4}, 1)$, $V = (0,1)$ *y* $x = \frac{1}{3}$. *Se tiene que:*

(1) $N_f(\frac{1}{3}, U) = \{0\}$.
(2) $N_f(\frac{1}{3}, V) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
(3) $N_f(U, V) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Terminamos esta sección anotando dos propiedades que cumplen estos conjuntos en un sistema dinámico. El Lema 2.18 nos servirá en la prueba de la Proposición 3.30.

Lema 2.18. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico,* $x \in X$ *y* U *un subconjunto abierto no vacío de* X. *Se tiene que* $N_f(x, U) \subseteq N_f(f(x), f(U))$.

Demostración. Sea $n \in N_f(x, U)$. Luego $f^n(x) \in U$. Esto implica que $f(f^n(x)) \in f(U)$. En consecuencia $f^{1+n}(x) \in f(U)$. Como $f^{1+n}(x) = f^{n+1}(x)$ se tiene que, $f^{n+1}(x) \in f(U)$. Así $n \in N_f(f(x), f(U))$. Por lo tanto $N_f(x, U) \subseteq N_f(f(x), f(U))$. □

Lema 2.19. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Si* (X, f) *es minimal, entonces para cada subconjunto abierto no vacío* U *y cada punto* $x \in U$, *se tiene que el conjunto* $N_f(x, U)$ *es sindético.*

Demostración. Supongamos que (X, f) es mínimal y sean U subconjunto abierto y $x \in U$. Sea $Y = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} f^{-l}(U)$. Afirmamos que $Y = X$. Supongamos que existe $y \in X \setminus Y$, entonces $f^n(y) \notin U$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la órbita de y no es densa, lo cual contradice la minimalidad del sistema. Observe que $\{f^{-l}(U) \colon l \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{l=1}^{M} f^{-l}(U)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $y = f^m(x)$. Sea $l \in \{1, \ldots, M\}$ tal que $y \in f^{-l}(U)$ se sigue que $f^l(y) \in U$. Esto implica que $f^l(f^m(x)) \in U$. En consecuencia $f^{l+m}(x) \in U$. Por lo tanto $l + m \in N_f(x, U)$. □

En la siguiente sección presentamos varias familias importantes que se ocupan en el estudio de los sistemas dinámicos. Hacemos también un pequeño resumen de algunos de los resultados que actualmente se conocen referente a familias y algunas clases de sistemas dinámicos.

3. Algunas familias importantes

3.1. Familias de Furstenberg. Se sabe que la idea de aplicar familias de Furstenberg para estudiar sistemas dinámicos se remonta a 1955 con los estudios de Gottschalk y Hedlund [**10**]. Posteriormente, en 1981, fue trabajado por Furstenberg en [**8**], y años más tarde por Akin [**1**]. Utilizando la teoría de las familias de Furstenberg estudiaremos los sistemas débilmente mezclantes y su relación con ciertas familias. Por tal motivo, empezaremos esta sección recordando algunos conceptos básicos sobre las familias de Furstenberg. En esta sección es importante recordar que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) = \{A \colon A \subseteq \mathbb{Z}_+\}$.

Definición 3.1. *Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ es una* ***familia de Furstenberg****, si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ implica que $F_2 \in \mathcal{F}$.*

Para ilustrar mejor esta definición, mostramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tal que $A \neq \emptyset$. La familia*

$$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : A \subseteq F\}$$

es una familia de Furstenberg. En efecto, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ de tal manera que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}_A$. Luego $A \subseteq F_1 \subseteq F_2$. Así, $A \subseteq F_2$. Por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{F}_A$.

Otro ejemplo de familia de Furstenberg es el siguiente:

Ejemplo 3.3. *Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : A \text{ es infinito}\}$. Se tiene que $\mathcal{B}$ es una familia de Furstenberg. En efecto, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{B}$. Como F_1 es un conjunto infinito y $F_1 \subseteq F_2$, se obtiene que F_2 es un conjunto infinito. Por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{B}$.*

Dada una familia de Furstenberg podemos definir su dual de la siguiente manera.

Definición 3.4. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. La* ***familia dual*** *de $\mathcal{F}$, denotada por $k\mathcal{F}$, se define como:*

$$k\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : \mathbb{Z}_+ \setminus F \notin \mathcal{F}\} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F^{'} \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F^{'} \in \mathcal{F}\}.$$

Proposición 3.5. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. La familia dual de $\mathcal{F}$ es de Furstenberg.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $A_1 \subseteq A_2$ y $A_1 \in k\mathcal{F}$. Sea $F \in \mathcal{F}$, notemos $A_1 \cap F \subseteq A_2 \cap F$ y puesto que $A_1 \in k\mathcal{F}$ se tiene que $A_1 \cap F \neq \emptyset$. Luego, $A_2 \cap F \neq \emptyset$. Con esto $A_2 \in k\mathcal{F}$. Por lo tanto, la familia $k\mathcal{F}$ es de Furstenberg. □

Como una consecuencia de la Proposición 3.5 y del Ejemplo 3.2 se obtienen otro ejemplo de familia de Furstenberg.

Ejemplo 3.6. *La familia $k\mathcal{F}_A$ es de Furstenberg.*

Como una consecuencia de la Proposición 3.5 y del Ejemplo 3.3 se obtienen un ejemplo más de familia de Furstenberg.

Ejemplo 3.7. *La familia $k\mathcal{B}$ es de Furstenberg.*

Observación 3.8. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia Furstenberg. De la Definición 3.4 se tiene que: Si $A \in k\mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $A \cap F' \neq \emptyset$, para cada $F' \in \mathcal{F}$. Esto implica que $A \in k\mathcal{F}$ si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathbb{Z}_+ \setminus A \notin \mathcal{F}$.*

Observación 3.9. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, probar que $\mathcal{F}$ es una familia Furstenberg es equivalente a ver que si $F_1 \subseteq F_2$ y $F_2 \notin \mathcal{F}$, entonces $F_1 \notin \mathcal{F}$.*

Definición 3.10. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. Decimos que:*

(1) $\mathcal{F}$ ***es una familia propia*** *si es un subconjunto propio de* $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$.
(2) $\mathcal{F}$ *es un* ***filtro*** *si es una familia propia cerrada bajo intersección. Esto es, si* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, *entonces* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
(3) $\mathcal{F}$ *es un* ***filtro libre*** *si* $\mathcal{F}$ *es un filtro y la intersección de todos sus elementos es vacía.*
(4) $\mathcal{F}$ *es una* ***familia libre*** *si la intersección de todos los elementos de* $\mathcal{F}$ *es vacía.*

Proposición 3.11. *Sea* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ *una familia de Furstenberg. Se tiene que* $\mathcal{F}$ *es una familia propia si y sólo si* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{F}$ es propia y que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Sea $F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Dado que $\emptyset \subseteq F$ y $\mathcal{F}$ es una familia de Furstenberg se obtiene que $F \in \mathcal{F}$. Esto implica que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ es una familia propia.

Inversamente, supongamos que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Dado que $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$, se concluye que $\mathcal{F}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es una familia propia. □

Proposición 3.12. *Sea* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ *una familia de Furstenberg. Si* $\mathcal{F}$ *es una familia propia, entonces* $\mathbb{Z}_+ \in \mathcal{F}$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{F}$ es propia y sea $A \in \mathcal{F}$. Luego, $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Dado que $\mathcal{F}$ es una familia de Furstenberg se obtiene que $\mathbb{Z}_+ \in \mathcal{F}$. □

Sean $\mathcal{F}_{thick} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es grueso}\}$ y $\mathcal{F}_{syn} = k\mathcal{F}_{thick}$.

Observación 3.13. *De la Proposición 2.2 se obtiene que* $\mathcal{F}_{thick}$ *es una familia de Furstenberg.*

Observación 3.14. *De la Proposición 3.5 se obtiene que* $\mathcal{F}_{syn}$ *es una familia de Furstenberg.*

Proposición 3.15. *Se tiene que* $\mathcal{F}_{syn} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es sindético}\}$.

Demostración: Sea $F \in \mathcal{F}_{syn}$. Luego $F \in k\mathcal{F}_{thick}$. Esto implica que $\mathbb{Z}_+ \setminus F \notin \mathcal{F}_{thick}$. En consecuencia, $\mathbb{Z}_+ \setminus F$ no es grueso. Existe $p \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \nsubseteq \mathbb{Z}_+ \setminus F$. Así, existe $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ tal que $n + i \in \{n, n+1, \ldots, n+p\}$ y $n + i \notin \mathbb{Z}_+ \setminus F$. Esto implica que $n + i \in F \cap \{n, n+1, \ldots, n+p\}$. Así, $F \cap \{n, n+1, \ldots, n+p\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, F es sindético.

Ahora, sea $F \in \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es sindético}\}$. Demostraremos que $F \in k\mathcal{F}_{thick}$. Como F es sindético existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{l, l+1, \ldots, l+m\} \cap F \neq \emptyset$. Esto implica que existe $p \in \{l, l+1, \ldots, l+m\}$ tal que $p \in F$. En consecuencia, $p \in \{l, l+1, \ldots, l+m\}$ y $p \notin \mathbb{Z}_+ \setminus F$. Por lo tanto, $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \nsubseteq \mathbb{Z}_+ \setminus F$. Así $\mathbb{Z}_+ \setminus F \notin \mathcal{F}_{thick}$. Por lo tanto, $F \in k\mathcal{F}_{thick}$. □

Otra noción muy útil en sistemas dinámicos es la de subconjuntos débilmente mezclantes. Este concepto se introdujo en [**4**]. Posteriormente se analizó dicho concepto en [**21**] y [**22**]. La noción de subconjuntos débilmente mezclante puede ser recalificado como una versión local de débilmente mezclante. Antes de presentarla, recordemos que dados U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X,

$$N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap f^n(V) \neq \emptyset\}.$$

Definición 3.16. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que $A \subseteq X$ es un subconjunto débilmente mezclante si para cada $k \geq 2$ y cualesquiera conjuntos abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_k$, $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de X con $U_i \cap A \neq \emptyset$, $V_i \cap A \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $\cap_{i=1}^{k} N_f(U_i \cap A, V_i) \neq \emptyset$.*

En la Definición 3.17 presentamos otras familias que se ocupan en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

Definición 3.17. *Sean (X, f) un sistema dinámico y A un subconjunto débilmente mezclante. Se definen las familias:*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f &= \{B \subseteq \mathbb{Z}_+ : \text{ existen } U, V \subseteq X \text{ abiertos no vacíos, tales que } \\ &\quad\; N_f(U, V) \subseteq B\}. \\ \mathcal{N}_f(A) &= \{B \subseteq \mathbb{Z}_+ : \text{ existen abiertos no vacíos } U, V \subseteq X \text{ que intersectan a } \\ &\quad\; A, \text{ tales que } N_f(U \cap A, V) \subseteq B\}. \end{aligned}$$

De la Definición 3.17 se obtiene la siguiente observación.

Observación 3.18. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X, se tiene que $N_f(U, V) \in \mathcal{N}_f$. De donde, $N_f \neq \emptyset$.*

Resulta que la familia $\mathcal{N}_f$ presentada en la Definición 3.17 es una familia de Furstenberg, esto lo mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.19. *Consideremos la familia $\mathcal{N}_f$ dada en la Definición 3.17. Luego, la familia $\mathcal{N}_f$ es de Furstenberg. En efecto, notemos que $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Ahora, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{N}_f$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{N}_f$. Luego, existen U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X tales que $N_f(U, V) \subseteq F_1$. Como $F_1 \subseteq F_2$, $N_f(U, V) \subseteq F_2$. Por lo tanto, $F_2 \in \mathcal{N}_f$.*

Para continuar con nuestro objetivo, presentemos la siguiente definición, la cual nos permite definir propiedades útiles que usaremos posteriormente.

Definición 3.20. *Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos familias de Furstenberg. Definimos la familia $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{F_1 \cap F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}$ y la llamamos la **interacción** de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$.*

Un ejemplo de la Definición 3.20 es el que se muestra a continuación.

Ejemplo 3.21. *Consideremos las familias $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{N}_f$ dadas en el Ejemplo 3.2 y la Definición 3.17, respectivamente. Por el Ejemplo 3.2 y Ejemplo 3.19 sabemos que $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{N}_f$ son familias de Furstenberg. Luego, la interacción de $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{N}_f$ se define como:*

$$\mathcal{F}_A \cdot \mathcal{N}_f = \{F_1 \cap F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_A, F_2 \in \mathcal{N}_f\}.$$

En la Proposición 3.22 se prueba que dadas dos familias de Furstenberg, la interacción de las familias es una familia de Furstenberg.

Proposición 3.22. *Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos familias de Furstenberg. Se tiene que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia de Furstenberg.*

Demostración: Note que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Luego, existen $A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $A_2 \in \mathcal{F}_2$ tales que $F_1 = A_1 \cap A_2$. Esto implica que $A_1 \cap A_2 \subseteq F_2$. Observemos que $F_2 = (A_1 \cup F_2) \cap (A_2 \cup F_2)$. Dado que $A_1 \subseteq A_1 \cup F_2$, $A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_1$ es una familia de Furstenberg, concluimos que $A_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_1$. De manera similar podemos concluir que $A_2 \cup F_2 \in \mathcal{F}_2$. En consecuencia, $F_2 \in \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia de Furstenberg. $\square$

Observación 3.23. *Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos familias de Furstenberg. De la Definición 3.20 obtenemos que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$.*

Proposición 3.24. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos familias de Furstenberg. Se tiene que $\mathcal{F}$ es un filtro si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro. Demostraremos que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$. Sea $F \in \mathcal{F}$. Como $F \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}$. Por la Observación 3.23 concluimos que $F \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$. Ahora, sea $A \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$. Existen $F_1 \in \mathcal{F}$ y $F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A = F_1 \cap F_2$. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro, se obtiene que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. En consecuencia $A \in \mathcal{F}$. Por todo lo anterior, concluimos que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$. Demostraremos que $\mathcal{F}$ es un filtro. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Luego, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}$. Esto implica que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro. $\square$

Proposición 3.25. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos familias de Furstenberg. Se tiene que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia propia si y sólo si $\mathcal{F}_2 \subseteq k\mathcal{F}_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia propia. Demostraremos que $\mathcal{F}_2 \subseteq k\mathcal{F}_1$. Sean $F \in \mathcal{F}_2$ y $F' \in \mathcal{F}_1$. Observemos que $F' \cap F \in \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Por la Proposición 3.11 concluimos que $F' \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto $F \in k\mathcal{F}_1$.

Inversamente, supongamos que $\mathcal{F}_2 \subseteq k\mathcal{F}_1$. Demostraremos que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia propia. Por la Proposición 3.22 sabemos que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia de Furstenberg. En lo que resta, veamos que $\emptyset \notin \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Sea $F \in \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Existen $A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $A_2 \in \mathcal{F}_2$ tales que $F = A_1 \cap A_2$. Por otro lado, como $\mathcal{F}_2 \subseteq k\mathcal{F}_1$ concluimos que $A_2 \in k\mathcal{F}_1$. Esto implica que $F \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset \notin \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$. Finalmente, de la Proposición 3.11 se sigue que $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2$ es una familia propia. $\square$ $\square$

A continuación daremos una notación, la cual será útil en el concepto de conjunto omega límite con respecto a una familia (Definición 3.28).

Definición 3.26. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ y $x \in X$. Definimos:*

$$f^F(x) = \{f^i(x) : i \in F\}.$$

En el Ejemplo 3.27 aclaramos el concepto dado en la Definición 3.26.

Ejemplo 3.27. *Consideremos el intervalo cerrado $[0, 1]$ con la métrica del subespacio de la recta real y $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = x^2$, para cada $x \in [0, 1]$. Sea $F = \{1, 2, 3\}$. Se tiene que:*

$$\begin{aligned} f^F\left(\frac{1}{3}\right) &= \left\{f^1\left(\frac{1}{3}\right), f^2\left(\frac{1}{3}\right), f^3\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \frac{1}{3^8}\right\}. \end{aligned}$$

La Definición 3.28 presenta una generalización del concepto de conjunto ω-límite de un punto.

Definición 3.28. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg, $x \in X$ y $V \subseteq X$. Definimos y denotamos el conjunto ω-**límite de** x **con respecto a** $\mathcal{F}$, o también llamado el **conjunto** $\omega_{\mathcal{F}}$**-límite de** x por:*

$$\omega_{\mathcal{F}}(x) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{f^F(x)} = \{z \in X : N_f(x, V) \in k\mathcal{F}, \textit{ para toda vecindad } V \textit{ de } z\}.$$

Dado que la familia $\mathcal{N}_f$ es una familia de Furstenberg (Ejemplo 3.19), un caso particular de la Definición 3.28, es la familia $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$.

Ejemplo 3.29. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Del Ejemplo 3.19 se sabe que $\mathcal{N}_f$ es una familia de Furstenberg. Así, el conjunto ω-límite de x con respecto a $\mathcal{N}_f$ se define como:*

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \bigcap_{F \in \mathcal{N}_f} \overline{f^F(x)} = \{z \in X : N_f(x, V) \in k\mathcal{N}_f, \textit{ para toda vecindad } V \textit{ de } z\}.$$

La Proposición 3.30 muestra una propiedad que cumple la familia $\omega_{\mathcal{F}}(x)$.

Proposición 3.30. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. Se tiene que $f(\omega_{\mathcal{F}}(x)) \subseteq \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$.*

Demostración. Sea $z \in f(\omega_{\mathcal{F}}(x))$. Demostremos que $z \in \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$. Para ello, es suficiente con demostrar que:

1) $z \in X$.
2) $N_f(f(x), V) \in k\mathcal{F}$, para cualquier vecindad V de z.

La demostración de 1) se obtiene directamente por como esta definido el conjunto ω-límite de x con respecto a $\mathcal{F}$. Para demostrar 2) probemos que:

a) $N_f(f(x), V) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$.
b) $N_f(f(x), V) \cap F' \neq \emptyset$, para cualquier $F' \in \mathcal{F}$.

Por como se define $N_f(f(x, V))$, es claro que $N_f(f(x), V) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Veamos que se cumple b). Como $z \in f(\omega_{\mathcal{F}}(x))$, existe $y \in \omega_{\mathcal{F}}(x)$ tal que $f(y) = z$. Sea V una vecindad de z. Luego $f^{-1}(V)$ es una vecindad de y. Dado que $y \in \omega_{\mathcal{F}}(x)$, se tiene que $N_f(x, f^{-1}(V)) \in k\mathcal{F}$. Luego,

$$N_f(x, f^{-1}(V)) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \text{ y } N_f(x, f^{-1}(V)) \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathcal{F}.$$

Por otra parte, por el Lema 2.18, se tiene que:

$$N_f(x, f^{-1}(V)) \subseteq N_f(f(x), f(f^{-1}(V))). \text{ Es decir, } N_f(x, f^{-1}(V)) \subseteq N_f(f(x), V).$$

En consecuencia,

$$N_f(f(x), V) \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathcal{F}.$$

Por lo tanto,

$$N_f(f(x), V) \in k\mathcal{F}, \text{ para cualquier vecindad } V \text{ de } z.$$

Con todo lo anterior se obtiene que $z \in \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$. $\square$

Como una consecuencia de la Proposición 3.30 se obtiene lo siguiente.

Corolario 3.31. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$. Se tiene que*

$$f(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) \subseteq \omega_{\mathcal{N}_f}(f(x)).$$

Concluimos esta sección con las siguientes observaciones.

Observación 3.32. *Notemos que no siempre* $\omega_{\mathcal{F}}(x)$ *es un subconjunto del conjunto* ω*-límite de* x *bajo* f*.*

Observación 3.33. *El conjunto* ω*-límite de* x *respecto a la familia* $\mathcal{N}_f$ *dado en el Ejemplo 3.29 se puede escribir de la siguiente manera:*

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \{z \in X : N_f(x,G) \cap N_f(U,V) \neq \emptyset, \text{ para toda vecindad } G \text{ de } z \\ \text{y para cualesquiera } U, V \subseteq X \text{ abiertos y no vacíos}\}.$$

3.2. Familias positivamente invariantes y negativamente invariantes. Dentro de las familias de Furstenberg, existen diferentes tipos de familias que son definidas a través de funciones específicas, y que por consecuencia cumplen propiedades y características esenciales para demostrar ciertos resultados. Algunas de ellas son las que se dan en la Definición 3.35, las cuales, fueron definidas a partir de la definición de la siguiente función.

Definición 3.34. *Para cada* $i \in \mathbb{Z}_+$ *definimos* $g^i : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$*, como* $g^i(j) = i + j$*.*

Utilizando la Definición 3.34, podemos definir los siguientes tipos de familias.

Definición 3.35. *Sea* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ *una familia de Furstenberg. Decimos que* $\mathcal{F}$ *es:*

(1) ***Positivamente invariante*** *si para cada* $i \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \mathcal{F}$ *implica que* $g^i(F) \in \mathcal{F}$.
(2) ***Negativamente invariante*** *si para cada* $i \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \mathcal{F}$ *implica que* $g^{-i}(F) \in \mathcal{F}$*, donde* $g^{-i}(F) = (g^i)^{-1}(F) = \{j - i : j \in F, j \geq i\}$.
(3) ***Invariante por translaciones*** *si es positivamente y negativamente invariante, equivalentemente, si para cada* $i \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $g^{-i}(F) \in \mathcal{F}$.

Para $\delta > 0$, denotemos por

$$\mathcal{S}_f(\delta) = \{A \subseteq \mathbb{Z}_+ : N_f(U,\delta) \subseteq A, \text{ para algún conjunto abierto } U \text{ de } X\}. \tag{3.1}$$

Lema 3.36. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico y* $\delta > 0$*. La familia* $\mathcal{S}_f(\delta)$ *es positivamente invariante.*

Demostración. Sean $i \in \mathbb{Z}_+$ y $F \in \mathcal{S}_f(\delta)$. Demostraremos que $g^i(F) \in \mathcal{S}_f(\delta)$. Existen subconjuntos abiertos U, V de X tal que:

$N_f(U,\delta) \subseteq F$ y $V \subseteq f^{-i}(U)$ donde, $\text{diám}(f^j(V)) < \delta$, para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots i\}$.

Esto implica que

$$N_f(V,\delta) \subseteq g^i(N_f(U,\delta)) \subseteq g^i(F).$$

En consecuencia, $g^i(F) \in \mathcal{S}_f(\delta)$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_f(\delta)$ es positivamente invariante. □

De la Definición 3.35 se obtiene la siguiente observación.

Observación 3.37. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico,* $x \in X$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ *una familia de Furstenberg y* $A \in \mathcal{F}$*. Se cumple que:*

(1) $g^{-i}(g^i(A)) = A$ *y* $g^i(g^{-i}(A)) \subseteq A$.
(2) $g^{-i}(N_f(x,U)) = N_f(f(x),U)$.

Proposición 3.38. *Sean* $g^1 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ *y* $A, B \subseteq \mathbb{Z}_+$*. Se cumple que:*

(1) *Si* $A \neq \emptyset$*, entonces* $g^{-1}(A) \neq \emptyset$.
(2) *Si* $g^{-1}(A \cap B) \neq \emptyset$*, entonces* $g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Note que $g^1(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in A$. Luego, existe $y \in g^1(A)$ tal que $g^1(x) = y$ a saber $y = x + 1$. Así $y \geq x$, en consecuencia $x \in g^{-1}(A)$. Por lo tanto, $g^{-1}(A) \neq \emptyset$.
Ahora, supongamos que $g^{-1}(A \cap B) \neq \emptyset$. Luego, existe $x \in g^{-1}(A \cap B)$ tal que $g^1(x) = y$, para algún $y \in A \cap B$. Así, $x \in g^{-1}(A)$ y $x \in g^{-1}(B)$. En consecuencia $x \in g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$. Por lo tanto $g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 3.39. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. Si $\mathcal{F}$ es positivamente invariante, entonces $\omega_{\mathcal{F}}(f(x)) \supseteq \omega_{\mathcal{F}}(x)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es positivamente invariante. Sean $y \in \omega_{\mathcal{F}}(x)$, U una vecindad de y y $F \in \mathcal{F}$. Probemos que $N_f(f(x), U) \in k\mathcal{F}$. Para esto, es suficiente con demostrar que $N_f(f(x), U) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\mathcal{F}$ es positivamente invariante, se tiene que, para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ y $F \in \mathcal{F}$ implica que $g^i(F) \in \mathcal{F}$. En particular tomemos $i = 1$. Es decir, $g^1(F) \in \mathcal{F}$. Por otro lado, como $y \in \omega_{\mathcal{F}}(x)$, se obtiene que $N_f(x, U) \in k\mathcal{F}$ y dado que $g^1(F) \in \mathcal{F}$, obtenemos que:

$$N_f(x, U) \cap g^1(F) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 3.38 se tiene que,

$$g^{-1}(N_f(x, U) \cap g^1(F)) \neq \emptyset \qquad \text{implica que} \qquad g^{-1}(N_f(x, U)) \cap g^{-1}(g^1(F)) \neq \emptyset.$$

Utilizando la Observación 3.37 se sigue que,

$$N_f(f(x), U) \cap F \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $y \in \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$. $\square$

Como una consecuencia de la Proposición 3.39 y del Lema 3.36 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.40. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$. Se tiene que*

$$\omega_{\mathcal{S}_f(\delta)}(f(x)) \supseteq \omega_{\mathcal{S}_f(\delta)}(x).$$

La Proposición 3.41 se prueba de manera similar a la Proposición 3.39. Agregamos la prueba, porque consideremos que puede ser útil para el lector.

Proposición 3.41. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. Si $\mathcal{F}$ es negativamente invariante, entonces $\omega_{\mathcal{F}}(f(x)) \subseteq \omega_{\mathcal{F}}(x)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es negativamente invariante. Sean $y \in \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$, U una vecindad de y y $F \in \mathcal{F}$. Probemos que $N_f(x, U) \in k\mathcal{F}$. Para esto, es suficiente con demostrar que $N_f(x, U) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\mathcal{F}$ es negativamente invariante, se tiene que, para cada $i \in \mathbb{Z}_+$ y $F \in \mathcal{F}$ implica que $g^{-i}(F) \in \mathcal{F}$. En particular tomemos $i = 1$. Es decir, $g^{-1}(F) \in \mathcal{F}$. Por otro lado, como $y \in \omega_{\mathcal{F}}(f(x))$, se obtiene que $N_f(f(x), U) \in k\mathcal{F}$ y dado que $g^{-1}(F) \in \mathcal{F}$, obtenemos que:

$$N_f(f(x), U) \cap g^{-1}(F) \neq \emptyset.$$

Sea $z \in N_f(f(x), U$ y $z \in g^{-1}(F)$. Esto implica que $z = j - 1$ para algún $j \in F$ y $j \leq 1$. En consecuencia,

$$f^{j-1}(f(x)) \in U.$$

Lo cual implica que $j \in F$ y $f^j(x) \in U$. Luego, $j \in N(x, U) \cap F$. Por lo tanto, $y \in \omega_{\mathcal{F}}(x)$. $\square$

La Proposición 3.42 se obtiene de la Proposición 3.39 y Proposición 3.41.

Proposición 3.42. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg. Si $\mathcal{F}$ es invariante por translaciones, entonces $\omega_{\mathcal{F}}(f(x)) = \omega_{\mathcal{F}}(x)$.*

3.3. Familias con la PIF y con la PIFF. En la introducción de este trabajo mencionamos el concepto de familia con la propiedad de la intersección finita, en este apartado ahondaremos más en este concepto. Para iniciar colocamos dos observaciones al respecto.

Observación 3.43. *Ninguna familia que incluya al conjunto vacío puede tener la PIF.*

Observación 3.44. *Toda colección de conjuntos con intersección no vacía posee automáticamente la propiedad de la intersección finita.*

Observación 3.45. *Un filtro tiene la propiedad de la intersección finita por definición.*

Ejemplo 3.46. *Sea $\mathbb{R}$ considerado con la métrica usual. Consideremos la familia*

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

como la colección de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Se tiene que $\mathcal{F}$ tiene la PIF.

En efecto, sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ finito. Luego, $\mathcal{A} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n_i}\right) : n_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., m\} \right\}$.
Consideremos el conjunto $A = \{n_i : i \in \{1, 2, ..., m\}\}$. Note que el conjunto es finito y acotado, por tanto tiene máximo. Consideremos $a = \max(A)$.
Notemos que $\left(0, \frac{1}{a}\right) \in \mathcal{A}$. Además, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ con $\left(0, \frac{1}{n_i}\right) \in \mathcal{A}$. Se tiene que,

$$\left(0, \frac{1}{a}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n_i}\right), \text{ para cada } n_i \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{A} = \left(0, \frac{1}{a}\right). \text{ En consecuencia, } \bigcap_{i=1}^{m} \left(0, \frac{1}{n_i}\right) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ tiene la PIF. $\square$

Definición 3.47. *Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene la* ***Propiedad Fuerte de la Intersección Finita (PIFF)****, si la intersección sobre cualquier subcolección finita de la familia es infinita.*

Ejemplo 3.48. *Consideremos el Ejemplo 3.46. Note que para $A \subseteq \mathcal{F}$ finito. Se tiene que,*

$$\bigcap \mathcal{A} = \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Dado que el intervalo abierto $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ *es un conjunto infinito. Podemos concluir que* $\bigcap \mathcal{A}$ *es un conjunto infinito. Por lo tanto,* $\mathcal{F}$ *tiene la PIFF.* $\square$

Ejemplo 3.49. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual. La familia* $\mathcal{A} = \{[n, n+1] \colon n \in \mathbb{N}\}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *no tiene la propiedad de la intersección finita fuerte ni la propiedad de la intersección finita. En efecto,* $\{[1,2],[3,4]\} \subseteq \mathcal{A}$ *y* $\cap\mathcal{A} = [1,2] \cap [3,4] = \emptyset$.

4. Sistemas débilmente mezclantes y las familias $\mathcal{N}_f$ y $\mathcal{N}_f(A)$

Concluimos este trabajo con esta sección, en la cual mostraremos algunas relaciones que se tienen entre las familias mencionadas en la Sección 3 y los sistemas débilmente mezclantes.

Empezamos esta sección con el siguiente resultado cuya prueba puede encontrarla en [**9**, Teorema 1.11, pág. 23] o [**18**, Teorema 2.2.24, pág. 34]. Dicho resultado nos proporciona equivalencias sobre el concepto de sistema débilmente mezclante.

Teorema 4.1. *Sean* X *un espacio métrico y* $f \colon X \to X$ *una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f *es débilmente mezclante,*
(2) *para cada* $m \in \mathbb{N}$*, la función* $f^{\times m}$ *es transitiva,*
(3) *para cada* $m \in \mathbb{N}$*, la función* $f^{\times m}$ *es débilmente mezclante,*
(4) *para cualesquiera conjuntos* $U, V \subseteq X$ *abiertos y no vacíos en* X*, existe* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que:*

$$f^k(U) \cap U \neq \emptyset \quad y \quad f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

En la Proposición 4.2 mostramos que si el sistema dinámico es débilmente mezclante, resulta que la familia $\mathcal{N}_f$ es un filtro.

Proposición 4.2. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Si* (X, f) *es débilmente mezclante, entonces la familia* $\mathcal{N}_f$ *es un filtro.*

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante, demostremos que la familia $\mathcal{N}_f$ es un filtro. De acuerdo a la Definición 3.10, es suficiente con demostrar lo siguiente:

(1) $\mathbb{Z}_+ \in \mathcal{N}_f$ y $\emptyset \notin \mathcal{N}_f$.
(2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{N}_f$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{N}_f$.

La demostración de 1, se obtiene inmediatamente de la definición de la familia $\mathcal{N}_f$ (vea Definición 3.17). Para demostrar 2, supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_f$. Probemos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_f$. Es decir, demostremos que existen abiertos A, B tales que $N_f(A, B) \subseteq B_1 \cap B_2$.
Dado que $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_f$, existen $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abiertos y no vacíos tales que:

$$N_f(U_1, U_2) \subseteq B_1 \qquad \text{y} \qquad N_f(V_1, V_2) \subseteq B_2.$$

Por otra parte, como (X, f) es débilmente mezclante, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Esto implica que, $k \in N_f(U_1, U_2)$ y $k \in N_f(V_1, V_2)$. De donde,

$$k \in N_f(U_1, U_2) \cap N_f(V_1, V_2).$$

Ahora, definamos los conjuntos $A = U_1 \cap f^{-k}(V_1)$ y $B = U_2 \cap f^{-k}(V_2)$. Como $U_1, f^{-k}(V_1)$, U_2, $f^{-k}(V_2)$ son conjuntos abiertos y no vacíos, se tiene que A y B son conjuntos abiertos y no vacíos. Demostremos que

$$N_f(A, B) \subseteq N_f(U_1, U_2) \cap N_f(V_1, V_2).$$

Sea $l \in N_f(A, B)$. Esto implica que $A \cap f^l(B) \neq \emptyset$. Luego, $f^{-l}(A) \cap B \neq \emptyset$. Dado que:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq f^{-l}(A) \cap B &= f^{-l}(U_1 \cap f^{-k}(V_1)) \cap U_2 \cap f^{-k}(V_2) \\ &= f^{-l}(U_1) \cap U_2 \cap f^{-l}(f^{-k}(V_1)) \cap f^{-k}(V_2) \\ &= f^{-l}(U_1) \cap U_2 \cap f^{-k}(f^{-l}(V_1) \cap V_2). \end{aligned}$$

Se obtiene que,

$$f^{-l}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad f^{-k}(f^{-l}(V_1) \cap V_2) \neq \emptyset.$$

Esto implica que,

$$U_1 \cap f^l(U_2) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad f^{-l}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

De donde,

$$U_1 \cap f^l(U_2) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad V_1 \cap f^l(V_2) \neq \emptyset.$$

Es decir,

$$l \in N_f(U_1, U_2) \qquad \text{y} \qquad l \in N_f(V_1, V_2).$$

Luego,

$$l \in N_f(U_1, U_2) \cap N_f(V_1, V_2).$$

En consecuencia,

$$N_f(A, B) \subseteq N_f(U_1, U_2) \cap N_f(V_1, V_2) \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Por lo tanto, la familia $\mathcal{N}_f$ es un filtro. □

Como consecuencia de la Proposición 4.2 y de la Proposición 3.24 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces la familia $\mathcal{N}_f \cdot \mathcal{N}_f$ es un filtro.*

Lema 4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces la familia $\mathcal{N}_f$ tiene la PIF.*

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Por la Proposición 4.2 obtenemos que la familia $\mathcal{N}_f$ es un filtro. Utilizando la Observación 3.45 podemos concluir que la familia $\mathcal{N}_f$ tiene la PIF. □

Lema 4.5. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces la familia $\mathcal{N}_f(A)$ tiene la PIF.*

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Sea $A \subseteq X$. Demostremos que $\mathcal{N}_f(A)$ es un filtro. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_f(A)$. Demostremos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_f(A)$. Dado que $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_f(A)$, existen $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ tales que:

$$N_f(U_1 \cap A, V_1) \subseteq B_1 \qquad \text{y} \qquad N_f(U_2 \cap A, V_2) \subseteq B_2.$$

Como (X, f) es débilmente mezclante, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Esto implica que, $k \in B_1$ y $k \in B_2$. En consecuencia $k \in B_1 \cap B_2$. Así,

$$N_f(U_i \cap A, V_i) \subseteq B_1 \cap B_2, \text{ para cada } i \in \{1, 2\}.$$

Por lo tanto,

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_f(A).$$

Con lo anterior, obtenemos que $\mathcal{N}_f$ es un filtro. Así, por la Observación 3.45 podemos concluir que la familia $\mathcal{N}_f(A)$ tiene la PIF. $\square$.

Finalmente, esperamos que este trabajo sea útil y despierte el interés en nuestros lectores para realizar investigaciones respecto a familias importantes dentro de la teoría de sistemas dinámicos discretos.

Agradecimientos. Los autores agradecemos a la revisora o a el revisor, quien nos sugirió un gran número de cambios, los cuales una vez realizados, mejoraron nuestro trabajo.

Bibliografía

[1] E. Akin. *Recurrence in topological dynamical systems: furstenberg families and ellis actions.* New York: Plenum; 1997.

[2] F. Barragán, A. Santiago-Santos, J. F. Tenorio, J. King Dávalos. *Órbitas y periodicidad en sistemas dinámicos.* Capítulo 4 en Topología y sus Aplicaciones 7. Editores: J. Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019.

[3] F. Barragán, S. Flores, A. Santiago-Santos, J. F. Tenorio. *Transitividad en hiperespacios.* Capítulo 2 en Topología y sus aplicaciones 8. Editores: J. Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2021. Versión electrónica en https://librosdigitales.buap.mx

[4] F. Blanchard and W. Huang. *Entropy sets, weakly mixing sets and entropy capacity.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 20:2 (2008), 275-311.

[5] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems.* American Math. Soc. 1927.

[6] M. Brin, G. Struck. *Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 2003.

[7] José Manuel Díaz Moreno. *Introducción a la topología de los espacios métricos.* Servicio Publicaciones UCA, 1998, 220 páginas.

[8] H. Furstenberg H. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton, NJ: Princeton University Press; 1981.

[9] E. Glasner. *Ergodic theory via joinings.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 101, American Mathematical Society, 2003.

[10] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund. *Topological dynamics.* Providence, RI: American Mathematical Society; 1955.

[11] W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada, A. Peris y G. Zhang. *Finite Intersection Property and Dynamical Compactness.* J. Dyn. Differ. Equ. 30 (2018), 1221–1245.

[12] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango. *Sistemas dinámicos discretos.* Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, (2014).

[13] I. León-Torres. *Compacidad Dinámica y Sensitividad.* Tesis de licenciatura, UTM, 2018.

[14] I. León-Torres, A. Santiago-Santos. *Compacto transitividad y su relación con tipos de sensitividad.* Revista digital Matemática, Educación e Internet. Vol 22, (2022), No 2., 1-26.

[15] I. León-Torres, A. Santiago-Santos. *Una introducción a los sistemas dinámicos compacto transitivos.* Capítulo 4 en Topología y sus aplicaciones 9. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras, Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2023. Versión electrónica en https://publicaciones.buap.mx; peso del archivo: 2423Kb.

[16] J. Li. *Transitive points via Furstenberg family.* Topology Appl. 158(16), (2011), 2221-2231.

[17] A. López Revilla. *Nociones relacionadas con la transitividad topológica.* Tesis de licenciatura, UTM, 2018.

[18] V. M. Muñoz López. *Funciones del tipo mezclantes en hiperespacios.* Tesis de licenciatura, UTM, 2018.

[19] V. M. Muñoz, A. Santiago-Santos, J. F. Tenorio. *Sobre la dinámica individual de algunas funciones del tipo mezclante.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 9. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras, Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2023. Versión electrónica en https://publicaciones.buap.mx; peso del archivo: 2423Kb.

[20] P. Oprocha. *Weakly mixing and product recurrence.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 60, 4 (2010), 1233–1257.

[21] P. Oprocha, G. Zhang. *On local aspects of topological weak mixing in dimension one and beyond.* Stud. Math. 202(3), (2011), 261-288.

[22] P. Oprocha, G. Zhang. *On local aspects of topological weak mixing, sequence entropy and chaos.* Ergod. Theory Dyn. Syst. 34(5), (2014), 1615-1639.

[23] H. Román Flores, V. Aguirre Cipe, V. Ayala. *Algunas conexiones entre dinámica individual y colectiva.* Interciencia: Revista de ciencia y tecnología de América, ISSN 0378-1844, Vol. 43, No. 11, 2018, págs. 744-750.

[24] Y. Wang, G. Wei. *Characterizing mixing, weak mixing and transitivity of induced hyperspace dynamical systems.* Topology and its Applications 155, (2007), 56-68.

Correos electrónicos:

dani_951011@hotmail.com (Daniel Enrique Osorio-Castillo).

alicia@mixteco.utm.mx (Alicia Santiago-Santos),

CAPÍTULO 4

Propiedades topológicas del hiperespacio Pixley-Roy

David Maya y Miguel Angel Morales Bautista
Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México

1. Introducción

Un hiperespacio es un espacio en el que sus puntos son una clase subconjuntos de un espacio topológico dado. Existen diversas maneras de dotar de una topología a un hiperespacio involucrando la topología del espacio base. La teoría de hiperespacios vio sus inicios en el año de 1922 con los trabajos de Leopold Vietoris y Felix Hausdorff. Los hiperespacios suelen ser fáciles de definir y de gran utilidad para hallar varios tipos de contraejemplos en la topología general.

En 1969, Carl Pixley y Prabir Roy presentaron por primera vez la construcción de un importante ejemplo para el estudio de los espacios de Moore, un hiperespacio que es un espacio de Moore que no cumple la condición de cadena numerable. El hiperespacio definido por Pixley y Roy fue dado para la línea de números reales en [**9**], y después fue generalizado por Erick K. van Douwen en [**17**]. Dotaron con una topología a la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos de un espacio topológico T_1 como sigue (ver [**9**]). Sea X un espacio topológico T_1. Denotamos por $\mathcal{F}[X]$ a la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Para cada miembro F de $\mathcal{F}[X]$ y para cada subconjunto abierto de U de X, definimos $[F, U]$ como el conjunto $\{G \in \mathcal{F}[X] : F \subseteq G \subseteq U\}$. La familia que consiste de todos los subconjuntos de $\mathcal{F}[X]$ con la forma $[F, U]$ es base para una topología τ_{PR} para $\mathcal{F}[X]$. Al espacio topológico $(\mathcal{F}[X], \tau_{PR})$ le llamaremos *el hiperespacio Pixley-Roy de X*.

A lo largo de la historia, se han realizado estudios sobre las propiedades que posee este hiperespacio (ver [**3, 2, 4, 8, 5, 16, 15, 10**]). Incluso hasta nuestros días, el comportamiento topológico del espacio de Pixley y Roy es un objeto de estudio de gran interés (ver[**1, 14, 11, 13, 12, 7**]).

El objetivo de este escrito es presentar propiedades básicas del hiperespacio Pixley-Roy y discutir algunos resultados conocidos sobre este espacio.

A lo largo de nuestro trabajo, X será un espacio topológico infinito y T_1. La colección de subconjuntos abiertos de X se representará por τ_X. Las nociones empleadas durante este escrito que no se definan serán consideradas como en [**18**].

2. Propiedades básicas del hiperespacio Pixley-Roy

Lema 2.1. *Si $C, D \in \mathcal{F}[X]$ y R, S subconjuntos de X, entonces $[C, R] \cap [D, S] = [C \cup D, R \cap S]$.*

Teorema 2.2. *La familia $\mathcal{B} = \{[F, U] : F \in \mathcal{F}[X], U \in \tau_X\}$ es base para una topología de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración: La familia $\mathcal{B}$ cubre a $\mathcal{F}[X]$ y satisface que la intersección de cualesquiera dos elementos $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{B}$ por Lema 2.1. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para alguna topología de $\mathcal{F}[X]$ $\square$

La topología para $\mathcal{F}[X]$ garantizada en el teorema anterior se conoce como topología *Pixley-Roy* denotada por τ_{PR} y al espacio topológico $(\mathcal{F}[X], \tau_{PR})$ se le conoce como el hiperespacio de *Pixley-Roy* del espacio topológico X, abreviado como $\mathcal{F}[X]$ es el *hiperespacio Pixley-Roy del espacio topológico* X.

Teorema 2.3. *Si $G \in \mathcal{F}[X]$ y U es un subconjunto de X, entonces $[G, U]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración: Sea $P \in \mathrm{Cl}([G, U])$. Definimos $L = G - P$. Tenemos que $X - L$ es un subconjunto abierto que contiene a P. Entonces existe $Q \in [P, X - L] \cap [G, U]$. Esto implica que $P \subseteq Q \subseteq X - L$ y $G \subseteq Q \subseteq U$. Con esto último $P \subseteq U$ y $G \subseteq X - L$. De aquí que $L = \emptyset$, o bien, $G \subseteq P$. En conclusión $P \in [G, U]$. $\square$

Un espacio topológico es *cero dimensional* si tiene una base que consiste de subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez. El siguiente resultado es consecuencia inmediata de los teoremas anteriores.

Teorema 2.4. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es cero dimensional.*

Una colección de subconjuntos de un espacio topológico se dice *punto finito* si cada punto del espacio se encuentra en un numero finito de subconjuntos. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de un espacio topológico. Decimos que $\mathcal{V}$ es un *refinamiento de* $\mathcal{C}$ si para cualquier $V \in \mathcal{V}$, existe $C \in \mathcal{C}$ de tal forma que $V \subseteq C$.

Un espacio es *metacompacto* si toda cubierta abierta tiene un refinamiento punto finito. Un espacio es *hereditariamente metacompacto* si cada uno de sus subespacios es metacompacto.

Teorema 2.5. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es hereditariamente metacompacto.*

Demostración: Sean $\mathcal{H}$ un subespacio de $\mathcal{F}[X]$ y $\mathfrak{K}$ una cubierta abierta de $\mathcal{H}$. Para cada $Y \in \mathcal{H}$, consideremos $\mathcal{K}_Y \in \mathfrak{K}$ de tal forma que $Y \in \mathcal{K}_Y$. Definamos $\mathcal{W}_Y = ([Y, X] \cap \mathcal{H}) \cap \mathcal{K}_Y$ para cada $Y \in \mathcal{H}$. Afirmamos que $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}_Y : Y \in \mathcal{H}\}$ es un refinamiento abierto punto finito de $\mathfrak{K}$. Observemos que para todo $Y \in \mathcal{H}$, $\mathcal{W}_Y \subseteq \mathcal{K}_Y$. Del hecho que $[Y, X] \cap \mathcal{H}$ y $\mathcal{K}_Y$ son subconjuntos abiertos en $\mathcal{H}$, se sigue que $\mathcal{W}_Y$ es abierto en $\mathcal{H}$. Por último, sea $S \in \mathcal{H}$. Entonces $S \in \mathcal{W}_Y$ si y sólo si $Y \subseteq S$. Debido a que el número de subconjuntos no vacíos de S es $2^{|S|} - 1$, se tiene que S pertenece a lo más a $2^{|S|}-1$ elementos de $\mathfrak{W}$. De esto se concluye que $\mathcal{F}[X]$ es hereditariamente metacompacto. □

Decimos que un espacio topológico X es *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable de X.

Teorema 2.6. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf, entonces X es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{C}=\{[\{x\},X]:x\in X\}$. Observemos que cada elemento de $\mathfrak{C}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ y si $A\in\mathcal{F}[X]$ y $x\in A$, entonces $A\in[\{x\},X]$. Esto prueba que $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$. La condición $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf garantiza la existencia de una subcolección numerable $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}[X]=\bigcup\mathfrak{D}$. Sea $p\in X$. Como $\mathfrak{D}$ cubre a $\mathcal{F}[X]$, existe $[\{q\},X]\in\mathfrak{D}$ tal que $\{p\}\in[\{q\},X]$. Se sigue que $q=p$. Con lo cual X es numerable. □

Teorema 2.7. *Cada subespacio separable de $\mathcal{F}[X]$ es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathcal{Y}$ un subespacio separable de $\mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{D}$ un subconjunto denso numerable de $\mathcal{Y}$. Definimos $W=\bigcup\mathcal{Y}$. Supongamos que existe $x\in W$ tal que $x\notin\bigcup\mathcal{D}$. Con lo cual existe $A\in\mathcal{Y}$ tal que $x\in A$. De esto $x\in A-D$ para cada $D\in\mathcal{D}$. Entonces $[A,X]\cap\mathcal{Y}$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{D}\cap[A,X]\cap\mathcal{Y}=\emptyset$. Así, cada elemento de W pertence a $\bigcup\mathcal{D}$. De esto W es un subonjunto numerable de X que contiene a cada miembro de $\mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es numerable. □

Corolario 2.8. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es separable si y sólo si X es numerable.*

Teorema 2.9. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A,B\in\mathcal{F}[X]$ con $A\neq B$. De esto podemos decir que $A-B\neq\emptyset$ o $B-A\neq\emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $p\in A-B$. Dado que X es T_1, tenemos que $X-\{p\}\in\tau_X$.

Notemos que $[B,X-\{p\}],[A,X]\in\tau_{PR}$, $B\in[B,X-\{p\}]$ y $A\in[A,X]$. Solo falta ver qué $[B,X-\{p\}]$ y $[A,X]$ son ajenos. Supongamos que existe $D\in[B,X-\{p\}]\cap[A,X]$. De esto $A\subseteq D\subseteq X-\{p\}$, lo cual contradice el hecho que $p\in A$. Así concluimos que $[B,X-\{p\}]\cap[A,X]=\emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Hausdorff. □

Del hecho que cada espacio Hausdorff cero dimensional es completamente regular, al combinar Teorema 2.9 y Teorema 2.4 se obtiene directamente el siguiente resultado.

Corolario 2.10. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es completamente regular.*

Corolario 2.11. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es regular.*

Teorema 2.12. *Si $\mathcal{F}[X]$ es perfectamente normal, entonces cada subconjunto unipuntual de X es un subconjunto G_δ de X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x\in X$. Como consecuencia de Teorema 2.9, el conjunto unipuntual $\{\{x\}\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Así $\{\{x\}\}$ un subconjunto G_δ de $\mathcal{F}[X]$. De ahí existe una familia $\{\mathcal{U}_n:n\in\mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ tales que $\{\{x\}\}=\bigcap\{\mathcal{U}_n:n\in\mathbb{N}\}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, Teorema 2.2 garantiza que existen $F_n\in\mathcal{F}[X]$ y $V_n\in\tau_X$ tales que $\{x\}\in[F_n,V_n]\subseteq\mathcal{U}_n$. Del hecho que

$F_n \subseteq \{x\} \subseteq V_n$, se sigue que $\{x\} = F_n$ y $\{x\} \subseteq \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, sea $y \in \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{x\} \subseteq \{x, y\} \subseteq V_n$, es decir, $\{x, y\} \in [F_n, V_n]$. Por lo que $\{x, y\} \in \bigcap\{[F_n, V_n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcap\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\{x\}\}$. Notemos que $\{x, y\} \in \{\{x\}\}$ es verdadero si y sólo si $x = y$. En conclusión, $\{x\} = \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, $\{x\}$ es un subconjunto G_δ de X. $\square$

Teorema 2.13. *Si cada subconjunto unipuntual de X es un subconjunto G_δ de X, entonces cada subconjunto del hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un subconjunto G_δ de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración: Con el fin de demostrar que todo subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$ es G_δ, para cada $x \in X$ sea $\{U(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de X tales que $U(x, n+1) \subseteq U(x, n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x\} = \bigcap\{U(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Primero, para cada $(x, y) \in X \times X$, definimos

$$N(x, y) = \{n \in \mathbb{N} : x \notin U(y, n) \text{ y } y \notin U(x, n)\}.$$

Observe que si $m \in N(x, y)$, entonces $x \neq y$ y $k \in N(x, y)$ para cada $k \geq m$. Supongamos que $N(x, y) = \emptyset$. Esto implicaría que $y \in U(x, n)$ o $x \in U(y, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $y \in \bigcap\{U(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$ o $x \in \bigcap\{U(y, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Con esto $x = y$. Concluimos que $x \neq y$ si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \in N(x, y)$ para cada $k \geq m$.

Para cada $B \in \mathcal{F}[X]$, sea $S(B) = \bigcap\{N(x, y) : x, y \in B, x \neq y\}$. Tenemos que cada subconjunto $S(B)$ de $\mathbb{N}$ es no vacío, y cada $n \in \mathbb{N}$ cumple que $n \in S(B)$ si y sólo si $B \cap U(x, n) = \{x\}$ para cada $x \in B$. Sea $\varphi : \mathcal{F}[X] \to \mathbb{N}$ la función dada por $\varphi(B) = \min S(B)$. De aquí que $B \cap U(x, k) = \{x\}$ para cada $x \in B$ y para cada $k \geq \varphi(B)$.

Para cada $(T, l) \in \mathcal{F}[X] \times \mathbb{N}$, definimos $V(T, l) = \bigcup\{U(t, \varphi(T) - 1 + l) : t \in T\}$. Notemos que cada $V(T, l)$ es un subconjunto abierto de X y $T \subseteq V(T, l)$.

Ahora, sean $K, G \in \mathcal{F}[X]$ tales que $G \in [K, V(K, \varphi(G))]$. Esto implica que $K \subseteq G \subseteq V(K, \varphi(G))$. Probaremos que $G = K$. Sea $y \in G$. De la inclusión $y \in V(K, \varphi(G))$, existe $z \in K$ tal que $y \in U(z, \varphi(K) - 1 + \varphi(G))$. Entonces $z \in G$ y $\varphi(K) - 1 + \varphi(G) \geq \varphi(G)$. Por lo que $y \in G \cap U(z, \varphi(K) - 1 + \varphi(G)) = \{z\}$, es decir, $y = z$. Concluimos que $y \in K$.

Finalmente, sea $\mathcal{H}$ un subconjunto de $\mathcal{F}[X]$. Expondremos una sucesión de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ cuya intersección es $\mathcal{H}$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{W}(r) = \bigcup\{[T, V(T, r)] : T \in \mathcal{H}\}$ para obtener un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ que contenga a $\mathcal{H}$. Para demostrar que $\bigcap\{\mathcal{W}(r) : r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$, sea $S \in \bigcap\{\mathcal{W}(r) : r \in \mathbb{N}\}$. Así, la inclusión $S \in \mathcal{W}(\varphi(S))$ se cumple. Esto implica que existe $K \in \mathcal{H}$ tal que $S \in [K, V(K, \varphi(S))]$. Por lo tanto $K = S$ y $S \in \mathcal{H}$. Esto demuestra que $\mathcal{H}$ es un subconjunto G_δ de $\mathcal{F}[X]$. $\square$

Corolario 2.14. *Si $\mathcal{F}[X]$ es perfectamente normal, entonces cada subconjunto de $F[X]$ es un subconjunto G_δ de $F[X]$.*

Corolario 2.15. *El hiperespacio $F[X]$ es perfectamente normal si y sólo si $F[X]$ es normal y cada conjunto unipuntual de X es un subconjunto G_δ de X.*

3. La propiedad de Baire en el hiperespacio de Pixley-Roy

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\mathcal{F}_n[X] = \{F \in \mathcal{F}[X] : |F| \leq n\}.$$

Lema 3.1. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F \in \mathrm{Cl}(\mathcal{F}_n[X])$. Entonces existe $G \in [F, X] \cap \mathcal{F}_n[X]$. Esto implica que $F \subseteq G$. Dado que G tiene a lo más n elementos, se tiene que $F \in \mathcal{F}_n[X]$. Esto demuestra que $\mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. □

Lema 3.2. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X]) = \{Q \in \mathcal{F}_n[X] : Q \in \tau_X\}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $Q \in \mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X])$. Entonces existen $U \in \tau_X$ y $F \in \mathcal{F}[X]$ tales que $Q \in [F, U] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$. Del hecho que $[F, U] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$ se sigue que $|U| \leq n$. Sea $H = U - Q$. Entonces H es un subconjunto finito de X tal que $U = Q \cup H$ y $Q \cap H = \emptyset$. Con esto H es un subconjunto cerrado de X tal que $Q = U \cap (X - H)$. Por lo que $Q \in \tau_X$.

Sea $Q \in \mathcal{F}_n[X]$ tal que $Q \in \tau_X$. Observemos que $[Q, Q]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ de tal modo que $Q \in [Q, Q] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$. Por lo que $Q \in \mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X])$. □

Diremos que un espacio topológico Z es un *espacio de Baire* si para toda sucesión de subconjuntos abiertos densos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de Z, se tiene que $\bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de Z.

Teorema 3.3. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ no es un espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{W}_n = \mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X]) \cup (\mathcal{F}[X] - \mathcal{F}_n[X]).$$

Aplicamos Lema 3.1 para mostrar que cada $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$. Usamos Lema 3.2 para deducir que $\mathcal{F}[X] - \mathcal{W}_n = \mathcal{F}_n[X] - \mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X]) = \{Q \in \mathcal{F}_n[X] : Q \notin \tau_X\}$. Esto implica que si $Q \in \mathcal{F}[X] - \mathcal{W}_n$ y $U \in \tau_X$ es tal que $Q \subseteq U$, entonces U es infinito y con esto $[Q, U] \cap \mathcal{W}_n \neq \emptyset$. Concluimos que $\mathrm{Int}(\mathcal{F}[X] - \mathcal{W}_n) = \emptyset$, es decir, $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n &= \bigcap\{\mathrm{Int}(\mathcal{F}_n[X]) \cup (\mathcal{F}[X] - \mathcal{F}_n[X]) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathrm{Int}(\mathcal{F}_1[X]).\end{aligned}$$

Si $z, w \in X$ son distintos, entonces $[\{z, w\}, X]$ es un subconjunto no vacío abierto de $\mathcal{F}[X]$ tal que $[\{z, w\}, X] \cap \mathrm{Int}(\mathcal{F}_1[X]) = \emptyset$. Así $\mathrm{Int}(\mathcal{F}_1[X])$ no es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$. Por lo tanto $\mathcal{F}[X]$ no es un espacio de Baire. □

4. Condición de cadena numerable

Se dice que un espacio topológico Z satisface la *condición de cadena numerable* (ccc, por sus siglas en inglés) si toda familia de subconjuntos abiertos ajenos a pares de Z es numerable. Si un espacio topológico Z satisface la condición de cadena numerable diremos que Z tiene la propiedad ccc. Ver [**18**, 16C, pág. 113].

Teorema 4.1. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, entonces el espacio X tiene la propiedad ccc.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una familia disjunta de subconjuntos abiertos de X. Para cada $A \in \mathcal{U}$, elegimos $x_A \in A$. Definimos $\mathfrak{V} = \{[\{x_A\}, A] : A \in \mathcal{U}\}$ para obtener una familia subconjuntos de abiertos de $\mathcal{F}[X]$. Veamos que cualesquiera dos miembros de $\mathfrak{V}$ son ajenos. Sean $B, C \in \mathcal{U}$ distintos. Por Lema 2.1, $[\{x_B\}, B] \cap [\{x_C\}, C] = [\{x_B\} \cup \{x_C\}, B \cap C] = [\{x_B\} \cup \{x_C\}, \emptyset] = \emptyset$. Del hecho que el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, se sigue que $\mathfrak{V}$ es numerable. Esto implica que $\mathcal{U}$ es numerable. Por lo tanto, X tiene la propiedad ccc. □

Teorema 4.2. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, entonces todo subespacio discreto de X es numerable.*

Demostración: Sea Y un subespacio discreto de X. Con lo cual para cada $y \in Y$, existe $O_y \in \tau_X$ tal que $Y \cap O_y = \{y\}$. Sea $\mathfrak{V} = \{[\{y\}, O_y] : y \in Y\}$. Para ver que $\mathfrak{V}$ es una familia de subconjuntos ajenos a pares, sean $z, w \in Y$ distintos. Si $[\{z\}, O_z] \cap [\{w\}, O_w]$ tuviera un elemento T, entonces T sería un subconjunto de O_w que contendría a z y esto implicaría que $z \in T \cap Y \subseteq O_w \cap Y = \{w\}$, lo que nos conduce a una contradicción. Por lo tanto, el conjunto $[\{z\}, O_z] \cap [\{w\}, O_w]$ es vacío. La condición de cadena numerable de $\mathcal{F}[X]$ implica que $\mathfrak{V}$ es numerable. De la numerabilidad de $\mathfrak{V}$ se sigue que Y es numerable. □

El símbolo ω_1 denota al primer ordinal no numerable.

Teorema 4.3. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, entonces X es hereditariamente Lindelöf*

Demostración: Por contradicción. Supongamos que existe un subespacio Y de X que no es Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de Y formada por subconjuntos abiertos de X tal que no existe subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Entonces $|\mathcal{U}| > \omega_1$. Veamos por inducción transfinita que para $\alpha < \omega_1$, existen $x_\alpha \in Y$ y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tales que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $x_\alpha \notin \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$.

Sea $x_0 \in Y$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_0$. Por lo tanto la propiedad es cierta para $\alpha = 0$. Supongamos que para $\alpha < \omega_1$ y para todo $\beta < \alpha$ se cumple que existen $x_\beta \in Y$, $U_\beta \in \mathcal{U}$ tales que $x_\beta \in U_\beta$ y $x_\beta \notin \bigcup\{U_\lambda : \lambda < \beta\}$. Observemos que $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subconjunto numerable de $\mathcal{U}$. Entonces $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ no cubre a Y. Por lo que existen $x_\alpha \in Y$ y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tales que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $x_\alpha \notin \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$. Con esto queda concluida la inducción transfinita.

Ahora, definimos $\mathfrak{K} = \{[\{x_\alpha\}, U_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ para tener una colección de abiertos de $\mathcal{F}[X]$. Sean $\gamma, \lambda < \omega_1$ distintos. El orden total de ω_1 nos permite suponer que $\gamma < \lambda$. Por la condición $x_\lambda \notin \bigcup\{U_\delta : \delta < \lambda\}$ se tiene que $x_\lambda \notin U_\gamma$. Así, para cada $T \in [\{x_\lambda\}, U_\lambda]$, se tiene que $x_\lambda \in T - U_\gamma$ y de esto $T \notin [\{x_\gamma\}, U_\gamma]$. Por lo que $[\{x_\lambda\}, U_\lambda] \cap [\{x_\gamma\}, U_\gamma] = \emptyset$. Concluimos que $\mathfrak{K}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ es ajena a pares.

Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ tiene la condición de cadena numerable, $\mathfrak{K}$ es numerable. Lo cual es una una contradicción pues $|\mathfrak{K}| = \omega_1$

Por lo tanto, X es hereditariamente Lindelöf. □

Teorema 4.4. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, entonces X es hereditariamente separable.*

Demostración: Sea Y un subconjunto de X y sea $\mathfrak{L} = \{[A, U] : A \in \mathcal{F}[X], A \subseteq Y \cap U, U \in \tau_X\}$. Empleando el Lema de Kuratowski-Zorn se puede demostrar que existe un subconjunto $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{L}$ con las siguientes propiedades: cualesquiera dos elementos distintos de $\mathfrak{G}$ son ajenos y cada $F \in \mathfrak{L}$ interesecta a algún elemento de $\mathfrak{G}$. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc, se sigue que $\mathfrak{G}$ es numerable. Sea $D = \bigcup\{A : [A, U] \in \mathfrak{G}\}$. Observemos que D es un subconjunto numerable de Y.

Por último veamos que D es un subconjunto denso de Y. Sea $W \in \tau_X$ tal que $W \cap Y \neq \emptyset$ y sea $y \in W \cap Y$. Dado que $[\{y\}, W] \in \mathfrak{L}$, existe $[P, V] \in \mathfrak{L}$ tal que $[\{y\}, W] \cap [P, V] \neq \emptyset$. Por lo anterior, tenemos que $P \subseteq T \subseteq W$ y $P \subseteq D$. Con lo cual $D \cap (W \cap Y) \neq \emptyset$. Es decir, D es un subconjunto denso numerable de Y.

Por lo tanto, X es hereditariamente separable. □

Una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de espacio topológico (Y, τ_Y) es llamada *red* para el espacio Y si para cualquier subconjunto abierto no vacío de Y es unión de elementos de $\mathcal{N}$, equivalentemente, para todo $y \in Y$ y todo $U \in \tau_Y$ tal que $y \in U$, existe $A \in \mathcal{N}$ tal que $y \in A \subseteq U$.

Teorema 4.5. *Si X tiene una red numerable, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc.*

Demostración: Sea $\mathcal{N}$ una red numerable de X y $\mathfrak{A}$ una familia no numerable de subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathcal{F}[X]$. Observemos que para cada $\mathcal{V} \in \mathfrak{A}$, existen $G_{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}[X]$ y $W_{\mathcal{V}} \in \tau_X$ tales que $[G_{\mathcal{V}}, W_{\mathcal{V}}] \subseteq \mathcal{V}$. Además del hecho que $\mathcal{N}$ es una red numerable, la familia $\mathcal{M} = \{\bigcup S : \mathcal{S} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{V}\}$ es numerable y contiene un elemento $M_{\mathcal{V}}$ tal que $G_{\mathcal{V}} \subseteq M_{\mathcal{V}} \subseteq W_{\mathcal{V}}$. Sea $\mathcal{D} = \{M_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \in \mathfrak{A}\} \subseteq \mathcal{M}$. Dado que $\mathcal{D}$ es numerable y $\mathfrak{A}$ es no numerable, existen $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \in \mathfrak{A}$ distintos tales que $M_{\mathcal{Q}} = M_{\mathcal{R}}$. Hacemos $M = M_{\mathcal{Q}} = M_{\mathcal{R}}$. Del hecho que $G_{\mathcal{Q}} \subseteq M \subseteq W_{\mathcal{Q}}$ y $G_{\mathcal{R}} \subseteq M \subseteq W_{\mathcal{R}}$ se sigue que $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \subseteq M$. Por lo que $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in [G_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{Q}}]$ y $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in [G_{\mathcal{R}}, W_{\mathcal{R}}]$, es decir, $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in ([G_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{Q}}] \cap [G_{\mathcal{R}}, W_{\mathcal{R}}]) \subseteq \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$.

Por lo tanto, cada familia de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ ajenos a pares debe ser numerable, en consecuencia, $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc. □

Corolario 4.6. *Si X es segundo numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccc.*

5. La equivalencia entre las propiedades de Fréchet-Urysohn y secuencial en el hiperespacio de Pixley-Roy de $\mathcal{F}_2[X]$

Sean Z un espacio topológico y A un subconjunto de Z. Diremos que A es:

(1) *secuencialmente abierto* si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Z que converge a un punto $w \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq m$.

(2) Diremos que A es *secuencialmente cerrado* en Z si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a un punto $w \in Z$ se cumple que $w \in A$.

Diremos que un espacio topológico Z es *secuencial* si todo subconjunto de X secuencialmente abierto es abierto.

Diremos que Z es un espacio *Fréchet-Urysohn* si para cada subconjunto A de z se satisface que $x \in \mathrm{Cl}(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x.

Un espacio topológico que es Fréchet-Urysohn también es un espacio secuencial. En esta parte mostraremos la equivalencia que existe en el hiperespacio de $\mathcal{F}_2[X]$ entre dichas propiedades.

Lema 5.1. *Sean $p, q \in X$. Entonces $\{p, q\}$ es un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$ si y sólo si $p = q$ y p es un punto no aislado de X.*

Demostración: Supongamos que para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_2[X]$ que contiene a $\{p, q\}$ cumple que $\mathcal{U} - \{\{p, q\}\}$ es no vacío. Sea $A \in [\{p, q\}, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ tal que $A \neq \{p, q\}$. Obtenemos que $\{p, q\}$ es un subconjunto propio del conjunto de a lo más dos elementos A. Esto implica que p y q deben ser iguales. Ahora, sea $U \in \tau_X$ tal que $p \in U$. Entonces el subconjunto abierto $[\{p\}, U]$ de $\mathcal{F}[X]$ contiene a un elemento B distinto a $\{p\}$. Por lo que $B - \{p\}$ es un subconjunto no vacío de $U - \{p\}$. Concluimos que p no es un punto aislado de X.

Supongamos que p no es un punto aislado de X. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$ tal que $\{p\} \in \mathcal{U}$. Elegimos $U \in \tau_X$ tal que $\{p\} \in [\{p\}, U] \cap \mathcal{F}_2[X] \subseteq \mathcal{U}$. Entonces $U - \{p\}$ es no vacío y para cada $x \in U - \{p\}$ se tiene que $\{p, x\} \in [\{p\}, U] - \{\{p\}\}$. Por lo que $\mathcal{U} - \{\{p\}\}$ es no vacío, en otras palabras, $\{p\}$ no es un punto aislado de $\mathcal{F}_2[X]$. $\square$

Lema 5.2. *Si $C \in \mathcal{F}_2[X]$ es un conjunto unipuntual y $\mathcal{S}$ es un subconjunto de $[C, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$, entonces $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S}) - \mathcal{S} \subseteq \{C\}$.*

Demostración: Sea $D \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S}) - \mathcal{S}$. Entonces existe $E \in ([D, X] \cap \mathcal{F}_2[X]) \cap \mathcal{S} - \{D\}$. Esto implica que $D \subseteq E$ y $E \in \mathcal{S}$. Dado que $D \notin \mathcal{S}$, D es un subconjunto propio de E. Así, D es un conjunto unipuntual. Ahora, notemos que $[D, X - C] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, $\mathcal{S} \cap [D, X - C]$ es un subconjunto de $[C, X] \cap [D, X - C]$ y $[C, X] \cap [D, X - C]$ es vacío. Obtenemos que $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S})$ es un subconjunto de $\mathcal{F}_2[X] - [D, X - C]$. La inclusión $D \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S})$ garantiza que $D \notin [D, X - C]$, es decir, la intersección de los conjuntos unipuntuales D y C es no vacía. Por lo tanto, $D = C$. $\square$

Teorema 5.3. *Si $\mathcal{F}_2[X]$ es secuencial, entonces $\mathcal{F}_2[X]$ es es Fréchet-Urysohn.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{F}_2[X]$ y sea $C \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{B}) - \mathcal{B}$. Entonces C es un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$. Como consecuencia del Lema 5.1, existe un punto no aislado z de X tal que $C = \{z\}$. Hacemos $\mathcal{S} = \mathcal{B} \cap [C, X]$. Tenemos que $\mathcal{S}$ es un subconjunto de $[C, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$. Como consecuencia de Lema 5.2 se tiene que $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S}) - \mathcal{S} \subseteq \{C\}$.

Por otro lado, si $W \in \tau_X$ tal que $C \subseteq W$. Las condiciones $[C, W] \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ y $[C, W] \subseteq [C, X]$ implican que $([C, W] \cap \mathcal{F}_2[X]) \cap \mathcal{S} = [C, W] \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Con lo cual, $C \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S})$. Por lo tanto, $\{C\} = \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S}) - \mathcal{S}$. Esto prueba que $\mathcal{S}$ es un subconjunto no cerrado del espacio secuencial $\mathcal{F}_2[X]$. Con esto $\mathcal{S}$ no es un subconjunto secuencialmente cerrado de $\mathcal{F}_2[X]$. Así, existe una sucesión convergente $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ cuyo punto límite no pertence a $\mathcal{S}$. De esto cada $B_n \in \mathcal{B}$ y $\lim B_n \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{S}) - \mathcal{S} = \{C\}$. Concluimos que $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn. $\square$

6. Primer axioma de numerabilidad

Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Diremos que $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es una *función de cobertura numerable débilmente abierta* (abreviado como *función de cobertura*) si g satisface:
(1) $x \in g(n, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
(2) $g(n + 1, x) \subseteq g(n, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
(3) Un subconjunto U de X pertence a τ_X si y sólo si para cada $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m, x) \subseteq U$.

Diremos que un espacio topológico X es *$g-$primero numerable* si existe una función de cobertura g de X (cónsulte **[6]** para mayor información sobre esta noción).

Teorema 6.1. *Ser $g-$primero numerable es una propiedad topológica hereditaria y cada espacio topológico primero numerable es $g-$primero numerable.*

Teorema 6.2. *Cada espacio topológico $g-$primero numerable es secuencial.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio topológico $g-$primero numerable. Sean $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función de cobertura y A un subconjunto secuencialmente abierto de X. Veamos que A es abierto. Sean $x \in A$. Supongamos que no existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(r, x) \subseteq A$. De esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in g(n, x) - A$. Probaremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Sea W un subconjunto abierto de X tal que $x \in W$. Dado que X es $g-$primero numerable, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k, x) \subseteq W$. Sea $l \geq k$. Del hecho que $x_l \in g(l, x) \subseteq g(k, x)$ se sigue que $x_l \in W$. Con esto concluimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

La condición A secuencialmente abierto implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq m$. Esto es contradeciría el hecho que $x_n \notin A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Con lo cual concluimos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(r, x) \subseteq A$. Así, A es un subconjunto abierto de X.

Por lo tanto, X es secuencial. $\square$

Teorema 6.3. *Si $\mathcal{F}_2[X]$ es $g-$primero numerable, entonces $\mathcal{F}_2[X]$ es un espacio $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn.*

Demostración: Como consecuencia de Teorema 6.2, se tiene que $\mathcal{F}_2[X]$ es secuencial. Por lo tanto, por Teorema 5.3, se concluye que $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn. $\square$

Proposición 6.4. *Si $g : \mathbb{N} \times \mathcal{F}_2[X] \to \mathcal{F}_2[X]$ es una función de cobertura, entonces para cada $Q \in \mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(n, Q)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$ para todo $n \geq k$*

Demostración: Sea $R \in \mathcal{F}_2[X]$. Si R es un punto aislado de $\mathcal{F}_2[X]$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k, R) \subseteq \{R\}$ y por lo tanto $g(n, R)$ es igual al subconjunto abierto $\{R\}$ de $\mathcal{F}_2[X]$ para cada $n \geq k$. Ahora supondremos que R no es un punto aislado de $\mathcal{F}_2[X]$.

Del hecho que $[R, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_2(k, R) \subseteq ([R, X] \cap \mathcal{F}_2[X])$. Afirmamos que para cada $n \geq k$ se cumple que $g_2(n, R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$. Sean $r \geq k$ y $H \in g_2(r, R)$. Si H fuera igual con R, se verifica que $g_2(r, H) = g_2(r, R)$. En el caso que H fuera distinto de R, dado que $g_2(r, R) \subseteq ([R, X] \cap \mathcal{F}_2[X])$, se tiene que $H \in ([R, X] \cap \mathcal{F}_2[X]) - \{R\}$. Con lo cual H es un subconjunto asilado de $\mathcal{F}_2[X]$. En consecuencia, existe $p \in \mathbb{N}$ el cual cumple que $g_2(p, H) = \{H\}$. Así, $g_2(p, H) \subseteq g_2(r, R)$. Por lo tanto, $g_2(r, R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$. Con esto concluimos que para cada $n \geq k$, $g_2(n, R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$. $\square$

Corolario 6.5. *Si $\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable, entonces $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN: Por Teorema 6.1, se tiene que $\mathcal{F}_2[X]$ es $g-$primero numerable. Ahora, aplicamos Teorema 6.3 para concluir que $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn. $\square$

Teorema 6.6. *Si $\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable, entonces X es primero numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos Teorema 6.1 para obtener que $\mathcal{F}_2[X]$ es $g-$primero numerable. Sea $g : \mathbb{N} \times \mathcal{F}_2[X] \to \mathcal{F}_2[X]$ es una función de cobertura. Teorema 6.4 garantiza que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(n, Q)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$ siempre que $n \geq k$. Supondremos que $k = 1$. De esto se sigue que para cada $(n, x) \in \mathbb{N} \times X$, existe $U(n, x) \in \tau_X$ tal que $[\{x\}, U(n, x)] \subseteq g(n, \{x\})$.

Demostraremos que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X. Sea $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$. Del hecho que $[\{x\}, W] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $g_2(k, \{x\}) \subseteq [\{x\}, W] \cap \mathcal{F}_2[X]$. Veamos que $U(k, x) \subseteq W$. Sea $y \in U(k, x)$. De las condiciones $\{x, y\} \in ([\{x\}, U(k, x)] \cap \mathcal{F}_2[X]) \subseteq g_2(k, \{x\}) \subseteq [\{x\}, W] \cap \mathcal{F}_2[X]$ se sigue que $y \in W$. Así, $U(k, x) \subseteq W$. Con esto queda demostrado que $\{U(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X. Por lo tanto, X es primero numerable. $\square$

Un *desarrollo* para X es una colección numerable de cubiertas abiertas $\{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$ de X que cumple que para cualquier subconjunto cerrado C de X y cualquier punto $p \in X - C$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que ningún elemento de $\mathcal{F}_j$ que contenga a p intersecta a C.

Un espacio topológico se denomina de *Moore* si es regular y tiene un desarrollo (véase [**18**, Definición 2.6, pág. 169]). Cada espacio de Moore satisface el primer axioma de numerabilidad.

Teorema 6.7. *Si X es un espacio primero numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in X$ existe una base local $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ para τ_X en x y tal que $B_{n+1}(x) \subseteq B_n(x)$. Para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n(F) = \{B_n(x) : x \in F\}$.

Observe que para cada $P \in \mathcal{F}[X]$ y cada $V \in \tau_X$ tal que $P \subseteq V$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m(P) \subseteq V$. Usaremos este hecho para demostrar que para cada $P \in \mathcal{F}[X]$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que la condición $P \in [G, B_r(G)]$ implica que $P = G$.

Sea $P \in \mathcal{F}[X]$ y sea F un subconjunto propio no vacío de P. Definimos $S(F) = P - F$. Notemos que $X - S(F)$ es un subconjunto abierto de X que contiene a F. Entonces existe $m_F \in \mathbb{N}$ tal que $B_{m_F}(F) \subseteq X - S(F)$. Definimos $r = \max\{m_F : F \text{ es un subconjunto propio no vacío de } P\}$. Supongamos que $P \in [G, B_r(G)]$. Esto significa que $G \subseteq P \subseteq B_r(G)$. Si G es un subconjunto propio de P, entonces $m_G \leq r$ y $P \subseteq B_r(G) \subseteq B_{m_G}(G) \subseteq X - S(G)$, esto contradice el hecho que $S(G)$ es un subconjunto no vacío de P. Concluimos que $G = P$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\mathfrak{H}_n = \{[F, B_n(F)] : F \in \mathcal{F}[X]\}$. Se tiene que cada $\mathfrak{H}_n$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$. Afirmamos que $\mathscr{H} = \{\mathfrak{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$.

Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$ y sea $P \in \mathcal{F}[X]$ tal que $P \notin \mathcal{C}$. Elegimos $W \in \tau_X$ tal que $[P, W] \subseteq \mathcal{F}[X] - \mathcal{C}$. De lo anterior existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(P) \subseteq W$ y si $P \in [G, B_k(G)]$, entonces $P = G$. Podemos concluir que el único elemento de $\mathfrak{H}_k$ que contiene a P es $[P, B_k(P)]$ que es ajeno con $\mathcal{C}$. Con esto concluimos que $\mathscr{H}$

es un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$. Por Corolario 2.11, concluimos que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore. $\square$

Corolario 6.8. *Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(6.8.1) *$\mathcal{F}[X]$ es un espacio primero numerable.*
(6.8.2) *$\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable.*
(6.8.3) *X es primero numerable.*
(6.8.4) *$\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore.*

Bibliografía

[1] A. Bella and M. Sakai, *Tight points of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **160** (2013), no. 16, 2061–2068 (English).
[2] H. R. Bennett, W. G. Fleissner, and D. J. Lutzer, *Metrizability of certain Pixley-Roy spaces*, Fundam. Math. **110** (1980), 51–61 (English).
[3] P. Daniels, *The co-less-than-λ topology and Pixley-Roy spaces*, Topol. Proc. **7** (1982), no. 2, 207–224 (English).
[4] ______, *Pixley-Roy spaces over subsets of the reals*, Topology Appl. **29** (1988), no. 1, 93–106 (English).
[5] A. Hajnal and I. Juhász, *When is a Pixley-Roy hyperspace CCC?*, Topology Appl. **13** (1982), 33–41 (English).
[6] K. B. Lee, *On certain g-first countable spaces*, Pac. J. Math. **65** (1976), 113–118 (English).
[7] Z. Li, *The Hurewicz separability of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **324** (2023), 10 (English), Id/No 108355.
[8] D. J. Lutzer, *Pixley-Roy topology*, Topol. Proc. **3** (1979), no. 1, 139–158 (English).
[9] C. Pixley and P. Roy, *Uncompletable Moore spaces*, Proc. Auburn Topology Conf. 1969, 75-85 (1969)., 1969.
[10] T. C. Przymusinski, *Normality and paracompactness of Pixley-Roy hyperspaces*, Fundam. Math. **113** (1981), 201–219 (English).
[11] M. Sakai, *Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 13, 3080–3088 (English).
[12] ______, *The Fréchet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 1, 308–314 (English).
[13] ______, *Selective separability of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 6, 1591–1598 (English).
[14] ______, *The weak Hurewicz property of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **160** (2013), no. 18, 2531–2537 (English).
[15] H. Tanaka, *Normality and hereditarily countable paracompactness of Pixley-Roy hyperspaces of metric spaces*, Quest. Answers Gen. Topology **2** (1984), 64–68 (English).
[16] ______, *Normality and hereditary countable paracompactness of Pixley-Roy hyperspaces*, Fundam. Math. **126** (1986), 201–208 (English).
[17] E. K. van Douwen, *The Pixley-Roy topology on spaces of subsets*, Set-theor. Topol., Vol. dedic. to M. K. Moore, 111-134, 1977.
[18] S. Willard, *General topology*, reprint of the 1970 original ed., Mineola, NY: Dover Publications, 2004 (English).

Correos electrónicos:

`dmayae@uaemex.mx`, `dmayae@outlook.com` (David Maya)
`mmoralesb001@alumno.uaemex.mx`, `miguel.angel.morales.24.04.99@gmail.com` (Miguel Angel Morales Bautista)

CAPÍTULO 5

Introducción a la conexidad relativa en espacios topológicos

Florencio Corona Vázquez, Jesús Díaz Reyes, Russell Aarón Quiñones Estrella
y Javier Sánchez Martínez
Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Chiapas

1. Introducción

Dentro de la topología general aparece la pregunta de cómo un subespacio se encuentra situado dentro de un espacio ambiente, este es el origen y la motivación para estudiar propiedades topológicas relativas de un subespacio Y de X. El estudio sistemático de las propiedades topológicas relativas fue iniciado por A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi en un artículo publicado en ruso en 1989 [**1**]. En [**2**], se puede encontrar una recopilación del estudio de algunas propiedades relativas que se desprenden de los axiomas de separación y de la compacidad.

La idea principal es como sigue: Sea Y un subespacio de un espacio topológico X, dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$ de X, una *propiedad relativa* $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ se define en términos de Y y X de tal forma que si $Y = X$ entonces $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Por ejemplo:

$\mathcal{P}$: X es un espacio normal.

$\mathcal{Q}$: para cada par A, B de conjuntos ajenos y cerrados en X, existen conjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $A \cap Y \subset U$ y $B \cap Y \subset V$.

Se dice que Y es *normal en* X si los espacios Y y X cumplen $\mathcal{Q}$. Si en $\mathcal{Q}$, se pide que U y V sean abiertos en Y, se obtiene otra propiedad relativa $\mathcal{Q}'$, a saber, Y *cercanamente normal en* X. En cualquier caso, si $Y = X$ entonces $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' = \mathcal{P}$.

Como el ejemplo anterior advierte, de una propiedad topológica se pueden desprender varias propiedades relativas, por lo tanto resulta de interés encontrar todas las propiedades relativas que se derivan de una propiedad topológica e investigar las relaciones que hay entre ellas. Por otra parte, se espera que la mayoría de los resultados en topología puedan ser reformulados en términos de propiedades relativas. Por ejemplo, se sabe que todo espacio Hausdorff compacto es normal, una versión relativa de este resultado es como sigue: Si X es Hausdorff y Y es compacto en X entonces Y es normal en X, aquí Y es *compacto en* X significa que toda cubierta abierta de X tiene una subfamilia finita que cubre Y.

En el presente capítulo, se atenderán las cuestiones establecidas en el párrafo anterior para la propiedad topológica de conexidad. Cabe señalar que los resultados y definiciones fueron extraídos de [**4**]; sin embargo, aquí hemos preparado un texto autocontenido incluyendo algunas figuras que facilitan la comprensión de los ejemplos y presentando a mayor detalle las demostraciones de los resultados, pretendiendo con esto que cualquier lector con conocimientos básicos de topología sea capaz de leer el material y se motive en el tema de *propiedades relativas de conexidad*.

Actualmente, se sigue haciendo investigación en propiedades relativas, como ejemplo, los artículos [**9**] y [**6**] abordan la *paracompacidad* y *principios de selección*, respectivamente. Por lo que el tema de propiedades relativas continúa siendo de relevancia.

En la sección 2, se enuncian el concepto de conexidad y algunas de sus equivalencias, así como resultados clásicos referentes a esta propiedad. En la sección 3, se presentan algunos tipos de conexidad relativa de Y en X; mostrando las relaciones entre estos conceptos y se dan contraejemplos para aquellas implicaciones que no se cumplen de forma general. En la sección 4, se muestran versiones relativas de los resultados presentados en la sección 2.

2. Preliminares

A lo largo del escrito, X denota un espacio topológico arbitrario. Dado $A \subset X$, se denota como de costumbre por $\mathrm{Fr}(A)$ y $\overline{A}$, a la frontera y cerradura de A en X, respectivamente. Si $B \subset A$ denota por $\mathrm{Fr}_A(B)$ y $\overline{B}^A$ a la frontera y cerradura de B en el subespacio A.

Ahora, presentamos los conceptos y resultados que son necesarios para los fines del capítulo. Iniciamos con la definición de espacio conexo, la cual captura la idea intuitiva de que un espacio conste de una sola pieza.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Una separación de X es una pareja U, V de conjuntos no vacíos y abiertos en X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap U = \emptyset$. El espacio X se dice* conexo *si no existe una separación de X. Además, un subconjunto Y de X es conexo, si Y es conexo con la topología de subespacio.*

Observe que en la definición de espacio conexo, los conjuntos U y V que definen una separación son cerrados y abiertos, es decir, un espacio topológico X es conexo si y sólo si X no se puede expresar como la unión de dos de sus subespacios cerrados, ajenos y no vacíos. El concepto de conexidad puede caracterizarse en términos de conceptos topológicos diferentes al de conjuntos abiertos o cerrados. Dentro de las caracterizaciones más usuales están las que se enuncian a continuación, mismas que se pueden consultar en [**3**, Cap. 8].

Teorema 2.2. *Para un espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es conexo.*
(2) *No existen dos subconjuntos no vacíos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$.*

(3) No existe una función continua y suprayectiva $f : X \to \{0,1\}$, donde $\{0,1\}$ se considera como subespacio de $\mathbb{R}$.
(4) Para cada subconjunto A de X tal que $\emptyset \neq A \neq X$, se cumple que $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$ (equivalentemente, A no es abierto y cerrado en X).
(5) Para cada $x, y \in X$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X tal que $x, y \in A_{y,x}$.

El siguiente teorema provee algunas formas de construir espacios conexos, la prueba se sigue de los corolarios 6.1.10, 6.1.11 y los teoremas 6.1.3 y 6.1.28 de [**5**], respectivamente.

Teorema 2.3. *Dado X un espacio topológico, se cumplen las afirmaciones siguientes:*

(1) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de subespacios conexos de X. Si $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.
(2) Si Y es un subespacio conexo de X entonces para cada subconjunto Z de X tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, se cumple que Z es conexo, en particular, $\overline{Y}$ es conexo.
(3) Si $f : X \to Z$ es una función continua entre espacios topológicos y X es conexo entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Z.
(4) Si $q : X \to Z$ es una función cociente y monótona entonces para todo subespacio conexo W de Z ya sea cerrado o abierto, $q^{-1}(W)$ es un espacio conexo (recuerde que una función continua es monótona *si sus fibras son conexas).*

Uno de los objetivos del presente trabajo es mostrar versiones similares al teorema anterior, para cada uno delos distintos tipos de conexidad relativa.

Terminamos esta sección enunciando un par de teoremas auxiliares que serán utilizados más adelante. El primero de ellos es conocido como el "teorema del cable cortado", cuya demostración puede consultarse en [**8**, p. 15, 9,3]. El segundo se refiere a una propiedad que poseen las funciones cocientes, su respectiva demostración se puede encontrar en [**7**, Teorema 22.2].

Teorema 2.4. *Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Si A y B son conjuntos cerrados en X con la propiedad de que ningún subespacio conexo de X interseca a A y a B, existen entonces dos conjuntos cerrados y ajenos X_1 y X_2 de X, tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subseteq X_1$ y $B \subseteq X_2$.*

Teorema 2.5. *Sean $q : X \to Z$ una función cociente, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función que es constante en el conjunto $q^{-1}(z)$, para todo $z \in Z$. Existe entonces una función $g : Z \to Y$ con $g \circ q = f$ y tal que g es continua si y sólo si f es continua.*

3. Definiciones y ejemplos de conexidad relativa

Lo establecido en el teorema 2.2, motiva de manera natural las siguientes versiones relativas del concepto de conexidad, que son las que estudiamos en el presente trabajo.

Definición 3.1. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:*

(1) *Y es conexo$_1$ en X si para todo $A \subseteq Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$ se cumple que* $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.
(2) *Y es conexo$_2$ en X si no existe una función continua $f : X \to \{0,1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva.*
(3) *Y es conexo$_3$ en X si para cualesquiera $x, y \in Y$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X con $x, y \in A_{x,y}$.*
(4) *Y es conexo$_4$ en X si no existen conjuntos cerrados A y B en X tales que $Y \subseteq A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$.*
(5) *Y es conexo$_5$ en X si no existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$.*
(6) *Y es conexo$_S$ en X si no existen subconjuntos A y B de X tales que $Y \subseteq A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$.*
(7) *Y es conexo$_X$ en X si para todo $y \in Y$ y para todo $x \in X$ existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ de X con $x, y \in A_{x,y}$.*

Observe que si $Y = X$ y Y es conexo$_i$ en X, con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, S, X\}$, entonces se recupera el concepto de conexidad de X por el teorema 2.2; lo cual muestra que los conceptos en la definición anterior son versiones relativas de la conexidad.

En el siguiente resultado, se caracteriza la conexidad$_i$ para $i \in \{3, 4, S, X\}$; es oportuno mencionar que a lo largo del escrito serán empleadas dichas equivalencias sin hacer necesariamente referencia textual de ellas.

Teorema 3.2. *Sea Y un subespacio de un espacio topológico X. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) *Y es conexo$_S$ en X si y sólo si Y es un subespacio conexo de X.*
(2) *Y es conexo$_X$ en X si y sólo si X es un espacio conexo.*
(3) *Y es conexo$_3$ en X si y sólo si existe un subespacio conexo $Z \subset X$ tal que $Y \subseteq Z$.*
(4) *Y es conexo$_4$ en X si y sólo si $\overline{Y}$ es un espacio conexo.*

Demostración: (1) Suponga que Y no es un espacio conexo. Sea U y V una separación de Y. Dado que

$$\emptyset = \overline{U}^Y \cap V = (\overline{U}^X \cap Y) \cap V = \overline{U}^X \cap (Y \cap V) = \overline{U}^X \cap V,$$

se tiene que $\overline{U}^X \cap V = \emptyset$. Análogamente se demuestra que $U \cap \overline{V}^X = \emptyset$. Por lo tanto, los conjuntos U y V garantizan que Y no es conexo$_S$ en X.

Ahora, si Y no es conexo$_S$ en X entonces existen conjuntos A y B tales que $Y \subseteq A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$. Observe que $Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$. Por otra parte,

$$\overline{A \cap Y}^Y \cap (B \cap Y) = (\overline{A \cap Y}^X \cap Y) \cap (B \cap Y) \subseteq \overline{A}^X \cap B = \emptyset.$$

Análogamente, se prueba que $(A \cap Y) \cap \overline{B \cap Y}^Y = \emptyset$. Por lo tanto, los conjuntos $A \cap Y$ y $A \cap Y$ son una separación para Y, esto es, Y no es un espacio conexo.

(2) Suponga que Y es conexo$_X$ en X. Se fija $y \in Y$. Luego, para cada $x \in X \setminus \{y\}$, existe un espacio conexo $A_{x,y}$ que contiene a los puntos x, y. Se tiene que $X = \bigcup_{x \in X \setminus \{y\}} A_{\{x,y\}}$, del teorema 2.3 (1), se obtiene que X es conexo. La otra implicación es inmediata.

(3) Suponga que Y es conexo$_3$ en X y fija un punto $p \in Y$. Para todo $y \in Y$ existe un subespacio conexo $A_{p,y}$ de X que contiene a los puntos p y y. Se

define $Z = \bigcup_{y\in Y} A_{p,y}$. Del teorema 2.3 (1), Z es un espacio conexo y claramente $Y \subseteq Z \subseteq X$. El recíproco es inmediato.

(4) Si $\overline{Y}$ no es un espacio conexo entonces existen subconjuntos cerrados A y B en $\overline{Y}$, no vacíos y anejos tales que $\overline{Y} = A \cup B$, como A y B resultan también conjuntos cerrados en X, estos conjuntos garantizan que Y no es conexo$_4$ en X.

Ahora, si Y no es conexo$_4$ en X entonces existen conjuntos cerrados A y B en X tales que $Y \subseteq A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$, de estas condiciones se obtiene que $\overline{Y} \subseteq A \cup B$ y, si $A' = A \cap \overline{Y}$ y $B' = B \cap \overline{Y}$, entonces A' y B' son conjuntos cerrados en $\overline{Y}$, ajenos, no vacíos y tales que $\overline{Y} = A' \cup B'$, es decir, $\overline{Y}$ no es un espacio conexo. $\square$

Observe que las propiedades de conexo$_S$ y conexo$_X$ no resultan interesantes desde el punto de vista relativo, por lo que en la siguiente sección no serán consideradas, vea nota 4.1.

De lo establecido en el teorema 3.2, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Si Y es conexo$_S$ en X o Y es conexo$_4$ en X o Y es conexo$_X$ en X entonces Y es conexo$_3$ en X.*

El corolario 3.3, deja entrever que algunos de los conceptos en la definición 3.1 están relacionados.

En el siguiente resultado presentamos relaciones del estilo: si Y es conexo$_i$ en X entonces Y es conexo$_j$ en X, que abreviadamente escribimos $C_i \to C_j$.

Teorema 3.4. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Las implicaciones en la figura 1 se satisfacen.*

$$\begin{tikzcd}
C_X \arrow[drr] & & & & \\
C_S \arrow[r] \arrow[dr] & C_4 \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_1 \\
& C_5 \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1.

DEMOSTRACIÓN: $C_2 \to C_1$: Si Y no es conexo$_1$ en X entonces existe $A \subseteq Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$ y $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Se define la función $f : X \to \{0,1\}$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(X \setminus A) = \{1\}$. Como A es un conjunto cerrado y abierto en X, se tiene que f es una función continua. Note que existen $a, b \in X$ tales que $a \in A \subseteq Y$ y $b \in Y \setminus A$, de donde $f(Y) = \{0,1\}$, es decir, $f|_Y$ es suprayectiva, esto implica que Y no es conexo$_2$ en X.

$C_3 \to C_2$: Se procede por contradicción, suponga que Y no es conexo$_2$ en X, es decir, que existe una función continua $f : X \to \{0,1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad suponga que $f(y_0) = 0$ para algún $y_0 \in Y$. Por hipótesis, para cualquier $y \in Y$, existe un subespacio conexo A_{y,y_0} de X que tiene a los puntos y y y_0. Dado que f es una función continua, $f(A_{y,y_0})$ es un espacio conexo, se sigue que $f(A_{y,y_0}) = \{0\}$ ya que $0 \in f(A_{x,y_0})$. Como y fue elegido arbitrariamente, se concluye que $f(Y) = \{0\}$, contradiciendo que $f|_Y$ es suprayectiva.

$C_4 \to C_3$ y $C_X \to C_3$: corolario 3.3.

$C_S \to C_4$ y $C_S \to C_5$: Suponga que Y es conexo$_S$ en X. Del hecho que para cualesquiera conjuntos cerrados (o abiertos) A y B en X tales que $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$; se sigue que Y es conexo$_4$ en X y que Y es conexo$_5$ en X.

$C_5 \to C_2$: Si Y no es conexo$_2$ en X entonces que existe una función continua $f : X \to \{0,1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Considere los conjuntos siguientes: $U = f^{-1}(\{0\})$ y $V = f^{-1}(\{1\})$. Claramente, U y V son ajenos y abiertos en X. Por otra parte, como $f|_Y$ es suprayectiva, se tiene que $Y \subseteq U \cup V$ y que $U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap Y$, es decir, Y no es conexo$_5$ en X. $\square$

Una parte fundamental, de esta sección, es garantizar que los conceptos en la definición 3.1 son independientes unos de otros, en otras palabras, mostraremos que no existen otras implicaciones además de las establecidas en el teorema anterior. Con este propósito, proporcionamos los siguientes ejemplos; al inicio de cada ejemplo, $C_i \setminus C_j$ significa que se exhiben espacios topológicos Y y X tales que Y es conexo$_i$ en X y Y no es conexo$_j$ en X.

Ejemplo 3.5 $(C_X, C_3, C_2 \setminus C_S, C_4, C_5)$**.** *Considere $X = [0,1]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$ y $Y = \{0,1\}$. Como X es conexo, Y es conexo$_X$ en X, del teorema 3.4, Y es conexo$_3$ en X y Y es conexo$_2$ en X.*

Por otra parte, los conjuntos $A = [0, \frac{1}{3}]$ y $B = [\frac{2}{3}, 1]$ garantizan que Y no es conexo$_4$ en X y, por lo tanto, Y no es conexo$_S$ en X. Los conjuntos $U = [0, \frac{1}{3})$ y $V = (\frac{2}{3}, 1]$ garantizan que Y no es conexo$_5$ en X.

Ejemplo 3.6 $(C_5 \setminus C_3, C_4, C_S, C_X)$**.** *Denota por p y q los puntos en $\mathbb{R}^2$, $(0,0)$ y $(1,0)$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$. Considere los conjuntos*

$$X = \{L_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p, q\} \quad y \quad Y = \{p, q\}$$

Con la siguiente topología: las vecindades de los puntos en $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ son las usuales que se heredan $\mathbb{R}^2$; y las vecindades para los puntos $y \in Y$, son de la forma $\{y\} \cup \bigcup_{i \geq n} L_i$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (vea figura 2).

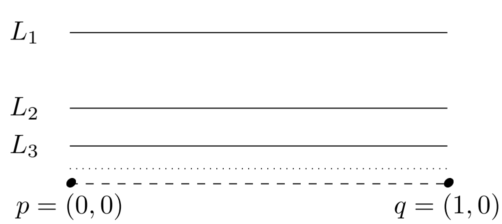


FIGURE 2.

Se tiene que Y es conexo$_5$ en X puesto que cualesquiera vecindades de p y q en X tienen intersección no vacía.

Se mostrará que Y no es conexo$_3$ en X. Si se supone lo contrario entonces existe un subespacio conexo $A_{p,q}$ de X que tiene a los puntos p y q. Dado que L_i es un conjunto cerrado y abierto en X, si para algún $i \in \mathbb{N}$, $A_{p,q} \cap L_i \neq \emptyset$, entonces

$A_{p,q} \subseteq L_i$, lo cual no es posible. Por lo tanto, para todo $i \in \mathbb{N}$, $A_{p,q} \cap L_i = \emptyset$, es decir, $A_{p,q} = \{p, q\}$. Sin embargo, p y q son puntos aislados en $A_{p,q}$, que contradice que $A_{p,q}$ es conexo.

En vista del teorema 3.4, se obtiene también que Y no es conexo$_i$ en X para $i \in \{4, S, X\}$

Ejemplo 3.7 ($C_2 \setminus C_3, C_4, C_S, C_X$)**.** *Considere los conjuntos X y Y como en el ejemplo 3.6 con la topología usual heredada de $\mathbb{R}^2$ (vea la figura 2).*

Se afirma que Y es conexo$_2$ en X. Por contradicción. Suponga que existe una función continua $f : X \to \{0, 1\}$ tal que $f|_Y$ es suprayectiva. Sin pérdida de generalidad Suponga que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$. Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, L_n es un espacio conexo, por lo que el espacio $f(L_n)$ también lo es, de donde se obtiene que $f(L_n) = \{0\}$ o $f(L_n) = \{1\}$ sin cumplirse ambas condiciones a la vez. Como el conjunto $f^{-1}(0)$ es abierto en X y no vacío ($p \in f^{-1}(0)$), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_n \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N_0$. De manera análoga, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $L_n \cap f^{-1}(1) \neq \emptyset$. Ahora, si $m > \max\{N_0, N_1\}$ entonces $f(L_m) = \{0, 1\}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba la afirmación.

Por otra parte, como no existe algún espacio conexo que tenga a los puntos p y q, se concluye que Y no es conexo$_3$ en X.

En vista de lo establecido en el teorema 3.4, también se tiene que Y no es conexo$_i$ en X para $i \in \{4, S, X\}$.

Ejemplo 3.8 ($C_1 \setminus C_2, C_3, C_4, C_5, C_S, C_X$)**.** *Considere $X = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y $Y = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ (vea figura 3).*

FIGURE 3.

Note que para todo conjunto $A \subseteq Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$, se tiene que $A = \{\frac{1}{3}\}$ o $A = \{\frac{2}{3}\}$, en cualquier caso $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, Y es conexo$_1$ en X.

Por otra parte, se define la función $f : X \to \{0, 1\}$ tal que $f([0, \frac{1}{3}]) = \{0\}$ y $f([\frac{2}{3}, 1]) = \{1\}$. Se cumple que f es una función continua y $f|_Y$ es suprayectiva, es decir, Y no es conexo$_2$ en X.

En vista de lo establecido en el teorema 3.4, también se tiene que Y no es conexo$_i$ en X para $i \in \{3, 4, 5, S, X\}$.

Ejemplo 3.9 ($C_S, C_3, C_4 \setminus C_X$)**.** *Sea $X = [0, 1] \cup \{2\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ y $Y = [0, 1]$ (vea la figura 4).*

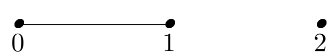


FIGURE 4.

Como Y es un espacio conexo, Y es conexo$_S$ en X, Y es conexo$_3$ en X y Y es conexo$_4$ en X . Sin embargo, Y no es conexo$_X$ en X puesto que X no es conexo.

Ejemplo 3.10 ($C_4 \setminus C_5, C_S$)**.** *Considere $X = \{a, b, c\}$ con la topología*

$$\tau = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X, \emptyset\}$$

y el subespacio $Y = \{a, b\}$ (vea la figura 5).

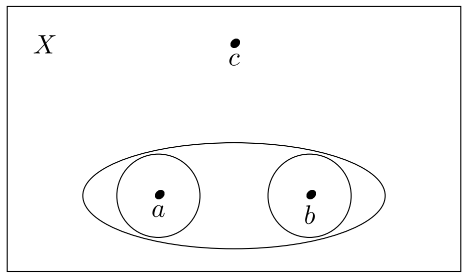


FIGURE 5.

Note que Y es conexo$_4$ en X, ya que los únicos conjuntos cerrados diferentes de X, que tienen a los puntos a o b son los conjuntos $\{a, z\}$ y $\{b, z\}$, cuya intersección es no vacía. Por otra parte, los conjuntos abiertos $\{a\}$ y $\{b\}$ atestiguan que Y no es conexo$_5$ en X. Por lo tanto, también se tiene que Y no es conexo$_S$ en X.

Una pregunta natural que surge es que si $C_i \to C_j$ no se cumple: ¿Qué condiciones adicionales debe tener el espacio X para que la implicación anterior se satisfaga?

La proposición 3.11 y el teorema 3.12, responden parcialmente la pregunta anterior. Con este fin, recordemos que un espacio topológico X que es T_1 se dice *hereditariamente normal* si cada subespacio de X es normal.

Proposición 3.11. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Sea X un espacio hereditariamente normal. Entonces, Y es conexo$_5$ en X si y sólo si Y es conexo$_S$ en X.
(2) Sea Y un subespacio cerrado en X. Entonces, Y es conexo$_4$ en X si y sólo si Y es conexo$_S$ en X.

DEMOSTRACIÓN: Lo establecido en el punto (1) se sigue de la caracterización siguiente: X es completamente normal si y sólo si para cada par de conjuntos A y B de X tales que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, existen conjuntos abiertos U y V, ajenos y tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. La parte (2) es consecuencia inmediata del enunciado en el teorema 3.2 (4). □

Teorema 3.12. *Sea Y un subespacio de un espacio Hausdorff y compacto X. Se tiene que Y es conexo$_3$ en X si y sólo si Y es conexo$_2$ en X*

DEMOSTRACIÓN: Sólo es necesario demostrar que si Y es conexo$_2$ en X entonces Y es conexo$_3$ en X. Suponga que Y no es conexo$_3$ en X, es decir, que existen $x, y \in Y$ tal que ningún espacio conexo los contiene. Del teorema 2.4, existen X_1 y X_2 conjuntos ajenos y cerrados en X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $\{x\} \subseteq X_1$ y $\{y\} \subseteq X_2$. Puesto que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, se tiene que la función $f : X \to \{0, 1\}$ dada por $f(X_1) = \{0\}$ y $f(X_2) = \{1\}$, está bien definida. Como X_1 y X_2 son conjuntos cerrados en X, se tiene que f es continua. Por otra parte, $f|_Y$ es suprayectiva ya que $f(\{x,y\}) = \{0,1\}$. Por lo tanto, la función f garantiza que Y no es conexo$_2$ en X. $\square$

4. Resultados en conexidad relativa

En esta sección se incluyen los primeros resultados obtenidos en conexidad relativa, acerca de si estas se conservan bajo cerradura, funciones continuas, uniones, productos y la preimagen de funciones monótonas.

Nota 4.1. *Con base en lo establecido en el teorema 3.2, la propiedad relativa de ser Y conexo$_S$ en X no depende del espacio X y, la propiedad relativa de ser Y conexo$_X$ en X, no depende del espacio Y. Por lo tanto, resultan no atractivas desde el punto de vista relativo, es por ello que no se incluyen en los resultados presentados en esta sección.*

Teorema 4.2. *Sean X un espacio topológico, $Y, Z \subseteq X$, con $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, e $i \in \{2,3,4,5\}$. Si Y es conexo$_i$ en X entonces Z es conexo$_i$ en X.*

Demostración: $i = 5$: Si Z no es conexo$_5$ en X entonces existen U y V conjuntos abiertos en X tales que $Z \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Z \neq \emptyset \neq V \cap Z$.

Si $Y \subseteq U$ entonces $\overline{Y} \subseteq \overline{U}$, de donde $\overline{Y} \cap V = \emptyset$, pero $\emptyset \neq Z \cap V \subseteq \overline{Y} \cap V$, lo cual es una contradicción. Análogamente, se llega a una contradicción si se supone que $Y \subseteq V$. Dado que $Y \subseteq Z$, se tiene que $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, los conjuntos U y V garantizan que Y no es conexo$_5$ en X.

$i = 4$: La demostración es análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Fija $p \in Y$. De la hipótesis, para cada $y \in Y$ existe un conjunto conexo $A_{p,y}$ que tiene a los puntos p y y. Se tiene que $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} A_{p,y}$. Denota $W = \bigcup_{y \in Y} A_{p,y}$. Claramente $\overline{Y} \subseteq \overline{W}$. Del teorema 2.3 (1) y (2), $\overline{W}$ es un espacio conexo; como $Z \subseteq \overline{W}$, del teorema 3.2 (3), se concluye que Z es conexo$_3$ en X.

$i = 2$: Sea $f : X \to \{0,1\}$ una función continua. Demuestra que $f|_Z$ no es suprayectiva. Puesto que $Y \subseteq Z$ y Y es conexo$_2$ en X, se tiene que $Y \subseteq f^{-1}(0)$ o $Y \subseteq f^{-1}(1)$. Si $Y \subseteq f^{-1}(0)$, de la continuidad de f, se sigue que $\overline{Y} \subseteq f^{-1}(0)$ y como $Z \subseteq \overline{Y}$, se concluye que $f|_Z$ no es suprayectiva. De manera análoga se demuestra que si $Y \subseteq f^{-1}(1)$ entonces $f|_Z$ no es suprayectiva. Por lo tanto, Z es conexo$_2$ en X. $\square$

Corolario 4.3. *Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$ e $i \in \{2,3,4,5\}$. Si Y es conexo$_i$ en X entonces $\overline{Y}$ es conexo$_i$ en X.*

El siguiente ejemplo muestra que el teorema 4.2 no se cumple para el concepto relativo de conexidad$_1$.

Ejemplo 4.4. *Sea $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})$ con la topología usual heredada de $\mathbb{R}^2$. Define $W = (0,1) \times \{0\}$, $a = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ y $Y = W \cup \{a\}$ (vea la figura 6).*

Se probará que Y es conexo$_1$ en X. Suponga que no, esto es, que existe $A \subseteq Y$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y$ con $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Se tiene que A es un conjunto cerrado y abierto en X. Como A es un conjunto abierto, $a \notin A$ (toda vecindad de a tiene intersección con el conjunto $(0,1] \times \{1\}$). Ahora, como A es un conjunto cerrado $A \neq W$, entonces los conjuntos A y $W \setminus A$ son una separación para el subespacio W, que contradice el hecho que W es conexo.

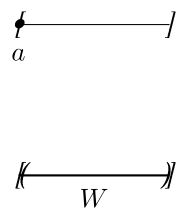


FIGURE 6.

Ahora, sea $Z = ([0,1] \times \{0\}) \cup \{a\}$. Note que $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ sin embargo, Z no es conexo$_1$ en X, ya que si $B = [0,1] \times \{0\}$ entonces $\emptyset \neq B \neq Z$ y, dado que B es un conjunto abierto y cerrado en X, $\mathrm{Fr}(B) = \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema garantiza que las propiedades relativas de conexidad se preservan bajo la imagen de funciones continuas.

Teorema 4.5. *Sean X, Z espacios topológicos y $f : X \to Z$ una función continua e $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si Y es conexo$_i$ en X entonces $f(Y)$ es conexo$_i$ en Z.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \to Z$ una función continua.

$i = 5$: Suponga que $f(Y)$ no es conexo$_5$ en Z. Entonces, existen U y V subconjuntos abiertos en Z tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cap f(Y) \neq \emptyset \neq V \cap f(Y)$ y $f(Y) \subseteq U \cup V$. Como f es una función continua, se obtiene que los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X. Se verifica, sin dificultad, que $Y \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ y $f^{-1}(U) \cap Y \neq \emptyset \neq f^{-1}(V) \cap Y$. Por lo tanto, los subconjuntos $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ de X atestiguan que Y no es conexo$_5$ en X.

$i = 4$: La demostración es análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Suponga que Y es conexo$_3$ en X. Se verificará que $f(Y)$ es conexo$_3$ en Z. Sean $f(x), f(y) \in f(Y)$ con $x, y \in Y$. Por hipótesis, existe un subespacio conexo $A_{x,y}$ que tiene a los puntos x y y. Del teorema 2.3 (3), $f(A_{x,y})$ es un subespacio conexo de Z que contiene a los puntos $f(x)$ y $f(y)$, es decir, $f(Y)$ es conexo$_3$ en Z.

$i = 2$: Suponga que $f(Y)$ no es conexo$_2$ en Z. Entonces, existe una función continua $g : Z \to \{0, 1\}$ tal que $g|_{f(Y)}$ es suprayectiva. Claramente, la función $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ es continua. Se probará que $(g \circ f)|_Y$ es suprayectiva. En efecto, como $g|_{f(Y)}$ es suprayectiva, existen $f(a), f(b) \in f(Y)$ (con $a, b \in Y$) tales que $g(f(a)) = 0$ y $g(f(b)) = 1$, es decir, existen $a, b \in Y$ tales que $(g \circ f)(a) = 0$ y $(g \circ f)(b) = 1$. Por lo tanto, la función $g \circ f$ garantiza que Y no es conexo$_2$ en X.

$i = 1$: Suponga que Y es conexo$_1$ en X. Se verificará que $f(Y)$ es conexo$_1$ en Z. Para ello, sea $A \subseteq f(Y)$ tal que $\emptyset \neq A \neq f(Y)$ y se probará que $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$. Note que $\emptyset \neq f^{-1}(A) \neq Y$; por hipótesis, $\mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \neq \emptyset$. Usando la continuidad de f,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) &= \overline{f^{-1}(A)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(A)} \\ &= \overline{f^{-1}(A)} \cap \overline{f^{-1}(Z \setminus A)} \\ &\subseteq f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{Z \setminus A}) \\ &= f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{Z \setminus A}) \\ &= f^{-1}(\mathrm{Fr}(A)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\emptyset \neq f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$, es decir, $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$. □

Como es sabido, dada una familia de espacios conexos con intersección no vacía, resulta que la unión de esta familia resulta nuevamente un espacio conexo. El siguiente teorema presenta la versión relativa de dicho resultado.

Teorema 4.6. *Sean $i \in \{2,3,4,5\}$ y $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conexos$_i$ subespacios de X. Si la familia tiene intersección no vacía entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es conexo$_i$ en X.*

DEMOSTRACIÓN: Denota $Y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$.

$i = 5$: Por contradicción, suponga que Y no es conexo$_5$ en X. Entonces, existen U y V conjuntos abiertos en X tales que $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$. Observe que para todo $\alpha \in \Lambda$, $Y_\alpha \cap U = \emptyset$ o $Y_\alpha \cap V = \emptyset$, de lo contrario, Y_α no sería conexo$_5$ en X. Se obtiene que para cada $\alpha \in \Lambda$, $Y_\alpha \subseteq V$ o $Y_\alpha \subseteq U$. Define los conjuntos siguientes:

$$I = \{\alpha \in \Lambda : Y_\alpha \subseteq U\} \quad \text{y} \quad J = \{\alpha \in \Lambda : Y_\alpha \subseteq V\}.$$

Si $I = \emptyset$ o $J = \emptyset$ entonces $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap U = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $I \neq \emptyset$ y $J \neq \emptyset$.

Sean $\alpha_i \in I$ y $\alpha_j \in J$. Se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha \subseteq Y_{\alpha_i} \cap Y_{\alpha_j} \subseteq U \cap V;$$

lo cual es una contradicción ya que $U \cap V = \emptyset$.

$i = 4$: La prueba es totalmente análoga a la de $i = 5$.

$i = 3$: Se mostrará que Y es conexo$_3$ en X. Para cualesquiera $x, y \in Y$, existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $x \in Y_\alpha$ y $y \in Y_\beta$. Fija $p \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$. Como Y_α es conexo$_3$ en X y Y_β es conexo$_3$ en X, existen espacios conexos $A_{x,p}$ y $A_{y,p}$ que tienen a los puntos x, p y y, p, respectivamente. Del teorema 2.3 (1), se sigue que $A_{x,p} \cup A_{y,p}$ es un subespacio conexo de X, y claramente tiene a los puntos x y y.

$i = 2$: Se demostrará que Y es conexo$_2$ en X. Sea $f : X \to \{0,1\}$ una función continua. Se afirma que $f|_Y$ no es suprayectiva. En efecto, elija $p \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $f(p) = 0$. Dado $y \in Y$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $y \in Y_\alpha$. Como Y_α es conexo$_2$ en X, $f|_{Y_\alpha}$ no es suprayectiva, por lo que $f(y) = 0$. Se concluye que $f(Y) = 0$, es decir, $f|_Y$ no es suprayectiva. □

El teorema 4.6 no se satisface para el concepto relativo de conexidad$_1$. Para ello, se proporciona el ejemplo a continuación.

Ejemplo 4.7. *Considere el conjunto $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. Sea el punto $a = (0,1)$, $Y_1 = ([0,\frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup \{a\}$ y $Y_2 = ([\frac{1}{2},1] \times \{0\}) \cup \{a\}$. (vea la figura 7).*

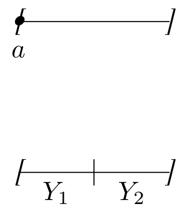


FIGURE 7.

Se afirma que Y_1 es conexo$_1$ en X. Por contradicción, suponga que existe $A \subseteq Y_1$ tal que $\emptyset \neq A \neq Y_1$ y $\operatorname{Fr} A = \emptyset$. Se tiene que A es un conjunto abierto y cerrado en X. Como A es un conjunto abierto, $a \notin A$, se tiene que A está contenido propiamente en el conjunto conexo $[0,1] \times \{0\}$, que es una contradicción. Análogamente, se demuestra que Y_2 es conexo$_1$ en X

Observe que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, sin embargo, $Y_1 \cup Y_2$ no es conexo$_1$ en X ya que el conjunto $A = [0,1] \times \{0\}$, cumple que $\emptyset \neq A \neq Y_1 \cup Y_2$, pero $\operatorname{Fr}(A) = \emptyset$ pues A es un conjunto cerrado y abierto en X. □

Se sabe que el producto arbitrario de espacios conexos es conexo, en el teorema 4.11 damos la versión relativa de este resultado. Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, denota $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, P_α es la *proyección de X sobre el α-ésimo factor*, esto es $P_\alpha : X \to X_\alpha$ y P_α asigna a un elemento $x = \{x_\alpha\} \in X$ su α-ésima coordenada $x_\alpha \in X_\alpha$. El conjunto $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ será considerado con la *topología producto o topología de Tychonoff*, es bien conocido que esta topología hace que todas las proyecciones sean continuas.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las definiciones correspondientes, por ello omitimos su demostración.

Lema 4.8. *Sea $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Si Y es conexo$_i$ en X y $X \subseteq X^*$ entonces Y es conexo$_i$ en X^*.*

Teorema 4.9. *Sea $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Si Y_1 es conexo$_i$ en X_1 y Y_2 es conexo$_i$ en X_2, entonces $Y_1 \times Y_2$ es conexo$_i$ en $X_1 \times X_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i \in \{1,2,3,4,5\}$ y suponga que se tienen espacios tales que Y_1 es conexo$_i$ en X_1 y Y_2 es conexo$_i$ en X_2.

Caso 1: $i \in \{2,3,4,5\}$. Fija un punto $(a,b) \in Y_1 \times Y_2$. Para cada $y \in Y_1$, se define

$$C_y = (\{y\} \times Y_2) \cup (Y_1 \times \{b\})$$

Observe que $Y_1 \times \{b\}$ es conexo$_i$ en $X_1 \times \{b\}$, $\{y\} \times Y_2$ es conexo$_i$ en $\{y\} \times X_2$ y tienen en común al punto (y,b), del lema 4.8 y del teorema 4.6, se tiene que C_y es conexo$_i$ en $X_1 \times X_2$, para todo $y \in Y$. Dado que $(a,b) \in \bigcap_{y \in Y} C_y$, la familia $\{C_y\}_{y \in Y}$ cumple las condiciones del teorema 4.6, y como $\bigcup_{y \in Y} C_y = Y_1 \times Y_2$, se obtiene que $Y_1 \times Y_2$ es conexo$_i$ en $X_1 \times X_2$.

Caso 2: $i = 1$. Por contradicción, suponga que existe un subconjunto no vacío y propio A de $Y_1 \times Y_2$ con $\operatorname{Fr}_{X_1 \times X_2}(A) = \emptyset$, de donde A es un conjunto abierto y cerrado en $X_1 \times X_2$. Para cada $y \in Y_1$, sea $E_y = \{y\} \times Y_2$. Dado que

$$Y_1 \times Y_2 = \bigcup_{y \in Y_1} E_y,$$

y $A \neq Y_1 \times Y_2$, existe $(y_1, y_2) \in E_{y_1} \setminus A$. Nota que $A \cap E_{y_1} = A \cap (\{y_1\} \times X_2)$. Sea $G = A \cap E_{y_1}$. Se afirma que $G = \emptyset$. En caso contrario, G es homeomorfo a un subconjunto propio de Y_2 y dado que $\{y_1\} \times Y_2$ es conexo$_1$ en $\{y_1\} \times X_2$, $\mathrm{Fr}_{\{y_1\} \times X_2}(G) \neq \emptyset$, lo cual es imposible ya que G es un conjunto abierto y cerrado en $\{y_1\} \times X_2$. Se concluye que, $A \cap (\{y_1\} \times Y_2) = \emptyset$.

Por otra parte, para cada $y \in Y_2$, sea $F_y = Y_1 \times \{y\}$. Nota que

$$Y_1 \times Y_2 = \bigcup_{y \in Y_2} F_y.$$

Como $A \neq \emptyset$, existe $a_2 \in Y_2$ tal que $A \cap F_{a_2} \neq \emptyset$. Nota que $A \cap F_{a_2} = A \cap (X_1 \times \{a_2\})$. Define, $H = A \cap F_{a_2}$. Dado que $(y_1, a_2) \in F_{y_2}$ y $(y_1, a_2) \notin A$, H es homeomorfo a un subconjunto no vacío y propio de Y_1, esto implica que $\mathrm{Fr}_{X_1 \times \{a_2\}}(H) \neq \emptyset$ ya que $Y_1 \times \{a_2\}$ es conexo$_1$ en $X_1 \times \{a_2\}$, lo cual contradice que H es abierto y cerrado en $X_1 \times \{a_2\}$. $\square$

Mediante inducción matemática se obtiene el corolario siguiente.

Corolario 4.10. *Sean $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y J un conjunto finito. Si Y_j es conexo$_i$ en X_j para cada $j \in J$, entonces $\prod_{j \in J} Y_j$ es conexo$_i$ en $\prod_{j \in J} X_j$.*

Teorema 4.11. *Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es conexo$_i$ en X_α si y sólo si el producto $\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es conexo$_i$ en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ y denota $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ y $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Si Y es conexo$_i$ en X, como cada función proyección $P_\alpha : X \to X_\alpha$ es continua y $P_\alpha(Y) = Y_\alpha$, del teorema 4.5, se tiene que Y_α es conexo$_i$ en X_α para todo $\alpha \in \Lambda$.

Para la otra implicación, fija $y \in Y$. Denota por $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de Λ. Para cada $F \in \mathcal{F}$, define $C_F = \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, donde

$$A_\alpha = \begin{cases} Y_\alpha & si \quad \alpha \in F; \\ y_\alpha & si \quad \alpha \notin F. \end{cases}$$

Del corolario anterior y del lema 4.8, C_F es conexo$_i$ en X para cada $F \in \mathcal{F}$; además, $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} C_F$ y $Y = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} C_F$, del teorema 4.6, se concluye que Y es conexo$_i$ en X. $\square$

PROBLEMA 4.12. *¿Es cierto que si para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es conexo$_1$ en X_α, entonces $\prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es conexo$_1$ en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$?*

Teorema 4.13. *Sean W un subespacio de Z y $q : X \to Z$ es una función que es cociente y monótona.*

(1) Si W es un abierto y conexo$_5$ en Z entonces $q^{-1}(W)$ es conexo$_5$ en X.
(2) Si W es un cerrado y conexo$_4$ en Z entonces $q^{-1}(W)$ es conexo$_4$ en X.

DEMOSTRACIÓN: Ambas demostraciones son análogas, por ello se efectúa sólo la demostración de (1). Suponga que $q^{-1}(W)$ no es conexo$_5$ en X. Denota $Y = q^{-1}(W)$. Existen U y V conjuntos abiertos en X tales que $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$. Note que si $w \in W$ entonces $q^{-1}(w) \subseteq U \cup V$. Se cumple que $q^{-1}(w) \subseteq U$ o $q^{-1}(w) \subseteq V$, de lo contrario $U \cap q^{-1}(w)$ y $V \cap q^{-1}(w)$ forman una separación para $q^{-1}(w)$, contradiciendo que q es monótona. Define

$$W_1 = \{w \in W : q^{-1}(w) \subseteq U\} \qquad W_2 = \{w \in W : q^{-1}(w) \subseteq V\}$$

Se afirma que $q^{-1}(W_1) = U \cap Y$. En efecto; sea $x \in U \cap Y$. Dado que $x \in Y$, $q(x) \in W$, entonces $q^{-1}(q(x)) \subseteq Y$. Como $q^{-1}(q(x))$ es un espacio conexo y $x \in q^{-1}(q(x)) \cap U$, resulta que $q^{-1}(q(x)) \subseteq U$. Se ha obtenido que, $q(x) \in W$ y $q^{-1}(q(x)) \subseteq U$, es decir, que $x \in q^{-1}(W_1)$. La otra contención es inmediata. Por otra parte, análogamente se puede demostrar que $q^{-1}(W_2) = V \cap Y$.

De la afirmación anterior, del hecho que W es un conjunto abierto en Z y que la función q es continua y cociente, se tiene que W_1 y W_2 son conjuntos abiertos en Z.

Por otra parte, como $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, se obtiene, respectivamente, que $W \subseteq W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ y $W_1 \cap W \neq \emptyset \neq W \cap W_2$. Por lo tanto, W_1 y W_2 garantizan que W no es conexo$_5$ en Z. $\square$

Teorema 4.14. *Sean $i \in \{1,2,3\}$ y $q : X \to Z$ una función que es cociente y monótona. Si W es conexo$_i$ en Z entonces $q^{-1}(W)$ es conexo$_i$ en X.*

Demostración: $i = 3$: Sean $x, y \in q^{-1}(W)$. Como $q(x), q(y) \in W$, existe un subconjunto conexo $A_{x,y}$ de Z que contiene a $q(x)$ y $q(y)$. Aplicando los enunciados (2) y (4) del teorema 2.3, se obtiene que el conjunto $q^{-1}(\overline{A_{x,y}})$ es conexo, y contiene a los puntos x y y. Por lo tanto, $q^{-1}(W)$ es conexo$_3$ en X.

$i = 2$: Suponga que $q^{-1}(W)$ no es conexo$_2$ en X y se demostrará que W no es conexo$_2$ en Z. Denota $Y = q^{-1}(W)$. Existe una función $f : X \to \{0,1\}$ continua tal $f|_Y$ es suprayectiva. Para cada $z \in Z$, $q^{-1}(z)$ es un conjunto conexo y como f es continua, f es constante en cada conjunto $q^{-1}(z)$. Del teorema 2.5, existe una función continua $g : Z \to \{0,1\}$ tal que $g \circ q = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ \{0,1\} & \end{tikzcd}$$

Se afirma que $g|_W$ es suprayectiva. Se procede por contradicción. Sin pérdida de generalidad, suponga que $g(W) = \{0\}$. Puesto que $f|_Y = \{0,1\}$, existe $y \in Y$ tal que $f(y) = 1$. Entonces, $q(y) \in W$ de donde $g(q(y)) = 0$, que contradice la igualdad $g \circ q = f$. Por lo tanto, $g : Z \to \{0,1\}$ es continua y $g|_W$ es suprayectiva, es decir, W no es conexo$_2$ en Z.

$i = 1$: Suponga que $q^{-1}(W)$ no es conexo$_1$ en X, es decir que existe un conjunto $A \subseteq q^{-1}(W)$ tal que $\emptyset \neq A \neq q^{-1}(W)$ y con $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Se demostrará que W no es conexo$_1$ en Z.

Se probará primero que: $q^{-1}(q(A)) = A$. En efecto; si $x \in q^{-1}(q(A))$ entonces existe $a \in A$ tal que $q(x) = q(a)$, como q es monótona, $q^{-1}(q(x))$ es un subespacio conexo de X y contiene al punto a, es decir, $q^{-1}(q(x)) \cap A \neq \emptyset$ y puesto que $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, A es conjunto abierto y cerrado en X, esto implica que $q^{-1}(q(x)) \subseteq A$, de lo contrario se tendría una separación para $q^{-1}(q(x))$; entonces, $x \in A$ ya que $x \in q^{-1}(q(x))$. Por lo tanto $q^{-1}(q(A)) \subseteq A$. Puesto que la otra contención siempre es cierta, se concluye que $q^{-1}(q(A)) = A$.

Ahora, claramente $q(A) \subseteq W$. Si $q(A) = W$, de la afirmación anterior se obtiene que $A = q^{-1}(W)$, lo cual contradice que $A \neq q^{-1}(W)$. Así, $\emptyset \neq q(A) \neq W$. Finalmente, como q es cociente, $q(A)$ es un conjunto abierto y cerrado en Z, de donde $\mathrm{Fr}(q(A)) = \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto $q(A)$ garantiza que W no es conexo$_1$ en Z. $\square$

Concluimos este trabajo con las siguientes preguntas.

PROBLEMA 4.15. *¿Es cierto que dado $i \in \{1,2,3,4,5\}$, se cumple la siguiente versión relativa del cable cortado (teorema 2.4): sean X un espacio Hausdorff y compacto, A y B conjuntos cerrados en X con la siguiente propiedad: para todo Y conexo$_i$ de X, se tiene que $Y \cap A = \emptyset$ o $Y \cap B = \emptyset$. Existen entonces dos conjuntos cerrados y ajenos X_1 y X_2 de X, tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subseteq X_1$ y $B \subseteq X_2$?*

PROBLEMA 4.16. *Si $C_i \to C_j$ no se cumple ¿Qué condiciones adicionales debe tener el espacio X para que la implicación anterior se satisfaga?*

PROBLEMA 4.17. *¿Es cierto que si para cada $\alpha \in \Lambda$, Y_α es conexo$_1$ en X_α, entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es conexo$_1$ en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$?*

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi, *Beginnings of the Theory of Relative Topological Properties*, General Topology, Spaces and Mappings, MGU, Moscow (1989), 3-48 (en ruso).

[2] A. V. Arhangel'skii, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology and its Applications vol. 70, 2-3 (1996), 87-99.

[3] F. Casarrubias Segura y A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, SMM, vol. 37, de la serie TEXTOS, México, 2012.

[4] F. Corona–Vázquez et al., *Relative connectness and one application of this to hyperspaces*, preprint.

[5] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] L.D.R Kočinac, S. Konca y S. Singh, *Variations of some star selection properties*, AIP Conference Proceedings, vol. 2334 (1), (2021), 020006.

[7] J. Munkres, *Topología*, 2a. Edición, Pearson Educación, 2002.

[8] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, AMS, Colloq. Publ., vol. 28, 1942.

[9] G. F. Zhang y W. Shi, *Characterizations of relative paracompactness by relative normality of product spaces*, Houston Journal of Mathematics, vol. 33, no. 3 (2007), 771-779.

Correos electrónicos:
`florencio.corona@unach.mx` (Florencio Corona Vázquez),
`jesus.reyes@unach.mx` (Jesús Díaz Reyes) ,
`rusell.quinones@unach.mx` (Russell Aarón Quiñones Estrella),
`jsanchezm@unach.mx` (Javier Sánchez Martínez).

CAPÍTULO 6

El Hiperespacio de sucesiones convergentes

Patricia Pellicer Covarrubias
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX., México

Resumen. Dado un espacio topológico X, podemos considerar familias de subconjuntos de X que tengan alguna característica en particular. A tales familias se les llama *hiperespacios* de X. Uno de los hiperespacios más estudiados es el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de X, denotado por $CL(X)$. Desde luego existen otros hiperespacios que han sido de interés. Uno de ellos, de estudio bastante reciente, es el hiperespacio de sucesiones convergentes.

En este capítulo daremos una introducción a tal hiperespacio y mencionaremos cómo se comportan algunas propiedades en él: la conexidad, la conexidad local, la conexidad (local) por trayectorias y la dimensión. El material de este trabajo fue el contenido de mi minicurso *El Hiperespacio de Sucesiones Convergentes*, impartido en el *XVII Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos* en octubre de 2022.

1. Introducción

El estudio de los hiperespacios empezó en el siglo XX con artículos como [**15**] de E. Michael. En esa época se estudiaban hiperespacios como el de los subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio X, o el de los subespacios compactos de X, entre otros. El hiperespacio de sucesiones convergentes, denotado como $S_c(X)$, fue introducido bastante más adelante, en 2015, por S. García Ferreira y Y. F. Ortiz Castillo en [**2**]. A partir de entonces ha aparecido un interés significativo por tal hiperespacio, el cual se ha manifestado en varias publicaciones como, por ejemplo, [**1**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**7**], [**8**], [**9**], [**10**], [**12**], [**13**] y [**14**].

En el artículo [**2**] los autores prueban algunas propiedades del hiperespacio $S_c(X)$ relacionadas con la conexidad; por ejemplo, muestran que $S_c(X)$ es conexo por trayectorias cuando X es la recta real, o bien cuando X es un espacio conexo que se puede ver como una unión finita de copias del intervalo $[0, 1]$ ([**2**, teorema 2.4, Lemma 2.11]). Además, en [**2**, ejemplo 2.8] dan un ejemplo de un continuo conexo por trayectorias X cuyo hiperespacio $S_c(X)$ no es conexo por trayectorias. A partir de los resultados de [**2**] se empezaron a estudiar varios tipos de conexidad en el hiperespacio $S_c(X)$; sin embargo, a pesar de todas las contribuciones a este estudio, el comportamiento de la conexidad por trayectorias en tal hiperespacio aún no se ha determinado completamente. Con esto último, lo que queremos decir es que se han encontrado condiciones para que $S_c(X)$ sea conexo por trayectorias que son o bien suficientes, o bien necesarias, pero aún no se han hallado condiciones que sean ambas cosas.

En este capítulo tomamos esta situación como punto de partida, y aprovecharemos para dar un panorama general del comportamiento de algunas propiedades del hiperespacio $S_c(X)$ que están relacionadas con la conexidad.

Después de los Preliminares introducimos la Sección 3, en la cual mostramos que la conexidad de un espacio X es equivalente a la de su hiperespacio $S_c(X)$, cuando este último es no vacío. En la Sección 4 mostramos resultados sobre conexidad local similares a los de la Sección 3, con algunas hipótesis adicionales.

En la Sección 5 introducimos la conexidad por trayectorias en $S_c(X)$ y vemos que su comportamiento es muy distinto al de la conexidad y la conexidad local; en particular, la conexidad por trayectorias de un espacio X no implica la de su hiperespacio $S_c(X)$ -aún en la clase de los dendroides. Sin embargo, en la Sección 6 vemos que las siguientes condiciones son equivalentes, bajo ciertas hipótesis, para un espacio X: (a) X es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias y (b) $S_c(X)$ es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Adicionalmente mostramos que la conexidad local por trayectorias de un espacio X, y la de $S_c(X)$, son equivalentes bajo ciertas hipótesis.

Por último incluimos la Sección 7, la cual trata sobre la dimensión del hiperespacio $S_c(X)$. Esta sección no está relacionada con la conexidad, pero consideramos que tiene particular interés en sí misma.

2. Preliminares

A lo largo de este capítulo, $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de los números naturales y $\mathfrak{c}$ denotará la cardinalidad de la recta real, $\mathbb{R}$. Además, ω denotará al primer ordinal infinito.

El símbolo $\mathcal{P}(X)$ denotará al conjunto potencia de un conjunto X. Más aún, $[X]^{<\omega}$ denotará a la colección de subconjuntos finitos de X.

Dado $A \subseteq X$, usaremos la notación $\mathrm{int}_X A$ y $\mathrm{cl}_X A$ (o bien $\overline{A}$, en caso de que no se preste a confusión) para denotar el interior en X y la cerradura de A en X, respectivamente. Adicionalmente, denotaremos por τ_X a la topología de un espacio X.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. En este capítulo, la palabra *espacio* hará referencia siempre a un espacio topológico de Hausdorff.

Una *familia celular* en un espacio X es una familia de subconjuntos abiertos de X, no vacíos y ajenos dos a dos. La colección de todas las familias celulares finitas de X será denotada por $\mathfrak{C}(X)$.

Un espacio es *cero-dimensional* si tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados a la vez.

Usualmente, una *sucesión convergente* en un espacio X es una función $f : \mathbb{N} \to X$ para la cual existe $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $U \in \tau_X$ con $x \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f[\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}] \subseteq U$.

En este trabajo usaremos una definición diferente de sucesión convergente, a saber, un subconjunto S de un espacio (X, τ_X) será llamado una *sucesión convergente no trivial* en X si:

(i) S es infinito numerable y
(ii) existe $x \in S$ tal que $S \setminus U$ es finito para cada $U \in \tau_X$ con $x \in U$.

En este caso, el punto x se llamará *el punto límite de* S, diremos que S *converge a* x y escribiremos $S \to x$ o $\lim S = x$.

Por otro lado, dado un espacio X es usual considerar los siguientes hiperespacios:

$$\begin{aligned} CL(X) &= \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset\}, \\ K(X) &= \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}, \\ S_c(X) &= \{S \in K(X) : S \text{ es una sucesión convergente no trivial en } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in K(X) : |A| \leq n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}, \\ F(X) &= \{A \in K(X) : A \text{ es finito}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X) \text{ y} \\ C(X) &= \{A \in K(X) : A \text{ es conexo}\}. \end{aligned}$$

Dada una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X, definimos

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup \mathcal{U} \ \wedge \ \forall\, U \in \mathcal{U}\ (A \cap U \neq \emptyset) \right\}.$$

Se puede probar que la familia cuyos elementos son de la forma $\langle \mathcal{U} \rangle$, cuando $\mathcal{U}$ es un subconjunto finito de τ_X es base para alguna topología en $CL(X)$ [**15**, Proposición 2.1, p. 155]. Tal topología es la que se conoce como *Topología de Vietoris*.

Ahora bien, en este trabajo todos nuestros espacios serán Hausdorff, así que automáticamente tenemos que $K(X) \subseteq CL(X)$. Además, todos los hiperespacios mencionados serán considerados como subespacios de $CL(X)$. En particular, una base para la topología de $S_c(X)$ consiste de todos los conjuntos de la forma $\langle \mathcal{U} \rangle_c := \langle \mathcal{U} \rangle \cap S_c(X)$, cuando $\mathcal{U}$ es un subconjunto finito de τ_X.

De hecho, es posible considerar una base aún más conveniente específicamente para $S_c(X)$, considerando familias celulares finitas de X. Más precisamente:

Teorema 2.1. [**13**, Proposición 3.2, p. 147] *Si X es un espacio, entonces $\{\langle \mathcal{V} \rangle_c : \mathcal{V} \in \mathfrak{C}(X)\}$ es una base para $S_c(X)$.*

Dado un subconjunto V de un espacio X, definimos $V_c^+ = \langle \{V\} \rangle_c$ y $V_c^- = \langle \{X, V\} \rangle_c$. Notemos que si V es abierto (cerrado, respectivamente) en X, entonces V_c^+ y V_c^- son abiertos (cerrados, respectivamente) en $S_c(X)$.

El siguiente lema es conocido y muy útil cuando se trabaja con hiperespacios.

Lema 2.2. [**15**, lema 2.3.1, p. 156] *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio X y dos subconjuntos finitos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$:*

(1) $\langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle$;
(2) $\bigcup \mathcal{V} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ *y para cada* $U \in \mathcal{U}$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $V \subseteq U$.

Para efectos de escritura usaremos la siguiente convención: si S es una sucesión convergente no trivial en un espacio X, diremos que $\{x_n : n \in \omega + 1\}$ es una *enumeración adecuada* de S cuando $S = \{x_n : n \in \omega + 1\}$, $\lim S = x_\omega$ y $x_i \neq x_j$ cada vez que $i < j \leq \omega$.

Los siguientes resultados son conocidos y nos serán de mucha utilidad.

Lema 2.3. [**15**, Corolario 5.8.1, p. 169] *Sea X un espacio. La función $\varphi : CL(X)^n \to CL(X)$ dada por $\varphi(E_1, \ldots, E_n) = \bigcup_{i=1}^n E_i$ es continua.*

Lema 2.4. [**11**, Corolario 1.8.7, p. 61] *Sean X un espacio y $n \in \mathbb{N}$. La función $\nu : X^n \to F_n(X)$ dada por $\nu(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es continua y suprayectiva.*

Los siguientes dos resultados se siguen inmediatamente del lema 2.4.

Corolario 2.5. *Si X es un espacio conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces X^n también es conexo. Así, $F_n(X)$ es conexo.*

Corolario 2.6. *Si $n \in \mathbb{N}$ y Y es un espacio conexo por trayectorias, entonces Y^n lo es también; así, $F_n(Y)$ es conexo por trayectorias para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $F(Y)$ es conexo por trayectorias.*

3. Conexidad

En esta sección veremos que el comportamiento del hiperespacio $S_c(X)$ con respecto a la conexidad es bastante agradable. Más precisamente, probaremos que la conexidad de un espacio X es equivalente a la de $S_c(X)$ cuando este último es no vacío. En las siguientes secciones veremos que éste no necesariamente es el caso de otras propiedades relacionadas con la conexidad.

Lema 3.1. *Sea X un espacio conexo y supongamos que $P, Q \in S_c(X)$ son tales que $P \subseteq Q$ y $Q \setminus P$ es finito. Entonces P y Q pertenecen a la misma componente de $S_c(X)$.*

Demostración: Sea $n = |Q \setminus P|$ y tomemos $\varphi : F_n(X) \to S_c(X)$ dada por $\varphi(A) = P \cup A$ para cada $A \in F_n(X)$. Del Corolario 2.5 sabemos que $F_n(X)$ es conexo. Por el lema 2.3 sabemos que φ es una función continua. Para terminar, note que P y Q pertenecen a la imagen de φ. □

Teorema 3.2. *Si X es un espacio conexo, entonces $S_c(X)$ también lo es.*

Demostración: Sean $S_1, S_2 \in S_c(X)$ y denotemos por $\mathcal{C}$ a la componente de $S_c(X)$ que contiene a S_1. Supongamos que $\{x_i : i \leq \omega\}$ y $\{y_i : i \leq \omega\}$ son enumeraciones adecuadas de S_1 y S_2, respectivamente.

Para cada $k < \omega$ sean $P_k = S_1 \setminus \{x_i : i \leq k\}$ y $Q_k = P_k \cup \{y_i : i \leq k\}$. Del lema 3.1 deducimos que P_k y Q_k pertenecen a $\mathcal{C}$.

Ahora, el hecho de que la sucesión $(Q_k)_{k<\omega}$ converge a $S_3 = S_2 \cup \{x_\omega\}$ implica que $S_3 \in \mathcal{C}$ y así, del lema 3.1 concluimos que $S_2 \in \mathcal{C}$. □

Teorema 3.3. *Si X es un espacio para el cual $S_c(X)$ es no vacío y conexo, entonces X también es conexo.*

Demostración: Sea X un espacio tal que $S_c(X)$ es no vacío y conexo. Para probar la conexidad de X, sean $U, V \in \tau_X$ tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea $S \in S_c(X)$ y tomemos $a = \lim S$. Entonces $a \in U$ o $a \in V$. Podemos suponer que

$a \in U$. Mostraremos que $V = \emptyset$. Note que U_c^+ y V_c^- son subconjuntos abiertos y ajenos de $S_c(X)$ cuya unión es $S_c(X)$. Por la conexidad de $S_c(X)$, obtenemos que $U_c^+ = \emptyset$ o $V_c^- = \emptyset$. Observe que $S \setminus U$ es finito y así $S \cap U \in U_c^+$. Luego, deducimos que $V_c^- = \emptyset$. Si existiera un punto x en V, tendríamos que $S \cup \{x\} \in V_c^-$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V = \emptyset$ y X es conexo. $\square$

Tomando un espacio discreto con más de un punto, se muestra fácilmente que la hipótesis de que $S_c(X) \neq \emptyset$ del teorema anterior es esencial.

4. Conexidad local

En esta sección probaremos que la conexidad local de un espacio X está muy relacionada con la conexidad local de su hiperespacio $S_c(X)$. Para ello, recordemos que un espacio X es *localmente conexo* en un punto p si X tiene una base local en p cuyos elementos son conexos. El espacio X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Teorema 4.1. *Si X es un espacio localmente conexo, entonces $S_c(X)$ también lo es.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base para X cuyos elementos son conexos. No es difícil probar que $\{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$ es una base para $K(X)$; así, bastará probar que cada elemento de $\{\langle \mathcal{U} \rangle_c : \mathcal{U} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$ es conexo.

Tomemos $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ sea $Q_U = \{S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c : \lim S \in U\}$. Además, si $Q_U \neq \emptyset$, sea $\varphi_U : S_c(U) \times \prod_{V \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} F(V) \to Q_U$ dada por $\varphi(S, (W_V)_{V \in \mathcal{U} \setminus \{U\}}) = S \cup \bigcup_{V \in \mathcal{U} \setminus \{U\}} W_V$. Se puede probar que φ_U es suprayectiva. Así, por el lema 2.3, el Teorema 3.2 y el Corolario 2.5 deducimos que Q_U es conexo.

Observemos que $\langle \mathcal{U} \rangle_c = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} Q_U$. Para probar que $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ es conexo basta probar que si $U, V \in \mathcal{U}$ son tales que $Q_U \neq \emptyset \neq Q_V$, entonces $Q_V \cap \overline{Q_U} \neq \emptyset$. Fijemos $S_V \in Q_V$ y $S \in S_c(U)$. Sean $\{x_n : n \leq \omega\}$ y $\{y_n : n \leq \omega\}$ enumeraciones adecuadas de $S_V \cap V$ y de S, respectivamente. Para cada $k \in \omega$ definamos $P_k = \{y_n : n > k\} \cup (S_V \setminus V) \cup \{x_n : n \leq k\}$. Entonces $P_k \in Q_U$ para cada $k \in \omega$. Como $\lim\limits_{k \to \infty} P_k = S_V \cup \{y_w\}$, concluimos que $S_V \cup \{y_w\} \in Q_V \cap \overline{Q_U}$. $\square$

Lema 4.2. *Sea X un espacio. Si G es un subconjunto abierto de $S_c(X)$, entonces $\bigcup \mathsf{G}$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración: Sean $x \in \bigcup \mathsf{G}$ y $S \in \mathsf{G}$ tal que $x \in S$. Como G es abierto en $S_c(X)$, existe $\mathcal{U} \in [\tau_X]^{<\omega}$ tal que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \mathsf{G}$. Notemos que para cada $z \in \bigcup \mathcal{U}$ se tiene que $S \cup \{z\} \in \langle \mathcal{U} \rangle_c \subseteq \mathsf{G}$ y así, $z \in \bigcup \mathsf{G}$. En otras palabras, $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathsf{G}$. Luego, $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$ y $x \in S \subseteq \bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathsf{G}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathsf{G}$ es abierto en X. $\square$

Teorema 4.3. *Sean X un espacio y $x \in X$. Si $S_c(X)$ es localmente conexo y existe $S_0 \in S_c(X)$ tal que $x \neq \lim S_0$, entonces X es localmente conexo en x.*

Demostración: Supongamos que X no es localmente conexo en x. Entonces existe un subconjunto abierto W tal que $x \in W$, pero no existe ninguna vecindad abierta y conexa de x que esté contenida en W. Tomemos dos subconjuntos abiertos y ajenos V_x y V, tales que $x \in V_x \subseteq W$ y $S_0 \setminus \{x\} \subseteq V$.

Sea G un subconjunto abierto de $S_c(X)$ tal que $S_0 \cup \{x\} \in \mathsf{G} \subseteq \langle \{V_x, V\} \rangle_c$. Mostraremos que G no es conexo. Por el lema 4.2 sabemos que $\bigcup \mathsf{G}$ es un subconjunto abierto de X y así, $V_x \cap \bigcup \mathsf{G}$ es una vecindad abierta de x la cual, por hipótesis, no es conexa. Sean W_1 y W_2 dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos cuya unión es $V_x \cap \bigcup \mathsf{G}$. Supondremos que $x \in W_1$. Sean

$$\mathsf{O}_1 = \mathsf{G} \cap \left\langle \{V, W_1\} \right\rangle_c \qquad \text{y} \qquad \mathsf{O}_2 = \mathsf{G} \cap (W_2)_c^-.$$

Notemos que estos son dos subconjuntos abiertos de G con $S_0 \cup \{x\} \in \mathsf{O}_1$. Más aún, si $y \in W_2$, entonces $y \in \bigcup \mathsf{G}$ i.e., existe $S' \in \mathsf{G}$ tal que $y \in S'$. Luego, $S' \in \mathsf{O}_2$. Ahora, para cada $S \in \mathsf{G}$ observe que $S \in \mathsf{O}_1$ si y sólo si $\emptyset \neq S \cap V_x \subseteq W_1$. Así deducimos que O_1 y O_2 son ajenos y su unión es igual a G. En otras palabras, G no es conexo. Por lo tanto $\mathcal{S}_c(X)$ no es localmente conexo en $S_0 \cup \{x\}$. $\square$

Para cada espacio X definimos $L_X = \{\lim S : S \in \mathcal{S}_c(X)\}$.

Corolario 4.4. *Sea X un espacio tal que $|L_X| \geq 2$. Entonces $\mathcal{S}_c(X)$ es localmente conexo si y sólo si X lo es.*

5. Conexidad por trayectorias

En esta sección abordaremos el comportamiento de la conexidad por trayectorias del hiperespacio $\mathcal{S}_c(X)$. Veremos que si $\mathcal{S}_c(X)$ es conexo por trayectorias y no vacío, entonces X también es conexo por trayectorias. No obstante, la conexidad por trayectorias de un espacio X no implica que $\mathcal{S}_c(X)$ comparta dicha propiedad, ni siquiera pidiendo que X tenga una estructura tan agradable como la de los dendroides (definimos a estos últimos antes del Ejemplo 5.3).

Observación. Si X es un espacio tal que $|X| = \mathfrak{c}$, entonces $|\mathcal{S}_c(X)| \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. En particular, $\mathcal{S}_c(X)$ tiene a lo más $\mathfrak{c}$ componentes por trayectorias.

Usando la prueba de [**3**, Teorema 3.2] se puede probar el siguiente resultado.

Lema 5.1. *Sea X un espacio. Si $\alpha : I \to \mathcal{S}_c(X)$ es una trayectoria, entonces para cada $p \in \alpha(0)$ existe una trayectoria $\beta : I \to X$ tal que $\beta(t) \in \alpha(t)$, cada vez que $t \in I$, y $\beta(0) = p$.*

Teorema 5.2. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{S}_c(X)$ es no vacío y conexo por trayectorias, entonces X también lo es*

Demostración: Sean $S_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ y $w \in S_0 \setminus \{\lim S_0\}$. Entonces existe una trayectoria $\alpha : I \to \mathcal{S}_c(X)$ tal que $\alpha(0) = S_0$ y $\alpha(1) = S_1 = S_0 \setminus \{w\}$. Luego, por el lema 5.1, existe una trayectoria $\beta : I \to X$ tal que $\beta(0) = w$ y $\beta(1) \in S_1$. En particular, $\beta(1) \neq w$. Así, la componente por trayectorias K de w en X es no degenerada.

Sean $S_2 \in \mathcal{S}_c(K)$ y $p \in X$. Tomemos $S_3 = S_2 \cup \{p\} \in \mathcal{S}_c(X)$. Por hipótesis existe una trayectoria en $\mathcal{S}_c(X)$ de S_3 a S_2. Entonces por el lema 5.1 existe una trayectoria $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) \in S_2 \subseteq K$. Esto muestra que $p \in K$ y, por lo tanto, X es conexo por trayectorias. $\square$

Recordemos que un *dendroide* es un continuo arcoconexo tal que cada par de subcontinuos de X tiene intersección conexa.

Ejemplo 5.3. *Un dendroide X tal que $\mathcal{S}_c(X)$ no es conexo por trayectorias.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea L_n el segmento en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $(0, \frac{1}{n})$ y $(1, 0)$. Definamos $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ y $\widehat{A} = \{-z : z \in A\}$. Sea $X = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(A \cup \widehat{A})$ y observemos que X es un dendroide. Denotaremos al punto $(0, 0)$ como y.

Definamos $S_0 = \{(0, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, -\frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ y tomemos $S_1 \in A_c^+$. Mostraremos que no existe una trayectoria en $S_c(X)$ que una a S_0 y a S_1. Supongamos que existe una trayectoria $\alpha : I \to S_c(X)$ tal que $\alpha(0) = S_0$ y $\alpha(1) = S_1$. Consideremos el conjunto $T = \{t \in I : |\alpha(t) \cap A| = \omega = |\alpha(t) \cap \widehat{A}|\}$ y hagamos $s = \sup T$. Probaremos que $y \in \alpha(s)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de T que converge a s. Por la continuidad de α, tenemos que $\alpha(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(t_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, observemos que $y = \lim \alpha(t_n)$, en particular $y \in \alpha(t_n)$. Así inferimos que $y \in \alpha(s)$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tal que $\alpha(s) \in \langle\mathcal{U}\rangle_c$ y, además, si U es el elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a y, supongamos que $(-1, 0), (1, 0) \notin U$. Elegimos $t_1 \in T$ y $t_2 \in I \setminus T$ tales que $\alpha\big[[t_1, t_2]\big] \subseteq \langle\mathcal{U}\rangle_c$. Como $t_2 \notin T$, supondremos sin pérdida de generalidad que $\alpha(t_2) \cap \widehat{A}$ es finito. Más aún , como $t_1 \in T$, entonces $y = \lim \alpha(t_1)$ y $\alpha(t_1) \cap \widehat{A}$ interseca una cantidad infinita de componentes por trayectorias de U. Como $\alpha(t_2) \cap \widehat{A}$ es finito, existe una componente por trayectorias K de U tal que $K \cap \alpha(t_1) \cap \widehat{A} \neq \emptyset$ y $K \cap \alpha(t_2) = \emptyset$. Sea $p \in K \cap \alpha(t_1) \cap \widehat{A}$. Aplicando el lema 5.1 a las sucesiones $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$, existe una trayectoria $\beta : [t_1, t_2] \to \bigcup \alpha\big[[t_1, t_2]\big]$ tal que $\beta(t_1) = p$ y $\beta(t_2) \in \alpha(t_2)$. Como $\beta\big[[t_1, t_2]\big] \subseteq \bigcup \alpha\big[[t_1, t_2]\big] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y los elementos de $\mathcal{U}$ son ajenos por pares, $\beta\big[[t_1, t_2]\big] \subseteq K$; así $\beta(t_2) \in K \cap \alpha(t_2)$, lo cual es una contradicción.

6. Conexidad local por trayectorias

Como vimos en la Sección 5, la conexidad por trayectorias de un espacio X no es equivalente a la de su hiperespacio $S_c(X)$. En esta sección veremos que éste sí es el caso de la conexidad local por trayectorias (que definimos a continuación) para espacios primero numerables. Lo que es aún más notable, es que el hecho de poseer ambas propiedades al mismo tiempo sí es equivalente para X y para $S_c(X)$, en una clase suficientemente amplia de espacios (Corolario 6.13).

Recordemos que un espacio X es *localmente conexo por trayectorias* en un punto p si X tiene una base local de vecindades conexas por trayectorias (no necesariamente abiertas) en p. El espacio X es localmente conexo por trayectorias si lo es en cada uno de sus puntos.

A continuación presentamos un lema que será la herramienta fundamental en la prueba del Corolario 6.2.

Lema 6.1. *Sea X un espacio conexo por trayectorias, sea $y_\omega \in X$ y supongamos que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable en y_ω con $V_1 = X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ supondremos que $V_{n+1} \subseteq V_n$ y denotaremos por C_n a la componente por trayectorias de V_n que contiene a y_ω. Sean $\{y_n : n \in (\omega+1) \setminus \{0\}\}$ y $\{x_n : n \in (\omega+1) \setminus \{0\}\}$ enumeraciones adecuadas de dos sucesiones S_y y S_x, respectivamente, tales que $x_\omega = y_\omega$. Además, supongamos que*

(*) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $y_r, x_r \in C_n$ para todo $r \geq m_n$.

Entonces existe una trayectoria en $S_c(X)$ de S_y a S_x.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : x_n, y_n \in C_k\}$, entonces existe una trayectoria $\alpha_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to V_{M(n)}$ tal que $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = y_n$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = x_n$. Notemos que $M(n)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to S_c(X)$ como

$$g_n(t) = \{x_m : m \geq n+1\} \cup \{\alpha_n(t)\} \cup \{y_m : 1 \leq m < n\}.$$

Observemos que g_n está bien definida y continua. Además observemos que

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \{x_m : m \geq n+1\} \cup \{y_m : 1 \leq m \leq n\} = g_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Definimos ahora $\gamma : [0,1] \to S_c(X)$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} g_n(t), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}; \\ \{y_n : n \in (\omega+1) \setminus \{0\}\}, & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\gamma(0) = S_y$ y $\gamma(1) = g_1(1) = S_x$.

Se sigue que γ está bien definida, y usando el lema del Pegado ([**16**, Teorema 7.3, p. 108]) se puede probar que es continua en $(0,1]$. Para ver que γ es continua en $t = 0$, tomemos una familia celular finita $\mathcal{W}$ tal que $S_y = \gamma(0) \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$. Sea $W \in \mathcal{W}$ tal que $y_\omega \in W$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $V_{M(n)} \subseteq W$ cada vez que $n \geq N$. Observemos que $x_n, y_n \in V_{M(n)} \subseteq W$ para todo $n \geq N$. Entonces, si $t \in [0, \frac{1}{N})$ se puede probar que $\gamma(t) \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$ y, así, γ es una trayectoria en $S_c(X)$ de S_y a S_x. □

Corolario 6.2. *Sea X un espacio conexo por trayectorias y sea $p \in X$. Supongamos que X es primero numerable en p. Si X es localmente conexo por trayectorias en p y si $R, S \in S_c(X)$ son tales que $R \to p$ y $S \to p$, entonces existe una trayectoria en $S_c(X)$ de R a S.*

Nuestro objetivo ahora es estudiar la conexidad local por trayectorias del hiperespacio $S_c(X)$. Comencemos con un lema un poco técnico.

Lema 6.3. *Sea $\mathcal{U}$ una familia celular finita de un espacio X. Para cada $U \in \mathcal{U}$ definimos $Q_U = \{S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c : \lim S \in U\}$. Sean $U, V \in \mathcal{U}$ tales que tanto U como V contienen arcos A_U y A_V, respectivamente. Si $x_\omega \in A_U$ y $y_\omega \in A_V$, entonces existe una trayectoria $\gamma : [0,1] \to Q_U \cup Q_V$ tal que $\lim \gamma(0) = x_\omega$ y $\lim \gamma(t) = y_\omega$ para cada $t \in (0,1]$. En particular, $\gamma(0) \in Q_U$ y $\gamma\big((0,1]\big) \subseteq Q_V$.*

Demostración: Sea $S \in S_c(A_U)$ tal que $\lim S = x_\omega$ y tomemos una enumeración adecuada de S, digamos $S = \{x_n : n \in \omega+1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $\overline{x_n x_{n+1}}$ el subarco de A_U cuyos puntos extremos son x_n y x_{n+1}. Tomemos una trayectoria $\alpha_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to \overline{x_n x_{n+1}}$ tal que $\alpha_n(\frac{1}{n}) = x_n$ y $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = x_{n+1}$. Similarmente, tomemos $\{y_n : n \in \omega+1\} \in S_c(A_V)$ y para cada $n \in \omega$ denotemos por $\overline{y_n y_{n+1}}$ el subarco de A_V cuyos puntos extremos son y_n y y_{n+1}. Además tomemos una trayectoria $\beta_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to \overline{y_n y_{n+1}}$ tal que $\beta_n(\frac{1}{n}) = y_n$ y $\beta_n(\frac{1}{n+1}) = y_{n+1}$.

Para cada $W \in \mathcal{U} \setminus \{U, V\}$ fijemos un punto $x_W \in W$ y sea $Z = \{x_W : W \in \mathcal{U} \setminus \{U, V\}\}$. Definamos $\gamma : [0,1] \to Q_U \cup Q_V$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} \{x_m : m \leq n\} \cup \{\alpha_n(t)\} & \\ \qquad \cup \{y_m : m \geq n+1\} \cup \{\beta_n(t)\} \cup Z, & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]; \\ \{x_m : m \in \omega+1\} \cup \{y_\omega\} \cup Z, & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Entonces γ está bien definida y usando el lema del Pegado ([**16**, Teorema 7.3, p. 108]) y el lema 2.3 se puede probar que es continua en $(0,1]$. Para ver que γ es continua en $t = 0$, tomemos una familia celular finita $\mathcal{W}$ tal que $\{x_m : m \in \omega+1\} \cup \{y_\omega\} \cup Z \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$. Sean $W_0, W_1 \in \mathcal{W}$ tales que $x_\omega \in W_0$ y $y_\omega \in W_1$; por otro lado, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n \geq N} \overline{x_n x_{n+1}} \subseteq W_0$ y $\bigcup_{n \geq N} \overline{y_n y_{n+1}} \subseteq W_1$.

Entonces, si $t \in [0, \frac{1}{N})$ se puede probar que $\gamma(t) \in \langle \mathcal{W} \rangle_c$ y, así, γ es continua. Finalmente, notemos que $\lim \gamma(0) = x_\omega$ y $\lim \gamma(t) = y_\omega$ para cada $t \in (0, 1]$. $\square$

Antes de ver nuestro siguiente teorema necesitamos recordar un resultado conocido.

Teorema 6.4. [**18**, Corolario 31.6, p. 222] *Un espacio T_2 es conexo por trayectorias si y sólo si es arcoconexo.*

Teorema 6.5. *Sea X un espacio y supongamos que $\mathcal{U}$ es una familia celular finita cuyos elementos son conexos por trayectorias. Sean $x, y \in X$ tales que X es primero numerable y localmente conexo por trayectorias tanto en x como en y. Si $S_x, S_y \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$ son tales que $\lim S_x = x$ y $\lim S_y = y$, entonces existe una trayectoria en $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ de S_x a S_y.*

Demostración: Sean $U_x, U_y \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U_x$ y $y \in U_y$. Consideramos dos casos.

Caso 1. $U_x = U_y$.

Sea $U \in \mathcal{U} \setminus \{U_x\}$. En este caso la celularidad de $\mathcal{U}$ implica que tanto $S_x \cap U$ como $S_y \cap U$ pertenecen a $F(U)$. Así, por el Corolario 2.6 podemos tomar una trayectoria $\varphi_U : [0, 1] \to F(U)$ tal que $\varphi_U(0) = S_x \cap U$ y $\varphi_U(1) = S_y \cap U$.

Notemos que $S_x \cap U_x \in S_c(U_x)$. Sea $A \subseteq U_x$ un arco que contiene a x y a y (Teorema 6.4) y sean $A_x, A_y \in S_c(A)$ tales que $\lim A_x = x$ y $\lim A_y = y$. Gracias al Corolario 6.2, la sucesiones $S_x \cap U_x$ y A_x se pueden unir con una trayectoria en $S_c(U_x)$. Similarmente, $S_y \cap U_x$ y A_y se pueden unir con una trayectoria en $S_c(U_x)$. Además, por [**2**, Corolario 1.5], A_x y A_y se pueden unir con una trayectoria en $S_c(A) \subseteq S_c(U_x)$. Luego, existe una trayectoria $\varphi_{U_x} : [0, 1] \to S_c(U_x)$ tal que $\varphi_{U_x}(0) = S_x \cap U_x$ y $\varphi_{U_x}(1) = S_y \cap U_x$. Finalmente definamos $\alpha : [0, 1] \to \langle \mathcal{U} \rangle_c$ como $\alpha(t) = \bigcup \{\varphi_U(t) : U \in \mathcal{U}\}$. El lema 2.3 garantiza que α es una trayectoria en $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ que une S_x y S_y.

Caso 2. $U_x \neq U_y$.

Usando el Teorema 6.4 y el lema 6.3 se puede probar que existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \to \langle \mathcal{U} \rangle_c$ tal que $\lim \gamma(0) = x \in U_x$ y $\lim \gamma(1) = y \in U_y$. Por el Caso 1 existen dos trayectorias en $\langle \mathcal{U} \rangle_c$, una de S_x a $\gamma(0)$ y la otra de S_y a $\gamma(1)$. $\square$

Recordemos que un espacio X es *fuertemente localmente conexo por trayectorias en p* si X tiene una base local en p cuyos elementos son conexos por trayectorias (y abiertos). El espacio X es *fuertemente localmente conexo por trayectorias* si lo es en cada uno de sus puntos.

El siguiente lema es un ejercicio sencillo de los primeros cursos de topología y omitiremos su prueba.

Lema 6.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio X:*

(i) *X es fuertemente localmente conexo por trayectorias;*
(ii) *X es localmente conexo por trayectorias;*
(iii) *si U es un subconjunto abierto de X y K es una componente por trayectorias de U, entonces K es abierta en X.*

Corolario 6.7. *Sea X un espacio primero numerable. Si X es localmente conexo por trayectorias, entonces $S_c(X)$ también lo es.*

Demostración: Sean $S \in S_c(X)$ y $\mathcal{U}$ una familia celular finita tal que $S \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$; como X es localmente conexo por trayectorias, por el lema 6.6 podemos suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ son conexos por trayectorias. Aplicando el Teorema 6.5 obtenemos que $\langle \mathcal{U} \rangle_c$ es conexo por trayectorias. □

Corolario 6.8. *Sea X un espacio primero numerable. Si X es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, entonces $S_c(X)$ es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.*

Demostración: Apliquemos el Teorema 6.5 a $\mathcal{U} = \{X\}$ para obtener que $S_c(X)$ es conexo por trayectorias. □

Como los continuos localmente conexos son conexos por trayectorias y localmente conexos por trayectorias, obtenemos directamente el siguiente resultado.

Corolario 6.9. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $S_c(X)$ es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.*

Lema 6.10. *Sea X un espacio. Si $S_c(X)$ es localmente conexo por trayectorias en algún elemento, entonces X contiene un arco.*

Demostración: Por hipótesis existe una vecindad conexa por trayectorias $\mathcal{V}$ de S para alguna $S \in S_c(X)$; así podemos tomar una familia celular finita $\mathcal{W}$ tal que $S \in \langle \mathcal{W} \rangle_c \subseteq \mathcal{V}$. Sean $p = \lim S$ y W el elemento de $\mathcal{W}$ que contiene a p. Tomemos $z \in (S \cap W) \setminus \{p\}$ y definamos $R = S \setminus \{z\}$. Como $S, R \in \langle \mathcal{W} \rangle_c \subseteq \mathcal{V}$ existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to \mathcal{V}$ tal que $\alpha(0) = S$ y $\alpha(1) = R$. Gracias al lema 5.1 existe una trayectoria $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) \in R \subseteq X \setminus \{z\}$. La conclusión se sigue del Teorema 6.4 aplicado a $\gamma[[0,1]]$. □

Teorema 6.11. *Sea X un espacio. Si $S_c(X)$ es no vacío y localmente conexo por trayectorias, entonces X también lo es.*

Demostración: Fijemos $q \in X$ y un subconjunto abierto W de X que contiene a q. Como X contiene un arco (lema 6.10), podemos tomar $S \in S_c(X)$ tal que $q \in S \setminus \{\lim S\}$. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos y ajenos tales que $q \in U_1 \subseteq W$ y $S \setminus \{q\} \subseteq U_2$.

Como $S \in \langle \{U_1, U_2\} \rangle_c$, existe un subespacio conexo por trayectorias $\mathcal{V}$ tal que $S \in \int(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \subseteq \langle \{U_1, U_2\} \rangle_c$. Se sigue del lema 4.2 que $U_1 \cap (\bigcup \int(\mathcal{V}))$ es un subconjunto abierto de X y que $q \in U_1 \cap (\bigcup \int(\mathcal{V})) \subseteq U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V}) \subseteq W$.

Basta probar que cada punto de $U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V})$ se puede conectar con q por una trayectoria contenida en $U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V})$. Para esto tomemos $p \in U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V})$ y también $S_p \in \mathcal{V}$ tal que $p \in S_p$. Además, sea $\alpha : [0,1] \to \mathcal{V}$ una trayectoria tal que $\alpha(0) = S_p$ y $\alpha(1) = S$. Gracias al lema 5.1 existe una trayectoria $\gamma : [0,1] \to \bigcup \alpha\big([0,1]\big)$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) \in S$. Observe que $\gamma\big([0,1]\big) \subseteq \bigcup \mathcal{V} \subseteq U_1 \cup U_2$. El hecho de que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y la conexidad de $\gamma\big([0,1]\big)$ implican que $\gamma\big([0,1]\big) \subseteq U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V})$. Finalmente, como $\gamma(1) \in S \cap U_1$ entonces $\gamma(1) = q$. Por lo tanto, $U_1 \cap (\bigcup \mathcal{V})$ es conexo por trayectorias. □

Nuestras dos siguientes caracterizaciones son consecuencia del Corolario 6.7, el Teorema 6.11, el Corolario 6.8 y el Teorema 5.2.

Corolario 6.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio primero numerable X con hiperespacio $S_c(X)$ no vacío:*

(i) X *es localmente conexo por trayectorias;*
(ii) $S_c(X)$ *es localmente conexo por trayectorias.*

Corolario 6.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio primero numerable* X *con hiperespacio* $S_c(X)$ *no vacío:*
(i) X *es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias;*
(ii) $S_c(X)$ *es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.*

7. Dimensión

Dedicamos esta última sección a hablar brevemente sobre la dimensión del hiperespacio $S_c(X)$.

Lema 7.1. *Sea* X *un espacio y supongamos que* $\{L_n : n \in \omega\}$ *es una sucesión de elementos de* $K(X)$ *que son ajenos por pares y que convergen a un singular* $\{x_\omega\}$*. Entonces* $\prod_{n\in\omega} L_n$ *se puede encajar en* $S_c(X)$*.*

Demostración: Sea $P = \prod_{n\in\omega} L_n$ y para cada $n \in \omega$ denotemos por $\pi_n : P \to L_n$ a la n-ésima proyección. Como los elementos de $\{L_n : n \in \omega\}$ son ajenos por pares, la función $g : P \to S_c(X)$ dada por $g((y_n)_{n\in\omega}) = \{y_n : n \in \omega\} \cup \{x_\omega\}$ está bien definida y es inyectiva. A continuación probaremos que g es continua. Para ello tomemos $(y_n)_{n\in\omega} \in P$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}(X)$ tales que $g((y_n)_{n\in\omega}) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Sea $U \in \mathcal{U}$ con $x_\omega \in U$ y definamos $A = \{n \in \omega : L_n \subseteq U\}$. Para cada $n \in \omega \setminus A$ sea $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $y_n \in U_n$. Sea $V = \bigcap_{n\in\omega\setminus A} {\pi_n}^{-1}[U_n \cap L_n]$. Así V es un subconjunto abierto de P y $(y_n)_{n\in\omega} \in V$. Ahora, si $(z_n)_{n\in\omega} \in V$, se sigue que $g((z_n)_{n\in\omega}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$; además, $z_n \in g((z_n)_{n\in\omega}) \cap U_n$ para cada $n \in \omega \setminus A$ y $x_\omega \in g((z_n)_{n\in\omega}) \cap U$, lo cual implica que $g((z_n)_{n\in\omega}) \in \langle \mathcal{U} \rangle_c$. Por lo tanto g es continua y, como cada L_n es compacto, concluimos que g es un encaje. □

Nuestro siguiente resultado se sigue de [**6**, Remark, p. 34].

Lema 7.2. *Si* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *es una familia finita de espacios compactos y de dimensión 1, entonces* $\dim\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = n$*.*

Lema 7.3. *Todo espacio métrico compacto de dimensión finita* ≥ 1 *contiene un continuo de dimensión 1.*

Demostración: Procederemos por inducción. Si $\dim(X) = 1$, entonces X tiene una componente no degenerada (ver [**6**, D), p. 22]), la cual es un continuo de dimensión 1. Ahora supongamos que el enunciado se cumple para los espacios métricos compactos de dimensión k con $1 \leq k \leq n$ y sea X un espacio métrico compacto de dimensión $n+1$. Entonces existen $p \in X$ y una vecindad V de p cuya frontera tiene dimensión n; aplicando la hipótesis de inducción a tal frontera obtenemos lo buscado. □

Recordemos que un *arco* en un espacio X es un subespacio de X que es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Teorema 7.4. *Dadas las siguientes condiciones para un espacio* X*:*
(1) $S_c(X)$ *contiene un cubo de Hilbert, i.e., una copia del producto* $[0, 1]^\omega$*.*
(2) X *contiene un arco.*
(3) $\dim(X) \neq 0$*.*
(4) $\dim(S_c(X)) = \infty$*.*
(5) $\dim(K(X)) = \infty$*.*

se tiene que (1) y (2) son equivalentes. Además, si X es compacto y métrico (y así métrico y separable) entonces (3), (4) y (5) son equivalentes.

Demostración: Supongamos que $S_c(X)$ contiene un cubo de Hilbert Q y sean S_1 y S_2 dos elementos distintos de Q. Podemos suponer que existe $z \in S_1 \setminus S_2$. Tomemos una trayectoria $\alpha : [0,1] \to Q$ de S_1 a S_2 y usemos el lema 5.1 para obtener una trayectoria $\gamma : [0,1] \to X$ de z a algún punto de S_2. Como la imagen de γ tiene al menos dos puntos, entonces contiene un arco (ver Teorema 6.4).

Note que si A es un arco en X, existe una sucesión de arcos ajenos por pares $\{L_n : n \in \omega\} \subseteq K(A)$ que converge a un unitario y así, el lema 7.1 garantiza la condición (1).

Para el resto de la prueba supondremos que X es métrico y compacto. Además, para cada $A \subseteq X$, el símbolo $\mathrm{diam}(A)$ denotará el diámetro de A en X.

Supongamos que se cumple (3). Como X es compacto, tiene una componente no degenerada Y, la cual es un continuo. Sea $S = \{x_n : n \in \omega + 1\} \in S_c(Y)$ y tomemos una familia celular $\{W_n : n \in \omega\}$ en el subespacio $Y \setminus \{x_\omega\}$ con las siguientes propiedades:

$$S \cap W_n = \{x_n\} \text{ para cada } n \in \omega \ \text{ y } \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(W_n) = 0.$$

Gracias a [**17**, Corolario 5.5], para cada $n \in \omega$ existe un continuo no degenerado K_n tal que $x_n \in K_n \subseteq W_n$. Así, el lema 7.1 implica que $\prod_{n\in\omega} K_n$ se puede encajar en $S_c(X)$.

Si K_m tiene dimensión infinita para alguna $m \in \omega$, obtenemos inmediatamente la condición (4); así podemos suponer que cada K_n tiene dimensión 1 para cada $n \in \omega$ (lema 7.3). En este caso la condición (4) se sigue usando el lema 7.2. Por otro lado, como $S_c(X) \subseteq K(X)$ obtenemos que (4) implica (5). Finalmente, se sabe que si X tiene dimensión cero, entonces $K(X)$ también ([**15**, 4.13.1]); por lo tanto (5) implica (3). □

Bibliografía

[1] J. Camargo, D. Maya y P. Pellicer-Covarrubias, *Path connectedness, local path connectedness and contractibility of $S_c(X)$*, Colloq. Math. 160 (2020), no. 2, 183–211. https://doi.org/10.4064/cm7516-1-2019

[2] S. García-Ferreira y Y. F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topology Appl. 196 (2015), 795–804.

[3] S. García-Ferreira y R. Rojas-Hernández, *Connectedness like properties of the hyperspace of convergent sequences*, Topology Appl. 230 (2017), 639–647.

[4] S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández y Y. F. Ortiz-Castillo, *Categorical properties on the hyperspace of nontrivial convergent sequences*, Top. Proc. 52 (2018), 265–279.

[5] S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández y Y. F. Ortiz-Castillo, *The Baire property on the hyperspace of nontrivial convergent sequences*, Topol. Appl. 301 (2021), https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107505

[6] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1969.

[7] A. Illanes, *Open induced mappings, an example*, Top. Proc. 53 (2019), 37–45.

[8] A. Illanes, *Contractibility of the hyperspace of sequences, harmonic fan*, Topol. Appl. 277 (2020), https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107167

[9] A. Illanes, *The hyperspace of sequences of a dendrite is contractible*, Top. Proc. 56 (2020), 57–70.

[10] P. Krupski y K. Omiljanowski, *Hyperspaces of infinite compacta with finitely many accumulation points*, arXiv:1908.02845v1, 2019.

[11] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[12] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *Induced Mappings on the Hyperspace of Convergent Sequences*, Topol. Appl. 229 (2017), 85–105.

[13] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *General properties of the hyperspace of convergent sequences*, Top. Proc. 51 (2018), 143–168.

[14] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias y R. Pichardo-Mendoza, *Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences*, Math. Slovaca. 68 (2018), no. 2, 431–450.

[15] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.

[16] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[18] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 2004.

Correo electrónico: `paty@ciencias.unam.mx` (Patricia Pellicer Covarrubias)

CAPÍTULO 7

Asignaciones y estrellas, versión genérica

Iván Martínez Ruiz, Oleg Okunev, Alejandro Ramírez Páramo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

1. Introducción y preliminares

En la primera década de los años 2000, Tkachuk, Wilson y van Mill introdujeron las nociones de clases definidas por estrellas y asignaciones de vecindades, para una propiedad topológica $\mathcal{P}$, y fueron nombradas *clase estrella-*$\mathcal{P}$ y *clase dual-*$\mathcal{P}$. Casi a la par de la publicación del trabajo [**9**], Alas, Tkachuk y Wilson en [**2**], introducen la noción de clase dual débil para una propiedad topológica $\mathcal{P}$, nombrada clase *dual débil-*$\mathcal{P}$. Si bien algunas nociones ya se habían estudiado antes de los anõs 2000, con los trabajos antes mencionados se detonó el estudio de estas clases de espacios. Actualmente diversos autores se han dado a la tarea de obtener resultados para propiedades topológicas específicas como la propiedad *finito*, *numerable*, *compacto* y *Lindelöf* por citar algunas.

En este trabajo, como primer punto, haremos una exposición unificada (y genérica) de las clases comentadas previamente y otras que se han desprendido naturalmente de esas clases. Para continuar, haremos un breve análisis sobre la propiedad *finito*.

A continuación daremos algunas notaciones y definiciones. Es importante comentar que lo referente a Topología, tiene por fuente a [**3**].

Dados un conjunto E y un cardinal κ, denotamos con $\mathcal{P}(E)$ al conjunto potencia de E; *i.e.* al conjunto de todos los subconjuntos de E. Con $[E]^{\leq\kappa}$ denotamos a la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $\leq \kappa$; similarmente se definen $[E]^{<\kappa}$ y $[E]^{\kappa}$.

Denotamos con ω al primer ordinal y cardinal numerable y con ω_1 denotamos al primer ordinal y cardinal no numerable.

Definición 1.1. *Dados A un subconjunto de un espacio topológico X y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X, la estrella de A respecto de $\mathcal{U}$, denotada $St(A,\mathcal{U})$, es el conjunto $\bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$.*

Usualmente, si $A = \{x\}$, para algún $x \in X$, se escribe $St(x, \mathcal{U})$, en lugar de $St(\{x\}, \mathcal{U})$.

Ejemplo 1.2. *Consideremos el espacio* $(\mathbb{R}, \tau)$*; donde,* τ *es la topología usual para* $\mathbb{R}$*.*

(1) Tomemos $\mathcal{U} = \{\mathbb{R}\}$ *y* $A = [0,1]$*, entonces* $St(A, \mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\} = \mathbb{R}$*.*
(2) Sean $\mathcal{U} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$*,* $A = [-2, -1)$*,* $x = 1/3$ *y* $B = \mathbb{Q}$*, el conjunto de los números racionales. Puesto que para cualquier* $n \in \mathbb{N}$*,* $A \cap (n, n+1) = \emptyset$*, tenemos que* $St(A, \mathcal{U}) = \emptyset$*. Ahora, es claro que* $1/3 \in (1,2)$ *y para cualquier* $n \in \mathbb{N}$*, con* $n > 2$*,* $(1,2) \cap (n, n+1) = \emptyset$*; luego,* $St(A, \mathcal{U}) = (1,2)$*. Finalmente, notemos que para cualquier* $n \in \mathbb{N}$*,* $(n, n+1) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$*; luego,* $St(B, \mathcal{U}) = \bigcup\{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A,\ U \subseteq X$.

(1) U es una vecindad de x si $x \in U \in \tau$.
(2) Empleamos $cl_X(A)$ o $\overline{A}$ para denotar a la clausura de A en X (*i.e* al conjunto de los x en X, tales que para toda vecindad, U, de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$).
(3) La θ-clausura de A, denotada $cl_\theta(A)$ es el conjunto de los $x \in X$, tales que para toda vecindad, U, de x, se tiene que $cl_X(U) \cap A \neq \emptyset$).

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ familias de subconjuntos abiertos de X. Diremos que:

(1) $\mathcal{U}$ es cubierta abierta para X, si $\bigcup \mathcal{U} = X$.
(2) $\mathcal{V}$ es subcubierta, si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Definición 1.3. *Se dice que un espacio topológico,* (X, τ)*, es:*

(1) Compacto si toda cubierta abierta de X*, admite una subcubierta finita.*
(2) Numerablemente compacto si toda cubierta abierta numerable de X*, admite una subcubierta finita.*
(3) Lindelöf, si toda cubierta abierta de X*, admite una subcubierta numerable.*

Entendemos por propiedad topológica a una propiedad, $\mathcal{P}$, para la cual ocurre que siempre que un espacio topológico X satisface $\mathcal{P}$, entonces cualquier espacio homeomorfo a él cumple $\mathcal{P}$. Cualquier propiedad topológica, $\mathcal{P}$, determina la clase de todos los espacios con la propiedad $\mathcal{P}$, la cual denotamos $[\mathcal{P}]$. De aquí, $X \in [\mathcal{P}]$ si y solo si X satisface $\mathcal{P}$.

Definición 1.4. *Sea* X*un espacio topológico. Diremos que un operador* $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *es operador cerradura si* c *satisface las condiciones siguientes:*

(1) $A \subseteq c(A)$*, para cualquier* $A \in \mathcal{P}(X)$*,*
(2) para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$*, si* $A \subseteq B$*, entonces* $c(A) \subseteq c(B)$*.*

Entre otros, $c = Id$, $c = \overline{()}$ o $c = cl_\theta$, son operadores cerradura.

Un subconjunto D de X se dice que es *discreto* si para todo $p \in D$, existe un conjunto abierto U de X tal que $U \cap D = \{p\}$.

2. Esquemas de clases

Iniciamos nuestro estudio con la noción de asignación de vecindades.

Definición 2.1. ([**8**]) *Una asignación de vecindades en un espacio topológico* (X, τ) *es una función* $\phi : X \to \tau$*, tal que para cada* $x \in X$*,* $x \in \phi(x)$*.*

Sea X un espacio topológico. Notemos que toda cubierta abierta de X induce una asignación de vecindades. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, para algún cardinal κ. Observemos que si $x \in X$, entonces el conjunto $\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ no es vacío, ya que $\mathcal{U}$ es cubierta de X; luego, podemos tomar $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$. Puesto que α_x es un mínimo, tenemos que α_x es único. De aquí que si definimos, para cada $x \in X$, $\phi(x) = U_{\alpha_x}$, entonces ϕ es una asignación de vecindades. En lo sucesivo, llamaremos asignación natural a la asignación inducida por una cubierta dada.

Ejemplo 2.2. *Consideremos el espacio* $(\mathbb{R}, \tau)$*; donde,* τ *es la topología usual para el conjunto de los números reales,* $\mathbb{R}$*.*

(1) *Claramente la función, definida, para cada* $x \in X$*, como* $\phi(x) = \mathbb{R}$*, es una asignación de vecindades.*
(2) *La función definida, para cada* $x \in X$*, como* $\phi(x) = (x - 1/2, x + 1/2)$*, también es una asignación de vecindades.*
(3) *Si para cada* $x \in \mathbb{R}$*, definimos* $\phi(x) = \emptyset$*, entonces* ϕ*, no es una asignación de vecindades, pues tenemos que* $1 \notin \phi(1) = \emptyset$*.*

Ahora estamos en posibilidad de definir las clases o esquemas de clases con las que trabajaremos en esta sección.

Definición 2.3. *Sean* $\mathcal{P}$ *una propiedad topológica y* c *un operador cerradura.*

(1) *La clase* c*-dual de* $\mathcal{P}$*, respecto de asignación de vecindades, denotada* $[\mathcal{P}]_c$*, consiste de aquellos espacios* X *que tienen la propiedad de que dada cualquier asignación de vecindades,* ϕ*, existe* $Y \subseteq X$ *tal que* $X = c(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$ *y* $Y \in [\mathcal{P}]$*.*
(2) *La clase* c*-estrella-*$\mathcal{P}$ *de* $\mathcal{P}$*, denotada* $\mathcal{S}_c(\mathcal{P})$*, consiste de aquellos espacios* X *que tienen la propiedad de que para cualquier cubierta abierta,* $\mathcal{U}$*, de* X*, existe* $Y \subseteq X$ *tal que* $X = c(St(Y, \mathcal{U}))$ *y* $Y \in [\mathcal{P}]$*.*

Mientras no se diga lo contrario, en lo sucesivo las ocurrencias de $\mathcal{P}$ se interpretan como $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica y las de c como c es un operador cerradura.

Ejemplo 2.4. (1) *Para* $c = Id$*, tenemos que* $[\mathcal{P}]_c = [\mathcal{P}]^*$*; donde* $[\mathcal{P}]^*$ *es la clase de aquellos espacios* X *con la propiedad de que dada cualquier asignación de vecindades,* ϕ*, existe* $Y \subseteq X$ *tal que* $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ *y* $Y \in [\mathcal{P}]$*. La clase* $[\mathcal{P}]^*$ *fue nombrada por los autores de* [**9**]*, como clase dual de* $\mathcal{P}$*.*
(2) *Para* $c = \overline{()}$*,* $[\mathcal{P}]_c = [\mathcal{P}]'$*; donde la clase* $[\mathcal{P}]'$ *se compone de los espacios* X *para los que dada cualquier asignación de vecindades,* ϕ*, existe* $Y \subseteq X$ *tal que* $X = cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$ *y* $Y \in [\mathcal{P}]$*. La clase* $[\mathcal{P}]'$ *es llamada por los autores de* [**2**]*, como clase dual débil de* $\mathcal{P}$*.*

A continuación presentamos un par de ejemplos referentes a las estrellas.

Ejemplo 2.5. (1) ([**9**]) *Para* $c = Id$*,* $\mathcal{S}_c(\mathcal{P})$ *es la clase estrella-*$\mathcal{P}$*, la cual se conforma de los espacios* X *para los que dada cualquier cubierta abierta,*

$\mathcal{U}$, de X, existe $Y \subseteq X$ tal que $X = St(Y, \mathcal{U})$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. En adelante, $\mathcal{S}^*(\mathcal{P})$, denotaremos a esta clase de espacios.

(2) *([**1**]) Para $c = \overline{()}$, $\mathcal{S}_c(\mathcal{P})$ es la clase estrella-$\mathcal{P}$ débil, a la cual denotaremos $\mathcal{S}'(\mathcal{P})$. Esta clase consistente de los espacios X tales que para cualquier cubierta abierta, $\mathcal{U}$, de X, existe $Y \subseteq X$ tal que $X = cl_X(St(Y, \mathcal{U}))$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. Usaremos $\mathcal{S}'(\mathcal{P})$, para denotar a esta clase de espacios.*

Es natural preguntarse la relación que guardan las clases de espacios definidas previamente. La proposición siguiente da una respuesta genérica.

Lema 2.6. *Para cualquiera $\mathcal{P}$ y c, $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{P}]_c \subseteq \mathcal{S}_c(\mathcal{P})$.*

Demostración: La primera contención es inmediata. Así, solo demostraremos la segunda.

Sean $X \in [\mathcal{P}]_c$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ una cubierta abierta de X. Consideremos la asignación natural ϕ. Dado que $X \in [\mathcal{P}]_c$, existe $Y \subseteq X$ da tal forma que $X = c(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. Observemos que para cada $y \in Y$, se tiene que $\phi(y) \subseteq St(Y, \mathcal{U})$; luego, $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq St(Y, \mathcal{U})$ y como c es operador cerradura, $X = c(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) \subseteq c(St(Y, \mathcal{U}))$. Así, $X \in \mathcal{S}_c(\mathcal{P})$. □

Aquí tenemos otras interrogantes.

Problema 2.7. *Supongamos que $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.*

(1) *¿Cuál es la clase c-dual de $\mathcal{P}$, $[\mathcal{P}]_c$?*
(2) *¿Quién es la clase c-estrella-$\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}_c(\mathcal{P})$?*
(3) *¿Son propias las contenciones que se establecen en la Proposición 2.6?*

La proposición siguiente establece la relación que guardan las clases inducidas por los operadores cerradura y θ-clausura.

Proposición 2.8. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica. Entonces:*

(1) $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]_\theta$.
(2) $\mathcal{S}'(\mathcal{P}) = \mathcal{S}_\theta(\mathcal{P})$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del hecho de que para cualquier abierto, U, en un espacio topológico X, $cl_X(U) = cl_\theta(U)$. □

Diremos que $D \subseteq X$ es $(\mathcal{P}, c)$-denso, si $c(D) = X$ y $D \in [\mathcal{P}]$. Evidentemente tenemos que: Si X tiene un subconjunto $(\mathcal{P}, c)$-denso, entonces X está en las clases $[\mathcal{P}]_c$ y $\mathcal{S}_c(\mathcal{P})$. En particular, si c es el operador cerradura, entonces

(1) X está en las clases $[\mathcal{P}]^*$ y $\mathcal{S}'(\mathcal{P})$.
(2) Si $\mathcal{P}$ es la propiedad de separabilidad y c es el operador clausura; *i.e.* $c = \overline{()}$, entonces si X tiene un $(\mathcal{P}, c)$-denso, entonces X, está en las clases $[NUM]^*$ y $\mathcal{S}'(NUM)$; donde NUM denota a la propiedad de ser numerable. En efecto, sea φ una asignación de vecindades de X. Dado que X tiene un subconjunto denso, D, el cual es separable, entonces existe $Y \in [D]^{\leq\omega}$ tal que Y es denso en D. Dado que Y, también es denso en X, tenemos que $cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}) = X$; luego, como Y es numerable, tenemos que $X \in [NUM]'$ (y por tanto $X \in \mathcal{S}'(NUM)$.

Para concluir esta sección debemos señalar que existen otras interrogantes, digamos naturales, referentes a las clases vistas en la presente sección como la productividad, la preservación bajo funciones (con propiedades adicionales), etc.

Además, es posible introducir otras clases al aplicar de manera diferente el operador cerradura. Observe, por ejemplo que si $c = \overline{()}$, generalmente no ocurre la igualdad $cl_X(\bigcup \mathcal{U}) = \bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}$; donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos del espacio X. De modo que, en el caso de la Definición 2.3-1, podríamos poner $\bigcup\{cl_X(\phi(y)) : y \in Y\} = X$, en lugar de $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$. Este cambio podría generar (en algunos casos) clases distintas. En el trabajo **[13]** se puede ver para la la propiedad de ser numerable, el cambio de posición del operador $c = \overline{()}$, genera clases distintas.

3. La propiedad FIN: sus clases

En la presente sección haremos un análisis profundo sobre las relaciones entre las clases definidas para la propiedad "ser finito" a la cual denotaremos FIN y los operadores $c = Id$ y $c = \overline{()}$. En otras palabras, trabajaremos con las clases siguientes: $[FIN]$, $[FIN]^*$, $[FIN]'$, $\mathcal{S}^*(FIN)$ y $\mathcal{S}'(FIN)$. Notemos que $X \in [FIN]$, entonces X es un conjunto finito.

Inicamos con un resultado que se desprende del Lema 2.6.

Teorema 3.1. *Las contenciones siguientes se satisfacen:*

(1) $[FIN] \subseteq [FIN]^* \subseteq \mathcal{S}^*(FIN) \subseteq \mathcal{S}'(FIN)$.
(2) $[FIN] \subseteq [FIN]^* \subseteq [FIN]' \subseteq \mathcal{S}'(FIN)$.

Para continuar mostraremos que las contenciones en el teorema previo son propias. Antes daremos unos resultados de caracter auxiliar.

Diremos que un espacio, X, es c-cerrado si para toda cubierta abierta, $\mathcal{U}$, de X existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $X = c(\bigcup \mathcal{V})$. Observemos, por ejemplo, que:

(i) Si c es el operador identidad, entonces un espacio X es c-cerrado si y solo si X es compacto.
(ii) Si c es la clausura topológica ($c = \overline{()}$), entonces X es un espacio c-cerrado si y solo si X es un espacio H-cerrado (vea **[4]**).

La siguiente proposición podría plantearse de una forma más general (igual que la noción de espacio c-cerrado); sin embargo trabajaremos el caso finito.

Proposición 3.2. $[FIN]_c = [c\text{-}cerrado]$.

Demostración: Veamos primeramente que $[FIN]_c \subseteq [c\text{-}cerrado]$. Sean $X \in [FIN]_c$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Consideremos la asignación natural ϕ. Como $X \in [FIN]_c$, existe $Y \in [X]^{<\omega}$ tal que $c(\bigcup\{\phi(y) : y \in X\}) = X$. Claramente $\mathcal{V} = \{\phi(y) : y \in X\}$ es tal que $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ y $c(\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}) = X$. Así, $X \in [c\text{-cerrado}]_c$.

Para verificar que se cumple la contención $[c\text{-cerrado}]_c \subseteq [FIN]_c$, sean $X \in [c\text{-cerrado}]_c$ y φ una asignación para X. Puesto que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es cubierta abierta de X, existe $Y \in [X]^{<\omega}$ tal que $c(\bigcup\{\varphi(y) : y \in X\}) = X$; luego $X \in [FIN]_c$. $\square$

Un par de casos particulares de la proposición anterior.

Corolario 3.3. *(**[9]**) Para* $c = Id$. $[FIN]_c = [FIN]^* = [compacto]$.

Corolario 3.4. *(**[2]**) Para* $c = \overline{()}$. $[FIN]_c = [FIN]' = [H\text{-}cerrado]$.

A continuación daremos ejemplos para ilustrar que las contenciones dadas en el Teorema 3.1 son propias.

Ejemplo 3.5. $[FIN]^*\backslash[FIN] \neq \emptyset$.

Sea $X = [0,1]$ con la topología de sub-espacio de $\mathbb{R}$. Como X es compacto tenemos que, por el Corolario 3.3, $X \in [FIN]^*$; luego, como X no es finito, concluimos que $X \in [FIN]^*\backslash[FIN]$.

El ejemplo siguiente muestra que $\mathcal{S}^*(FIN)\backslash[FIN]^* \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.6. *Sea $X = \omega_1$ con la topología del orden usual.*

(1) *X no está en $[FIN]^*$. Considere la asignación $\varphi(\alpha) = [0, \alpha+1)$, para cada $\alpha \in \omega_1$. Ahora, si $Y \in [\omega_1]^{<\omega}$, entonces, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha > \beta + 1$, para todo $\beta \in Y$. Claramente $\alpha \notin \bigcup\{\varphi(\beta) : \beta \in Y\}$.*
(2) *X es estrella finito. En efecto, supongamos que no es así, entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$, tal que para cualquier $Y \in [X]^{<\omega}$, $X\backslash St(Y, \mathcal{U}) \neq \emptyset$. Vamos a construir, recursivamente, una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $n > 1$, se cumple que $x_n \in X\backslash St(\{x_0, ..., x_{n-1}\}, \mathcal{U})$. Denotemos Y al conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$. Para cada $x \in cl_X(Y)$, fijamos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. No es difícil verificar que la colección $\mathcal{V} = \{St(x_n, \mathcal{U}) : n \in \omega\}$ es una cubierta abierta numerable de $cl_X(Y)$ el cual es numerablemente compacto, debido a que X es numerablemente compacto (vea* **[3]***) y esta propiedad se hereda a cerrados. Sin embargo, $\mathcal{V}$ no admite subcubiertas finitas para $cl_X(Y)$. Así, X es estrella finito.*

El ejemplo siguiente muestra que la contención $\mathcal{S}^*(FIN) \subseteq \mathcal{S}'(FIN)$ es propia.

Ejemplo 3.7. *Existe un espacio $X \in \mathcal{S}'(FIN)\backslash\mathcal{S}^*(FIN)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X = (\beta D \times (\omega_1 + 1))\backslash((\beta D\backslash D) \times \{\omega_1\})$ el subespacio del espacio producto $\beta D \times (\omega_1 + 1)$; donde $D = \{d_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es un espacio discreto de cardinalidad ω_1 y βD es la compactación de Stone Čech de D. Notemos que $\beta D \times \omega_1$ es un subconjunto denso y numerablemente compacto de X; luego, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe $F \in [\beta D \times \omega_1]^{<\omega}$ tal que $\beta D \times \omega_1 \subseteq St(F, \mathcal{U})$ y por tanto $X = cl_X(\beta D \times \omega_1) \subseteq cl_X(St(F, \mathcal{U}))$; es decir $X = cl_X(St(F, \mathcal{U}))$. Por lo tanto $X \in \mathcal{S}'(FIN)$.

Ahora veremos que $X \notin \mathcal{S}^*(FIN)$. Tomemos, para cada $\alpha \in \omega_1$, $U_\alpha = \{d_\alpha\} \times (\alpha, \omega_1]$. Dejamos al lector la tarea de verificar que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{\beta D \times \omega_1\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora, si Y es un subconjunto finito de X, existe $\alpha_0 \in \omega_1$ tal que para cualquier $\alpha > \alpha_0$, $\langle d_\alpha, \omega_1\rangle \notin Y$. Además, existe $\alpha_1 \in \omega_1$ tal que $\pi_2[Y \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \beta_0\}] \cap (\alpha_1, \omega_1) = \emptyset$, donde $\pi_2 : \beta D \times \omega_1 \to \omega_1$ es el mapeo proyección sobre la el segundo factor. Observemos que si $\alpha > \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$, entonces $U_\alpha \cap Y = \emptyset$; luego, $\langle d_\alpha, \omega_1\rangle \notin St(Y, \mathcal{U})$, porque U_α es el único elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a $\langle d_\alpha, \omega_1\rangle$. Así que X no es estrella finito. □

Ejemplo 3.8. *Existe un espacio $X \in [FIN]'\backslash\mathcal{S}(FIN)^*$.*

Consideremos a ω con la topología discreta y sea $X = k(\omega)$ la extensión de Katetov de ω. Entonces:

(1) *$X \in [FIN]'$. Esto se sigue del Corolario 3.5 junto con el hecho de que X es H-cerrado (vea* **[7]***).*

(2) $X \notin [FIN]^*$. *En efecto, dado que* $k(\omega)\backslash\omega$ *es cerrado y discreto, entonces, para cada* $x \in k(\omega)\backslash\omega$, *tomamos* U_x *vecindad de* x *tal que* $U_x \cap (k(\omega)\backslash\omega) = \{x\}$. *Ahora, para cada* $x \in \omega$, *tomamos* $U_x = \{x\}$ *y hacemos* $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$. *Claramente* $\mathcal{U}$ *es una cubierta abierta de* X, *para la cual no existe* $Y \in [X]^{<\omega}$ *tal que* $St(Y, \mathcal{U}) = X$.

Observemos que $[FIN]^* \subseteq [FIN]'$; luego, el espacio X del Ejemplo 3.5 es testigo de que $[FIN]'\backslash[FIN] \neq \emptyset$.

Ejemplo 3.9. *([4]) Sea* $X = \{0\} \cup [1, \infty)$ *topologizado de la siguiente manera. Las vecindades de los puntos de* $[1, \infty)$ *son las usuales de este conjunto visto como subespacio de* $\mathbb{R}$ *y las vecindades de* 0 *tiene la forma siguiente:* $\{0\} \cup \bigcup\{(k, k+1) : k \geq m$ *y* $m \in \mathbb{N}\}$. *Notemos que:*

(1) Dado que $[1, \infty)$ *tiene la topología de subespacio de* $\mathbb{R}$, *tenemos que,* $\mathbb{N}$, *el conjunto de los números naturales es cerrado y discreto en* X; *luego,* X *no es compacto. De aquí que* $X \notin [FIN]$ *(vea Corolario 3.3).*

(2) X *es* H*-cerrado. En efecto, sea* $\mathcal{U}$ *una cubierta abierta de* X. *Tomemos* $U_0 \in \mathcal{U}$ *de tal forma que* $0 \in U_0$. *Entonces existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\{0\} \cup \bigcup\{(k, k+1) : k \geq m_0\} \subseteq U_0$. *Ahora, dado que el conjunto* $[1, m_0]$ *es compacto en* X *y* $[1, m_0] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, *existe* $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ *tal que* $[1, m_0] \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. *No es difícil verificar que* $cl_X(U_0 \cup \bigcup \mathcal{V}) = X$. *Así que por el Corolario 3.4,* $X \in [FIN]'$.

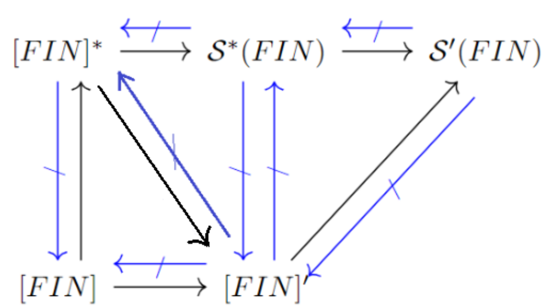
(3) $X \in [FIN]'\backslash[FIN]^*$. *Se sigue del Corolario 3.4.*

Ejemplo 3.10. *Sea* $X = \omega_1$ *con la topología del orden usual.*

(1) X *no está en* $[FIN]'$. *Considere la asignación* $\phi(\alpha) = [0, \alpha + 1)$, *para cada* $\alpha \in \omega_1$. *Ahora, si* $Y \in [\omega_1 + 1]^{<\omega}$, *entonces, existe* $\alpha \in \omega_1$ *tal que* $\alpha > \beta + 1$, *para todo* $\beta \in Y$. *Claramente* $\alpha \notin cl_X(\bigcup\{\phi(\beta) : \beta \in Y\})$.

(2) Hemos visto que X *es estrella finito (vea Ejemplo 3.6) y por lo tanto* X *es débilmente estrella finito.*

De los ejemplos que hemos visto hasta ahora concluimos que las contenciones dadas en el Teorema 3.1, para la propiedad FIN, son propias. El diagrama siguiente ilustra este hecho.



Para concluir nuestro trabajo, mostraremos un par de resultados de los que se obtienen la igualdad entre algunas de las clases vistas para la propiedad FIN.

Teorema 3.11. *([10]) Todo espacio paracompacto débilmente estrella finito es compacto.*

Demostración: Sea X un tal espacio y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Puesto que todo espacio Hausdorff paracompacto es regular, tenemos que para cada $x \in X$ existe V_x vecindad de x tal que $cl_X(V_x) \subseteq U$, para algún $U \in \mathcal{U}$. Claramente $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y dado que éste es paracompacto, tenemos que existe, $\mathcal{W}$, refinamiento abierto localmente finito para $\mathcal{V}$. Ahora, como $\mathcal{W}$ es cubierta abierta de X, existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $cl_X(St(F, \mathcal{W})) = X$. Sea $\mathcal{W}_0 = \{W \in \mathcal{W} : W \cap F \neq \emptyset\}$. Notemos que debido a que $\mathcal{W}$ es localmente finita y F es finito podemos concluir que $\mathcal{W}_0$ es finita. Finalmente, para cada $W \in \mathcal{W}_0$, fijamos un elemento $U_W \in \mathcal{U}$ de tal manera que $cl_X(W) \subseteq U_V$ y denotamos $\mathcal{U}_0$ a la colección formada por los U_W. Claramente $\mathcal{U}_0 \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$. Aún más, $X = \bigcup \mathcal{U}_0$. En efecto, notemos que $St(F, \mathcal{W}) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_0$; luego, $X = cl_X(St(F, \mathcal{W})) \subseteq \bigcup cl_X(\mathcal{W}_0))$, pero como $\mathcal{W}_0$ es finito, tenemos que $cl_X(\bigcup \mathcal{W}_0) = \bigcup \bigcup \{cl_X(W) : U \in \mathcal{W}_0\} \subseteq \mathcal{U}$; de donde $X = \bigcup \mathcal{U}_0$ y, por lo tanto, X es compacto. $\square$

Corolario 3.12. *Para un espacio Hausdorff paracompacto, X, las proposiciones siguientes son equivalentes:*

(1) $X \in [compacto]$.
(2) $X \in [FIN]^*$.
(3) $X \in [FIN]'$.
(4) $X \in \mathcal{S}^*(FIN)$.
(5) $X \in \mathcal{S}'(FIN)$.

Teorema 3.13. *Un espacio casi-regular que es débilmente estrella finito es débilmente compacto.*

Demostración: Sea X un tal espacio y supongamos que X no es débilmente compacto, entonces existe una familia (infinita) numerable, $\mathcal{U}_0 = \{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos no vacíos en X, tal que $\mathcal{U}_0$ es localmente finita. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los elementos de $\mathcal{U}$ son disjuntos dos a dos. Ahora bien, puesto que X es casi-regular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un abierto no vacío, V_n, tal que $cl_X(V_n) \subseteq U_n$. Claramente la colección $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, es una familia localmente finita.

Como $\mathcal{V}$ es una familia discreta, tenemos que $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = \bigcup \{cl_X(V_n) : n \in \mathbb{N}\}$ (vea Theorem 1.1.11 en [**3**]), entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \{X \backslash cl_X(\bigcup \mathcal{V})\}$ es una cuabierta abierta de X; luego, existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $St(F, \bigcup \mathcal{U}) = X$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap F \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in U_n$, entonces $x \in St(F, \bigcup \mathcal{U})$, y dado que U_n es el único elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a x, tenemos que $U_n \cap F \neq \emptyset$, lo cual implica que F no es finito; lo cual es absurdo.

Por lo tanto, X es débilmente compacto. $\square$

Se dice que un espacio X es débilmente compacto, si toda familia de conjuntos abiertos no vacíos, $\mathcal{U}$, localmente finita es finita. El lector interesado en esta clase de espacios puede consultar el trabajo [**6**]. Denotaremos a la propiedad débilmente compacto por DC.

Corolario 3.14. *En la clase de los espacios casi regulares, las propiedades siguientes son equivalentes.*

(1) $X \in [DC]$.
(2) $X \in [DC]^*$.
(3) $X \in [DC]'$.

(4) $X \in \mathcal{S}'(DC)$.

Bibliografía

[1] O. T. Alas, R.Wilson *Properties related to star countablility and star finiteness*, Topol. Appl. 221 (2017) 432-439.

[2] O. T. Alas, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Covering properties and neighbourhood assignments*, Topol. Proc. 30, 1 (2006) 25-38.

[3] Engelking R., *General topology*, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1977.

[4] J. E. James, *On H-closed spaces* , Proceedings of the American Mathematical Society , Feb., 1976, Vol. 55, No. 1 (Feb., 1976), pp. 223-226

[5] M.N. Mukherjee, Arijit Sengupta and S.K. Ghosh. *On some cardinal functions concerning Katětov extesions of infite discrete spaces*, Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. L. Cuza Din Iasi (S.N.) Matematica, Tomul LV, (2009) f.1

[6] J. R. Porter y R. G. Woods, *Feebly Compact Spaces, Martin's Axiom, and Diamond*, Topology Proceedings 9 (1984), pp 105121.

[7] A. Ramíez Páramo y F. Sánchez Texis *Extensión de Katetov*, Topología y sus aplicaciones, Textos Científicos Buap. (2013), 89–102.

[8] E. K. van Douwen, W. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81 (1979) 371-377.

[9] J. van Mill, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Classes defined by stars and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 154 (2007) 2127-2134.

[10] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Remarks on star weakly Lindelöf spaces*, Ques. Math 46,1 (2023) 73-83.

[11] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Weak duals and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 255 (2019) 141-147.

[12] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Dually properties and cardinal inequalities*, Topol. Appl. 255 (2019) 141-147.

[13] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Some remarks on almost star countable spaces*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 52 (1),(2015), 12-20.

Correos electrónicos:
`imartinez@fcfm.buap.mx` (Iván Martínez Ruiz),
`alejandro.ramirez@correo.buap.mx` (Alejandro Ramírez Páramo),
`oleg@fcfm.buap.mx` (Oleg Okunev)

CAPÍTULO 8

Dualidad anillos conmutativos-esquemas afines

Rubén Villafán-Zamora, Ivan Fernando Vilchis-Montalvo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Pasando por el estudio de curvas y superficies en un principio, luego a las variedades algebraicas en general, para posteriormente llegar a la geometría algebraica fundada en términos de esquemas y cohomología, que requiere de bastantes técnicas avanzadas del álgebra conmutativa; no es de extrañarse que la geometría algebraica se haya convertido en una de las áreas de las matemáticas en la que brecha entre las ideas intuitivas que forman su punto de inicio, y los conceptos y métodos que se usan en la investigación actual, sea enorme. A pesar de ello, la experiencia ha convencido al especialista que la teoría de esquemas es el contexto en el cual los problemas de la geometría algebraica son mejor aproximados y mejor entendidos. El presente trabajo está dedicado a la construcción de la dualidad que existe entre los anillos conmutativos y los esquemas afines (lo que le da el nombre). Estos últimos son necesarios para definir los esquemas, que son los objetos de estudio de la geometría algebraica en la actualidad.

2. Teoría de haces

Comenzamos con una breve revisión de la teoría de haces. Si bien los haces que aquí nos interesan son aquellos de anillos conmutativos, en esta introducción nos limitaremos únicamente a hablar de haces de conjuntos, pues todo lo que diremos es válido para haces de otros tipos, no sólo de conjuntos o anillos.

2.1. Espacios fibrados. Sea X un espacio topológico. Un *espacio fibrado* sobre X es una función continua con codominio X. A un espacio fibrado $f : A \longrightarrow X$ sobre X usualmente lo denotaremos como un par $\langle A, f\rangle$. Un *morfismo de espacios fibrados* $f : A \longrightarrow X$, $g : B \longrightarrow X$ es una función continua $\alpha : A \longrightarrow B$

que hace conmutar al triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dados $\langle A, f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B, g\rangle$ y $\langle B, g\rangle \xrightarrow{\beta} \langle C, h\rangle$ morfismos de espacios fibrados, la composición $\beta\alpha$ es un morfismo de $\langle A, f\rangle$ a $\langle C, h\rangle$, ya que $h(\beta\alpha) = (h\beta)\alpha = g\alpha = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "h"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotamos a la categoría de espacios fibrados sobre X por $\mathbf{Sp}/\mathrm{X}$, donde $\mathbf{Sp}$ denota a la categoría de los espacios topológicos y funciones continuas.

Es conveniente pensar a un espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ como una familia de conjuntos $\{A_x\}_{x\in X}$ indizada por X, siendo cada A_x la fibra $f^{-1}(x)$ sobre x; al espacio A como la unión disjunta $\amalg_{x\in X} A_x$ de los A_x, y f enviando a todo A_x en x.

Decimos que un espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ es un *espacio haz* si f es es un *homeomorfismo local*, esto es, para cualquier a en A, existe una vecindad abierta N de a y una vecindad abierta U de $f(a)$ tal que la restricción de f en los abiertos N y U es un homeomorfismo. Los espacios haz forman una subcategoría de $\mathbf{Sp}/\mathrm{X}$ que denotamos por $\mathbf{LH}/\mathrm{X}$.

2.2. Prehaces. Sea $\langle A, f\rangle$ un espacio fibrado sobre X. A cada abierto U de X asociamos el conjunto

$$\Gamma(A, f)(U) = \{U \xrightarrow{s} A \in \mathbf{Sp} \mid fs = i\},$$

de *secciones continuas* de f sobre U, donde $i : U \longrightarrow X$ es la inclusión de U en X. Además, si U, V son abiertos de X con $V \subseteq U$ y $s : U \longrightarrow A$ es una sección sobre U, entonces la restricción $s|_V$ de s a V es una sección sobre V, ya que para cada x en V, $fs|_V(x) = fs(x) = x$, que no es otra cosa que la inclusión de V en X. Así que tenemos una función restricción $\rho|_V^U : \Gamma(A, f)(U) \longrightarrow \Gamma(A, f)(V)$ dada por $s \mapsto s|_V$. También podemos notar que si $W \subseteq V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces $\rho_W^U = \rho_W^V \rho_V^U$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(A,f)(U) \arrow[rr, "\rho_W^U"] \arrow[dr, "\rho_V^U"'] & & \Gamma(A,f)(W) \\ & \Gamma(A,f)(V) \arrow[ur, "\rho_W^V"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, para cualquier s en $\Gamma(A, f)(U)$, $\rho_W^V \rho_V^U(s) = (s|_V)|_W$. Luego, para cada x en W

$$(s|_V)|_W(x) = s|_V(x) = s(x) = s|_W(x) = \rho_W^U(s)(x).$$

También es claro que ρ_U^U es la identidad en $\Gamma(A, f)(U)$. En otras palabras, para cualquier espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ en $\mathbf{Sp}/\mathrm{X}$, la asignación $\Gamma(A, f) : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ que manda a cada abierto U de X al conjunto $\Gamma(A, f)(U)$ de secciones de f sobre

U y a cada contención de abiertos $V \subseteq U$ a la restricción $\rho_V^U : \Gamma(A,f)(U) \longrightarrow \Gamma(A,f)(V)$, es un funtor, luego, $\Gamma(A,f)$ es un objeto de la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$.

Ahora veamos que todo morfismo de espacios fibrados $\langle A,f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B,g\rangle$ nos da una transfomación natural $\Gamma(A,f) \longrightarrow \Gamma(B,g)$ entre los funtores $\Gamma(A,f)$ y $\Gamma(B,g)$. Sea U un abierto de X y s en $\Gamma(A,f)(U)$ una sección de f sobre U. Entonces la composición αs es una sección de g sobre U, esto es, αs está en $\Gamma(B,g)(U)$ como fácilmente comprobamos: $g(\alpha s) = (g\alpha)s = fs = i$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "i"'] & & X \end{tikzcd}$$

Ahora debemos ver que para cualesquier abiertos U, V de X con $V \subseteq U$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \Gamma(A,f)(U) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \Gamma(B,g)(U) \arrow[d, "\rho_V'^U"] \\ \Gamma(A,f)(V) \arrow[r, "\alpha_*"] & \Gamma(B,g)(V) \end{tikzcd}$$

conmuta, donde α_* denota la composición con α a la izquierda. Esto significa que para cualquier s en $\Gamma(A,f)(U)$, $(\alpha s)|_V = \alpha(s|_V)$, algo que es claro.

De este modo, tenemos un funtor $\Gamma : \mathbf{Sp}/X \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ definido como $\langle A,f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B,g\rangle \mapsto \Gamma(A,f) \xrightarrow{\alpha_*} \Gamma(B,g)$.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Un* prehaz (de conjuntos) *sobre X es un funtor $F : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde $\mathcal{O}(X)$ es el copo de abiertos de X considerado como una categoría. Llamamos a cada elemento s en $F(U)$, una* sección *de F en U, y* restricción *a la función $\rho_V^U : F(U) \longrightarrow F(V)$, para cada par de abiertos $V \subseteq U$. Denotamos por $\mathbf{Psh}(X)$ a la categoría de prehaces sobre X, esto es, $\mathbf{Psh}(X) = \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$.*

En el caso general, se define un prehaz (de conjuntos) como un funtor $F : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde $\mathbf{C}$ es cualquier categoría pequeña, no necesariamente la colección de abiertos de un espacio topológico.

2.3. Haces. Para cualquier función continua $g : X \longrightarrow Y$ y cualquier abierto U de X, la restrición $g|_U$ de g a U sigue siendo continua. Ahora supongamos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta del espacio X. Si para cada abierto U_i tenemos definida una función continua $f_i : U_i \longrightarrow Y$, entonces existe a lo más una función continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, es decir, si tal f existe, es única. Garantizamos la existencia de dicha función f, si asumimos que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, para cada par i, j en I. Entonces definimos $f(x) = f_i(x)$, siempre que x est en U_i.

Ahora consideremos el caso en el que $\langle A,f\rangle$ es un espacio fibrado sobre X, U un abierto de X y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, esto es, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si para cada abierto U_i tenemos definida una sección $s_i : U_i \longrightarrow A$ con $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$, entonces la única función continua $s : U \longrightarrow A$ que existe, también es una sección de f, como mostramos a continuación: si x es un elemento de U, entonces x está en algún U_i, luego

$$fs(x) = f(s(x)) = f(s|_{U_i}(x)) = fs_i(x) = x,$$

esto es, fs es la inclusión de U en X.

Definición 2.2. *Sea X un espacio topológico y F un prehaz sobre X. Decimos que F es un* haz *si satisface las siguientes condiciones:*

i) si para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de un abierto U y cualesquier secciones s, s' en $F(U)$ tales que para cualquier i en I,
$$\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s'),$$
entonces $s = s'$.

ii) Si para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de un abierto U y cualquier familia $\{s_i\}_{i \in I}$ de secciones con s_i en $F(U_i)$, tales que
$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$$
para cualesquier i, j en I, entonces existe una sección s en $F(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, para todo i en I.

Un prehaz F que solamente cumple $i)$ se llama *separado*. Es común definir un haz en un solo enuciado que junta $i)$ y $ii)$ de nuestra definición como sigue: decimos que F es un haz si dada cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de un abierto U y cualquier familia $\{s_i\}_{i \in I}$ de secciones con s_i en $F(U_i)$, tales que
$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$$
para cualesquier i, j en I, existe una única sección s en $F(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, para todo i en I.

Existe incluso un modo más pulcro de dar la condición de haz arriba. Para esto notemos que la sucesión $\{s_i\}_{i \in I}$ es un elemento del producto $\prod_{i \in I} F(U_i)$, mientras que las asignaciones $\{s_i\}_{i \in I} \mapsto \{\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i)\}_{i \in I}$ y $\{s_i\}_{i \in I} \mapsto \{\rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)\}_{i \in I}$ definen dos funciones b, c de $\prod_{i \in I} F(U_i)$ al producto $\prod_{(i,j) \in I \times I} F(U_i \cap U_j)$. Luego, si F es un haz, la función $a : F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$ dada por $s \mapsto \{\rho^U_{U_i}(s) = s_i\}_{i \in I}$ es un igualador de b y c. Recíprocamente, si para toda cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de cualquier abierto U, el diagrama

$$F(U) \xrightarrow{\ a\ } \prod_{i \in I} F(U_i) \overset{b}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} F(U_i \cap U_j) \tag{2.1}$$

es un igualador, entonces F es un haz. De la discusión dada al principio de la sección, se sigue que $\Gamma(A, f)$, con $\langle a, f \rangle$ un espacio fibrado, no solamente es un prehaz sobre X, si no que es un haz. Escribimos $\mathbf{Sh}(X)$ para la categoría de haces sobre X.

2.4. Tallos y gérmenes. La representación de un haz F como un haz de secciones $\Gamma(F)$ de un conveniente espacio fibrado, depende de la idea de germen de una función. Procedemos a definir dicho concepto.

Definición 2.3. *Sea F un prehaz sobre un espacio topológico X y x un elemento de X. Denotemos por $\mathcal{V}_x$ a la colección de todas las vecindades abiertas U de x. Definimos el* tallo *F_x de F en el punto x como*
$$F_x = \varinjlim_{U \in \mathcal{V}_x} F(U) = \varinjlim_{x \in U} F(U).$$
El tallo F_x viene equipado con funciones $F(U) \longrightarrow F_x$. Luego, para s en $F(U)$, con U una vecindad abierta de x, escribimos s_x para denotar la imagen de s en F_x y la llamamos el germen *de s en x.*

Teorema 2.4. *Cada germen e en F_x es la imagen de alguna sección s en $F(U)$, para alguna vecindad abierta U de x, esto es, $e = s_x$. Además, dos gérmenes s_x, t_x en F_x, con s en $F(U)$ y t en $F(V)$ digamos, son iguales $s_x = t_x$ si y sólo si existe una vecindad abierta W de x contenida en $U \cap V$ en la cual s y t coinciden, es decir, $\rho|^U_{U\cap V}(s) = \rho|^V_{U\cap V}(t)$.*

DEMOSTRACIÓN: Ver B. R. Tennison, [**5**], pág 9, Proposición 4.2. □

Si s, s' son dos secciones en $F(U)$ con $s = s'$, entonces es claro que, para todo x en U, $s_x = s'_x$. En el caso en que F es un haz tenemos el recíproco:

Teorema 2.5. *Sea X es un espacio topológico y F un haz sobre X. Para cualquier abierto U y s, s' en $F(U)$, tenemos que $s = s'$ si y sólo si para todo x en U, $s_x = s'_x$.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, supongamos que s, s' son dos secciones en $F(U)$ tales que, para cada x en U, sus respectivos gérmenes s_x y s'_x en x son iguales. Entonces, para cada x en U, existe una vecindad abierta U_x de x contenida en U tal que $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(s')$ (Teorema anterior). Así, tenemos una cubierta abierta $U = \bigcup_{x\in U} U_x$ de U y secciones s, s' en $F(U)$ tales que $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(s')$. Por *i*) de la condición de haz, concluimos que $s = s'$. □

Llegamos a la razón de ser de esta sección: para cada prehaz F sobre X, existe un espacio haz $\mathrm{L}(F)$; y cualquier morfismo $f : F \longrightarrow G$ de prehaces nos otorga un morfismo $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$ entre los correspondientes espacios haz $\mathrm{L}(F)$ y $\mathrm{L}(G)$. Para hacer dicha construcción consideremos la colección $\{F_x\}_{x\in X}$ de los tallos de F en cada punto x de X y denotemos $\mathrm{L}(F) = \amalg_{x\in X} F_x$ a la unión disjunta de los tallos F_x. El conjunto $\mathrm{L}(F)$ viene acompañado con una correspondiente función proyección $p : \mathrm{L}(F) \longrightarrow X$ a X que envía a cada tallo F_x a x.

Ahora procedemos a topologizar a $\mathrm{L}(F)$ especificando los subconjuntos de $\mathrm{L}(F)$ que serán la base para una topología. Consideremos cualquier abierto U de X. Si s es un elemento en $F(U)$, entonces tenemos una función $\hat{s} : U \longrightarrow \mathrm{L}(F)$ dada por $x \mapsto s_x$. Los conjuntos de la forma $\hat{s}(U) = \{s_x \in \mathrm{L}(F) \mid x \in U\}$ son los que buscamos, esto es, ellos forman una base para una topología sobre $\mathrm{L}(F)$. En efecto, que la unión de los conjutos $\hat{s}(U)$ es todo $\mathrm{L}(F)$ es inmediato, ya que todo elemento e en $\mathrm{L}(F)$ está en algún tallo F_x y $e = s_x$ para algún s en $F(U)$, con U una vecindad abierta de x. Ahora tomemos e en $\hat{s}(U) \cap \hat{t}(V)$, con s en $F(U)$ y t en $F(V)$. Entonces los gérmenes de s y t coinciden en $x = p(e)$, es decir, $e = s_x = t_x$, así que existe una vecindad W de x contenida en $U \cap V$ en la que $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$ (Teorema 2.4), luego $e = \rho^U_W(s)_x = \rho^V_W(t)_x$ está en $\widehat{\rho^U_W(s)}(W) \subseteq \hat{s}(U) \cap \hat{t}(V)$.

Con esta topología sobre $\mathrm{L}(F)$, la proyección $p : \mathrm{L}(F) \longrightarrow X$ es una función continua. Más aún, p es un homeomorfismo local, ya que para cualquier e en $\mathrm{L}(F)$, existe un abierto básico $\hat{s}(U)$ que contiene a e y donde $p|_{\hat{s}(U)}$ tiene inversa continua $\hat{s}$.

Ahora mostremos que todo morfismo de prehaces $f : F \longrightarrow G$ nos otorga un morfismo $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$. Para cada x en X definimos una función $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ entre los tallos F_x y G_x como sigue: primero, cualquier germen e en F_x es de la forma $e = s_x$, para algún abierto U y s en $F(U)$; luego, $f_U(s)$ es una sección en $G(U)$, y $f_U(s)_x$ un germen del tallo G_x. Así que definimos $f_x(e) = f_U(s)_x$. Si $e = t_x$ para algún t en $F(V)$, entonces existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ en el que $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$. Se sigue que

$$\rho'^U_W f_U(s) = f_W \rho^U_W(s) = f_W \rho^V_W(t) = \rho'^V_W f_V(t),$$

esto es, las seciones $f_U(s)$ y $f_V(t)$ coinciden en W, y por consiguiente, $f_U(s)_x = f_V(t)_x$, así que nuestra función está bien definida. Como $\mathrm{L}(F)$ es la unión disjunta de los tallos F_x, las funciones $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ nos otorgan una función $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$ que es continua y que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}(F) \arrow[rr, "\mathrm{L}(f)"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{L}(G) \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

En resumen, existe un funtor $\mathrm{L} : \mathrm{Psh}(X) \longrightarrow \mathrm{Sp}/X$.

2.5. Adjunción $\mathbf{L} \dashv \boldsymbol{\Gamma}$. Ahora enunciamos el Teorema Fundamental de la Teoría de Haces.

Teorema 2.6.

i) *El funtor* $\mathrm{L} : \mathbf{Psh}(X) \to \mathbf{Sp}/X$ *es adjunto izquierdo al funtor* $\Gamma : \mathbf{Sp}/(X) \to \mathbf{Psh}(X)$ *y* L *preserva límites finitos.*

ii) *Para cada prehaz* F*, la unidad de la adjunción* $\eta : F \longrightarrow \Gamma\mathrm{L}(F)$ *(que es la asignación* $s \mapsto \hat{s}$*) es un isomorfismo si y sólo si* F *es un haz.*

iii) *Para un espacio fibrado* $f : A \longrightarrow X$*, la counidad de la adjunción* $\epsilon : \mathrm{L}\Gamma(A, f) \longrightarrow \langle A, f\rangle$ *es un homeomorfismo si y sólo si* f *es un homeomorfismo local.*

Demostración: Ver P. T. Johnstone, [**2**], pág 172 Teorema 1.5. □

Corolario 2.7.

i) *Los funtores* Γ *y* L *se restringen a una equivalencia de categorías entre* $\mathbf{Sh}(X)$ *y* $\mathbf{LH}/X$*.*

ii) *La inclusión* $\mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Psh}(X)$ *tiene adjunto izquierdo* $\Gamma\mathrm{L} : \mathbf{Psh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ *que preserva límites finitos y se conoce como el* funtor haz asociado *o el* funtor hacificación*.*

iii) *La inclusión* $\mathbf{LH}/X \longrightarrow \mathbf{Sp}/X$ *preserva límites finitos y tiene por adjunto derecho al funtor* $\mathrm{L}\Gamma : \mathbf{Sp}/X \longrightarrow \mathbf{LH}/X$*.*

Demostración: Ver P. T. Johnstone, [**2**], pág 173 Corolario 1.5. □

2.6. Haz sobre una base de la topología. Ahora mencionaremos un método para la construcción de haces sobre un espacio X a partir de cierta información dada sobre los abiertos de una base para la topología sobre X. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología $\mathcal{O}(X)$ sobre X y supongamos que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Decimos que un prehaz $F : \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ sobre los abiertos de la base $\mathcal{B}$ es un haz si cumple que para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de un básico U por básicos U_i en $\mathcal{B}$, el diagrama

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} F(U_i \cap U_j)$$

es un igualador (donde las flechas están definidas como en el diagrama (2.1) arriba), es decir, F cumple la condición de haz sobre los abiertos de la base $\mathcal{B}$. Denotamos por $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ a la categoría de haces sobre $\mathcal{B}$. Ahora notemos que cualquier prehaz sobre X se restringe a un prehaz sobre $\mathcal{B}$ del modo obvio; más aún, todo haz

$F : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}$ sobre X se restringe a un haz sobre $\mathcal{B}$. Este proceso nos define un funtor $\mathbf{r} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$.

Teorema 2.8. *Para cualquier base $\mathcal{B}$ de la topologa sobre un espacio X, la restricción $\mathbf{r} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ es una equivalencia de categorías.*

Demostración: Ver S. Mac Lane, I. Moerdijk, [**4**], pág 69, Teorema 3. □

En otras palabras, este Teorema nos dice que basta con tener los datos de un haz definido solamente sobre los abiertos de una base $\mathcal{B}$ de la topología sobre X, para obtener un haz sobre los abiertos de todo el espacio. Este resultado es muy útil ya que uno tiene mayor control sobre los abiertos de una base que de un conjunto abierto arbitrario del espacio.

2.7. Cambio de base. Dada una función continua $\Phi : X \longrightarrow Y$ y un prehaz F sobre X, podemos definir un prehaz Φ_* sobre Y, llamado la *imagen directa* de F por Φ como

$$\begin{cases} (\Phi_* F)(U) = F(\Phi^{-1}(U)), & U \text{ un abierto de } Y \\ \\ \rho'^{U}_{V} = \rho^{\Phi^{-1}(U)}_{\Phi^{-1}(V)}, & \text{para abiertos } V \subseteq U. \end{cases}$$

Además, si F es un haz, así lo es $\Phi_* F$; y si $f : F \longrightarrow G$ es un morfismo de prehaces sobre X, entonces tenemos un morfismo $\Phi_* f : \Phi_* F \longrightarrow \Phi_* G$ definido para cada abierto U de Y como $(\Phi_* f)_U = f_{\Phi^{-1}(U)}$. Si consideramos a las colecciones de abiertos $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{O}(Y)$ de X y de Y, respectivamente, como categorías, entonces la función $\Phi^{-1} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ es un funtor, y el funtor imagen directa $\Phi_* F$ no es otro que la composición

$$\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{F} \mathbf{Set}.$$

Con la misma función continua $\Phi : X \longrightarrow Y$, pero ahora con un prehaz G sobre Y, construimos un haz $\Phi^* G$ sobre X como sigue: Dado G, consideramos el espacio haz $\langle \mathrm{L}G, p \rangle$ y obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{L}G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\Phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

de funciones continuas. Tomamos el pullback

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & \mathrm{L}G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\Phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde $E = \{(e, x) \in \mathrm{L}G \times X \mid p(e) = \Phi(x)\}$ dotado con la topología heredada por la topología producto en $\mathrm{L}G \times X$ y $p' : E \longrightarrow X$, $E \longrightarrow \mathrm{L}G$ las restricciones a E de las proyecciones sobre X y $\mathrm{L}G$, respectivamente.

El par $\langle E, p' \rangle$ es un espacio haz, es decir, p' es un homeomorfismo local, así que al tomar las secciones sobre cada abierto U de X, obtenemos un haz $\Gamma(E, p')$. Entonces definimos $\Phi^* G = \Gamma(E, p')$, llamado la *imagen inversa* de G por Φ.

Teorema 2.9. *Sea $\Phi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces tenemos un par de funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(X) \arrow[r, shift left, "\Phi_*"] & \mathbf{Sh}(Y) \arrow[l, shift left, "\Phi^*"] \end{tikzcd}$$

con $\Phi^* \dashv \Phi_*$. Además Φ^* preserva límites finitos.

DEMOSTRACIÓN: Ver S. Mac Lane, I. Moerdijk, [**4**], Teorema 2 y 3, pág. 101 y 103, respectivamente. □

3. Anillos de fracciones

Sea R un anillo conmutativo con 1 y S un *subconjunto multiplicativo de R*, esto es, 1 está en S y si s_1, s_2 son elementos de S, entonces su producto $s_1 s_2$ también está en S. Sobre el producto cartesiano $R \times S$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera:

$$(r,s) \sim (r',s') \text{ si y sólo si existe } t \in S \text{ tal que } trs' = tr's.$$

La relación $\sim$ es de equivalencia: $(r,s) \sim (r,s)$ ya que $1rs = 1rs$; si $(r,s) \sim (r',s')$, entonces existe t en S tal que $trs' = tr's$, pero esto significa exactamente que $(r',s') \sim (r,s)$; por último, si $(r,s) \sim (r',s')$ y $(r',s') \sim (r'',s'')$, entonces existen t_1, t_2 en S tales que $t_1rs' = t_1r's$ y $t_2r's'' = t_2r''s'$, luego

$$(t_1t_2s')rs'' = t_1t_2r'ss'' = t_1t_2r''ss' = (t_1t_2s')r''s,$$

esto es, existe $t_3 = t_1t_2s'$ en S tal que $t_3rs'' = t_3r''s$, y por tanto $(r,s) \sim (r'',s'')$. Denotamos por $S^{-1}R = R \times S/\sim$ y por r/s a la clase de equivalencia de (r,s). Hacemos al conjunto $S^{-1}R$ un anillo conmutativo con $1 = \overline{(1,1)}$ y con la suma y producto definidos como

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'} \text{ y } \frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}.$$

Llamamos al anillo $S^{-1}R$ el *anillo de fracciones* de R con respecto de S.

Existe un morfismo canónico $\alpha : R \longrightarrow S^{-1}R$ dado por $r \mapsto r/1$. Notemos que bajo este morfismo, la imagen de cada elemento s en S es invertible en $S^{-1}R$ con inverso $1/s$. El morfismo α es universal entre todos aquellos morfismos de anillos que hacen invertible a cada s en S, esto es, si $\varphi : R \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos tal que para cada s en S, $\varphi(s)$ es invertible en A, entonces existe un único morfismo de anillos $\widehat{\varphi} : S^{-1}R \longrightarrow A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & S^{-1}R \arrow[d, dotted, "\widehat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi = \widehat{\varphi}\alpha$. El morfismo $\widehat{\varphi}$ está dado por $r/s \mapsto \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$. Esta asignación está bien definida, pues si r/s' y r'/s' representan a la misma clase, entonces existe t en S tal que $trs' = tr's$, luego $\varphi(t)\varphi(r)\varphi(s') = \varphi(t)\varphi(r')\varphi(s)$. Multiplicando por $\varphi(t)^{-1}\varphi(s)^{-1}\varphi(s')^{-1}$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos que $\varphi(r)\varphi(s)^{-1} = \varphi(r')\varphi(s')^{-1}$.

Ejemplo 3.1. *Para cada elemento f en R, tenemos un conjunto multiplicativo $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. Denotamos por R_f al anillo de fracciones de R con respecto a $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. También notemos que el complemento $R - P$ de un ideal primo P de R es conjunto multiplicativo. En este caso denotamos al anillo de fracciones de R con respecto a $R - P$ como R_P y lo llamamos la* localización *en P.*

Teorema 3.2. *El anillo R_P es un anillo local, es decir, tiene un único ideal máximo.*

Demostración: Sea $m_P = \{p/s \mid p \in P \text{ y } s \notin P\}$. Veamos que m_P es el único ideal máximo de R_P. Que m_P es un ideal de R_P es inmediato, pues si p/s, p'/s' está n en S, entonces $p/s + p'/s' = (ps' + p's)/ss'$ está en m_P, y para cualquier r/s'' en R_P, tenemos que $(r/s'')(p/s) = (rp)/(s''s)$ también es un elemento de m_P.

El ideal m_P es propio, ya que $1/1$ no está en m. Además, si I es un ideal propio de R_P y x/s es un elemento de I, entonces x está en P. De lo contrario x está en $R - P$, así que x/s es invertible, luego $I = R_P$, lo que es una contradicción. □

4. Espectro primo de un anillo

4.1. Espectro de un anillo. Sea R anillo conmutativo con 1. Asociamos con R un espacio topológico como sigue: Denotamos por $\mathrm{Spec}R$ al conjunto de todos los ideales primos de R, y para cualquier ideal I de R, definimos el conjunto

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}R \mid I \subseteq P\}.$$

Teorema 4.1.

i) $V(0) = \mathrm{Spec}R$ *y* $V(R) = \emptyset$;

ii) $V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$;

iii) $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

Demostración: El inciso *i)* es porque todos los ideales tienen al 0 como uno de sus elementos y porque todos los ideales primos de R son propios.

Para *ii)* vemos que si la suma $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ está contenida en un ideal primo P, entonces P contiene a cada uno de los sumandos I_λ, así que P está en cada $V(I_\lambda)$ es decir, P está en la intersección $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$; y podemos regresar sobre los mismos pasos recordando que $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es el menor ideal de R que contiene a cada I_λ.

Por último, como IJ está contenido en ambos ideales I y J, tenemos que cualquier ideal primo P que contiene a I o a J, también contiene a IJ. Por otro lado, si P es un ideal primo que contiene a IJ, entonces P contiene a I o contiene a J y así obtenemos *iii)*. □

Se sigue que la colección de todos los subconjuntos de la forma $V(I)$ de $\mathrm{Spec}R$ con I un ideal de R, son los conjuntos cerrados de una topología sobre $\mathrm{Spec}R$. Esta topología es conocida como la *topología de Zariski o topología espectral* y el espacio topológico $\mathrm{Spec}R$ con la topología de Zariski lo llamamos el *espectro primo* del anillo R.

4.2. Base para la topología de Zariski. Par cada f en R definimos el conjunto

$$D(f) = \mathrm{R} - V(Rf) = \{P \in \mathrm{Spec}R \mid f \notin P\}.$$

Teorema 4.2. *La colección $\{D(f) \mid f \in R\}$ es una base para la topología de Zariski sobre SpecR. Además cumple que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.*

Demostración: Los conjuntos abiertos de Spec$R$ son de la forma $U = \mathrm{Spec}R - V(I)$, con I un ideal de R. Luego, debemos demostrar que si P está en U, entonces existe un $D(f)$, f en R, tal que $P \in D(f) \subseteq U$. Sea pues P en $U = \mathrm{Spec}R - V(I)$. Esto significa que I no está contenido en P, así que existe un elemento f de I que no está en P y esto nos dice que P está en $D(f)$. Notemos además que el ideal Rf está contenido en I, así que $V(I) \subseteq V(Rf)$, luego $\mathrm{Spec}R - V(Rf) \subseteq \mathrm{Spec}R - V(I)$, es decir, $D(f) \subseteq U$.

Que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ es porque los ideales $R(fg)$ y $(Rf)(Rg)$ son iguales y entonces $V(Rf) \cup V(Rg) = V(R(fg))$. $\square$

Lo que sigue es mostrar que la asignación $R \mapsto \mathrm{Spec}R$ que asocia a cada anillo a su espectro primo es funtorial. Para ello consideremos un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$. Entonces para cada ideal primo Q de S, su imagen inversa $\varphi^{-1}(Q)$ bajo φ es un ideal primo de R. Esto nos permite definir una función $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ como $Q \mapsto \varphi^{-1}(Q)$. Para revisar la continuidad de Φ consideremos un abierto básico $D(f)$ en Spec$R$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\left(D(f)\right) &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid \Phi(Q) \in D(f)\}\\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid f \notin \Phi(Q) = \varphi^{-1}(Q)\}\\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid \varphi(f) \notin Q\}\\ &= D(\varphi(f)).\end{aligned}$$

Así que, efectivamente, Φ es continua y Spec : $\mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Sp}$ es un funtor.

4.3. Haz sobre spec$R$. El espectro Spec$R$ de un anillo R no contiene suficiente información como para recuperar al anillo. Para lograr esto agregamos más estructura al espectro definiendo sobre él un haz de anillos. Primero notemos que a cada abierto básico $D(f)$ de Spec$R$ podemos asociarle un anillo, a saber, el anillo de fracciones R_f. Para ver que esta asignación está bien definida veamos que si f y g son dos elementos de R que nos dan los mismos básicos, es decir, $D(f) = D(g)$, entonces los anillos de fracciones R_f y R_g, si bien no son iguales, al menos, son isomorfos. Ahora bien, si tenemos la contención $D(g) \subseteq D(f)$, entonces $V(f) \subseteq V(g)$, luego el radical $\sqrt{Rg}$ del ideal Rg está contenido en el radical $\sqrt{Rf}$ de Rf (recordemos que el *radical* $\sqrt{I}$ de un ideal I de R es la intersección de todos los ideales primos que contienen a I; equivalentemente, el conjunto de aquellos r en R tales que r^n está en I, para algún entero $n > 0$). Como g está en $\sqrt{Rg} \subseteq \sqrt{Rf}$, existe $n > 0$ tal que g^n es un elemento de Rf, esto es, $g^n = af$, para algún a en R. Recíprocamente, si $g^n = af$ para algún a en R y un entero $n > 0$, entonces $D(g) \subseteq D(f)$.

Usamos lo anterior para obtener, a partir de la contención $D(g) \subseteq D(f)$, un morfismo $R_f \longrightarrow R_g$ definido como $r/f^m \mapsto a^m r/g^{nm}$. Para definir el morfismo usamos el siguiente truco:

$$\frac{r}{f^m} = \frac{a^m r}{a^m f^m} = \frac{a^m r}{(af)^m} = \frac{a^m r}{(g^n)^m} = \frac{a^m r}{g^{nm}}.$$

Si tenemos la otra contención, entonces existe $k > 0$ y b en R tal que $f^k = bg$ y luego, un morfismo $R_g \longrightarrow R_f$ dado por $s/g^l \mapsto b^l s/f^{kl}$. La composición $R_f \longrightarrow R_g \longrightarrow R_f$ es la identidad, ya que para cualquier elemento r/f^m en R_f, tenemos que $r/f^m \mapsto a^m r/g^{nm} \mapsto b^{nm}(a^m r)/f^{knm}$ y las fracciones r/f^m y $b^{nm}(a^m r)/f^{knm}$ representan al mismo elemento de R_f. En efecto, $r/f^m = b^{nm}a^m r/f^{knm}$ si y sólo si existe t en $\{1, f, f^2, \dots\}$ tal que $tf^m b^{nm} a^m r = trf^{knm}$, lo que es cierto ya que $rb^{nm} a^m f^m = rb^{nm}(af)^m = rb^{nm} g^{nm} = r(bg)^{nm} = rf^{knm}$, con $t = 1$. Análogamente se muestra que la composición $R_g \longrightarrow R_f \longrightarrow R_g$ es la identidad en R_g, y por tanto $R_f \cong R_g$.

Denotemos por $\mathcal{B}$ a la colección de los abiertos básicos $D(f)$ de Spec$R$. Las consideraciones de arriba nos permiten definir un prehaz $D(f) \mapsto R_f$ sobre $\mathcal{B}$. Más aún, ya que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, si $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ es una cubierta abierta de $D(f)$ por abiertos básico $D(f_i)$, entonces se puede demostrar que el diagrama

$$R_f \longrightarrow \prod_{i \in I} R_{f_i} \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} R_{f_i f_j}$$

es un igualador (Ver I. G. Macdonald, [**3**], Proposición 5.1, pág. 37), esto es, tenemos un haz de anillos $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ definido sobre $\mathcal{B}$ que asocia a cada abierto básico $D(f)$ el anillo de fracciones R_f y a cada contención $D(f) \subseteq D(g)$ el morfismo $R_f \longrightarrow R_g$ definido como arriba. Puesto que existe una equivalencia de categorías $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ y $\mathbf{Sh}(\mathrm{Spec}R)$ (Teorema 2.8), tenemos que el haz $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ se corresponde con un haz $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ (o bien, $\mathcal{O}_R$ para más corto) sobre todo el espectro Spec$R$ de R. Notamos que en el caso particular en el que tomamos al abierto $D(1) = \mathrm{Spec}R$, tenemos que $R \cong \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$, así que hemos recuperado al anillo R, al menos hasta isomorfismo.

4.4. Espacios anillados. Recordemos que un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ nos induce una función continua $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ dada por $Q \mapsto \varphi^{-1}(Q)$. Además, para cada abierto básico $D(f)$, tenemos que $\Phi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$. Ahora bien, bajo el morfismo $R \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, el elemento f en R es invertible en $S_{\varphi(f)}$, por tanto, existe un único morfismo $\hat{\varphi} : R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, o bien, $\hat{\varphi} : \mathcal{O}_R(D(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_S(\Phi^{-1}(D(f)))$ poniéndolo en términos del abierto $D(f)$ de Spec$R$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & R_f \arrow[d, dotted, "\hat{\varphi}"] \\ S \arrow[r] & S_{\varphi(f)} \end{tikzcd}$$

Definición 4.3. *Un* espacio anillado *es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$*, donde* X *es un espacio topológico y* $\mathcal{O}_X$ *un haz de anillos* $\mathcal{O}_X$ *sobre* X*. Un* morfismo de espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *consiste de una función continua* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *y un morfismo* $\theta : \mathcal{O}_Y \longrightarrow (\mathcal{O}_X)_*$ *del haz* $\mathcal{O}_Y$ *al haz imagen directa* $(\mathcal{O}_X)_*$.

Así que cada anillo R tiene asociado un espacio anillado $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ y todo morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ nos provee de un morfismo de espacios anillados $(\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ con función continua subyacente $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ y morfismo de haces $\theta : \mathcal{O}_R \longrightarrow (\mathcal{O}_S)_*$ definido en cada abierto abierto básico $D(f)$ por $\theta_{D(f)} : R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, que enseguida mostramos que cumple la condición de naturalidad. Si $D(f)$ y $D(g)$ son abiertos de Spec$R$ con $D(g) \subseteq D(f)$, entonces $g^n = af$ para algún a en R y $n > 0$. Luego $\varphi(g)^n = \varphi(a)\varphi(f)$, así obtenemos el cuadrado

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, "\theta_{D(f)}"] \arrow[d] & S_{\varphi(f)} \arrow[d] \\ R_g \arrow[r, "\theta_{D(g)}"'] & S_{\varphi(g)} \end{tikzcd}$$

con las siguientes asignaciones:

$$\begin{array}{ccc} R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)} \longrightarrow S_{\varphi(g)} & \text{y} & R_f \longrightarrow R_g \longrightarrow S_{\varphi(g)} \\ \dfrac{r}{f^m} \mapsto \dfrac{\varphi(r)}{\varphi(f)^m} \mapsto \dfrac{\varphi(a)^m\varphi(r)}{\varphi(g)^{mn}} & & \dfrac{r}{f^m} \mapsto \dfrac{ar}{g^{mn}} \mapsto \dfrac{\varphi(a^m r)}{\varphi(g^{mn})} \end{array}$$

lo que significa que el cuadrado conmuta, que es precisamente lo que queríamos.

Definición 4.4. *Un espacio anillado isomorfo a* $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ *para algún anillo* R*, es llamado un* esquema afín.

El haz $\mathcal{O}_R$ tiene otras propiedades que veremos a continuación. Sea P un ideal primo del anillo R y f cualquier elemento de R que no está en P. Consideremos los anillos de fracciones R_P y R_f. En R_P todos los elementos que no estn en P son invertibles, en particular, aquellos del conjunto $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. Luego, existe un morfismo $\alpha_f : R_f \longrightarrow R_P$. De este modo obtenemos una familia de morfismos $\{\alpha_f : R_f \longrightarrow R_P\}_{f \notin P}$. El anillo R_P junto con los morfismos α_f constituyen el colímite de la familia $\{R_f\}_{f\notin P}$. Se sigue que el tallo del haz $\mathcal{O}_R$ sobre Spec$R$ en el punto P no es otro que la localización de R en P, esto es,

$$\mathcal{O}_{R,P} = \varinjlim_{f \notin P} R_f = R_P.$$

Sea $(\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{(\Phi,\theta)} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ el morfismo de espacios anillados que proviene del morfismo de anillos $R \longrightarrow S$ y Q un ideal primo de S. Sabemos que $\Phi(Q)$ es un ideal primo de R y es claro que bajo el morfismo $R \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S_Q$, cada elemento f en R que no está en $\Phi(Q)$ es invertible en en S_Q, por tanto, existe un morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ entre los anillos locales $R_{\Phi(Q)}$ y S_Q, es decir, tenemos un morfismo $\mathcal{O}_{R,\Phi(Q)} \longrightarrow \mathcal{O}_{S,Q}$ entre los tallos $\mathcal{O}_{R,\Phi(Q)}$ y $\mathcal{O}_{S,Q}$.

Si recordamos que el ideal máximo $m_{\Phi(Q)}$ de $R_{\Phi(Q)}$ es la colección de todas aquellas fracciones q/r con q en $\Phi(Q)$ y r en $R - \Phi(Q)$, entonces tenemos que el morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ manda a cada q/r en $m_{\Phi(Q)}$ a la fraccín $\varphi(q)/\varphi(r)$, donde $\varphi(q)$ es un elemento de Q y $\varphi(r)$ no está en Q, es decir, $\varphi(q)/\varphi(r)$ es un elemento del ideal de máximo m_Q de S_Q. En resumen, el morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ manda al ideal máximo $m_{\Phi(Q)}$ de $R_{\Phi(Q)}$ en el ideal máximo m_Q de S_Q. Este es un ejemplo de lo conoce como un morfismo de anillos locales.

Definición 4.5. *Decimos que un espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un* espacio geométrico *si para todo* x *en* X*, los tallos* $\mathcal{O}_{X,x}$ *son anillos locales, es decir, tienen un único ideal máximo que denotamos por* m_x*. Un* morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

es un morfismo de espacio anillados (φ, θ) *con la propiedad adicional que para todo* x *en* X*, el morfismo de tallos*

$$\theta_x : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

es un morfismo de anillos locales*, esto es,* $\theta_x(m_{\varphi}(x)) \subseteq m_x$*. Denotamos por* **GSp** *a la categoría de los espacios geométricos y morfismos entre ellos.*

4.5. Adjunción GSp-CRing.

Teorema 4.6. *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espacio geométrico y* R *un anillo. Para cada morfismo de anillos* $t : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$*, existe un único morfismo de espacios gemétricos* $(g, G) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ *tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "t"'] & \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \arrow[d, dotted, "G_{\mathrm{Spec}R}"] & (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R) \\ S & \mathcal{O}_X(X) & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[u, dotted, "(g,G)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, el morfismo $R \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$ *es universal de* R *al funtor* $\mathcal{O} : \mathbf{GSp} \longrightarrow \mathbf{CRing}$ *que toma secciones globales.*

Demostración: Sea $t : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Construyamos el morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(g,G)} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Primero definamos la función continua $g : X \longrightarrow \mathrm{Spec}R$. Tal función debe asignar a cada x en X un ideal primo de R. Ahora bien, dado el haz $\mathcal{O}_X$ sobre X y x en X, consideremos el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$. Dicho tallo es un anillo local, con ideal máximo m_x y además tenemos un morfismo $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Luego, la composición

$$R \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

es un morfismo de R a $\mathcal{O}_{X,x}$ que vamos a denotar por t_x. Como m_x es un ideal primo de $\mathcal{O}_{X,x}$, $t_x^{-1}(m_x)$ es un ideal primo de R. Así que definimos $g : X \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ por $x \mapsto t_x^{-1}(m_x)$.

Lo que sigue es ver que g es continua. Para ello consideremos f en R. Entonces $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(X)$ es una sección sobre X y para cualquier x en X, $t_x(f)$ es el germen de $t(f)$ en el punto x. Sea

$$U = \{x \in X \mid t_x(f) \notin m_x\}.$$

Mostremos que el conjunto U así definido es un conjunto abierto de X. Para este fin, notemos que si x es un punto de U, entonces $f' = t_x(f)$ es una unidad en $\mathcal{O}_{X,x}$, es decir, existe un germen g' en $\mathcal{O}_{X,x}$ tal que $f'g' = 1$, donde $g' = s_x$, para alguna sección s en $\mathcal{O}_X(V)$ y V una vecindad abierta de x. La restricción de $t(f)$ a V (que seguimos denotando por $t(f)$) y por tanto el producto $t(f)s$, es una sección sobre V cuyo germen en el punto x es $(t(f)s)_x = t_x(f)s_x = f'g' = 1$. Obviamente la sección 1 en $\mathcal{O}_X(V)$ también tiene por germen el 1 en el punto x (el segundo 1 es la identidad del tallo $\mathcal{O}_{X,x}$), es decir, los gérmenes de las secciones $t(f)s$ y 1 en el punto x son iguales, luego, existe una vecindad W_x de x contenida en V en la que las restricciones de $t(f)s$ y 1 en W_x son iguales (Teorema 2.4). Se sigue que para todo y en W_x,

$$t(f)_y s_y = 1,$$

es decir, el germen $t(f)_y$ de $t(f)$ en el punto y es una unidad en el tallo $\mathcal{O}_{X,y}$, equivalentemente, que $t(f)_y$ no está en el ideal máximo m_y de $\mathcal{O}_{X,y}$. En pocas palabras, para cada x en U, existe una vecindad W_x de x tal que para todo y en

W_x, $t(f)_y$ no está en m_y. Esto es, hemos demostrado que U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, un conjunto abierto de X.

Ahora bien, dado que $D(f)$ es un abierto básico de Spec$R$ y

$$\begin{aligned} g^{-1}(D(f)) &= \{x \in X \mid g(x) \in D(f)\} \\ &= \{x \in X \mid f \notin g(x) = t_x^{-1}(m_x)\} \\ &= \{x \in X \mid t_x(f) \notin m_x\} \\ &= U, \end{aligned}$$

concluimos que la función g es continua.

Para cada f en R y x en U como arriba, podemos restringir la sección $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(X)$ a cada abierto W_x, y en cada anillo $\mathcal{O}_X(W_x)$ tenemos que tal restricción tiene un inverso u. También es claro que si u y u' son inversos de la restriccin de $t(f)$ en W_x y $W_{x'}$, respectivamente, entonces las restricciones de u y u' en $W_x \cap W_{x'}$ son iguales, por la unicidad del inverso multiplicativo. Por la condición de haz, existe una sección e definida sobre $U = \bigcup_{x\in U} W_x$ tal que la restricción de e en W_x es u, y puesto que para todo x en U,

$$(t(f)e)_x = t(f)_x e_x = t_x(f)u_x = 1,$$

tenemos que $t(f)e = 1$ (Teorema 2.5), es decir, e es el inverso multiplicativo de $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right)$. Se sigue que el morfismo

$$R \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\rho_U^X} \mathcal{O}_X(U)$$

invierte a f, por tanto, existe un único morfismo

$$\mathcal{O}_R\left(D(f)\right) = R_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right)$$

como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & R_f \arrow[d, dotted] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\rho_U^X"'] & \mathcal{O}_X(U) \end{tikzcd}$$

Esta familia de flechas nos definen el morfismo de haces $\mathcal{O}_R \xrightarrow{G} (\mathcal{O}_X)_*$ requerido. Observamos que para el abierto $D(1) = \text{Spec}R$, la composición

$$R \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_R(\text{Spec}R) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

es precisamente t.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{O}_R(\text{Spec}R) \arrow[d, dotted] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_X(X) \end{tikzcd}$$

Para cada x en X, $g(x) = t_x^{-1}(m_x)$ es un ideal primo de R, y el morfismo $t_x : R \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ invierte a cada elemento f de R que no está en $g(x)$, así que que existe un morfismo $G_x : R_{g(x)} = \mathcal{O}_{R,g(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Si recordamos que los elementos del ideal máfximo $m_{g(x)}$ de $\mathcal{O}_{R,g(x)}$ son de la forma r/s con r en $g(x)$ y s en $R-g(x)$, entonces vemos que G_x manda a r/s en $t_x(r)/t_x(s)$, con $t_x(r)$ en m_x y $t_x(s)$ en el complemento de m_x. Concluimos que para cada x en X, G_x es un morfismo de anillos locales, que es lo restaba para demostrar que (g, G) no solamente es un morfismo de espacios anillados, sino un morfismo de espacios geométricos.

Ahora abordamos la unicidad. Para ello mostremos que el proceso de construir el morfismo de espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ a partir de un morfismo de anillos $R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ como descrito arriba, es el inverso a tomar el morfismo de anillos $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ y componerlo con el isomorfismo $R \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$. Comencemos pues con un morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(g', G')} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Entonces tenemos un morfismo $R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, como lo acabamos de describir, que llamamos t; y tal morfismo t nos otorga un morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(g, G)} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Veamos que los morfismos (g', G') y (g, G) son iguales, esto es, $g' = g$ y $G' = G$. Ahora bien, para cada x en X, $g'(x)$ y $g(x)$ son ideales primos de R, donde $g(x) = t_x^{-1}(m_x)$ y m_x es el ideal máximo del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. Si $g'(x) \neq g(x)$, entonces existe un f en R tal que f está en $g'(x)$ y no está en $g(x)$, o viceversa. En el primer caso, es decir, si f está en $g'(x)$, entonces f no es invertible en $\mathcal{O}_{R,g'(x)}$, ni mucho menos en $\mathcal{O}_{X,x}$, ya que $G'_x(m_{g'(x)}) \subseteq m_x$. Por otro lado, como f no está en $g(x)$, tenemos que f es invertible en $\mathcal{O}_{X,x}$, lo que es una contradicción. El segundo caso es análogo, por lo que concluimos que $g' = g$.

Ahora notemos que para cada f en R, tenemos un par de morfismo

$$R_f = \mathcal{O}_R(D(f)) \underset{G'_{D(f)}}{\overset{G_{D(f)}}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right) = \mathcal{O}_X\left(g'^{-1}(D(f))\right)$$

donde ambos hacen invertible a f, así que deben ser el mismo morfismo. Con esto obtenemos que $G = G'$. Un argumento similar sirve para demostrar que los morfismos de anillos locales

$$\mathcal{O}_{R,g(x)} \underset{G'_x}{\overset{G_x}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_{X,x}$$

son iguales. Esto completa la demostración. □

Terminamos con la siguiente observación: en realidad, la imagen del funtor Spec está contenida en la subcategoría **Aff** de esquemas afines y morfismos de espacios geométricos de **GSp**. Luego, de la adjunción que acabamos de demostrar, se sigue que si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, esto es, $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S)$ para algún anillo S, entonces

$$\mathbf{Aff}((\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S), (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)) \cong \mathbf{CRing}(R, \mathcal{O}_S(\mathrm{Spec}S)) \cong \mathbf{CRing}(R, S).$$

Es decir, el funtor Spec : $\mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Aff}$ es pleno y fiel, y ya que todo esquema afín es isomorfo a un espacio anillado $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$, para algún anillo R, obtenemos la dualidad que da nombre a este trabajo.

Bibliografía

[1] J. A. Dieudonné, *History of Algebraic Geometry, An Outline of the History and Development of Algebraic Geometry.* The Wadsworth Mathematical Series, Monterey California: Wadsworth Advanced Books & Software, 1985.

[2] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol 3, Cambridge University Press, 1982.

[3] I. G. MacDonald, *Algebraic Geometry: Introduction to Schemes*. W. A. Benjamin, Inc. 1968.

[4] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory*. New York: Springer-Verlag, 1994.

[5] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*. London Math. Soc. Lectures Notes 20, Cambridge University Press, 1975.

Correos electrónicos:
ruben.v.z@outlook.com (Rubén Villafán-Zamora),
fvilchis@fcfm.buap.mx (Ivan Fernando Vilchis-Montalvo).

CAPÍTULO 9

Equivalencias de Kelley y semi-Kelley en continuos

Mauricio Chacón-Tirado, María de J. López Toriz e Ivón Vidal-Escobar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En 1942, J. L. Kelley en su artículo *Hyperspaces of a continuum* introduce la propiedad de Kelley, como la Propiedad 3.2 [**11**, pág. 26]; este concepto fue usado para estudiar la contractilidad de los hiperespacios de continuos. Un *continuo* es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo. Más tarde, en 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik definieron una propiedad más débil que la propiedad de Kelley: la propiedad de semi-Kelley, véase [**6**, Definición 3.16]; ellos demostraron que todo continuo con la propiedad de Kelley tiene la propiedad de semi-Kelley (Corolario 3.2), y que el recíproco de esto no se cumple (véase Ejemplo 2.5).

En el año 2013, en el taller anual de investigación en Hiperespacios y Teoría de Continuos, se plateó el siguiente problema: ¿Existe un continuo X con la propiedad de semi-Kelley tal que $X \times [0,1]$ no tiene la propiedad de semi-Kelley? Este problema propició el interés de investigadores mexicanos por los continuos con la propiedad de semi-Kelley. El lector puede consultar los siguientes artículos referentes al tema: [**2**], [**3**], [**4**], [**7**], [**9**] y [**15**].

Recientemente, los autores proporcionan una equivalencia a la propiedad de Kelley en continuos ([**5**, Teorema 2.1]), también dan una equivalencia a la propiedad de semi-Kelley en continuos ([**5**, Teorema 2.2]), ambas equivalencias están dadas en términos de continuos irreducibles.

Este capítulo está pensado en los lectores jóvenes, en este tenor, este trabajo contiene demostraciones a detalle de las equivalencias de los resultados de tener la propiedad de Kelley (Teorema 4.1) y tener la propiedad de semi-Kelley (Teorema 4.3). Para que el lector se familiarice con las propiedades de Kelley y de semi-Kelley, se exponen varios ejemplos de continuos que tienen estas propiedades y que no las tienen.

Por último, exponemos resultados en relación con subcontinuos que heredan la propiedad de ser Kelley o semi-Kelley, como es el caso de los subcontinuos que son retractos de vecindad, retractos, semi-terminales y atriódicos.

2. Propiedad de Kelley

Dado un continuo X con métrica d, se considera la colección de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X, denotada y definida por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

dotada con la *métrica de Hausdorff*, la cual definimos a continuación: para $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, la *nube* de radio ε alrededor de A, la cual denotamos y definimos por $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \varepsilon\}$. Ahora, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ por $H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$, para cada $A, B \in 2^X$. En [**10**, Teorema 2.2] se prueba que H es una métrica para 2^X. Así, a la colección 2^X equipada con esta métrica se conoce como el *hiperespacio de cerrados* de X.

Por otro lado, a 2^X también se dota de la topología de Vietoris, que a continuación describimos: para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada colección finita $U_1, \ldots, U_n$ de subconjuntos abiertos de X, se define

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

La colección de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es una base para la *topología de Vietoris para* 2^X. Además, la topología generada por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris (véase [**13**, Teorema 4.5]).

Otro hiperespacio muy conocido es

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

considerado como subespacio de 2^X, el cual se conoce como el *hiperespacio de subcontinuos* de X. Es conocido que si X es un continuo, entonces 2^X también es un continuo, este hecho está probado en [**12**, Teorema (1.13)]. Sobre los hiperespacios 2^X y $C(X)$ se conocen muchas propiedades básicas, para un recuento véase [**10**] y [**12**].

En 1942, J. L. Kelley introduce el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos, originalmente era conocida como *propiedad 3.2*, [**11**, pág. 26], que a continuación enunciamos:

Definición 2.1. *Sea X un continuo con métrica d, diremos que X tiene la* propiedad de Kelley *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $a, b \in X$, si $d(a,b) < \delta$ entonces para todo subcontinuo K de X con $a \in K$, existe un subcontinuo L de X tal que $b \in L$ y $H(K,L) < \varepsilon$.*

En 1977, R. W. Wardle en [**16**, II, págs. 291–292] considera la definición de la propiedad de Kelley de manera puntual, esto es:

Definición 2.2. *Sean X un continuo con métrica d y un punto $a \in X$, se dice que X tiene la* propiedad de Kelley en *a si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y $A \in C(X)$ con $a \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Claramente, el continuo X tiene la propiedad de Kelley sí y sólo si X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

En la literatura se conoce la siguiente equivalencia a la Definición 2.1, la cual se obtiene a partir de la Definición 2.2.

Definición 2.3. *Sean X un continuo y un punto $a \in X$, diremos que X tiene la* propiedad de Kelley en *a si para cada subcontinuo K de X con $a \in K$ y para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converge a K tal que $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Un continuo tiene la propiedad de Kelley si el continuo tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.*

Los ejemplos que aparecerán a lo largo de este trabajo serán descritos en su mayoría como subcontinuos del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Dados dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por ab el segmento de recta con puntos extremos a y b.

Ejemplo 2.4. *Sean $a = (0,0)$, $b = (1,0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = (1, \frac{1}{n})$. Definamos $X = ab \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n)$ (ver Figura 1). El continuo X es conocido como el abanico armónico.*

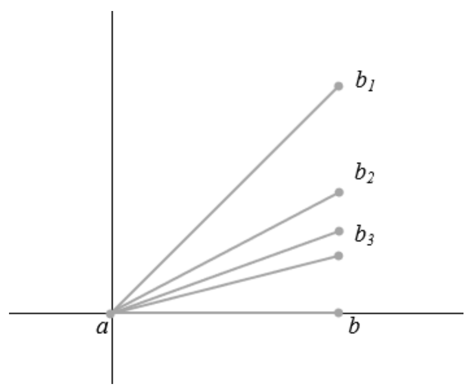


FIGURE 1. Abanico armónico

No es difícil convencerse que el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley.

Ejemplo 2.5. *Sean $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (2,0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = (1, \frac{1}{n})$. Definamos $X = ac \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n)$ (ver Figura 2). El continuo X es conocido como abanico armónico con pata límite alargada. Veremos que X no tiene la propiedad de Kelley .*

Vamos a ver que X no tiene la propiedad de Kelley en el punto b, para lo cual consideremos la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto b y el continuo $K = bc$, es claro que no existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a K tal que $b_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por tal motivo X no tiene la propiedad de Kelley en el punto b.

En 1998, J. J. Charatonik and W. J. Charatonik introducen los conceptos de continuo límite maximal [**6**, Definición 3.2] y de continuo límite maximal fuerte [**6**,

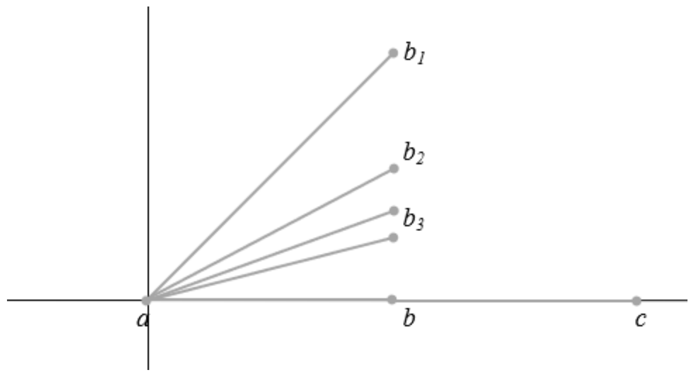


FIGURE 2. Abanico armónico con pata límite alargada

Definición 3.3], los cuales juegan un papel importante en relación con la propiedad de Kelley.

Definición 2.6. *Sea K un subcontinuo de un continuo X. Un subcontinuo $M \subset K$ se llama* continuo límite maximal de K *si existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a M tal que, para cada sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X, con $M_n \subset M'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $M' \in C(K)$, entonces $M' = M$.*

Ejemplo 2.7. *Consideremos el abanico armónico con pata límite alargada X, definido en el Ejemplo 2.5. Sean $d = (\frac{1}{2}, 0)$, $K = dc$, $M = db$. Veamos que M es un subcontinuo límite maximal de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $d_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2n})$ y $M_n = d_nb_n$. La sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de X que converge a M, tal que para cada sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X, con $M_n \subset M'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún subcontinuo M' de K, entonces $M' = M$. Así, M es un subcontinuo límite maximal de K.*

Definición 2.8. *Sea K un subcontinuo de un continuo X. Un subcontinuo $M \subset K$ se llama* continuo límite maximal fuerte de K *si existe una sucesión de subcontinuos de X, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge a M en $C(X)$ tal que para cada subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para cada sucesión $\{M'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $M_{n_k} \subset M'_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a $M' \in C(K)$, se tiene que $M' = M$.*

Observación 2.9. [**6**, Observación 3.4] *Sean K un subcontinuo de un continuo X. Si $M \subset K$ es un continuo límite maximal fuerte de K, entonces M es un continuo límite maximal de K.*

Ejemplo 2.10. [**6**, Ejemplo 3.5] *Existen un continuo X, un subcontinuo K de X y un subcontinuo M de K, tales que M es un continuo límite maximal de K y M no es continuo límite maximal fuerte de K. Sean $a = (-1, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 0)$, $v = (0, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (-1, \frac{1}{n})$, $c_n = (1, \frac{1}{n})$, $p_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ y $q_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Definimos $X = ac \cup vb \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(bp_n \cup p_na_n)) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(bq_n \cup q_nb_n))$ (ver Figura 3).*

Sean $a' = (-\frac{1}{2}, 0)$, $b' = (0, \frac{1}{2})$, $c' = (\frac{1}{2}, 0)$, $K = a'c' \cup vb'$ y $M = vb'$. Veamos que M es un continuo límite maximal de K y M no es un continuo límite maximal fuerte de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean a'_n, p'_n y q'_n el punto medio de los segmentos a_np_n, bp_n y

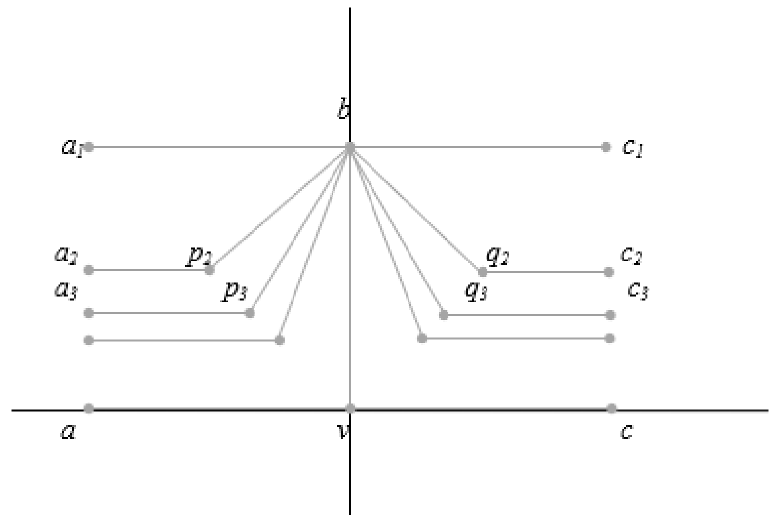


FIGURE 3.

bq_n, respectivamente. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $M_{2n-1} = p_n p'_n$, $M_{2n} = q_n q'_n$ y $M'_{2n-1} = a'_n p'_n$. La sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de X que converge a M, tal que para cada sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X, con $M_n \subset M'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún subcontinuo M' de K, entonces $M' = M$. Así M es un continuo límite maximal de K. Si consideramos la subsucesión $\{M_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y la sucesión $\{M'_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple que $M_{2n-1} \subset M'_{2n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{M'_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $M' = a'v \cup vb'$ subcontinuo de K. Puesto que $M \subsetneq M'$, M no es un continuo límite maximal fuerte de K.

El resultado que citamos a continuación es de mucha utilidad para el desarrollo de este capítulo.

Teorema 2.11. [**6**, Teorema 3.11] *Si X es un continuo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley.
(2) Para cada subcontinuo K de X, se tiene que K es el único continuo límite maximal de K.
(3) Para cada subcontinuo K de X, se tiene que K es el único continuo límite maximal fuerte de K.

3. Propiedad de semi-Kelley

En 1998, J. J. Charatonik and W. J. Charatonik introducen el concepto *semi-Kelley* para continuos [**6**, Definición 3.16].

Definición 3.1. *Un continuo X tiene la* propiedad de semi-Kelley*, o bien X es un continuo* semi-Kelley*, si para cada subcontinuo K de X, se tiene que si M y L son continuos límite maximal de K, entonces $M \subset L$ o bien $L \subset M$.*

Se sigue del Teorema 2.11 que cada continuo que tiene la propiedad de Kelley también tiene la propiedad de semi-Kelley, esto es:

Corolario 3.2. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces X tiene la propiedad de semi-Kelley.*

Es fácil convencerse que el abanico armónico con pata límite alargada es un continuo que tiene la propiedad de semi-Kelley y no tiene la propiedad de Kelley (véase el Ejemplo 2.5). Así, el recíproco del Corolario 3.2 no se cumple.

Ejemplo 3.3. *Sean $a = (-1, 0)$, $b = (0, 0)$, $c = (1, 0)$, $d = (2, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $b_n = (0, \frac{1}{n})$ y $c_n = (1, \frac{1}{n})$. Definamos $X = ad \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n d)$ (ver Figura 4). Veremos que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley.*

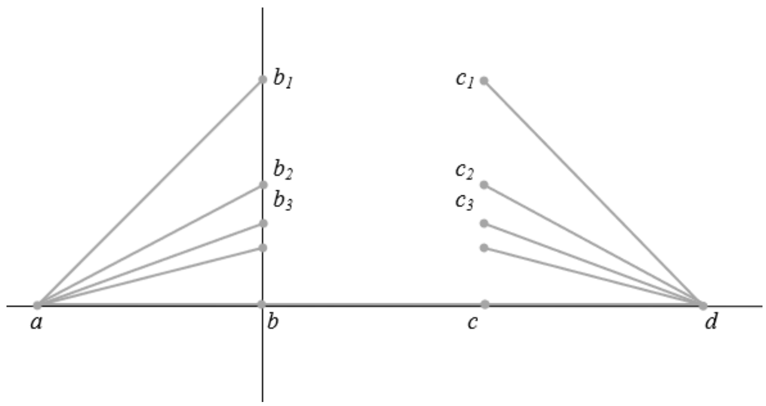


FIGURE 4.

Sean $a' = (-\frac{1}{2}, 0)$, $c' = (\frac{1}{2}, 0)$, $K = a'c'$, $M = a'b$ y $L = c'c$. De manera similar al Ejemplo 2.5 obtenemos que M y L son continuos límite maximal de K. Puesto que $M \nsubseteq L$ y $L \nsubseteq M$, concluimos que X no tiene la propiedad de semi-Kelley.

Dados X un continuo y una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a un subcontinuo M de X, en [**6**, pág. 75] se define la familia

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{A \in C(X) : M \subset A \text{ tal que existe una subsucesión } \{M_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \text{de } \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y existe una sucesión } \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ en } C(X) \\ \text{que converge a } A \text{ tal que } M_{n_k} \subset A_k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Proposición 3.4. [**6**, Proposición 3.9] *Sean K un subcontinuo de un continuo X. Para cada sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a un subcontinuo $M \in C(K)$ existe un elemento maximal S en $C(K) \cap \mathcal{M}(\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ el cual es un continuo límite maximal fuerte de K.*

4. Equivalencias de continuos Kelley y semi-Kelley

Recordemos que un continuo X es *irreducible entre p y q* si $p, q \in X$ y ningún subcontinuo propio de X contiene a los puntos p y q. Se dice que X es *irreducible* si existen puntos p y q en X tales que X es irreducible entre p y q. Dados un continuo X y puntos $p, q \in X$, existe un subcontinuo de X el cual es irreducible entre p y q; así cualquier continuo no degenerado contiene un continuo no degenerado irreducible [**13**, 4.35 (b)].

Sea $\mathcal{U}$ una colección contenida en 2^X, denotamos por $\bigcup \mathcal{U}$ la unión de sus elementos, esto es, $\bigcup \mathcal{U} = \{x \in X : \text{ existe } A \in \mathcal{U} \text{ tal que } x \in A\}$.

Recientemente, M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar en [**5**, Teorema 2.1] presentan una equivalencia a la propiedad de Kelley, en este capítulo proporcionamos una demostración de dicho resultado.

Teorema 4.1. *Sea X un continuo. Se tiene que X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si para cada $a \in X$, para cada $I \in C(X)$ irreducible entre el punto a y algún otro punto de X, y para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Supóngase que X tiene la propiedad de Kelley. Sean $a \in X$, $I \in C(X)$ un continuo irreducible entre a y algún otro punto de X y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a a. Como X tiene la propiedad de Kelley en el punto a, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supóngase que para cada $a \in X$, para cada $I \in C(X)$ irreducible entre el punto a y algún otro punto de X, y para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley, por el Teorema 2.11, existen K subcontinuo de X y M un continuo límite maximal propio de K. Ahora, como M es continuo límite maximal de K existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a M que satisface la definición de continuo límite maximal (Definición 2.6). Dado que M es un subcontinuo propio de K se tiene que $K \setminus M \neq \emptyset$. Así podemos considerar puntos $b \in K \setminus M$ y $a \in M$. Sea I el continuo irreducible entre a y b contenido en K. Como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M y $a \in M$, por [**8**, Ejercicio 4.4, pág. 70], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in M_n$ tal que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a. Por hipótesis, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $M'_n = M_n \cup A_n$. Note que $a_n \in M_n \cap A_n$, así $M'_n \in C(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. También se tiene que $M_n \subset M'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por [**8**, Ejercicio 2.13(b), pág. 28] la sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $M \cup I \in C(K)$. Note que $M \cup I \neq M$ pues $b \in I$ y $b \notin M$. Esto contradice que M es continuo límite maximal de K. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Del Teorema 4.1, obtenemos que en el caso en que X es un dendroide, para verificar que X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$ es suficiente considerar a cada arco con punto extremo a como el continuo K de la Definición 2.3.

Ejemplo 4.2. *Consideremos el abanico armónico con pata límite alargada X, definido en el Ejemplo 2.5. Sean $d = (\frac{1}{2}, 0)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $d_n = (\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2n(n+1)})$ y $c_n = (2, \frac{1}{n})$. Definamos $Y = X \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n dn \cup d_n c_n)$ (ver Figura 5). Veremos que Y no tiene la propiedad de Kelley.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean p_n el punto medio de los segmentos $b_n d_n$ y sean $p = (\frac{3}{4}, 0)$ y $K = pc$. Es claro que no existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y que converja a K tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por tal motivo Y no tiene la

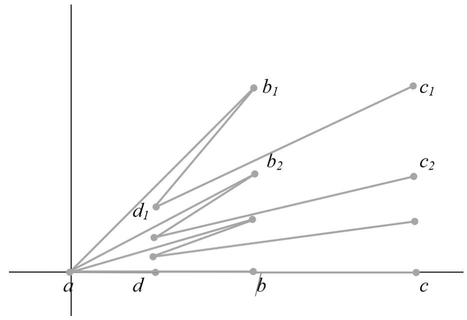


FIGURE 5.

propiedad de Kelley en el punto p. De lo anterior Y no tiene la propiedad de Kelley.

En [**5**, Teorema 2.2] se introduce una equivalencia a la propiedad de semi-Kelley, a continuación se expone dicho resultado con su demostración.

Teorema 4.3. *Sea X un continuo. Se tiene que X es semi-Kelley si y sólo si para cada $a, b \in X$, para cada $I \in C(X)$ irreducible entre los puntos a y b, y para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o para cada sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto b existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $b_n \in B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supóngase que X es semi-Kelley. Sean $a, b \in X$, $I \in C(X)$ un continuo irreducible entre a y b.

Afirmación 1. Para cualesquiera sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que convergen a los puntos a y b, respectivamente, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $x_{n_k} \in M_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, o existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $y_{n_k} \in N_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Prueba de la Afirmación 1.

Por la Proposición 3.4 existe $A \in C(I) \cap \mathcal{M}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ y existe $B \in C(I) \cap \mathcal{M}(\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ tales que A y B son continuos límite maximal fuerte de I. Por la Observación 2.9 tenemos que A y B son continuos límite maximal de I. Como X es semi-Kelley entonces $A \subset B$ o $B \subset A$, sin perder generalidad supongamos que $A \subset B$. Note que $a \in A$ y $a, b \in B \subset I$, como I es irreducible entre a y b se sigue que $B = I$. Por definición de $\mathcal{M}(\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $y_{n_k} \in N_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2. Para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ con $I \in \mathcal{U}$, se tiene que $\bigcup \mathcal{U}$ es una vecindad de a, o para cada subconjunto abierto $\mathcal{V}$ de $C(X)$ con $I \in \mathcal{V}$, se tiene que $\bigcup \mathcal{V}$ es una vecindad de b.

Prueba de la Afirmación 2.

Supongamos que existen subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $C(X)$ con $I \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ tales que $\bigcup \mathcal{U}$ no es vecindad de a y $\bigcup \mathcal{V}$ no es vecindad de b. Se sigue que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ y $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ no es vecindad de a y no es vecindad de

b. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $X\setminus\bigcup(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Como $\bigcup(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ no es vecindad de a y no es vecindad de b, se sigue que para ninguna subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una sucesión $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $x_{n_k}\in M_k$, para cada $k\in\mathbb{N}$, y para ninguna subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una sucesión $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $y_{n_k}\in N_k$, para cada $k\in\mathbb{N}$, lo cual contradice la Afirmación 1. Así la Afirmación 2 está probada.

Ahora, sin perder generalidad, supongamos que para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ tal que $I\in\mathcal{U}$, se tiene que $\bigcup\mathcal{U}$ es una vecindad de a. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge al punto a.

Para cada $m\in\mathbb{N}$, sea $\mathcal{U}_m=\{A\in C(X): H(A,I)<\frac{1}{m}\}$ y sea $\mathcal{U}_0=C(X)$. Como la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a y para cada $m\in\mathbb{N}$, $\bigcup\mathcal{U}_m$ es una vecindad de a, dado $n\in\mathbb{N}$, podemos elegir $A_n\in C(X)$ de la siguiente manera: si $a_n\in I$, sea $A_n=I$; si $a_n\notin I$, sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $a_n\in\bigcup\mathcal{U}_m\setminus(\bigcup\mathcal{U}_{m+1})$ y sea $A_n\in\mathcal{U}_m$ tal que $a_n\in A_n$. Note que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a I. Esto completa la necesidad.

Recíprocamente, supóngase que para cada $a,b\in X$, para cada $I\in C(X)$ irreducible entre los puntos a y b, y para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n\in A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, o para cada sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto b existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $b_n\in B_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Supongamos que X no es semi-Kelley. Esto es, existe $K\in C(X)$ y existen continuos límite maximal L y M de K tales que $L\setminus M\neq\emptyset\neq M\setminus L$. Como L es un continuo límite maximal de K, entonces existe una sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a L tal que si $\{L'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a $L'\in C(K)$ y $L_n\subset L'_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $L'=L$. Similarmente, para el continuo límite maximal M de K, existe su correspondiente sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Consideremos puntos $a\in L\setminus M$ y $b\in M\setminus L$. Como la sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L y $a\in L$, por [**8**, Ejercicio 4.4, pág. 70], para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $a_n\in L_n$ tal que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a, similarmente, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a b tal que $b_n\in M_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Sea $I\in C(K)$ continuo irreducible entre a y b. Sin perder generalidad, supongamos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n\in A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Definimos el subcontinuo $L'_n=L_n\cup A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, se sigue que $L_n\subset L'_n$ y por [**8**, Ejercicio 2.13(b), pág. 28] la sucesión $\{L'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L\cup I\in C(K)$ y $L\cup I\neq L$, pues $b\in I$ y $b\notin L$. Esto contradice que L es un continuo límite maximal de K. Por lo tanto, X es semi-Kelley. Con todo la prueba del teorema está completa. □

Usando la definición equivalente que nos da el Teorema 4.3 es fácil convencerse de que el continuo Y del Ejemplo 4.2 tiene la propiedad de semi-Kelley, mientras que el continuo X del Ejemplo 2.10 no tiene la propiedad de semi-Kelley, para lo cual basta considerar los puntos $a,c\in X$, I el irreducible entre los puntos a y c, y las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, no es difícil convencerse que no existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a I tal que $a_n\in A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, y que no existe una sucesión de subcontinuos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a I tal que $c_n\in C_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, por tal motivo X no tiene la propiedad de semi-Kelley.

Ejemplo 4.4. *Consideremos el abanico armónico con pata límite alargada X, definido en el Ejemplo 2.5. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, sean $c_n = (2 - \frac{1}{2^n}, 0)$ y $c_{n,m} = (2 - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n m})$. Definamos $Y = X \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} bc_{1,m}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{m=1}^{\infty} c_n c_{n+1,m})$ (ver Figura 6). Usando la equivalencia del Teorema 4.3 es fácil convencerse de que el continuo Y tiene la propiedad de semi-Kelley.*

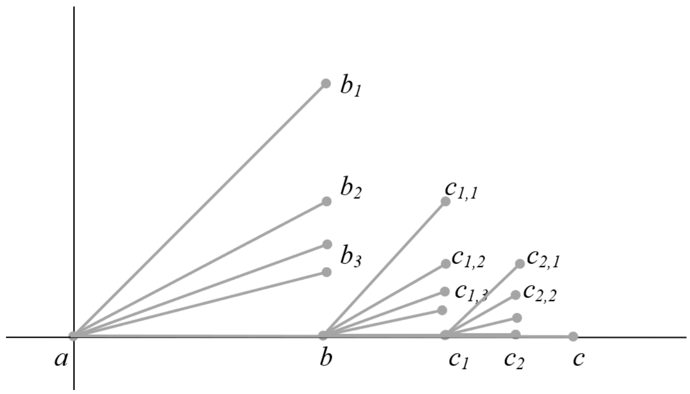


FIGURE 6.

5. Subcontinuos con la propiedad de semi-Kelley

Recordemos que un subcontinuo Y de un continuo X es un *retracto de* X si existe una función continua $r : X \to Y$ tal que $r(y) = y$, para cada $y \in Y$; a la función r se le llama *retracción*. Por otro lado, Y es un *retracto de vecindad de* X si existen un subconjunto abierto U de X tal que $Y \subset U$ y una retracción $r : U \to Y$.

En 1977, R. W. Wardle demostró que si X es un continuo con la propiedad de Kelley y Y es un retracto de X, entonces Y tiene la propiedad de Kelley, ver [**16**, Teorema 2.9]. En [**5**, Teorema 3.1], M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar demuestran el resultado similar para retractos de vecindad y continuos con la propiedad de Kelley y continuos semi-Kelley, respectivamente. En los dos siguientes teoremas exponemos estas afirmaciones.

Teorema 5.1. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley y $Y \in C(X)$ es un retracto de vecindad de X, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Sean U un subconjunto abierto de X tal que $Y \subset U$ y $r : U \to Y$ una retracción. Sean $a \in Y$, $I \in C(Y)$ un continuo irreducible entre a y algún otro punto de Y y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y que converge al punto a. Como X tiene la propiedad de Kelley, por el Teorema 4.1 existe una sucesión $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $I \subset Y \subset U$, así $I \in \langle U \rangle$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A'_n \in \langle U \rangle$, para cada $n \geq N$.

Ahora, para cada $n < N$ definimos $A_n = \{a_n\}$; y para cada $n \geq N$, definimos $A_n = r(A'_n)$. Como r es una retracción tenemos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $C(Y)$, la cual converge al continuo I, además $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, por el Teorema 4.1, Y tiene la propiedad de Kelley. □

Corolario 5.2. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley y $Y \in C(X)$ es un retracto de X, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

Teorema 5.3. *Si X es un continuo semi-Kelley y $Y \in C(X)$ es un retracto de vecindad de X, entonces Y es semi-Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Sean U un subconjunto abierto de X tal que $Y \subset U$ y $r : U \to Y$ una retracción. Sean puntos $a, b \in Y$, sea $I \in C(Y)$ irreducible entre los puntos a y b y sean sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Como X es semi-Kelley, por el Teorema 4.3, sin perder generalidad podemos suponer que existe una sucesión $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $I \subset Y \subset U$, así $I \in \langle U \rangle$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A'_n \in \langle U \rangle$, para cada $n \geq N$.

Ahora, para cada $n < N$ definimos $A_n = \{a_n\}$; y para cada $n \geq N$, definimos $A_n = r(A'_n)$. Como r es una retracción se tiene que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $C(Y)$, la cual converge al continuo I, además $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, por el Teorema 4.3, el continuo Y es semi-Kelley. $\square$

Corolario 5.4. *Si X es un continuo semi-Kelley y $Y \in C(X)$ es un retracto de X, entonces Y es semi-Kelley.*

Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X, diremos que Y es *semi-terminal* si para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$ se tiene que $A \subset Y$ o bien $B \subset Y$.

En 2011, J. R. Prajs demostró que si un continuo X tiene la propiedad de Kelley y $Y \in C(X)$ es semi-terminal, entonces Y tiene la propiedad de Kelley, véase [**14**, Proposición 4.2]. En [**5**, Teorema 3.3], M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar demuestran el resultado similar para continuos semi-Kelley (véase Teorema 5.6), aquí exponemos la prueba completa de este resultado; antes citamos un resultado que vamos a necesitar.

Proposición 5.5. [**14**, Proposición 3.1] *Si Y y Z son subcontinuos de un continuo X tal que Y es semi-terminal, entonces $Y \cap Z$ es un subconjunto conexo.*

Teorema 5.6. *Si X es un continuo semi-Kelley y $Y \in C(X)$ es semi-terminal, entonces Y es un continuo semi-Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Y un subcontinuo de X semi-terminal. Sean puntos $a, b \in Y$, sea $I \in C(Y)$ irreducible entre los puntos a y b y sean sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Como X es semi-Kelley, por el Teorema 4.3, sin perder generalidad podemos suponer que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $A_n \subset Y$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.3 concluimos que Y es semi-Kelley.

Ahora, supongamos que $A_n \setminus Y \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como Y es semi-terminal y $A_n \in C(X)$, por la Proposición 5.5, $Y \cap A_n$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $L_n = Y \cap A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$; note que L_n es subcontinuo de X.

Afirmación 1. Para cada $k, m \in \mathbb{N}$, $A_k \cap A_m \neq \emptyset$.
Prueba de la Afirmación 1.
Supongamos por el contrario, esto es, supongamos que existen $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $A_k \cap A_m = \emptyset$. Note que $a_k \in Y \cap A_k$, así $Y \cap A_k \neq \emptyset$, también $a_m \in Y \cap A_m$, así $Y \cap A_m \neq \emptyset$, como Y es semi-terminal, se tiene que $A_k \subset Y$ o bien $A_m \subset Y$, lo cual contradice que $A_n \setminus Y \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así la Afirmación 1 está probada.

Afirmación 2. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, $L_n \cup L_m$ es un subcontinuo de X.

Prueba de la Afirmación 2.

Se sigue de la Afirmación 1 que $A_n \cup A_m$ es un subcontinuo de X. Note que $L_n \cup L_m = (Y \cap A_n) \cup (Y \cap A_m) = Y \cap (A_n \cup A_m)$. Como Y es semi-terminal, por la Proposición 5.5, se tiene que $L_n \cup L_m$ es un subconjunto conexo, y así $L_n \cup L_m$ es un continuo. Esto prueba la Afirmación 2.

Se sigue de la Afirmación 1 que $L_n \cap L_m \neq \emptyset$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fija. Ahora, definimos $P_m = L_m \cap L_n$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Afirmación 3. Se tiene que $L_n \cap I \neq \emptyset$.

Prueba de la Afirmación 3.

Note que $lim\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset lim\{L_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset lim\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} = I$; por otro lado, la sucesión constante $\{L_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a L_n. Ahora, $lim\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset lim\{L_n\}_{m\in\mathbb{N}} = L_n$. Luego, $lim\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L_n \cap I$. Así la Afirmación 3 está probada.

Se sigue de la Afirmación 3 que $L_n \cup I$ es un subcontinuo de Y. Definimos $K_n = L_n \cup I$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $lim\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} = lim\{L_n \cup I\}_{n\in\mathbb{N}} = lim\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup lim\{I\}_{n\in\mathbb{N}} = lim\{Y \cap A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup I \subset I \cup I = I$. Además, $a_n \in L_n$, así $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de Y que converge a I. Por el Teorema 4.3 se obtiene que Y es semi-Kelley. $\square$

Recordemos que un continuo X es *hereditariamente semi-Kelley* si cada subcontinuo de X es semi-Kelley.

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, diremos que un continuo X es un *n-odo* si existe un subcontinuo B de X, llamado el *corazón* de X, tal que $X \setminus B$ tiene al menos n componentes. Se dice que un continuo X es *atriódico* si X no contiene triodos. Un continuo X se llama *∞-odo* si existe un subcontinuo B de X, llamado el *corazón* de X, tal que $X \setminus B$ tiene una cantidad infinita de componentes.

Por otra parte, vamos a necesitar otro tipo de convergencia de sucesiones de subconjuntos de un continuo. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se define el *límite superior* de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, el cual denotamos por $limsup\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x \in X : \text{ para todo abierto } U \text{ de } X \text{ con } x \in U \text{ existe } J \subset \mathbb{N} \text{ infinito tal que } U \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in J\}$.

En [**5**, Teorema 3.4], M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar demuestran el resultado que sigue; aquí exponemos la prueba completa de este teorema.

Teorema 5.7. *Si X es un continuo semi-Kelley y no es hereditariamente semi-Kelley, entonces X contiene un ∞-odo.*

Demostración: Sea X un continuo semi-Kelley y A un subcontinuo de X que no es semi-Kelley. Por el Teorema 4.3, existen puntos $a, b \in A$, existe $K \in C(A)$ irreducible entre a y b, existen sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que convergen a los puntos a y b, respectivamente, tales que no existe una sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(A)$ que converge a K tal que $a_n \in L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y no existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(A)$ que converge a K tal que $b_n \in M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como X es semi-Kelley, por el Teorema 4.3, sin perder generalidad podemos suponer que existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a K tal que $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea C_n la componente de $A \cap K_n$ que contiene al punto a_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \cap K \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Definimos $L_n = K \cup C_n$, para cada $n \geq N$ y $L_n = \{a_n\}$, si $n < N$. Se tiene que

$lim\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset lim\{A \cap K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, luego $lim\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} = lim\{K \cup C_n\}_{n\in\mathbb{N}} = lim\{K\}_{n\in\mathbb{N}} \cup lim\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} = K$; esto contradice que no existe una sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(A)$ que converge a K tal que $a_n \in L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue que existe un conjunto infinito de números naturales J tal que $C_n \cap K = \emptyset$, para cada $n \in J$.

Ahora, vamos a construir inductivamente una sucesión de números naturales $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de subcontinuos $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de X tales que

$$C_{n_1} \subsetneq D_1 \subset K_{n_1} \setminus K \ \text{ y } \ C_{n_m} \subsetneq D_m \subset K_{n_m} \setminus (K \cup D_1 \cup \cdots \cup D_{m-1}),$$

para cada $m \geq 2$. Para esto, sea $n_1 = min(J)$. Sea U un conjunto abierto propio de K_{n_1} tal que $C_{n_1} \subset U \subset cl_X(U) \subset K_{n_1} \setminus K$. Sea D_1 la componente de $cl_X(U)$ tal que $C_{n_1} \subset D_1$. Por [**13**, Teorema 5.4] se tiene que $C_{n_1} \subsetneq D_1$. Luego, $C_{n_1} \subsetneq D_1 \subset K_{n_1} \setminus K$. Ahora, supongamos que existen números naturales $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y subcontinuos $D_1, D_2, \ldots, D_r$ con las propiedades requeridas.

Afirmación 1. Existe un número natural $n \in J \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ tal que $C_n \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_r) = \emptyset$.

Prueba de la Afirmación 1.

Supongamos por el contrario, esto es, supongamos que para cada $n \in J \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ se tiene que $C_n \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_r) \neq \emptyset$. Se sigue que $lim\{C_n \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_r)\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Como $lim\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ entonces $K \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_r) \neq \emptyset$. Esto contradice que $(D_1 \cup \cdots \cup D_r) \cap K = \emptyset$. Así la Afirmación 1 está porbada.

Por la Afirmación 1 existe $n_{r+1} \in J$ tal que $n_{r+1} \geq n_r + 1$ y $C_{n_{r+1}} \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_r) = \emptyset$. Note que $n_{r+1} > n_r$. Sea V un conjunto abierto propio de $K_{n_{r+1}}$ tal que $C_{n_{r+1}} \subset V \subset cl_X(V) \subset K_{n_{r+1}} \setminus (K \cup D_1 \cup \cdots \cup D_r)$.

Sea D_{r+1} la componente de $cl_X(V)$ tal que $C_{n_{r+1}} \subset D_{r+1}$. Por [**13**, Teorema 5.4] se tiene que $C_{n_{r+1}} \subsetneq D_{r+1}$. Luego, $C_{n_{r+1}} \subsetneq D_{r+1} \subset K_{n_{r+1}} \setminus (K \cup D_1 \cup \cdots \cup D_r)$. Así queda probada la inducción.

Afirmación 2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $D_m \not\subset A$.

Prueba de la Afirmación 2.

Supongamos por el contrario, esto es, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D_m \subset A$, entonces $D_m \subset K_{n_m} \cap A$; como $C_{n_m} \subset D_m$ y C_{n_m} es componente se sigue que $C_{n_m} = D_m$ lo cual contradice que $C_{n_m} \subsetneq D_m$. Esto prueba la Afirmación 2.

Ahora definimos

$$D = A \cup (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m).$$

Afirmación 3. Se tiene que D es un subcontinuo de X.

Prueba de la Afirmación 3.

Puesto que para cada $m \in \mathbb{N}$, $D_m \subset K_{n_m}$ entonces $limsup\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset limsup\{K_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} = K$ y K es un subcontinuo de A, se sigue que $limsup\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset A$. De donde, $cl_X(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m) \subset A \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m)$, por tal $cl_X(D) \subset A \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m)$. Se sigue que $cl_X(D) = A \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m)$, con lo cual D es un cerrado en X. Por otro lado, como $D_m \cap A \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que D es un conexo. Así D es un continuo. Esto prueba la Afirmación 3.

Finalmente, note que $D \setminus A = \bigcup_{m=1}^{\infty} (D_m \setminus A)$ y $D_m \setminus A \neq \emptyset$, pues $\emptyset \neq D_m \setminus C_{n_m} \subset D_m \setminus A$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $D_m \cap D_j = \emptyset$ si $m \neq j$, entonces $(D_m \setminus A) \cap (D_j \setminus A) = \emptyset$ si $m \neq j$. Note que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $cl_X(V_m) \cap (D \setminus A) = cl_X(V_m) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i \setminus A)) = D_m \setminus A$, así $D_m \setminus A$ es un conjunto cerrado en $D \setminus A$. Luego cada componente de $D_m \setminus A$ es componente de $D \setminus A$. Por lo tanto, $D \setminus A$ tiene una infinidad de componentes. En consecuencia D es un ∞-odo. Con todo el teorema está probado. $\square$

No es difícil convencerse de que el continuo X del Ejemplo 2.5 y el continuo Y del Ejemplo 4.4 son cada uno hereditariamente semi-Kelley, por lo cual el converso de Teorema 5.7 no es cierto. Vamos a ver que el continuo Y del Ejemplo 4.2 no es hereditrariamente semi-Kelley. Para lo cual, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $e_n = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4n})$ y sea $Z = (\bigcup_{n=1}^{\infty} ae_{2n-1}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_{2n} \cup b_{2n}d_{2n})$. Veremos que Z no tiene la propiedad de semi-Kelley, para lo cual basta considerar los puntos $e = (\frac{1}{4}, 0), b \in X$, I el irreducible entre los puntos d y e, y las sucesiones $\{e_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{d_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, no es difícil convencerse que no existe una sucesión de subcontinuos $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a I tal que $d_{2n} \in D_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que no existe una sucesión de subcontinuos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a I tal que $e_{2n-1} \in E_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por tal motivo Z no tiene la propiedad de semi-Kelley y por tanto Y no es hereditrariamente semi-Kelley.

Recordemos que un continuo X es *hereditariamente Kelley* si cada subcontinuo de X tiene la propiedad de Kelley.

En 2000, G. Acosta y A. Illanes probaron que cada continuo atriódico con la propiedad de Kelley, es un continuo hereditariamente Kelley, véase [**1**, Corolario 5.2]. En [**5**, Corolario 3.5], M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar demuestran el resultado similar para continuos semi-Kelley, esto es:

Corolario 5.8. *Si X es un continuo atriódico semi-Kelley, entonces X es hereditariamente semi-Kelley.*

Demostración: Sea X un continuo atriódico semi-Kelley. Supongamos que X no es hereditariamente semi-Kelley. Por el Teorema 5.7, X contiene un subcontinuo Y el cual es un ∞-odo. Así existe un subcontinuo B de Y tal que $Y \setminus B$ tiene una cantidad infinita de componentes. De aquí se sigue que $Y \setminus B$ tiene al menos 3 componentes. Luego, X contiene un triodo, esto contradice que X es atriódico. Por lo tanto, X es hereditariamente semi-Kelley. $\square$

Ejemplo 5.9. *Definamos* $X = (\{0\} \times [-1, 2]) \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$.

Es bien sabido que X es un continuo atriódico semi-Kelley sin la propiedad de Kelley. Se sigue del Corolario 5.8 que X es un continuo hereditariamente semi-Kelley.

Agradecimientos: Más allá de la formalidad de agradecer al árbitro(a), con toda sinceridad, los autores le agradecen al árbitro(a) sus comentarios y sugerencias a este trabajo.

Bibliografía

[1] G. Acosta and A. Illanes. *Continua which have the property of Kelley hereditarily*, Topology Appl. 102, no. 2, (2000), 151–162.

[2] I. D. Calderón-Camacho, E. Castañeda-Alvarado, C. Islas-Moreno, D. Maya-Escudero and F. J. Ruiz-Montañez. *Being semi-Kelley does not imply semi-smoothness*, Questions Answers Gen. Topology 32 (2014), 73–77.

[3] E. Castañeda-Alvarado and I. Vidal-Escobar. *Property of being semi-Kelley for the cartesian products and hyperspaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 58 (2017), 359–369.
[4] M. Chacón-Tirado, D. Embarcadero-Ruiz, J. A. Naranjo-Murillo and I. Vidal-Escobar. *Semi-Kelley compactifications of (0, 1]*, Colloq. Math. 168 (2022), no. 2, 325–340.
[5] M. Chacón-Tirado, M. de J. López, I. Vidal-Escobar. *A property equivalent to being semi-Kelley*, por aparecer en Topology Appl.
[6] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik. *A weaker form of the property of Kelley*, Topology Proc. 23, (1998), 69–99.
[7] L. Fernández, I. Puga. *On semi-Kelley continua*, Houston J. Math. 45 (2019), No. 1, 307–315.
[8] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemáticas Mexicana, México, 2004.
[9] A. Illanes, *Semi-Kelley continua*, Colloq. Math. 163 (2021), No. 1, 53–69.
[10] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
[11] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52, (1942), 22–36.
[12] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.
[13] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
[14] J. R. Prajs. *Semi-terminal continua in Kelley spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 363, no. 6, (2011), 2803–2820.
[15] A. Santiago-Santos and I. Vidal-Escobar. *Property of being semi-Kelley is a sequentially strong Whitney reversible property*, Topology Appl. 224 (2018) 153–158.
[16] R. W. Wardle. *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. vol. 3, no. 2, (1977), 291–299.

Correos electrónicos:
maeschacon@fcfm.buap.mx (Mauricio Chacón Tirado),
mjlopez@fcfm.buap.mx (María de Jesús López Toriz),
piveavis@gmail.com (Ivon Vidal Escobar).

CAPÍTULO 10

Sublocales

Juan Angoa-Amador, Agustín Contreras-Carreto, Ivan Fernando Vilchis-Montalvo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Resumen

Los conjuntos ordenados se han convertido en la nueva teoría básica para relacionar otras teorías mediante enlaces categóricos, pero no siempre se tienen los conocimientos fundamentales de esta disciplina, valgan estas notas para asegurar los conocimientos básicos del tema.

2. Preliminares

Definición 2.1. *Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times X$ una relación, para $x, y \in X$ denotamos por xRy si y sólo si $(x, y) \in R$. Diremos que R es un orden si:*

1) *Para todo $x \in X$ xRx.*
2) *Para toda x, y, z si xRy, yRz, entonces xRz.*

Si además, se cumple que:

3) *Para todo $x, y \in X$, si xRy e yRx, entonces $x = y$. Se dirá que R es orden parcial.*

Si R es un orden parcial, entonces se denota xRy como $x \leq y$, además diremos que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado o bien que $(X, \leq)$ es un copo. Por último, si $(X, \leq)$ y $(Z, \leq^{'})$ son dos copos, entonces una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \leq^{'} f(y)$ siempre que $x \leq y$ se le dirá función monótona.

Dado un conjunto X, el copo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ (donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X y $\subseteq$ la relación de contención) es el más general de todos en el siguiente sentido:

Teorema 2.2. *Sea $(X, \leq)$ un copo. Entonces existe una función monótona inyectiva entre $(X, \leq)$ y $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $x \in X$, denotamos por $x \uparrow$ al conjunto $\{y \in X : x \leq y\}$. Definamos $\phi : (X, \leq) \to \mathcal{P}(X)$, donde $\phi(x) = x \uparrow$, es claro que ϕ es monótona e inyectiva. $\square$

Sean $(X, \leq_X)$ un copo y $x \in X$. Denotaremos por $x \downarrow$ al conjunto $\{y \in X : y \leq x\}$. Además, si $M \subseteq X$, denotaremos por $M \uparrow$ y $M \downarrow$ a los conjuntos $\{y \in X : x \leq y, \text{ para todo } x \in M\}$ y $\{y \in X : y \leq x, \text{ para todo } x \in M\}$ respectivamente. Se sigue entonces que: $M \uparrow = \bigcap_{x \in M} x \uparrow$, y que $M \downarrow = \bigcap_{x \in M} x \downarrow$.

Definición 2.3. *Sea $(X, \leq)$ un copo. Si $x \downarrow = \{x\}$, diremos que x es un elemento mínimo. Si $x \uparrow = \{x\}$ diremos que x es un elemento máximo. A un elemento de $M \uparrow$ se le llama cota superior de M, y a un elemento de $M \downarrow$ cota inferior de M.*

Definición 2.4. *Sean $(X, \leq)$ un copo, $M \subseteq X$. Un elemento $x_0 \in X$ es llamado el supremo de M si:*

1) *$x_0 \in M \uparrow$,*
2) *si $z \in M \uparrow$, entonces $x_0 \leq z$.*

Al supremo x_0 se le denotará por $\bigvee M$. En el caso en el que $x_0 \in M \cap M \uparrow$, diremos que x_0 es el mayor elemento de M.

Análogamente $y_0 \in X$ es llamado el ínfimo de M si

1) *$y_0 \in M \downarrow$,*
2) *si $l \in M \downarrow$, entonces $l \leq y_0$. Al ínfimo y_0 se le denotará por $\bigwedge M$. En el caso en el que $y_0 \in M \cap M \downarrow$, diremos que y_0 es el menor elemento de M.*

Es claro que si existe el supremo de M donde $M \subseteq X$ y $(X, \leq)$ es un copo dicho supremo es único. Análogamente el ínfimo de M es único en caso de existir. Si X tiene menor elemento lo denotaremos por 0 y si tiene mayor elemento lo denotaremos por 1. Además $0 = \bigvee \emptyset = \bigwedge X$ y $1 = \bigvee X = \bigwedge \emptyset$.

Definición 2.5. *Un copo $(X, \leq)$*

1) *Es $\wedge$-semirretícula si para todo $A \subseteq X$ finito, existe $\wedge A$*
2) *Es $\vee$-semirretícula si para todo $A \subseteq X$ finito, existe $\vee A$*
3) *Es $\wedge$-semirretícula acotada si existe $0, 1 \in X$.*
4) *Es $\vee$-semirretícula acotada si existe $0, 1 \in X$.*
5) *Es retícula si es $\wedge$-semirretícula y $\vee$-semirretícula. En otras palabras, si para cada $a, b \in X$ siempre existen $\wedge\{a, b\}$ y $\vee\{a, b\}$ que se denotarán como $a \wedge b$ y $a \vee b$. Esta condición significa que todo conjunto finito tiene supremo e ínfimo, como $\emptyset$ es finito, entonces en una retícula siempre existen $0, 1$.*
6) *Un copo $(X, \leq)$, es acotado si existen $0, 1 \in X$.*
7) *$(X, \leq)$, es retícula completa si para todo $A \subseteq X$ existen $\vee A$ y $\wedge A$.*

Veamos el siguiente resultado:

Teorema 2.6. *Sea $(X, \leq)$ un copo. Si para todo $A \subseteq X$, existe $\vee A$, entonces $(X, \leq)$ es una retícula completa.*

DEMOSTRACIÓN:
Sea $A \subseteq X$. Observe que $\vee A \downarrow$ es el ínfimo de A. $\square$

3. Teorema de punto fijo

El siguiente teorema es muy importante en la clase de las retículas completas.

Teorema 3.1. *[Teorema de Punto fijo de Knaster-Tarski] Sean $(X, \leq)$ una retícula completa y $f : X \to X$ una función monótona, entonces existe $s \in X$ tal que $f(s) = s$.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean $f : X \to X$ monótona, $N = \{x \in X : x \leq f(x)\}$ y $s = \vee N$. Queremos demostrar que $f(s) = s$.

Notemos que si $x \in N$, entonces $x \leq s$, luego $x \leq f(x) \leq f(s)$. Así $x \leq f(s)$, es decir, $f(s)$ es cota superior de N. Por lo que $s \leq f(s)$, y en consecuencia $s \in N$. Ahora, para cada $x \in N$ se tiente que $x \leq f(x)$ y por tanto $f(x) \leq f(f(x))$. Así que $f(x) \in N$, por lo que $f(x) \leq s$, pero como $s \in N$ podemos concluir que $f(s) \leq s$. Por tanto $f(s) = s$. □

Usando este teorema podemos demostrar el importante resultado de la teoría de conjuntos:

Teorema 3.2 (Teorema de Cantor-Bernstein)**.** *: Sean X, Y conjuntos. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son funciones inyectivas, entonces existe una función $h : X \to Y$ biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X el cual es retícula completa con el orden de la contención. Además, sea $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, definida para $A \subseteq X$ como $\phi(A) = g[Y \setminus f[X \setminus A]]$. Veamos que ϕ es una función monótona: sabemos que si $A_1 \subseteq A_2$ con $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$, entonces $X \setminus A_2 \subseteq X \setminus A_1$ y en consecuencia $f[X \setminus A_2] \subseteq f[X \setminus A_1]$, lo que implica que $Y \setminus f[X \setminus A_1] \subseteq Y \setminus f[X \setminus A_2]$, finalmente se tiene que $g[Y \setminus f[X \setminus A_1]] \subseteq g[Y \setminus f[X \setminus A_2]]$. Luego $\phi(A_1) \subseteq \phi(A_2)$, y así ϕ es monótona. Entonces por el Teorema 3.1, existe $A \subseteq X$ tal que $\phi(A) = A$, es decir, $g[Y \setminus f[X \setminus A]] = A$. Definamos $h : X \to Y$ como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \notin A \\ g^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

Notar que si $x \in A$, entonces siempre existe $y \in Y \setminus f[X \setminus A]$, tal que $x = g(y)$. Además, como g es inyectiva y es única. Así, que $g^{-1}(x)$ denota al único $y \in Y \setminus f[X \setminus A]$ tal que $g(y) = x$. Veamos que h es inyectiva y sobreyectiva.

Veamos la inyectividad de $h : X \to Y$. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $h(x_1) = h(x_2)$. El caso en que $x_1, x_2 \in X \setminus A$, nos lleva a que $f(x_1) = f(x_2)$. Como f es inyectiva, entonces $x_1 = x_2$. Ahora, si $x_1, x_2 \in A$, entonces tenemos que $h(x_1) = g^{-1}(x_1) = y = g^{-1}(x_2)$, como g es función y $g(y) = x_1$ y $g(y) = x_2$, entonces $x_1 = x_2$. Solo consideraremos el caso en que $x_1 \notin A$ y $x_2 \in A$, ya que si $x_1 \in A$ y $x_2 \notin A$ es similar. Pero si $x_1 \notin A$ y $x_2 \in A$, tenemos que $f(x_1) = y$ tal que $g(y) = x_2$, luego $y \in f[X \setminus A]$, pero $y \in Y \setminus f[X \setminus A]$, para que $h(x_2) = y$, lo cual es una contradicción luego este caso y el simétrico no existen. Por tanto h es inyectiva.

Ahora veamos que $h : X \to Y$ es sobreyectiva. Sea $y \in Y$, si $y \in f[X \setminus A]$, entonces existe un único $x \in X \setminus A$, tal que $y = f(x)$. Como $x \notin A$, entonces $f(x) = h(x)$, luego $y = h(x)$. Si $y \notin f[X \setminus A]$, entonces $y \in Y \setminus f[X \setminus A]$, luego si $g(y) = x$, se cumple que $y = h(x)$. Por tanto h es biyectiva. □

4. Conexiones de Galois

Definición 4.1. *Sean $(X, \leq), (Y, \leq)$ dos copos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones monótonas, ellas son una conexión de Galois o f es adjunta izquierda de g o g es adjunta derecha de f si para todo $x \in X$ e $y \in Y$ se cumple que:*

$$f(x) \leq y \text{ si y sólo si } x \leq g(y).$$

Veamos el siguiente resultado:

Lema 4.2. *Sean $(X, \leq), (Y, \leq)$ dos copos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ monótonas, entonces f adjunta izquierda de g si y sólo s si para todo $x \in X$ e $y \in Y$ se cumple que $f(g(y)) \leq y$ y $x \leq g(f(x))$.*

Demostración: Sea $y \in Y$ Como $g(y) \leq g(y)$, entonces $f(g(y)) \leq y$ por ser f adjunta izquierda de g. Ahora, sea $x \in X$. Como $f(x) \leq f(x)$, entonces $x \leq g(f(x))$. Ahora, supongamos que para todo $x \in X$ e $y \in Y$ se cumple que $f(g(y)) \leq y$ y $x \leq g(f(x))$ y que $f(x) \leq y$. Entonces $x \leq g(f(x)) \leq g(y)$. Luego $x \leq g(y)$. Ahora, si $x \leq g(y)$ y $f(g(y)) \leq y$, $x \leq g(f(x))$, entonces $f(x) \leq f(g(y)) \leq y$. Luego $f(x) \leq y$. Por tanto f es adjunta izquierda de g. □

Corolario 4.3. *Sean $(X, \leq), (Y, \leq)$ copos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ monótonas, y f adjunta izquierda de g, entonces $fgf = f$ y $gfg = g$*

Demostración: Sean $y \in Y$ y $x \in X$, entonces $x \leq gf(x)$, así $f(x) \leq f(gf(x))$, pero $fg(f(x)) \leq f(x)$, luego $fgf = f$. La otra igualdad es análoga. □

Lema 4.4. *Sean $(X, \leq), (Y, \leq)$ retículas completas, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ monótonas. Si f adjunta izquierda de g, entonces f preserva supremos y g preserva ínfimos.*

Demostración:

Sea $M \subseteq X$ y $s = \vee M$, vamos a demostrar que $f(s) = \vee\{f(m) : m \in M\} = \vee f[M]$. Sea $m \in M$, entonces $m \leq s$, luego $f(m) \leq f(s)$, es decir $f(s)$ es cota superior de $f[M]$. Ahora sea $y \in Y$ tal que $f(m) \leq y$, entonces $m \leq g(y)$, luego $g(y)$ es cota superior de M, luego $s \leq g(y)$, entonces $f(s) \leq y$, entonces $f(s) = \vee f[M]$. Análogamente se demuestra que g preserva ínfimos. □

Teorema 4.5. *Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ retículas completas, $f : X \to Y$ monótona, entonces f preserva supremos si y sólo si es adjunta izquierda de alguna $g : Y \to X$ monótona*

Demostración:

Por lo anterior solo resta demostrar que si f preserva supremos existe $g : Y \to X$ monótona tal que f es adjunta izquierda de tal g.

Sea $g(y) = \vee\{x : f(x) \leq y\}$. Supongamos que $f(x) \leq y$, entonces $x \in \{x : f(x) \leq y\}$, luego $x \leq g(y)$. Ahora, si $x \leq g(y) = \vee\{z \in X : f(z) \leq y\}$, como f preserva supremos, entonces $f(g(y)) = \vee\{f(z) : f(z) \leq y\}$. Luego, como y es cota superior de $\{f(z) : f(z) \leq y\}$, f es monótona y $x \leq g(y)$, entonces $f(x) \leq f(g(y)) \leq y$. Por tanto $f(x) \leq y$. □

5. Álgebras, retículas distributivas

Si $(X, \leq)$ es una retícula, entonces $\wedge$, $\vee$, 0 y 1, cumplen las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) para todo $a, b, c \in X$:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \cdots (1)$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \wedge a = a$$
$$1 \wedge a = a$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \cdots (2)$$
$$a \vee b = b \vee a$$
$$a \vee a = a$$
$$0 \vee a = a$$
$$a \vee (a \wedge c) = a \cdots (3)$$
$$a \wedge (a \vee c) = a \cdots (4)$$

pero, si en X existen operaciones $\wedge$, $\vee$ y elementos 0,1, tales que cumplen las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), entonces en X se puede construir un orden con el cual X es retícula . Más precisamente:

Teorema 5.1. *Sea X un conjunto $0, 1 \in X$ y $\wedge$, $\vee$ operaciones definidas en X, tal que cumplen (1),(2), (3) y (4). Si $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$, entonces $(X, \leq)$ es retícula.*

Demostración: 1. Demostremos que $\leq$ es un orden parcial para X. Es claro que $a \leq a$ ya que $a \wedge a = a$.

Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \wedge b = a$ y $b \wedge c = b$. Por lo que $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, luego $a \leq c$.

Ahora, supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a \wedge b = a$ y $b \wedge a = a$. Así que $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Por tanto $a = b$.

Sea $a, b \in X$, definamos $inf\{a, b\}$ por $a \wedge b$ y $sup\{a, b\}$ por $a \vee b$. Veamos que están bien definidos. Observemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, ya que $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$; de igual manera $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$. Ahora, sea $c \in X$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$, es decir, $c \wedge a = c$ y $c \wedge b = c$, evaluamos $c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$, es decir, $c \leq a \wedge b$. Por tanto $a \wedge b$ sí es el ínfimo de $\{a, b\}$.

Ahora veamos que $sup\{a, b\}$ sí es $a \vee b$. Antes, veamos que para todo $x, y \in X$, $x \wedge y = x$ si y sólo si $x \vee y = y$. Si $x \wedge y = x$, entonces $y = y \vee (y \wedge x) = y \vee x$. Y si $y \vee x = y$, entonces $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$. Ahora, veamos que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, pero $a \wedge (a \vee b) = a$, así que $a \leq a \vee b$, y $b \wedge (a \vee b) = b \wedge (b \vee a) = b$, luego $b \leq a \vee b$. Ahora, supongamos que $a \leq c$ y $b \leq c$, es decir, $a \wedge c = a$ y $b \wedge c = b$ o equivalentemente $a \vee c = c$, $b \vee c = c$. Veamos que $a \vee b \leq c$, para esto evaluemos $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$, luego $sup\{a, b\} = a \vee b$. Por (1) y (2) y la equivalencia demostrada antes, tenemos que $a \leq 1$, $0 \leq a$ donde $0, 1$ son los que cumplen la ecuación (1) y(2), es decir, son el supremo y el ínfimo del conjunto vacío respectivamente. $\square$

Definición 5.2. *Sea $(X, \leq)$ una retícula. Diremos que X es:*

1) *distributiva si para todo* $a, b, c \in X$ *se cumple:*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \cdots (*),$$

2) *modular si todo* $a, b, c \in X$ *se cumple:*
si $a \leq c$, *entonces* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

Lema 5.3. *Toda retícula distributiva es modular*

Demostración:
Sean $(X, \leq)$ distributiva y $a \leq c$. Entonces $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$.
□

Teorema 5.4. $(X, \leq)$ *es retícula distributiva si y sólo si para todo* $a, b, c \in X$ *se cumple que*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \cdots (**)$$

Demostración: Supongamos $(*)$, entonces $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) = a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) = (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$, es decir $(*) \Rightarrow (**)$. Ahora supongamos $(**)$, entonces $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \wedge (a \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c)) = a \vee ((b \wedge a) \vee (b \wedge c)) = (a \vee (a \wedge b)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. Por tanto $(**) \Rightarrow (*)$.
□

Ahora, veamos algunas caracterizaciones de las retículas distributivas:

Teorema 5.5. *La reticula* $(X, \leq)$ *modular es distributiva si y sólo si para todo* $a, b, c \in X$ *se cumple que:*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

Demostración: Sea $A = \{a \wedge b, a \wedge c, b \wedge c\}$ y $B = \{a \vee b, a \vee c, b \vee c\}$. Si $\wedge B$ es cota superior de A, entonces $\vee A \leq \wedge B$. Como $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$, entonces $a \wedge b \leq a \vee b$, $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$, entonces $a \wedge b \leq b \vee c$, finalmente $a \wedge b \leq a \leq a \vee c$, entonces $a \wedge b$ es cota inferior de B, luego $a \wedge b \leq \wedge B$. De manera análoga, se puede mostrar que $a \wedge c \leq \wedge B$ y que $b \wedge c \leq \wedge B$. Luego $\vee A \leq \wedge B$. Es decir que

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

se cumple en cualquier retícula. La igualdad:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

se cumple suponiendo que $(X, \leq)$ es distributiva. Si $(X, \leq)$ es distributiva, entonces $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, luego

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee (b \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) =$$

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c)).$$

Pero $(a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge a) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ donde la última igualdad se da porque el supremo conmuta y porque $a \wedge b = b \wedge a$. Por tanto se da la igualdad

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Para el recíproco, supongamos que $(X, \leq)$ es modular, veamos que $(X, \leq)$ es distributiva. Entonces

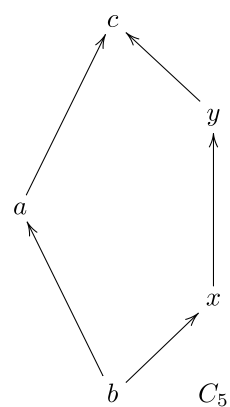
$$(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge c = [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \wedge c,$$

pero $a \wedge c \leq c$ y $b \wedge c \leq c$, entonces $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c$, usando lo modular, tenemos que:

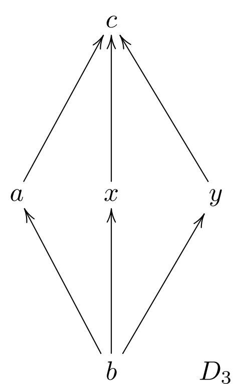
$$(a \vee b) \wedge c = [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \vee [(a \wedge b) \wedge c],$$

pero $[(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \leq [(a \wedge b) \wedge c]$. Así que $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, luego $(X, \leq)$ es distributiva. $\square$

Describimos las retículas C_5, D_3:



C_5



D_3

Ahora, usemos C_5 para obtener la siguiente equivalencia de retículas modulares:

Teorema 5.6. *Una retícula es modular si y sólo si no tiene sub-retículas isomorfas a* C_5

Demostración:

Supongamos que $L \in Ob(\mathbf{Pos})$ y contiene un conjunto $\{x, a, b, y\}$ con las relaciones de C_5, entonces: tenemos que $x \leq y$ y

$x \vee (a \wedge y) = x \vee b = x < y = c \wedge y = (x \vee a) \wedge y$

Entonces L no es modular.

Ahora, supongamos que L no es modular, entonces existen $u, v, w \in L$ tales que $u \leq w$ pero no sucede que $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w$,pero $u \leq w$, y $u \leq (v \vee u)$,entonces u es cota inferior de $\{u \vee v, w\}$, pero $v \wedge w \leq w \leq v \vee w$, luego también $v \wedge w$ es cota inferior de $\{u \vee v, w\}$, luego $v \wedge w \leq (u \vee v) \wedge w$ y $u \leq (u \vee v) \wedge w$, luego $(u \vee v) \wedge w$ es cota superior de $\{u, v \wedge w\}$, luego $u \vee (v \wedge w) \leq (u \vee v) \wedge w$. Así que si L no modular existen $u, v, w \in L$ tales que $u \leq w$ y $u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w$.

1. Así, si L no modular existen $u, v, w \in L$ tales que $u \leq w$ y $u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w$. Si $v \geq u \vee (v \wedge w)$, entonces $v \geq u$, luego $(u \vee v) \wedge w = v \wedge w$, pero $u \vee (v \wedge w) = v \wedge w$ ya que $u \leq v$ y $u \leq w$, entonces $u \leq v \wedge w$, luego $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w$ lo cual no puede ser. Pero si $v \leq u \vee (v \wedge w) \leq (u \vee v) \wedge w$, así que $v \leq (u \vee v) \wedge w$, entonces $v \leq w$, y $u \vee (v \wedge w) = u \vee v$, pero $u \leq u \leq u \vee v$ entonces $u \leq w$ y $v \leq w$, luego $u \vee v \leq w$, por tanto $(u \vee v) \wedge w \leq u \vee v$, luego $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w$, lo cual no puede ser.

2. Luego, v es incomparable con $u \vee (v \wedge w)$ y $(u \vee v) \wedge w$.

3. Pero, $v \vee u \vee (v \wedge w) = v \vee u$, ya que $v \wedge w \leq v \leq v \vee u$, entonces $v \wedge w \leq v \vee u$, luego $v \vee u \vee (v \wedge w) = (v \vee u) \vee (v \wedge w) = v \vee u$. Además $(v \vee u) \wedge w \leq v \vee u$ y por tanto $v \vee u = v \vee ((v \vee u) \wedge w)$. Ya que $v \vee ((v \vee u) \wedge w) \leq v \vee (v \vee u) = v \vee u$, pero $u \leq v \vee u$ y $u \leq w$, luego $u \leq (v \vee u) \wedge w$, luego $v \vee u \leq v \vee ((v \vee u) \wedge w)$. O sea $v \vee ((v \vee u) \wedge w) = v \vee u$. O sea $v \vee u \vee (v \wedge w) = v \vee u = v \vee ((v \vee u) \wedge w)$

4. De manera análoga: $v \wedge (u \vee v) \wedge w = v \wedge w$, ya que $v \wedge (u \vee v) \wedge w = (v \wedge w) \wedge (v \vee u)$ y como $v \wedge w \leq v \leq v \vee u$, entonces $v \wedge (u \vee v) \wedge w = v \wedge w$. Ahora, veamos $v \wedge (u \vee (v \wedge w))$. Como $v \wedge w \leq u \vee (v \wedge w)$ y es claro que $v \wedge w \leq v$, entonces $v \wedge w \leq v \wedge (u \vee (v \wedge w))$, como $u \leq w$ y $v \wedge w \leq w$, entonces w es cota superior de $\{u, v \wedge w\}$, luego $u \vee (v \wedge w) \leq w$, luego $v \wedge (u \vee (v \wedge w)) \leq v \wedge w$, por tanto $v \wedge (u \vee v) \wedge w = v \wedge w = v \wedge (u \vee (v \wedge w))$. Finalmente si $a = v$, $b = v \wedge w$, $c = v \vee u$, $x = u \vee (v \wedge w)$, $y = (u \vee v) \wedge w$, Comprobemos que $b \leq a \leq c$ y $b \leq x \leq y \leq c$. Lo cual es cierto ya que $b = v \wedge w \leq v = a$ y $b = v \wedge w \leq v \vee u = c$ por 3. se cumple. Ahora, sea $x = u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w = y$, $x = u \vee (v \wedge w) \leq v \vee u = c$, por 3. □

Ahora, obtenemos una completa caracterización de las retículas distributivas:

Teorema 5.7. *L es una retícula distributiva si y sólo si no contiene sub-retículas isomorfas a C_5 y no contiene sub-retículas isomorfas a D_3*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que contiene una subretícula isomorfa a C_5 entonces no es modular pero si contiene una sub-reticula de la forma D_3, entonces existen $a, b, c, x, y \in L$ tales que $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) = b$, pero $a \wedge (x \vee y) = a \wedge c = a$, pero $b < a$, luego L no es distributiva.

Ahora supongamos que L no es distributiva, pero no contiene sub-reticulas isomorfas a C_5 y no contiene sub-retículas isomorfas a D_3, si no es modular, contiene una sub-retícula de la forma C_5, pero L no cumple eso, luego L es modular pero no distributivo, entonces por el Teorema 5.6, entonces existen $a, b, c \in L$ tales que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ sea $x = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ e $y = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, entonces $x < y$, sean:

$u = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c)$

$v = (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c)$

$w = (c \vee (a \wedge) b) \wedge (a \vee b)$, se mostrará que $u \wedge v = u \wedge w = v \wedge w = x$ y $u \vee v = u \vee w = v \vee w = y$. Antes mostremos que:

$u = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)$

$v = (b \wedge (a \vee c)) \vee (a \wedge c)$

$w = (c \wedge (a \vee) b) \vee (a \wedge b)$. Para esto veamos el siguiente esquema: $u = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = ((b \wedge c) \vee a) \wedge (b \vee c)$ y como $b \wedge c \leq c \leq b \vee c$, entonces $b \wedge c \leq b \vee c$, luego podemos aplicar la modularidad y obtener $u = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c)) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)$. Siguiendo con el esquema para $u \wedge v$, tenemos que:

$u \wedge v = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c)$, pero $a \wedge c \leq c \leq a \vee c$, luego $b \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$, por tanto $(b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = b \vee (a \wedge c)$ y como $b \wedge c \leq a \vee c$, entonces $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee (a \vee c) = a \vee c$, luego: $u \wedge v = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = ((b \wedge c) \vee a) \wedge (b \vee (a \wedge c))$, y como $b \wedge c \leq b \leq b \vee (a \wedge c)$, entonces por modularidad $u \wedge v = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee (a \wedge c))) = (b \wedge c) \vee [((a \wedge c) \vee b) \wedge a]$ y como $a \wedge c \leq a$ y por modularidad, $u \wedge v = (b \wedge c)[(a \wedge c) \vee (b \wedge a)] = x$. siguiendo el mismo esquema obtenemos que $u \wedge w = v \wedge w = x$ y $u \vee v = u \vee w = v \vee w = y$.

Observemos que u, v, w son incomparables en L. Supongamos que $u \leq v$, entonces $u = u \wedge v = x$, entonces $a \leq u$ y $v \leq b$, luego $a \leq b$ y además $u \wedge w = u$, luego $a \leq u \leq w \leq c$, entonces $a \leq c$, luego $x = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < y = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, por tanto $x = a \vee a \vee (b \wedge c) < b \wedge c \wedge (b \vee c)$, pero $a \leq b \wedge c$, luego $x = b \wedge c$ pero $b \wedge c \leq b \vee c$, luego $y = b \wedge c$, por tanto $b \wedge c < b \wedge c$, lo cual es una contradicción, en los demás casos se sigue el mismo esquema, así que u, v, w son incomparables en L. Por tanto el conjunto $\{u, v, w, x, y\} \subseteq L$ forman un poset isomorfo a D_3. □

Veamos la siguiente caracterización de retícula distributiva.

Teorema 5.8. *$L = (X, \leq_X)$ es retícula distributiva si y sólo si existe a lo más una solución de las ecuaciones:*
$a \wedge x = b,\ a \vee x = c \cdots (*)$

DEMOSTRACIÓN: Sea L distributiva y supongamos que x, y son soluciones de (*), entonces $x = x \wedge (x \vee a) = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = y \wedge (y \vee a) = y$, luego $x = y$.

Ahora, si L es no distributiva entonces con la misma notación de las figuras C_5 y D_3, se tiene que x, y son soluciones diferentes de las ecuaciones $(*)$. □

6. Ideales y filtros en retículas distributivas

Definición 6.1. *Sean L retícula distributiva y $I \subseteq L$, diremos que I es un ideal de L, si:*

1) $0 \in I$.
2) *Si cada que $a, b \in I$, entonces $a \vee b \in I$.*
3) *Si $b \leq a$ y $a \in I$, entonces $b \in I$.*

Además, un ideal es propio si no es todo L. Un ideal propio I es primo, si $a \wedge b \in I$ implica que $a \in I$ o $b \in I$. Por último, un ideal I es máximo si es propio y no está contenido propiamente en otro ideal.

Definición 6.2. *Sea L retícula distributiva y $F \subseteq L$, diremos que F es un filtro de L, si:*

1) $1 \in F$.
2) *Si cada que $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$*
3) *Si $a \leq b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.*

Además, un filtro es propio si no es todo L. Un filtro propio F es primo, si $a \vee b \in F$ implica que $a \in F$ o $b \in F$. Por último, un filtro F es máximo si es propio y no está contenido propiamente en otro ideal.

Teorema 6.3. *Sean I ideal y F filtro propios de L dónde L es una retícula ditributiva. Si $I \cap F = \emptyset$, entonces existe $\overline{F}$ tal que $\overline{F}$ es filtro primo y máximo con la propiedad de que $I \cap \overline{F} = \emptyset$.*

Demostración:

Sea $\mathcal{F} = \{M : M \text{ filtro propio de } L, F \subseteq M, I \cap M = \emptyset\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es copo no vacío, para poder usar el Lema de Zorn. Es claro que $F \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es ordenado con la relación de subconjunto. Ahora, sea $\mathcal{C} \subseteq F$ una cadena, veamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Sean $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces $a \in F_a \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y $b \in F_b \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F_a \subseteq F_b$. Entonces $a, b \in F_b$, luego $a \wedge b \in F_b \in \mathcal{F}$. Ahora, si $a \in \bigcup \mathcal{C}$ y $a \leq b$, entonces $a \in F_a$ para algún $F_a \in \mathcal{C}$, luego $b \in F_a \in \mathcal{C}$, así $b \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es filtro. Como $\mathcal{F}$ sólo tiene filtros propios, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro propio, además $\bigcup \mathcal{C} \cap I = \emptyset$ y $M \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, luego $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximo. Sea $\overline{F}$ tal máximo, es claro que $\overline{F} \cap I = \emptyset$ y además $F \subseteq \overline{F}$.

Veamos que $\overline{F}$ es primo. Supongamos que $a \notin \overline{F}$ y $b \notin \overline{F}$ pero $a \vee b \in \overline{F}$. Si $G = \{x \in L : x \vee b \in \overline{F}\}$, entonces es claro que $a \in G$. Veamos que G es filtro. Sean $c, d \in G$, como $c \vee b, d \vee b \in \overline{F}$, entonces $(c \vee b) \wedge (d \vee b) \in \overline{F}$. Pero $(c \vee b) \wedge (d \vee b) = (c \wedge d) \vee b$, luego $(c \wedge d) \in G$. Ahora, si $c \in G$ y $c \leq d$, entonces $c \vee b \leq d \vee b$, pero $c \vee b \in \overline{F}$, luego $d \vee b \in \overline{F}$, luego $d \in G$ y G es filtro. Notemos que $\overline{F} \subseteq G$, ya que si $x \in \overline{F}$, entonces $x \leq x \vee b$, pero $x \vee b \in \overline{F}$, es decir, $x \in G$. En consecuencia $\overline{F} \subseteq G$, pero $a \in G$ y $a \notin \overline{F}$, entonces $\overline{F} \subseteq G$ pero $G \neq \overline{F}$. Si G no es propio, tendremos que, $0 \in G$, entonces $0 \vee b \in \overline{F}$, luego $b \in \overline{F}$, lo que es absurdo, así que G es propio, luego $G \notin \mathcal{F}$.

Así que $G \notin \mathcal{F}$, luego $G \cap I \neq \emptyset$. Sea $c_1 \in G \cap I$, entonces $c_1 \vee b \in \overline{F}$. Definimos $H = \{x : x \vee c_1 \in \overline{F}\}$, se demuestra que $\overline{F} \subseteq H$ y H es un filtro y que $b \in H$ pero $b \notin \overline{F}$, luego $H \neq \overline{F}$. Si H no fuera propio, entonces $0 \in H$, luego $0 \vee c_1 \in \overline{F}$, así que $c_1 \in \overline{F} \cap I$, lo que es absurdo. Por lo que H también es propio, así que $H \notin \mathcal{F}$, luego $H \cap I \neq \emptyset$. Por tanto existe $c_2 \in H \cap I$, luego $c_1 \vee c_2 \in I$, pero también $c_1 \vee c_2 \in \overline{F}$, o sea $c_1 \vee c_2 \in I \cap \overline{F}$, lo cual no es posible. Luego $\overline{F}$ es primo. □

Veamos el siguiente teorema:

Teorema 6.4 (Birkhoff). *Sean I, F ideal y filtro propio respectivamente de una retícula distributiva L, Si $F \cap I = \emptyset$, entonces existen $\overline{I} \subseteq L$ y $\overline{F} \subseteq L$ ideal y filtro primos tales tales que $I \subseteq \overline{I}$ $F \subseteq \overline{F}$ y $\overline{I} \cap \overline{F} = \emptyset$.*

Demostración:

Por el Teorema 6.3, existe $\overline{F}$ filtro máximo primo tal que $\overline{F} \cap I = \emptyset$. Entonces dualizando la demostración del Teorema 6.3 cambiando $\wedge$ por $\vee$ y filtro por ideal existe $\overline{I}$ ideal máximo primo tal que $\overline{F} \cap \overline{I} = \emptyset$ y $I \subseteq \overline{I}$. □

Corolario 6.5. *Sean L una retícula distributiva y $a, b \in L$. Si $a \nleq b$, entonces existe un filtro primo $\overline{F}$ tal que $a \in \overline{F}$ pero $b \notin \overline{F}$.*

Demostración: Sean $F = \{c \in L : a \leq c\}$ y $I = \{d \in L : d \leq b\}$. Es claro que I es ideal y F filtro. Supongamos que $x \in I \cap F$. Entonces $a \leq x$ y $x \leq b$, entonces $a \leq b$ lo cual no es posible así que existen $\overline{I}$ ideal primo $\overline{F}$ filtro primo tal que $F \subseteq \overline{F}$, $I \subseteq \overline{I}$, $\overline{I} \cap \overline{F} = \emptyset$ por el teorema anterior. Además, es claro que $a \in F$, luego $a \in \overline{F}$ y $b \in \overline{I}$. Si $a, b \in \overline{F}$, $a \wedge b \in \overline{F}$, pero $a \wedge b \leq b$, luego $a \wedge b \in I$, luego $a \wedge b \in \overline{I}$, luego $a \wedge b \in \overline{I} \cap \overline{F}$, lo cual no puede ser. Luego $b \notin \overline{F}$ □

7. Álgebras de Heyting y álgebras Booleanas

Definición 7.1. *Sea L un poset con 0 y con infimos finitos (es decir L es $\wedge$-semiretícula acotada), si existe el maximo del conjunto $\{b \in L : a \wedge b = 0\}$ se denotara como a^*. Llamaremos a a^*, cuando exista, el pseudocomplemento de a.*

Lema 7.2. *Sea L un poset con 0 y con infimos finitos entonces a^* cumple que $b \wedge a = 0$ si y sólo si $b \leq a^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que si $b \wedge a = 0$, entonces $b \in \{b : b \wedge a = 0\}$, luego $b \leq a^*$, ahora si $b \leq a^*$, entonces $b \wedge a \leq a^* \wedge a = 0$, recordar que $a^* \in \{b : b \wedge a = 0\}$ y es el más grande, entonces $b \wedge a = 0$. □

Lema 7.3. *Sea L un poset con 0 y con infimos finitos, donde para todo $a \in L$, existe a^*, entonces:*

1. $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$.
2. $a \leq b \Rightarrow a^{**} \leq b^{**}$.
3. $a \leq a^{**}$.
4. $a^{***} = a^*$
5. $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$

DEMOSTRACIÓN:

1. Si $a \leq b \Rightarrow a \wedge b^* \leq b \wedge b^* = 0$, luego $a \wedge b^* = 0$, entonces $b^* \leq a^*$.
2. Si $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^* \Rightarrow a^{**} \leq b^{**}$.
3. Como $a^* \wedge a = 0 \Rightarrow a \leq a^{**}$.
4. Por 3. y 1. , tenemos que $a^{***} \leq a^*$, por 3., $a^* \leq (a^*)^{**} = a^{***}$, luego $a^{***} = a^*$.
5. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, entonces $(a \wedge b)^{**} \leq a^{**}$ y $(a \wedge b)^{**} \leq b^{**}$, luego $(a \wedge b)^{**} \leq a^{**} \wedge b^{**}$. Ahora, si $a \wedge b = 0$, entonces $b \leq a^*$, entonces $a^{**} \leq b^*$, entonces $a^{**} \wedge b \leq b^* \wedge b = 0$, entonces $a^{**} \wedge b = 0$. Si $a^{**} \wedge b = 0$, como $a \leq a^{**}$, entonces $a \wedge b \leq a^{**} \wedge b = 0$, luego $a \wedge b = 0$.

Como $a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**} = ((a \wedge b)^*)^*$, luego $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)^* = 0$, luego $a \wedge (b \wedge (a \wedge b)^*) = 0$, luego $a^{**} \wedge (b \wedge (a \wedge b)^*) = 0$ □

Teorema 7.4. *Si L es retícula distributiva y $a, b \in L$ tienen pseudocomplementos, entonces $a \vee b$ tiene pseudocomplemento y $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero, demostremos que $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = 0$, pero $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = ((a \vee b) \wedge a^*) \wedge b^* = ((a \wedge a^*) \vee (b \wedge a^*)) \wedge b^* = (0 \vee (b \wedge a^*)) \wedge b^* = (b \wedge a^*) \wedge b^* = (b \wedge b^*) \wedge a^* = 0 \wedge a^* = 0$. Ahora, si $c \in L$ y $(a \vee b) \wedge c = 0$, entonces $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = 0$, entonces $a \wedge c = 0$ y $b \wedge c = 0$, luego $c \leq a^*$ y $c \leq b^*$, luego $c \leq a^* \wedge b^*$, luego $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$. □

Definición 7.5. *Sea L una retícula y $a \in L$, el complemento de a es $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$*

Proposición 7.6. *Sea L una retícula distributiva, entonces todo complemento es pseudocomplemento y es único.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $a, b \in L$ y b un complemento de a. Si $c \in L$ tal que $a \wedge c = 0$, entonces $c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee (c \wedge b) = c \wedge b$, luego $c \leq b$, luego $b = a^*$. Por el Teorema 5.8, el complemento es único. □

Veamos otra propiedad del pseudocomplemento:

Lema 7.7. *Si L es retícula distributiva, $a \in L$ y a^* tienen pseudocomplemento , entonces* $(a \vee a^*)^* = 0$

Demostración: Supongamos que $b \wedge (a \vee a^*) = 0$, entonces $(b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) = 0$, luego $b \wedge a = 0$ y $b \leq (a^*)^*$, luego $b \leq a^*$ y $b \leq a^{**}$, luego $b \leq a^* \wedge a^{**}$, como $(a \vee a^*)^* = (a \wedge a^{**})$, luego $0 = b \wedge (a \vee a^*)^*$, entonces $(a \vee a^*)^* = 0$ □

Definición 7.8. *Sea L un $\wedge$-semiretícula con 0. Diremos que es una semiretícula de Heyting si existe una operación $\_ \rightarrow \_$ tal que para todo $a, b, c \in L$ se cumple que $c \leq a \rightarrow b \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$. Si L es retícula entonces diremos que L es un álgebra de Heyting*

Lema 7.9. *Si L es una semiretícula de Heyting o álgebra de Heyting, entonces $a \rightarrow 0$ es el el pseudocomplemento de a.*

Demostración: Bastará demostrar que $c \wedge (a \rightarrow 0) \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow 0$, qué se deduce de colocar $b = 0$ en la definición. □

Lema 7.10. *La operación $a \rightarrow \_$ es adjunta derecha de la operación $a \wedge \_$*

Demostración: Sean $b_1 \leq b_2$, entonces $a \wedge b_1 \leq a \wedge b_2$, sabemos que $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_1$, luego $(a \rightarrow b_1) \wedge a \leq b_1$, luego $(a \rightarrow b_1) \wedge a \leq b_2$, por tanto $(a \rightarrow b_1) \leq a \rightarrow b_2$, luego $a \rightarrow \_$ es monótona y por definición $a \wedge c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b$, lo que significa que $a \rightarrow \_$ es adjunto derecho de $a \wedge \_$. □

Teorema 7.11. *1. Si L es $\wedge$-semirtícula si es de Heyting, tiene una sóla operación que la hace de Hayting.*

2. Si L es $\wedge$-semiretícula de Heyting, es distributiva en infimos sobre los supremos que existen. En particular un álgebra de Heyting es distributiva.

3. Si L es $\wedge$-semiretícula de Heyting, entonces para todo $a, b, c \in L$ se cumple que $(a \wedge b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Demostración: 1. Sea $\_ \rightarrow \_$ y $\_ \rightarrow' \_$ dos operaciones tal que L es $\wedge$-semiretícula de Heyting, como para todo $a \in L$: $a \rightarrow \_$ y $a \rightarrow' \_$ son dos funciones adjuntas derechas de $a \wedge \_$, entonces para todo $c \in L$, tenemos que $c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow' b$, si $c = a \rightarrow b$, es claro que $(a \rightarrow b) \leq (a \rightarrow b) \Rightarrow a \rightarrow b \leq a \rightarrow' b$, ahora si $c = a \rightarrow' b$, como $a \rightarrow' b \leq a \rightarrow' b \Rightarrow a \rightarrow' b \leq a \rightarrow b$, luego para todo $a, b \in L$ se cumple que $a \rightarrow b = a \rightarrow' b$.

2. Sean $A = \{a_i : i \in J\} \subseteq L$ si existe $\vee A \in L$ y $a \in L$, queremos demostrar, $a \wedge (\vee A) = \vee\{a \wedge a_i : i \in J\}$, pero $a \wedge \_$ es adjunto izquierdo de $a \rightarrow \_$, entonces $a \wedge \_$ preserva supremos que existan, es decir $a \wedge \vee A = \vee\{a \wedge a_i : i \in J\}$. Para un álgebra de Heyting, usar que siempre existen los supremos de finitos y luego aplicar lo anterior para implicar que es distributiva.

3. Si para todo $a, b, c, x \in L$ se cumple que $x \leq (a \wedge b) \rightarrow c \Leftrightarrow x \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$, entonces $(a \wedge b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$, se puede usar $x = (a \wedge b) \rightarrow c$ e implicar que $(a \wedge b) \rightarrow c \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$ y luego tomar $x = a \rightarrow (b \rightarrow c)$ e implicar que $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$. Así, $x \leq (a \wedge b) \rightarrow c \Leftrightarrow x \wedge a \wedge b \leq c \Leftrightarrow x \wedge a \leq b \rightarrow c \Leftrightarrow x \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$. □

Teorema 7.12. *Sea L una retícula completa. Entonces L admite una operación para ser una álgebra de Heyting si y sólo si se cumple: $(\vee_{i \in J} a_i) \wedge a = \vee_{i \in J}(a_i \wedge a) \cdots (*)$.*

Para todo $\{a_i : i \in J\} \subseteq L$ y $a \in L$.

DEMOSTRACIÓN: Como $a \wedge \_$ es monótona una operación de Heyting deberá ser adjunta derecha y existirá si y sólo si $a \wedge \_$ preserva supremos lo cual se asegura si se cumple $(*)$ y L retícula completa. □

Teorema 7.13. *Si L es un álgebra de Heyting, entonces se cumple $(\vee_{i\in J} a_i)^* = \wedge_{i\in J} a_i^*$ cuando existen $\vee_{i\in J} a_i$, y $(\vee_{i\in J} a_i)^*$.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que para todo $c \in L$, se cumple que $c \leq (\vee_{i\in J} a_i)^* \Leftrightarrow c \leq a_i^*$ para todo $i \in J$. Entonces $c \leq (\vee_{i\in J} a_i)^* \Leftrightarrow c \wedge \vee_{i\in J} a_i = 0 \Leftrightarrow$, usando el Teorema 7.12, $\vee_{i\in J}(c \wedge a_i) = 0 \Leftrightarrow c \wedge a_i = 0$ para. todo $i \in J \Leftrightarrow c \leq a_i^*$ para todo $i \in J$. Luego si $c = (\vee_{i\in J} a_i)^*$, entonces $(\vee_{i\in J} a_i)^* \leq a_i^*$ para todo $i \in J$, luego $(\vee_{i\in J} a_i)^* \leq \wedge_{i\in J} a_i^*$. Si $c = \wedge_{i\in J} a_i^*$, entonces $\wedge_{i\in J} a_i^* \leq (\vee_{i\in J} a_i)^*$, luego $(\vee_{i\in J} a_i)^* = \wedge_{i\in J} a_i^*$. □

Lema 7.14. *Sea L una retícula. La operación binaria $\rightarrow$ hace a L álgebra de Heyting si y sólo si para todo $a, b, c \in L$ se cumplen:*

1. $a \rightarrow a = 1$
2. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$
3. $b \wedge (a \rightarrow b) = b$
4. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que L con $\rightarrow$ es un álgebra de Heyting, entonces:

1. Verifiquemos que para todo $c \in L$ se cumple que $c \leq a \rightarrow a$ pero esto es equivalente a que $c \wedge a \leq a$, lo cual es cierto luego $a \rightarrow a = 1$.

2. Primero, como $(a \rightarrow b) \leq (a \rightarrow b)$, luego $(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$, por tanto $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$, pero $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$, luego $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$. Por otro lado, como $(a \wedge b) \wedge a \leq b$, entonces $a \wedge b \leq a \rightarrow b$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge (a \rightarrow b)$. Por tanto $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.

3. Como $b \wedge a \leq b$, entonces $b \leq a \rightarrow b$, por tanto $b \wedge (a \rightarrow b) = b$.

4. Como $a \rightarrow \_$ es adjunta derecha de $a \wedge \_$ entonces preserva ínfimos luego $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

Ahora, suponga que $\rightarrow$ cumple las ecuaciones $1. \cdots 4.$, luego, si $c \leq a \rightarrow b$, tenemos que $c \wedge a \leq a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b \leq b$, ahora si $c \wedge a \leq b$, entonces $c \wedge (a \rightarrow c) = c$, luego $c = c \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow c = (a \wedge a) \wedge (a \rightarrow c)$, ya que $a \wedge a = 1$, luego $c \leq (a \wedge a) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow (a \wedge c)$.

Pero $a \rightarrow \_$ es monótona En efecto, si $c \leq d$, entonces $a \rightarrow c = a \rightarrow c \wedge d$ pero $a \rightarrow c \wedge d = (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow d) \leq a \rightarrow d$, luego $a \rightarrow c \leq a \rightarrow d$. Regresemos a nuestra demostración. Como $a \wedge c \leq b$ y $c \leq a \rightarrow (a \wedge c) \leq a \rightarrow b$, luego $c \wedge a \leq b$ si y sólo si $c \leq a \rightarrow b$, luego L con la operación $\rightarrow$ es un álgebra de Heyting. □

Definición 7.15. *Si L una retícula distributiva con complementos, diremos que L es una álgebra de Boole.*

Teorema 7.16. *Toda álgebra de Boole es una álgebra de Heyting.*

DEMOSTRACIÓN: Sea L un álgebra de Boole. Como L es ditributiva: sus complementos son pseudocomplementos. Debemos definir $\rightarrow$ en L para convertirlo en álgebra de Heyting. Definimos: para todo $a, b \in L$ sea $a \rightarrow b = a^* \vee b$. Veamos que cumple de ser la operación apropiada:

Sea $a, b, c \in L$ y suponemos que $c \leq a \rightarrow b$, entonces $c \leq a^* \vee b$, luego $c \wedge a \leq (a^* \vee b) \wedge a = (a^* \wedge a) \vee (b \wedge a) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$. Ahora, si d el complemento de a, entonces $d = a^*$, asi que $1 = d \vee a = a^* \vee a$, luego, si $c \wedge a \leq b$, entonces $c = c \wedge 1 = c \wedge (a^* \vee a) = (c \wedge a^*) \vee (c \wedge a) \leq (c \wedge a^*) \vee b \leq a^* \vee b = a \to b$. $\square$

Lema 7.17. *Sea L un álgebra Booleana, entonces para todo $a \in L$ se cumple que $(a^*)^* = a$ y $\phi : L \to L^{op}$, donde L^{op} es el álgebra Booleana con el orden opuesto de L y ϕ definido como $\phi(a) = a^*$ es isomorfismo de álgebras Booleanas.*

DEMOSTRACIÓN: Como L es distributiva el complemento de a es a^* y a^{**} es el complemento de a^*, luego $a \vee a^* = 1$ y $a \wedge a^* = 0$ y $a^* \vee a^{**} = 1$ y $a^* \wedge a^{**} = 0$. Observemos las ecuaciones $a^* \vee x = 1$, $a^* \wedge x = 0$ tienen como solución a a y a a^{**}, ya que L es distributiva, por el Teorema 5.8 , tenemos que $a = a^{**}$.

Ahora, veamos que ϕ es monótona sean $a \leq b$, sabemos que $b^* \leq a^*$, o sea $a^* \leq_{op} b^*$. . sobreyectiva y preserva complementos supremos e ínfimos .

Como es álgebra de Heyting entonces $(\vee_{i\in j} a_i)^* = \wedge_{i\in J} a_i^*$, que es el supremo de $\{a_i^* : i \in J\}$ en L^{op}, ahora sea $(\wedge_{i\in j} a_i)^* = (\wedge_{i\in J} a_i^{**})^* = ((\vee_{i\in J} a_i^*)^*)^* = (\vee_{i\in J} a_i^*)^{**} = (\vee_{i\in J} a_i^*)$ que es el infimo de $\{a_i^* : i \in J\}$ en L^{op}. O sea ϕ preserva supremos e ínfimos.

Pero $\phi(a^*) = a^{**} = \phi(a)^*$, o sea ϕ preserva complementos.

Sea $a \in L^{op}$, entonces $\phi(a^*) = a^{**} = a$, o sea ϕ es biyectiva. $\square$

Ahora veamos la propiedad recíproca al Teorema 7.16 .

Teorema 7.18. *Sea L una álgebra de Heyting, L es álgebra Booleana si y sólo si L cumple que $(a^*)^* = a$ para todo $a \in L$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea L un álgebra Booleana entonces es de Heyting, ver Teorema 7.16, por Lema 7.17, tenemos que $a^{**} = a$.

Sea L un álgebra de Heyting, entonces es distributiva ver Teorema 7.11, 2., además siempre existen los pseudocomplementos, ver Lema 7.9 , veamos que si $a^{**} = a$, a^* es un complemento. Es decir $a^* \vee a = 1$ y $a \wedge a^* = 0$. Pero $\phi : L \to L^{op}$, del Lema 7.17 es isomorfismo y $1 = \phi(0) = \phi(\wedge\{a, a^*\}) = \phi(a) \vee \phi(a^*) = a^* \vee a^{**} = a \vee a^*$, luego $1 = a \vee a^*$, por ,luego $1^* = (a \vee a^*)^* = a^* \wedge a^{**} = a \wedge a^*$. Ahora, demostremos que $b \wedge 1 = 0 \Leftrightarrow b \leq 0$ para concluir que $1^* = 0$. Supongamos que $b \wedge 1 = 0$, luego $b = 0$ entonces $b \leq 0$. Ahora, si $b \leq 0$, como $b \wedge 1 = b$, entonces $b \wedge 1 \leq 0$, luego $b \wedge 1 = 0$, por tanto $1^* = 0$. $\square$

Usando el isomorfismo ϕ, conluimos que

Corolario 7.19. *Si L es álgebra Booleana, $\{a_i : i \in J\} \subseteq L$, $\vee_{i\in J} a_i, \wedge_{i\in J} a_i \in L$, entonces $(\vee_{i\in J} a_i)^* = \wedge_{i\in J} a_i^*$ y $(\wedge_{i\in J} a_i)^* = \vee_{i\in J} a_i^*$*

DEMOSTRACIÓN:

Usar que ϕ preserva supremos e ínfimos de L en supremos e ínfimos de L^{op}. $\square$

Un morfismo de álgebras Booleanas manda, por definición, complementos en complementos, sin embargo

Lema 7.20. *Si B álgebra Booleana L reticula y $f : B \to L$, morfismo de retícula, entonces para todo $a \in B$, tenemos que $f(a^*) = f(a)^*$.*

DEMOSTRACIÓN:

Como f preserva ínfimos y supremos de conjuntos finitos entonces $f(0_B) = 0_L$ y $f(1_B) = 1_L$, además $f[B]$ es una retícula distributiva. Sea $f(a^*) \vee 1_L = f(a^*) \vee$

$f(1_B) = f(a^* \vee 1_B) = f(1_B) = 1_L$ y también, $f(a^*) \vee 1_L = f(a^* \vee 1_B) = f(1_B) = 1_L$, por el Teorema 5.8, $f(a^*) = f(a)^*$. $\square$

Ahora, veamos como son los filtros en una álgebra Booleana.

Teorema 7.21. *Sea L una álgebra Booleana. Si $F \subseteq L$ filtro. Entonces son equivalentes*

1. *F es maximal.*
2. *F es primo.*
3. *Para todo $a \in L$,$a \in F$ o $a^* \in F$.*

DEMOSTRACIÓN:

1.$\Rightarrow$ 2. Sea F maximal, entonces F es propio, existe $a \in L \setminus F$ y supongamos que existe $b \in L$ tal que $a \vee b \in F$, sea $G = \{x \in L : x \vee b \in F\}$, es claro que $F \subseteq G$, y además como $a \vee b \in F$, entonces $a \in G \setminus F$. Entonces G no es propio, es decir $G = L$, luego $0 \in G$, es decir $b = 0 \vee b \in F$, luego $b \in F$. Por tanto F es primo.

2.$\Rightarrow$3. Sea $a \in L$, como $a \vee a^* = 1 \in F$, entonces $a \in F$ o $a^* \in F$.

3.$\Rightarrow$1. Sea G filtro tal que $F \subseteq G$, si $a \in G \setminus F$, entonces $a^* \in F$, luego $a, a^* \in G$, por tanto $a \wedge a^* = 0 \in G$, luego $G = L$, por tanto F es maximal. $\square$

Ahora, podemos completar una $\wedge$-semiretícula de Heyting hasta una álgebra Booleana. Observemos que si L es $\wedge$-semiretícula de Heyting, , por el Teorema 7.11, L es ditributiva y además tiene complementos

Definición 7.22. *Sea L una $\wedge$-semiretícula de Heyting, definimos $\mathcal{BL}(L) = \{a \in L : a^{**} = a\} \subseteq L$*

Proposición 7.23. *Sea L una $\wedge$-semiretícula de Heyting, entonces $\mathcal{BL}(L)$ es un álgebra booleana con supremo de $a, b \in \mathcal{BL}(L)$ definido como $a \vee' b = (a^* \wedge b^*)^*$*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{BL}(L)$ con el mismo orden que L y para $a, b \in \mathcal{BL}(L)$ $a \wedge' b = a \wedge b$, pero $a \vee' b = (a^* \wedge b^*)^*$. Veamos que $\vee'$ es un supremo para conjuntos finitos en $\mathcal{BL}(L)$.

Sean $a, b \in \mathcal{BL}(L)$, veamos que $(a^* \wedge b^*)^*$ es cota superior de $\{a, b\}$. Sea $x \in \{a, b\}$, entonces $x \wedge (a^* \wedge b^*) = 0$, ya que si $x = a$, entonces $x \wedge a^* = 0$, luego $x \wedge (a^* \wedge b^*) = 0$, de igual manera si $x = b$, luego $x \leq (a^* \wedge b^*)^*$, luego $(a^* \wedge b^*)^*$ es cota superior de $\{a, b\}$. Ahora, sea $c \in \mathcal{BL}(L)$ tal que c es cota superior de $\{a, b\}$, entonces $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $c^* \leq a^*$ y $c^* \leq b^*$, ver Lema 7.3. Luego $c^* \leq a^* \wedge b^*$, por Lema 7.3, tenemos que $(a^* \wedge b^*)^* \leq c^{**} = c$. Como para $a, b \in \mathcal{BL}(L)$, se cumple, ver Lema 7.3, que $(a \wedge b)^{**} = (a^{**} \wedge b^{**})^* = a \wedge b$, entonces $a \wedge b \in \mathcal{BL}(L)$. Además si $a \in \mathcal{BL}(L)$, entonces $a^* \in \mathcal{BL}(L)$, ya que $a^{***} = a^*$, entonces $(a^* \wedge b^*)^* \in \mathcal{BL}(L)$, cuando $a, b \in \mathcal{BL}(L)$, luego $\_ \vee' \_$ es un supremo en $\mathcal{BL}(L)$.

Ahora veamos que si $a, b \in \mathcal{BL}(L)$, entonces $a \to b \in \mathcal{BL}(L)$, ver Lema 7.9 , pero $a \to b = a \to b^{**} = a \to ((b \to 0)^* = a \to ((b \to 0) \to 0)$, ya que $b \to 0 = b^*$, luego, ver , Teorema 7.11, 3., $a \to b = (a \wedge (b \to 0)) \to 0 = (a \wedge b^*)^*$, pero por los comentarios anteriores tenemos que $a \to b \in \mathcal{BL}(L)$. O sea que $\mathcal{BL}(L)$ es álgebra de Heyting tambien luego es distributiva. Sólo resta demostrar que para $a \in \mathcal{BL}(L)$ se cumple que $a \vee' a^* = 1_{\mathcal{BL}}$. pero $a \vee' a^* = (a^* \wedge a^{**})^* = 0^* = 1_L$, solo resta demostrar que $1_{\mathcal{BL}(L)} = 1_L$, es suficiente demostrar que $1_L \in \mathcal{BL}(L)$. Pero $(1_L^*)^* = 0_L^* = 1_L$. $\square$

Finalizamos esta sección con las siguientes propiedades en las álgebras de Heyting:

Lema 7.24. *Si L es una álgebra de Hayting, son equivalentes:*

1. *Para todo $a, b \in L$, $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$.*
2. *Para todo $a \in L$, $(a^* \vee a^{**}) = 1$.*
3. *Para todo $a \in \mathcal{BL}(L)$, tiene complemento en L.*
4. *Para todo $a, b \in L$, $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$.*
5. *$\mathcal{BL}(L)$ es subretícula de L*

DEMOSTRACIÓN: 1.⇒2.Sean $a, b \in L$, evaluemos $(a^* \vee a^{**}) = (a \wedge a^*)^* = 0^* = 1$.

2.⇒3. Sea $a \in \mathcal{BL}(L)$, entonces $a^{**} = a$, demostremos que a^* es complemento de a, pero sólo resta demostrar que:$(a \vee a^*) = 1$, pero $a^{**} = a$, luego $a \vee a^* = a^{**} \vee a^* = 1$.

3.⇒4. Sabemos que $(a \vee b)^{**} = (a^* \wedge b^*)^*$, veamos que $(a^* \wedge b^*)^* = a^{**} \vee b^{**}$, pero $(a^* \wedge b^*)^* = a^{**} \vee b^{**}$ es el complemento de $a^* \wedge b^*$, luego $a^* \wedge b^* \wedge (a^{**} \vee b^{**}) = 0$. Además $a^* \vee a^{**} = 1 = b^* \vee b^{**}$, sea $x \in L$, tal que $x \wedge (a^* \wedge b^*) = 0$, entonces $a^{**} \vee b^{**} = (a^{**} \vee b^{**}) \vee (x \wedge (a^* \wedge b^*)) = [(a^{**} \vee b^{**}) \vee x] \wedge [(a^{**} \vee b^{**}) \wedge ((a^* \wedge b^*)] = [(a^{**} \vee b^{**}) \vee x] \wedge [(a^{**} \vee b^{**}) \vee (a^* \wedge b^*)] = [(a^{**} \vee b^{**}) \vee x] \wedge [a^{**} \vee (b^{**} \vee a^*] \wedge [a^{**} \vee b^{**} \vee b^*] = [(a^{**} \vee b^{**}) \vee x] \wedge [(1 \vee b^*)] \wedge [1 \vee a^*] = [(a^{**} \vee b^{**}) \vee x] \wedge [1 \wedge 1] = (a^{**} \vee b^{**}) \vee x$, luego $x \leq a^{**} \vee b^{**}$ y como $a^* \wedge b^* \wedge (a^{**} \vee b^{**}) = 0$, tenemos que $(a^* \wedge b^*)^* = a^{**} \vee b^{**}$.

4.⇒5.

Sean $a, b \in \mathcal{BL}(L)$, veamos que $a \vee b, a \wedge b \in \mathcal{BL}(L)$. Luego $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**} = a \vee b$, luego $a \vee b \in \mathcal{BL}(L)$. Pero, ver Teorema 7.3, 3., $(a \wedge b)^{**} = (a^{**} \wedge b^{**}) = a \wedge b$, luego $a \wedge b \in \mathcal{BL}(L)$.

5.⇒1.

Sean $a, b \in L$, entonces, por lo anterior $a^* \vee b^* \mathcal{BL}(L)$, luego $(a^* \vee b^*)^{**} = (a^* \vee b^*)$, pero $(a^* \vee b^*)^{**} = (a^{**} \wedge b^{**})^* = ((a \wedge b)^{**})^* = (a \wedge b)^{***} = (a \wedge b)^*$. □

8. Marcos, locales y subobjetos

Definición 8.1. *1. Si L es una retícula completa y para todo $A \subseteq L$ y $a \in L$, entonces $a \wedge (\vee A) = \vee_{b \in A}(a \wedge b)$, diremos que L es un marco. Sean L, M marcos, decimos que una función $h : L \to M$ es un morfismo de marcos si h preserva supremos arbitrarios e ínfimos finitos, y como consecuencia $h(0_L) = 0_M$ y $h(1_L) = 1_M$. Los marcos y sus morfismos forman una categoría que denotaremos* **Mar**. *A la categoría opuesta la denotaremos por* **Loc** *y a sus objetos los llamaremos locales, claramente los locales son marcos.*

Veamos algunas propiedades de la categoría **Mar**.

Lema 8.2. *$h : L \to M$ es monomorfismo de marcos si y sólo si h es un morfismo inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Es claro que un morfismo de marcos inyectivo es monomorfismo. Supongamos que h es monomorfismo, pero h no es un morfismo inyectivo. Entonces existen $l_1, l_2 \in L$ tales que $l_1 \neq l_2$, pero $h(l_1) = h(l_2)$. Ahora consideremos a el marco $\mathbf{3} = \{0, a, 1\}$; la cadena de $\mathbf{3}$ elementos. Definamos $f : 3 \to L$, como $f(0) = 0, f(1) = 1$ y $f(a) = l_1$ y sea $g : 3 \to L$, definido como $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y $g(a) = l_2$, es claro que f y g son morfismos de marcos y que $hf = hg$, pero $h \neq g$. Luego f no es monomorfismo. □

Ahora veamos la siguiente propiedad:

Lema 8.3. *Sea $f : L \to M$ un morfismo de marcos, entonces: $f[L]$ es un submarco de M, es decir, $0_M, 1_M \in f[L]$ y es cerrado respecto a supremos arbitrarios e ínfimos finitos y además $f = ig$, donde $i : f[L] \to M$ y $g : L \to f[L]$ definida como $g(x) = f(x)$ son morfismos de marcos.*

Demostración: Sea $A \subseteq f[L]$, es decir, $A = \{f(x_i) : x_i \in L, i \in J\}$, como f es morfismo de marcos, entonces $\vee A = \vee\{f(x_i) : x_i \in L, i \in J\} = f(\vee\{x_i : x_i \in L, i \in J\}) \in f[L]$, de manera análoga, tenemos que $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) \in f[L]$. Como $f(0_L) = 0_M \in f[L]$ y $f(1_L) = 1_M \in f[L]$, entonces $f[L]$ es submarco de M. Por último, es claro que tanto i como g son morfismos de marcos. □

Recordemos que un monomorfismo es extremo si cada que se factoriza a través de un epimorfismo y otro morfismo, entonces el epimorfismo es isomorfismo. Dualmente, un epimorfismo es extremo si cada que se factoriza a través de un morfismo seguido de un monomorfismo, entonces el monomorfismo es isomorfismo.

Lema 8.4. *Los epimorfismos extremos en marcos son los morfismos sobreyectivos de marcos.*

Demostración: Sea $f : L \to M$ un morfismo sobreyectivo. Es claro que es epimorfismo. Veamos que es extremo: Si $f = mg$ y m es monomorfismo, como m es inyectivo y además es sobreyectivo ya que f es sobreyectivo, entonces m es biyectivo, entonces existe la función m^{-1}, que claramente es morfismo de marcos. Por lo que m es un isomorfismo de marcos.

Ahora supongamos que f es epimorfismo extremo pero no es sobreyectivo. Como $f = ig$, según el Lema 8.3, donde i es monomorfismo pero no es isomorfismo ya que no es sobreyectiva, ya que f no lo es. □

Definición 8.5. *Decimos que una función entre marcos $f : M \to L$ es locálico si preserva ínfimos arbitrarios su única adjunta izquierda es un morfismo de marcos.*

Recordemos que si tenemos un morfismo de marcos $f : L \to M$, entonces f es adjunta izquierda de alguna función $g : M \to L$ que preserva ínfimos. Dicha función g la denotaremos por f_*. Recordemos también tenemos que si $f : L \to M$ es una función que preserva ínfimos arbitrarios, entonces existe una función monótona $h : M \to L$ que es adjunta izquierda de f, a dicha la función la denotaremos por f^*.

Teorema 8.6. *Los monomorfismos extremos en* **Loc** *se corresponden con los morfismos locálicos inyectivos.*

Demostración: Ya sabemos que un monomorfismo extremo en **Loc** es precísamente un epimorfismo extremo de marcos que a su vez es equivalente a un morfismo suprayectivo de marcos. Así, si $f : L \to M$ es un morfismo suprayectivo de marcos, entonces su adjunta derecha f_* preserva ínfimos. Además se satisface la siguiente igualdad: $ff_*f = f$, y como f es epimorfismo, tenemos que $ff_* = 1$, luego f_* es un morfismo locálico que además es inyectivo.

Por otro lado, si $g : M \to L$ es un morfismo locálico inyectivo entre dos marcos, entonces su adjunta izquierda g^* es un morfismo de marcos. Como g y g^* son adjuntas tenemos la siguiente ecuación: $gg^*g = g$, por lo que $g^*g = 1$ ya que g es monomorfismo. Así, g^* es suprayectivo. □

Corolario 8.7. *Si $f : M \to L$ es un epimorfismo locálico inyectivo, entonces f se corresponde con un isomorfismo en* **Loc**.

Demostración: Por hipótesis $f : M \to L$ es una función entre marcos que preserva ínfimos y cuya adjunta izquierda $f^* : L \to M$ es un morfismo de marcos. Usando el mismo argumento que en la demostración del teorema anterior, tenemos que f^* es suprayectivo. Además como $ff^*f = f$ y f es epimorfismo por hipótesis, entonces $ff^* = 1$, lo que implica que f^* es inyectiva, consecuentemente un isomorfismo en **Mar**, luego $(f^*)^{op} : M \to L$ es un isomorfismo en **Loc**. □

Lema 8.8. *Sea $f : L \to M$ un morfismo de marcos, entonces f_* preserva ínfimos finitos si y sólo si $f(a \to f_*(b)) = f(a) \to b$ para todo $a \in M$, para todo $b \in L$.*

Demostración: Supongamos que f_* preserva ínfimos finitos. Sea $x \in M$, entonces $f(a \to f_*(b)) \leq x$ si y sólo si $a \to f_*(b) \leq f_*(x)$ si y sólo si $a \leq f_*(b) \wedge f_*(x)$ si y sólo si $a \leq f_*(b \wedge x)$ si y sólo si $f(a) \leq b \wedge x$ si y sólo si $f(a) \to b \leq x$. Por lo tanto $f(a \to f_*(b)) = f(a) \to b$.

Ahora, si $x \in L$, entonces $x \leq f_*(b) \wedge f_*(b')$ si y sólo si $x \to f_*(b) \leq f_*(b')$ si y sólo si $f(x \to f_*(b)) \leq b'$ si y sólo si $f(x) \to b \leq b'$ si y sólo si $f(x) \leq b \wedge b'$ si y sólo si $x \leq f_*(b \wedge b')$. Por lo tanto f_* preserva ínfimos finitos. □

Lema 8.9. *Sea $f : L \to M$ una función entre marcos que preserva ínfimos. Entonces f^* preserva límites finitos si y sólo si $f(f^*(a) \to b) = a \to f(b)$ para $a \in M$ y $b \in L$.*

Demostración: Es análoga a la demostración del lema anterior. □

Lema 8.10. *Sean L un local y $S \subseteq L$, si $i : S \to L$ la inclusión es locálica, entonces para toda $a \in L$ y $s \in S$, se tiene que $a \to s \in S$.*

Demostración:

Como la inclusión es locálica, entonces S es marco y por tanto un álgebra de Heyting y además es cerrado bajo ínfimos. Además existe $i^* : L \to S$ morfismo de marcos con i^* adjunta izquierda de i, en particular, i^* preserva ínfimos finitos, luego por el lema anterior $i(i^*(a) \to s) = a \to i(s)$, pero $a \to i(s) = a \to s$ y $i(i^*(a) \to s) \in S$, luego $a \to s \in S$ para todo $a \in L$ y $s \in S$. □

Por último veamos la siguiente equivalencia:

Teorema 8.11. *Sea L un marco $S \subseteq L$, S es sublocal si y sólo si la inclusión $i : S \to L$ es un morfismo locálico.*

Demostración: Sabemos por hipótesis que S es un álgebra de Heyting completa, y por lo tanto un marco que desde luego es cerrado bajo ínfimos, por lo que la iclusión preserva ínfimos, luego existe una adjunta izquierda $i^* : L \to S$ que preserva supremos. Por lo que basta demostrar que preserva ínfimos finitos: Sean $a, b \in L$ y $s \in S$, entonces $i^*(a) \wedge i^*(b) \leq s$ si y sólo si $i^*(a) \leq i^*(b) \to s$ si y sólo si $a \leq i(i^*(b) \to s)$, como $i^*(b) \to s \in S$, entonces $i(i^*(b) \to s) = i^*(b) \to s$, luego $i^*(a) \wedge i^*(b) \leq s$ si y sólo si $a \leq i^*(b) \to s$ si y sólo si $a \wedge i^*(b) \leq s$ si y sólo si $i^*(b) \wedge a \leq s$ si y sólo si $i^*(b) \leq a \to s$ si y sólo si $b \leq i(a \to s) = a \to s$ si y sólo si $b \wedge a \leq s = i(s)$ si y sólo si $i^*(a \wedge b) \leq s$, y de ahí se concluye que $i^*(a) \wedge i^*(b) = i^*(a \wedge b)$. Por tanto i es locálico.

El regreso del teorema es el lema anterior. □

9. Conclusiones

Con este trabajo se sientan las bases para estudiar los subobjetos de un local, esperemos una segunda parte para ofrecer esta continuación.

Bibliografía

[1] Mac Lane, S., Moerdijk I.,*Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos.*, primera edición, Springer, New York, 1992.

[2] Jorge Picado, Ales Pultr,*Frames and locales, Topology without points*, Birkhäuser, 2011.

Correos electrónicos:
jangoa@fcfm.buap.mx (Juan Angoa-Amador),
acontri@fcfm.buap.mx.utm.mx (Agustín Contreras -Carreto).
vilchis.f@gmail.com (Ivan Fernando Vilchis-Montalvo)

CAPÍTULO 11

Semigrupos y categorías algebraicas

Luis Antonio Huerta-Sánchez, Carlos Alberto López-Andrade,
Ivan Fernando Vilchis-Montalvo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En el presente manuscrito se combina la Teoría de Categorías con la Teoría de Semigrupos. Más precisamente, se consideran a todos los semigrupos como una categoría, que será denotada por $\mathcal{SGRP}$, y entonces se estudian algunas propiedades de esta. En concreto, se caracterizan a sus epimorfismos regulares y se establece que en $\mathcal{SGRP}$ todo par de morfismos tiene un co-igualador. Finalmente, se determina si $\mathcal{SGRP}$, como categoría concreta sobre $\mathcal{SET}$, es o no una categoría algebraica.

2. Categorías

Se presupone que el lector conoce el concepto de categoría, diagrama conmutativo y funtor. A partir de eso, y con el fin de hacer de este escrito lo más autocontenido posible, en la presente sección se introducen las definiciones y resultados categóricos que serán esenciales en la parte principal del trabajo. Sobre la notación, en todo el texto $Ob(\mathcal{A})$ y $Mor(\mathcal{A})$ denotarán, respectivamente, las clases de objetos y morfismos de una categoría dada $\mathcal{A}$ y $Hom(A, B)$ denotará la colección de todos los morfismos de A en B. Finalmente, y en aras de no extender en demasía el manuscrito, esta sección se limita sólo a enunciar las definiciones y establecer los resultados importantes sin hacer comentarios sobre ellos. Para más información sobre Teoría de Categorías, el lector interesado puede consultar [**1**].

2.1. Morfismos.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Se dice que el $\mathcal{A}-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es:*

(1) ***sección*** *si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$.*
(2) ***retracción*** *si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = id_B$.*
(3) ***isomorfismo*** *si f es sección y retracción. Además, se dice que A y B son* ***isomorfos****, y se escribe $A \cong B$, si existe un isomorfismo de A en B.*

(4) ***monomorfismo*** *si para cada par de morfismos* $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} A$ *,* $f \circ \alpha = f \circ \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$.

(5) ***epimorfismo*** *si para cada par de morfismos* $B \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$ *,* $\alpha \circ f = \beta \circ f \Longrightarrow \alpha = \beta$.

Se denotará a la clase de todos los epimorfismos (monomorfismos) de $\mathcal{A}$ *por* $\mathcal{EPI}$ *(*$\mathcal{MONO}$*).*

Lema 2.2. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo de una categoría dada* $\mathcal{A}$*. Si* f *es a la vez un monomorfismo y una retracción, entonces* f *debe ser un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que f es retracción, existe un morfismo $B \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g = id_B$. De esta igualdad y asociando convenientemente se sigue que $f \circ (g \circ f) = f \circ id_A$, pero al ser f un monomorfismo se implica que $g \circ f = id_A$. Así f es sección y por consiguiente un isomorfismo. □

Definición 2.3. *Suponga que* $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ *son dos morfismos en una categoría* $\mathcal{A}$*. Un* ***co-igualador*** *para los morfismos* α *y* β *es un* $\mathcal{A}-$*morfismo* $\eta : B \longrightarrow C$ *con las siguientes propiedades:*

(1) El diagrama $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta} C$ *conmuta i,e,* $\eta \circ \alpha = \eta \circ \beta$.

(2) Para cada morfismo $f : B \longrightarrow C'$ *que haga conmutativo al diagrama* $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{f} C'$ *existe un único morfismo* $F : C \longrightarrow C'$ *que hace conmutativo al siguiente triángulo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "F"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Definición 2.4. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría. Decimos que el* $\mathcal{A}-$*morfismo* $\eta : B \longrightarrow C$ *es un* ***epimorfismo regular*** *si* η *es co-igualador de algún par de morfismos. Denotamos a la clase de todos los epimorfismos regulares de* $\mathcal{A}$ *por* $\mathcal{EPI} - \mathcal{REG}$.

Proposición 2.5. *En cualquier categoría,* $\mathcal{EPI} - \mathcal{REG} \subseteq \mathcal{EPI}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\eta : B \longrightarrow C$ un epimorfismo regular de la categoría $\mathcal{A}$. Luego, η es co-igualador de algún par de morfismos, digamos $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$. Es preciso mostrar que η es un epimorfismo. Para ello, supóngase que el diagrama $B \xrightarrow{\eta} C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$ es conmutativo. A partir de esto mostraremos que $f = g$. Veamos que el diagrama

$A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{f\circ\eta} D$ conmuta i,e, que $(f\circ\eta)\circ\alpha = (f\circ\eta)\circ\beta$, al ser η co-igualador de α y β se sigue que el diagrama $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta} C$ debe ser conmutativo, o lo que es lo mismo $\eta\circ\alpha = \eta\circ\beta$. De ahí que $(f\circ\eta)\circ\alpha = (f\circ\eta)\circ\beta$. Como η es co-igualador de α y β se sigue que existe un único morfismo $F : C \longrightarrow D$ que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f\circ\eta"'] & & C \arrow[dl, "F"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Por otra parte, está claro que el triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f\circ\eta"'] & & C \arrow[dl, "f"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, de que el diagrama $B \xrightarrow{\eta} C \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} D$ conmute (por hipótesis), se sigue que el triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "f\circ\eta"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así que de la unicidad de F podemos concluir que $f = F = g$. Por consiguiente η es cancelable por la derecha i,e, η es un epimorfismo. $\square$

Corolario 2.6. *Si* $\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta_2"'] & C_1 \\ C_2 & \end{tikzcd}$ *son co-igualadores de* $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$, *entonces* $C_1 \cong C_2$.

Demostración:

De que $\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta_2"'] & C_1 \\ C_2 & \end{tikzcd}$ sean co-igualadores de $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$ se sigue que

$$A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta_1} C_1 \quad \text{y} \quad A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta_2} C_2$$

son diagramas conmutativos. Por lo tanto debe existir un par de morfismos $f : C_1 \longrightarrow C_2$ y $g : C_2 \longrightarrow C_1$ que hacen conmutar a los siguientes triángulos:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & & C_1 \arrow[dl, "f"] \\ & C_2 & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta_2"] \arrow[dr, "\eta_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "g"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

De ahí que $\eta_2 = f \circ \eta_1$ y $\eta_1 = g \circ \eta_2$ y en consecuencia $\eta_2 = (f \circ g) \circ \eta_2$ y $\eta_1 = (g \circ f) \circ \eta_1$. Ahora bien, puesto que $id_{C_2} \circ \eta_2 = \eta_2$, entonces $id_{C_2} \circ \eta_2 = (f \circ g) \circ \eta_2$, y al ser η_2 un epimorfismo (esto se sigue de la Proposición 2.5) se deduce que $f \circ g = id_{C_2}$. De manera similar se exhibe que $g \circ f = id_{C_1}$. Por consiguiente $f : C_1 \longrightarrow C_2$ es un isomorfismo y así $C_1 \cong C_2$. □

Definición 2.7. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Decimos que el $\mathcal{A}-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un* ***epimorfismo extremal*** *si se verifican las siguientes condiciones:*

(1) f es un epimorfismo.

(2) Para cada par de morfismos $A \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m} B$:

$$\text{Si } f = m \circ e \text{ y } m \text{ es monomorfismo} \Longrightarrow m \text{ es isomorfismo.}$$

Denotamos a la clase de todos los epimorfismos extremales de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{EPI} - \mathcal{EXT}$.

Observación 2.8. *Por definición, $\mathcal{EPI} - \mathcal{EXT} \subseteq \mathcal{EPI}$.*

Proposición 2.9. *En cualquier categoría, $\mathcal{EPI} - \mathcal{REG} \subseteq \mathcal{EPI} - \mathcal{EXT}$.*

Demostración:

Suponga que $\eta : B \longrightarrow C$ es un epimorfismo regular de la categoría $\mathcal{A}$. Entonces η es co-igualador de algún par de morfismos, digamos $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$. De la Proposición 2.5 se sigue que η es un epimorfismo. Ahora bien, sean $B \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m} C$ un par de morfismos tales que $\eta = m \circ e$ con m un monomorfismo. Puesto que η es co-igualador de α y β se tiene entonces que el diagrama $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta} C$ conmuta i,e, $\eta \circ \alpha = \eta \circ \beta$, pero $\eta = m \circ e$, luego $(m \circ e) \circ \alpha = (m \circ e) \circ \beta$ y por consiguiente $m \circ (e \circ \alpha) = m \circ (e \circ \beta)$. Como m es un monomorfismo se deduce que $e \circ \alpha = e \circ \beta$ y por lo tanto el diagrama $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{e} X$ conmuta. De esto último y de que η es co-igualador de α y β se implica que existe un único morfismo $\bar{m} : C \longrightarrow X$ que hace conmutativo al siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "e"'] & & C \arrow[dl, "\bar{m}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

o lo que es lo mismo, $e = \bar{m} \circ \eta$. De esta identidad se sigue que $m \circ e = m \circ (\bar{m} \circ \eta)$ y en consecuencia $\eta = (m \circ \bar{m}) \circ \eta$. De esta última igualdad, aunado a que $\eta = id_C \circ \eta$ y de que η sea un epimorfismo se deduce que $m \circ \bar{m} = id_C$. Tenemos así que m es un monomorfismo que es retracción y por consiguiente del Lema 2.2 se sigue que m debe ser un isomorfismo. □

2.2. Fuentes.

Definición 2.10. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Una $\mathcal{A}-$**fuente** es una familia indexada (por una clase) de morfismos de $\mathcal{A}$ con un dominio común i,e, una familia de la forma $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$ con I una clase. Convenimos que dos fuentes $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$ y $\mathcal{G} = \{ A \xrightarrow{g_i} A_i \}_{i\in I}$ serán iguales si y solo si para cada $i \in I$, $f_i = g_i$.*

Si $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$ es una fuente, entonces a partir de un morfismo $g : X \longrightarrow A$ puede definirse una nueva fuente, a saber[1]

$$\mathcal{F} \circ g := \{ X \xrightarrow{f_i \circ g} A_i \}_{i\in I}$$

Se demuestra sin dificultad y a partir de la igualdad entre fuentes que para cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} A$ y cualquier fuente $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$, $(\mathcal{F} \circ g) \circ f = \mathcal{F} \circ (g \circ f)$.

Definición 2.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Una **mono-fuente** es una fuente $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$ con la siguiente propiedad:*

Para cada par de morfismos $X \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$, $\mathcal{F} \circ \alpha = \mathcal{F} \circ \beta \Longrightarrow \alpha = \beta.$

Proposición 2.12. *Si $\mathcal{F} = \{ A \xrightarrow{f_i} A_i \}_{i\in I}$ es una mono-fuente y $g : X \longrightarrow A$ es un monomorfismo, entonces $\mathcal{F} \circ g$ es una mono-fuente.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean $Y \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X$ un par de morfismos tales que $(\mathcal{F}\circ g)\circ\alpha = (\mathcal{F}\circ g)\circ\beta$. Entonces $\mathcal{F}\circ(g\circ\alpha) = \mathcal{F}\circ(g\circ\beta)$, y al ser $\mathcal{F}$ una mono-fuente se sigue que $g\circ\alpha = g\circ\beta$. De esto último y de que g sea un monomorfismo se obtiene que $\alpha = \beta$. Por consiguiente $\mathcal{F} \circ g$ es una mono-fuente. $\square$

Definición 2.13. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría, $E \subseteq Mor(\mathcal{A})$ y $\mathscr{M}$ una colección de $\mathcal{A}-$fuentes. Se dice que $\mathcal{A}$ es $(E, \mathscr{M})-$**factorizable** (en fuentes) si para cada fuente $\mathcal{F}$ existe $e \in E$ y $\mathcal{M} \in \mathscr{M}$ tales que $\mathcal{F} = \mathcal{M} \circ e$.*

2.3. Funtores.

Definición 2.14. *Se dice que el funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es **fiel** si para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ la función $\theta_{X,Y} : Hom(X, Y) \longrightarrow Hom(F(X), F(Y))$ dada por $\theta_{X,Y}(f) := F(f)$ es inyectiva.*

[1] Observe que se ha usado el símbolo $\circ$ para denotar a la composición entre una fuente y un morfismo y la composición entre dos morfismos de una categoría, sin embargo, a pesar de este abuso de notación, debe ser claro en qué contexto es utilizado.

Definición 2.15. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor y $B \in Ob(\mathcal{B})$.*

*(1) Un **morfismo** $F-$**estructurado** con dominio B es un $\mathcal{B}-$morfismo $f : B \longrightarrow F(A)$ con $A \in Ob(\mathcal{A})$.*

*(2) Un **generador** es un morfismo $F-$estructurado $f : B \longrightarrow F(A)$ con la siguiente propiedad: para cada par de $\mathcal{A}-$morfismos $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} A'$, $F(\alpha) \circ f = F(\beta) \circ f \Longrightarrow \alpha = \beta$.*

*(3) Un **morfismo** $F-$**universal con dominio** B,[2] es un morfismo $F-$estructurado $\iota : B \longrightarrow F(A)$ con la siguiente propiedad: para cada morfismo $F-$estructurado $f : B \longrightarrow F(A')$ existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $\bar{f} : A \longrightarrow A'$ que hace conmutativo al siguiente triángulo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & & F(A') \\ & F(A) \arrow[ur, "F(\bar{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.16. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor y $B \in Ob(\mathcal{B})$. Si $\iota : B \longrightarrow F(A)$ y $\eta : B \longrightarrow F(A')$ son morfismos $F-$universales con dominio B entonces $A \cong A'$.*

Demostración:

Como ι y η son morfismos $F-$universales se sigue que existen $\mathcal{A}-$morfismos (que además deben ser únicos) $\phi : A' \to A$ y $\psi : A \to A'$ que hacen conmutativos a los siguientes triángulos

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\eta"'] & & F(A) \\ & F(A') \arrow[ur, "F(\phi)"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\iota"'] & & F(A') \\ & F(A) \arrow[ur, "F(\psi)"'] & \end{tikzcd}$$

O lo que es lo mismo, $F(\phi) \circ \eta = \iota$ y $F(\psi) \circ \iota = \eta$. De estas igualdades y de que F sea un funtor se desprende que $F(\phi \circ \psi) \circ \iota = \iota$ y $F(\psi \circ \phi) \circ \eta = \eta$, de ahí que el siguiente par de triángulos es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & F(A) \\ & F(A) \arrow[ur, "F(\phi \circ \psi)"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & F(A') \\ & F(A') \arrow[ur, "F(\psi \circ \phi)"'] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, está claro que los triángulos

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & F(A) \\ & F(A) \arrow[ur, "id_{F(A)} = F(id_A)"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & F(A') \\ & F(A') \arrow[ur, "id_{F(A')} = F(id_{A'})"'] & \end{tikzcd}$$

también son conmutativos. Así que de las hipótesis de unicidad debe ocurrir que $\phi \circ \psi = id_A$ y $\psi \circ \phi = id_{A'}$. Por consiguiente $\psi : A \to A'$ es un $\mathcal{A}-$isomorfismo y con ello $A \cong A'$. $\square$

[2] También puede llamarseles *morfismos universales $F-$estructurados con dominio B.*

Definición 2.17. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría, se dice que $A_0 \in Ob(\mathcal{A})$ es un **objeto inicial** si para cada $X \in Ob(\mathcal{A})$, $Hom(A_0, X)$ consta de exactamente un elemento.*

No es difícil verificar que cualesquiera dos objetos iniciales deben ser isomorfos. En relación al concepto de morfismo $F-$universal con respecto a un funtor se tiene lo siguiente.

Proposición 2.18. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{SET}$ un funtor ($\mathcal{SET}$ denota a la categoría de conjuntos). Si $\iota : \emptyset \longrightarrow F(A)$ es un morfismo $F-$universal con dominio $\emptyset$, entonces A es un objeto inicial de $\mathcal{A}$.*

Demostración:
Recordar que los morfismos de $\mathcal{SET}$ son las funciones entre conjuntos. Así que $\iota : \emptyset \longrightarrow F(A)$ debe ser una función con dominio $\emptyset$ y por consiguiente $\iota = \emptyset$ i,e, ι ha de ser la función vacía. Sea $X \in Ob(\mathcal{A})$ arbitrario. Puesto que ι es $F-$universal, entonces existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $f : A \longrightarrow X$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[rr, "\emptyset"] \arrow[dr, "\emptyset"'] & & F(X) \\
& F(A) \arrow[ur, "F(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular, $f \in Hom(A, X)$. Por otro lado, está claro que para cualquier $g \in Hom(A, X)$ se tiene que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[rr, "\emptyset"] \arrow[dr, "\emptyset"'] & & F(X) \\
& F(A) \arrow[ur, "F(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Apartir de esto y de la unicidad de f se deduce que $Hom(A, X) = \{f\}$. Por consiguiente A es un objeto inicial de $\mathcal{A}$. $\square$

Definición 2.19. *Se dice que el funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$*

*(1) es **adjunto** si para cada $B \in Ob(\mathcal{B})$ existe (al menos) un morfismo $F-$universal con dominio B.*
*(2) **crea isomorfismos** si para cada $\mathcal{B}-$isomorfismo $F-$estructurado $f : B \longrightarrow F(A')$ existe un único $\mathcal{A}-$isomorfismo $\bar{f} : A \longrightarrow A'$ tal que $f = F(\bar{f})$.*

Corolario 2.20. *Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{SET}$ es adjunto, entonces $\mathcal{A}$ tiene objeto inicial.*

Demostración: Directa de la Definición 2.19 y de la Proposición 2.18. $\square$

Definición 2.21. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor.*

*(1) Una **fuente F-estructurada** es una $\mathcal{B}-$fuente de la forma*
$\mathcal{S} = \{\ B \xrightarrow{f_i} F(A_i)\ \}_{i \in I}$ *siendo $(A_i)_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{A}$.*

(2) *Si E es una clase de morfismos $F-$estructurados (ver Definición 2.15) y $\mathscr{M}$ es una colección de $\mathcal{A}-$fuentes, se dice que F es $(E,\mathscr{M})-$**factorizable** si para cada fuente $F-$estructurada $\mathcal{S} = \{\ B \xrightarrow{f_i} F(A_i)\ \}_{i\in I}$ existe $B \xrightarrow{e} F(X)\ \in E$ y $\mathcal{T} = \{\ X \xrightarrow{m_i} A_i\ \}_{i\in I} \in \mathscr{M}$ tales que $\mathcal{S} = F(\mathcal{T})\circ e$, o lo que es lo mismo, tales que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & F(A_i) \\ & F(X) \arrow[ur, "F(m_i)"'] & \end{tikzcd}$$

2.4. Categorías algebraicas.

Definición 2.22. *Se dice que el funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es **esencialmente algebraico** si*

(1) *F crea isomorfismos (ver Definición 2.19).*
(2) *F es $(GEN, MF)-$factorizable, siendo GEN la clase de todos los morfismos $F-$estructurados que son generadores (ver Definición 2.15) y MF la clase de todas las $\mathcal{A}-$mono-fuentes (ver Definición 2.11).*

Definición 2.23. *Sea $\mathcal{B}$ una categoría.*

(1) *Una **categoría concreta sobre** $\mathcal{B}$ es un par $(\mathcal{A}, U)$, siendo $\mathcal{A}$ una categoría y $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor fiel (véase Definición 2.14). Al funtor U suele llamársele **funtor olvidadizo**.*
(2) *Una categoría concreta sobre $\mathcal{SET}$ es llamada **constructo**.*
(3) *La categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$, es **esencialmente algebraica** si el funtor olvidadizo U es esencialmente algebraico.*

Teorema 2.24. *Si la categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$, es esencialmente algebraica, entonces U es adjunto.*

Demostración: Sea $B \in Ob(\mathcal{B})$ arbitrario. Es preciso hallar un morfismo $U-$universal con dominio B. Como $(\mathcal{A}, U)$ es esencialmente algebraica, entonces el funtor olvidadizo U es esencialmente algebraico, i.e., crea isomorfismos y es $(GEN, MF)-$factorizable. Sea la fuente $U-$estructurada

$$\mathcal{S} := \{\ B \xrightarrow{f_A} U(A)\ \}_{A\in Ob(\mathcal{A})}$$

que consiste de todos los morfismos $U-$estructurados con dominio B. Puesto que U es $(GEN, MF)-$factorizable se sigue que para cada fuente, en particular $\mathcal{S}$, existe un generador $\eta : B \longrightarrow U(X)$ y una $\mathcal{A}-$mono-fuente $\mathcal{T} = \{\ X \xrightarrow{m_A} A\ \}_{A\in Ob(\mathcal{A})}$ tales que $\mathcal{S} = U(\mathcal{T}) \circ \eta$, i.e., para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f_A"] \arrow[dr, "\eta"'] & & U(A) \\ & U(X) \arrow[ur, "U(m_A)"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que η es un morfismo $U-$universal. Sea $f_A : B \longrightarrow U(A)$ cualquier morfismo $U-$estructurado con dominio B, entonces $f_A \in \mathcal{S}$, luego existe $m_A : X \longrightarrow A$ para algún $A \in Ob(\mathcal{A})$ tal que $f_A = U(m_A) \circ \eta$. Ahora bien, si $m : X \longrightarrow A$ es otro A-morfismo tal que $f_A = U(m) \circ \eta$, entonces $U(m_A) \circ \eta = U(m) \circ \eta$, de ahí que $U(m_A) = U(m)$, ya que η es generador, pero U es fiel, por consiguiente, $m_A = m$. Por lo tanto, η es un morfismo $U-$universal. □

Teorema 2.25. *Suponga que la categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$, satisface las siguientes condiciones:*

(1) U crea isomorfismos (ver Definición 2.19).
(2) U es adjunto (ver Definición 2.19).
(3) $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{EPI}, MF)-$factorizable (ver Definición 2.13).

Entonces $(\mathcal{A}, U)$ es esencialmente algebraica.

Demostración:

Sea $\mathcal{S} = \{\ B \xrightarrow{f_i} U(A_i)\ \}_{i\in I}$ cualquier fuente $U-$estructurada. Puesto que U es adjunto se tiene que existe (al menos) un morfismo $U-$universal con dominio B, digamos $\eta : B \longrightarrow U(X)$. De que η es $U-$universal se sigue que para cada $i \in I$ existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $g_i : X \longrightarrow A_i$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\eta"'] & & U(A_i) \\ & U(X) \arrow[ur, "U(g_i)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta i,e, $f_i = U(g_i) \circ \eta$. Considerar a la $\mathcal{A}-$fuente $\mathcal{T} := \{\ X \xrightarrow{g_i} A_i\ \}_{i\in I}$. Debido a que $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{EPI}, MF)-$factorizable se tiene que existe un $\mathcal{A}-$epimorfismo $\pi : X \longrightarrow Y$ y una $\mathcal{A}-$mono-fuente $\mathcal{M} = \{\ Y \xrightarrow{m_i} A_i\ \}_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A_i \\ & Y \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$

De esto último y de que U sea un funtor se deduce que para cada $i \in I$ el siguiente triángulo también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U(X) \arrow[rr, "U(g_i)"] \arrow[dr, "U(\pi)"'] & & U(A_i) \\ & U(Y) \arrow[ur, "U(m_i)"'] & \end{tikzcd}$$

o lo que es lo mismo, para cada $i \in I$, $U(g_i) = U(m_i) \circ U(\pi)$. Usando este hecho junto con que $f_i = U(g_i) \circ \eta$, se puede implicar que para cada $i \in I$, $f_i = U(m_i) \circ (U(\pi) \circ \eta)$ y por consiguiente $\mathcal{S} = U(\mathcal{M}) \circ (U(\pi) \circ \eta)$ donde $\mathcal{U}(\mathcal{M}) := \{\ U(Y) \xrightarrow{U(m_i)} U(A_i)\ \}_{i\in I}$. Veamos que $B \xrightarrow{U(\pi)\circ\eta} U(Y)$ es un generador:

sean $Y \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} Z$ un par de $\mathcal{A}-$morfismos tales que $U(\alpha)\circ(U(\pi)\circ\eta) = U(\beta)\circ(U(\pi)\circ\eta)$. De esto último y de que U es un funtor se sigue que el triángulo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "U(\alpha)\circ(U(\pi)\circ\eta)"] \arrow[dr, "\eta"'] & & U(Z) \\ & U(X) \arrow[ur, "U(\beta\circ\pi)"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por otra parte, está claro que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "U(\alpha)\circ(U(\pi)\circ\eta)"] \arrow[dr, "\eta"'] & & U(Z) \\ & U(X) \arrow[ur, "U(\alpha\circ\pi)"'] & \end{tikzcd}$$

también conmuta. Así, de que η sea un morfismo $U-$universal se sigue que $\alpha\circ\pi = \beta\circ\pi$, pero π es un epimorfismo, luego $\alpha = \beta$ y por consiguiente $U(\pi)\circ\eta$ es un generador. Podemos deducir de todo esto que U es $(GEN, MF)-$factorizable, concluyendo así que $(\mathcal{A}, U)$ es esencialmente algebraica. $\square$

Definición 2.26. *Se dice que la categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$, es* ***algebraica*** *si:*

(1) *$(\mathcal{A}, U)$ es esencialmente algebraica.*
(2) *El funtor olvidadizo U preserva epimorfismos extremales i,e, si para cada $f : X \longrightarrow Y$ epimorfismo extremal de $\mathcal{A}$ se implica que $U(f) : U(X) \longrightarrow U(Y)$ es epimorfismo extremal de $\mathcal{B}$.*

3. Semigrupos

Esta es la parte principal del escrito. Aquí, se aterrizarán todos los conceptos e ideas de la sección anterior sobre una categoría en particular, a saber, sobre la categoría $\mathcal{SGRP}$ que se define más adelante. Se empieza con el desarrollo de esta sección estudiando algunos conceptos importantes de la Teoría de Semigrupos. Sobre la notación: si A es un conjunto, $\mathcal{E}(A)$ denotará a la colección de todas las relaciones de equivalencia definidas sobre A, si $\rho \in \mathcal{E}(A)$ y $a \in A$, el símbolo $[a]_\rho$ denotará a la clase de equivalencia de a y $\frac{A}{\rho}$ denotará al conjunto cociente A sobre ρ. Además, se escribirá $a\rho b$ para indicar que $(a, b) \in \rho$. Para más información sobre Teoría de Semigrupos pueden consultarse las referencias [**2**] y [**3**].

3.1. Morfismos de semigrupos, congruencias y semigrupos cociente.

Definición 3.1. *Un* ***semigrupo*** *es un par $(S, *)$ donde S es un conjunto no vacío y $* : S \times S \longrightarrow S$ es una operación binaria asociativa i,e, tal que para cada $a, b, c \in S$, $a*(b*c) = (a*b)*c$. Si existe $e \in S$ tal que $a*e = a = e*a$ para cada $a \in S$, entonces se dice que $(S, *)$ es un* ***monoide*** *con elemento neutro e.*

En lo que sigue, si $(S, *)$ es un semigrupo y $a, b \in S$, se escribirá (cuando no haya peligro de confusión) ab en lugar de $a*b$, reservando esta última notación cuando se quiera hacer énfasis en la operación del semigrupo. Además, la frase *sea S un semigrupo* significará que sobre el conjunto no vacío S hay una operación binaria asociativa $*$ de tal forma que $(S, *)$ es un semigrupo.

Definición 3.2. *Sean S y T semigrupos. Un **morfismo de semigrupos** de S en T es una función $f : S \longrightarrow T$ tal que para cada $a, b \in S$, $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Un tipo especial de morfismos de semigrupos es el siguiente.

Definición 3.3. *Un **isomorfismo de semigrupos** es un morfismo de semigrupos $f : S \longrightarrow T$ para el cual existe un morfismo de semigrupos $g : T \longrightarrow S$ tal que $g \circ f = id_S$ y $f \circ g = id_T$. Se escribe $S \cong T$ para indicar que existe un isomorfismo de semigrupos de S en T, y en ese caso se dice que S es **isomorfo** a T.*

De acuerdo con la definición anterior, un isomorfismo de semigrupos debe ser, en particular, una función biyectiva.

Proposición 3.4. *Sea $f : S \longrightarrow T$ un morfismo biyectivo de semigrupos y $g : T \longrightarrow S$ su función inversa. Entonces $g : T \longrightarrow S$ es un morfismo de semigrupos, y en consecuencia, f es un isomorfismo de semigrupos.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean $a, b \in T$. Como f es sobreyectiva, entonces $a = f(x)$ y $b = f(y)$ para algunos $x, y \in S$. Ahora bien, como g es la inversa de f, entonces $g(a) = g(f(x)) = x$ y $g(b) = g(f(y)) = y$. Por otra parte, $g(ab) = g(f(x)f(y)) = g(f(xy)) = xy = g(a)g(b)$. Por consiguiente g es un morfismo de semigrupos. $\square$

La Proposición anterior pone de manifiesto que ser isomorfismo de semigrupos es equivalente a ser un morfismo biyectivo. Además, no es difícil verificar que la composición de dos morfismos de semigrupos es un morfismo de semigrupos.

Definición 3.5. *Sea S un semigrupo y sea $\rho \in \mathcal{E}(S)$. Se dice que ρ es una*

*(1) **congruencia izquierda**, si para cada $c \in S$ se verifica lo siguiente:*
$$a\rho b \Longrightarrow ca\rho cb.$$
*(2) **congruencia derecha**, si para cada $c \in S$ se verifica lo siguiente:*
$$a\rho b \Longrightarrow ac\rho bc.$$
*(3) **congruencia**, si ρ es a la vez una congruencia izquierda y una congruencia derecha.*

Además, $Cong(S)$ denotará a la colección de todas las congruencias sobre S.

A continuación se enuncian un par de resultados cuya demostración se omite debido a su sencillez.

Proposición 3.6. *Sea S un semigrupo y sea $\rho \in \mathcal{E}(S)$. Entonces $\rho \in Cong(S)$ si y solo si $a\rho b \quad y \quad c\rho d \Longrightarrow ac\rho bd$.*

Proposición 3.7. *Sea S un semigrupo. Si $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de congruencias sobre S, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es una congruencia sobre S.*

Sean S un semigrupo y $X \subseteq S \times S$. Considere a la familia $\mathcal{F}_X := \{\rho \in Cong(S) \mid X \subseteq \rho\}$. No es difícil ver que $S \times S \in Cong(S)$, así que $S \times S \in \mathcal{F}_X$ y por consiguiente $\mathcal{F}_X$ es no vacía. Luego, de la Proposición 3.7 se deduce que $\bigcap \mathcal{F}_X \in Cong(S)$. A esta congruencia se le dará un nombre especial.

Definición 3.8. *Sea S un semigrupo y $X \subseteq S \times S$. A $\rho_X := \bigcap \mathcal{F}_X$ se le llama* ***congruencia generada por X.***

Observación 3.9. *De acuerdo con su definición, ρ_X tiene la siguiente propiedad:*

Si ρ es una congruencia que contiene a X, entonces $\rho_X \subseteq \rho$.

De nuevo, por la forma en que se definió, se aprecia que $X \subseteq \rho_X$.

Es a partir de una congruencia como se construye un semigrupo cociente.

Teorema 3.10. *Sea S un semigrupo y sea ρ una congruencia sobre S. Considere al conjunto cociente $\frac{S}{\rho} := \{[a]_\rho \mid a \in S\}$ y también la siguiente operación entre clases de equivalencia:*

$$[a]_\rho[b]_\rho := [ab]_\rho$$

Se tiene entonces que dicha operación está bien definida y $\frac{S}{\rho}$ es un semigrupo bajo este producto de clases de equivalencia.

Demostración:

Veamos primero que este producto de clases es una operación bien definida,

$$\begin{aligned}
[a]_\rho = [x]_\rho \quad \text{y} \quad [b]_\rho = [y]_\rho &\Longrightarrow a\rho x \quad \text{y} \quad b\rho y \\
&\Longrightarrow ab\rho xy \\
&\Longrightarrow [ab]_\rho = [xy]_\rho \\
&\Longrightarrow [a]_\rho[b]_\rho = [x]_\rho[y]_\rho
\end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned}
[a]_\rho([b]_\rho[c]_\rho) &= [a]_\rho[bc]_\rho \\
&= [a(bc)]_\rho \\
&= [(ab)c]_\rho \\
&= [ab]_\rho[c]_\rho \\
&= ([a]_\rho[b]_\rho)[c]_\rho
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\frac{S}{\rho}$ es un semigrupo bajo este producto de clases de equivalencia.

□

Definición 3.11. *Sea S un semigrupo y sea $\rho \in Cong(S)$. Al semigrupo $\frac{S}{\rho}$ se le llama* ***semigrupo cociente o semigrupo factor*** *de S sobre ρ.*

Definición 3.12. *Si $f : S \longrightarrow T$ es un morfismo de semigrupos, al conjunto*

$$Ker(f) := \{(a, b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\}$$

se le da el nombre de ***kernel de f.***

Observación 3.13. *(1) No es complicado exhibir que $Ker(f)$ es una congruencia sobre S. Así, todo morfismo de semigrupos induce una congruencia sobre su dominio. Más aún, si $(a,b),(c,d) \in Ker(f)$, entonces de que $Ker(f)$ es una congruencia se sigue que $(ac,bd) \in Ker(f)$. Por lo tanto se puede considerar a la operación $(a,b)(c,d) := (ac,bd)$ que resulta ser asociativa, pues está definida en términos de la operación asociativa en S. En conclusión, $Ker(f)$ junto con la operación $(a,b)(c,d) := (ac,bd)$ forman un semigrupo. Para más detalles, puede consultarse* [**2**].

(2) Sea ρ una congruencia sobre el semigrupo S. Entonces la función $\pi_\rho : S \longrightarrow \frac{S}{\rho}$ definida por $\pi_\rho(a) := [a]_\rho$ es un morfismo de semigrupos, pues $\pi_\rho(ab) = [ab]_\rho = [a]_\rho[b]_\rho = \pi_\rho(a)\pi_\rho(b)$. Además

$$\begin{aligned} Ker(\pi_\rho) :&= \{(a,b) \in S \times S \mid \pi_\rho(a) = \pi_\rho(b)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid [a]_\rho = [b]_\rho\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid a\rho b\} \\ &= \rho \end{aligned}$$

Al morfismo π_ρ se le llama ***proyección canónica.*** *No es difícil ver que π_ρ es sobreyectivo.*

Un resultado notable con respecto a los conceptos anteriores es el siguiente.

Teorema 3.14. *Sea $f : S \longrightarrow T$ un morfismo de semigrupos y $\rho \in Cong(S)$ tal que $\rho \subseteq Ker(f)$. Entonces, existe un único morfismo de semigrupos $\bar{f} : \frac{S}{\rho} \longrightarrow T$ que hace conmutativo al diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & T \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Más aún, si $\rho = Ker(f)$, entonces $\bar{f}$ es inyectiva, y si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.

Demostración:

Existencia: considerar a la función $\bar{f} : \frac{S}{\rho} \longrightarrow T$ definida por $\bar{f}([a]_\rho) := f(a)$. Supongase que $[a]_\rho = [b]_\rho$, entonces $(a,b) \in \rho \subseteq Ker(f)$, así que $(a,b) \in Ker(f)$ y en consecuencia $f(a) = f(b)$. Por lo tanto $\bar{f}([a]_\rho) = \bar{f}([b]_\rho)$ y así $\bar{f}$ está bien definida. Para cada $a \in S$ se tiene lo siguiente:

$$\bar{f}(\pi_\rho(a)) = \bar{f}([a]_\rho) = f(a).$$

Por lo tanto $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$. Más aún, $\bar{f}$ es un morfismo de semigrupos pues $\bar{f}([a]_\rho[b]_\rho) = \bar{f}([ab]_\rho) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}([a]_\rho)\bar{f}([b]_\rho)$.

Unicidad: suponga ahora que el morfismo de semigrupos $g : \frac{S}{\rho} \longrightarrow T$ es tal que $f = g \circ \pi_\rho$. Entonces, para cada $[a]_\rho \in \frac{S}{\rho}$:

$$\begin{aligned} g([a]_\rho) &= g(\pi_\rho(a)) \\ &= f(a) \\ &= \bar{f}(\pi_\rho(a)) \\ &= \bar{f}([a]_\rho). \end{aligned}$$

De ahí que $\bar{f} = g$. Ahora bien, en el caso en que $\rho = Ker(f)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{f}([a]_\rho) = \bar{f}([b]_\rho) &\Longrightarrow f(a) = f(b)\\ &\Longrightarrow (a,b) \in Ker(f) = \rho\\ &\Longrightarrow [a]_\rho = [b]_\rho.\end{aligned}$$

Así $\bar{f}$ es inyectiva. Si f es sobreyectiva y $t \in T$, entonces $t = f(a)$ para algún $a \in S$. Además, observe que $t = f(a) = \bar{f}([a]_\rho)$, de donde $\bar{f}$ es sobreyectiva. □

Corolario 3.15. *Todo morfismo de semigrupos es la composición de un morfismo sobreyectivo seguido de un morfismo inyectivo.*

Demostración:
Sea $f : S \longrightarrow T$ un morfismo de semigrupos. Aplicando el Teorema 3.14 a $\rho = Ker(f)$ puede escribirse $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$ siendo $\bar{f}$ un morfismo inyectivo. Finalmente, de que π_ρ sea un morfismo sobreyectivo se sigue lo pedido. □

A continuación se establece un resultado más general que el Teorema 3.14.

Teorema 3.16. *Sean* $S \xrightarrow{f} T$ *y* $S \xrightarrow{g} L$ *un par de morfismos de semigrupos. Si* g *es sobreyectivo y si* $Ker(g) \subseteq Ker(f)$*, entonces existe un único morfismo de semigrupos* $L \xrightarrow{h} T$ *que hace conmutativo al siguiente triángulo:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \\ & L \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $\rho := Ker(g)$ y considérese el morfismo $f : S \longrightarrow T$. Puesto que $\rho \subseteq Ker(f)$, del Teorema 3.14 se sigue que existe un morfismo de semigrupos $\bar{f} : \frac{S}{\rho} \longrightarrow T$ que hace conmutativo al triángulo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & T \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el Teorema 3.14 al morfismo $g : S \longrightarrow L$ se tiene que existe un morfismo de semigrupos $\bar{g} : \frac{S}{\rho} \longrightarrow L$ que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & L \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso, como g es sobreyectiva entonces $\bar{g}$ también lo es, y como se tomó $\rho = Ker(g)$, entonces $\bar{g}$ debe ser inyectiva y en consecuencia un morfismo biyectivo de semigrupos. Así, de la Proposición 3.4 se sigue que la función inversa de $\bar{g}$, que se denotará por e, es un morfismo de semigrupos.

Veamos que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & T \\
L \arrow[r, "e"'] & \frac{S}{\rho} \arrow[u, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad del segundo triángulo se tiene que $g = \bar{g} \circ \pi_\rho$, y por lo tanto $e \circ g = e \circ (\bar{g} \circ \pi_\rho) = (e \circ \bar{g}) \circ \pi_\rho = id_{\frac{S}{\rho}} \circ \pi_\rho = \pi_\rho$. Así que $(\bar{f} \circ e) \circ g = \bar{f} \circ (e \circ g) = \bar{f} \circ \pi_\rho$, pero de que el primer triángulo conmute se obtiene que $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$ y por consiguiente $f = (\bar{f} \circ e) \circ g$ como se requería. Defínase $h := \bar{f} \circ e$. De lo anterior se sigue que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \\
& L \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente, observe que debido a que las funciones sobreyectivas son cancelables por la derecha, cualquier otro morfismo que haga conmutativo al triángulo anterior debe ser el morfismo h. □

3.2. Morfismos en $\mathcal{SGRP}$.

- Denótese por $\mathcal{S}$ a la clase de todos los semigrupos.
- Si $S, T \in \mathcal{S}$ se define
$$Hom(S, T) := \{f : S \longrightarrow T \mid f \text{ es morfismo de semigrupos}\}$$
- Para cada $S \in \mathcal{S}$ sea id_S la función identidad.
- Sea $\circ$ la composición entre funciones.

De que la composición entre morfismos de semigrupos es de nuevo un morfismo de semigrupos aunado a algunas propiedades de las funciones, como la asociatividad de la composición y propiedades de la función identidad, se sigue que todo lo anterior da lugar a una categoría que será llamada la **categoría de semigrupos** y que se denota por $\mathcal{SGRP}$. Algunos resultados con respecto a los morfismos de $\mathcal{SGRP}$ son los siguientes.

Teorema 3.17. *El morfismo de semigrupos $f : S \longrightarrow T$ es un isomorfismo en $\mathcal{SGRP}$ si y solo si f es una función biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Longrightarrow$) Suponga que f es un isomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. Luego, debe existir un morfismo en $\mathcal{SGRP}$, digamos $g : T \longrightarrow S$, tal que $g \circ f = id_S$ y $f \circ g = id_T$. De esto último y debido a que f y g son en particular funciones, se puede concluir que f debe ser biyectiva.

$\Longleftarrow$) Suponga que $f : S \longrightarrow T$ es un morfismo biyectivo de semigrupos. Sea $g : T \longrightarrow S$ la función inversa de f. De la Proposición 3.4 se deduce que g es un morfismo de semigrupos i,e, un morfismo de $\mathcal{SGRP}$. Así, como $g \circ f = id_S$ y $f \circ g = id_T$ se puede concluir que f es un isomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. □

Teorema 3.18. *El morfismo de semigrupos $f : S \longrightarrow T$ es un monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$ si y solo si f es una función inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Longrightarrow$) Suponga que $f : S \longrightarrow T$ es un monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. De acuerdo con la Observación 3.13, $Ker(f)$ es un semigrupo bajo la operación $(x, y)(w, z) := (xw, yz)$. Considere ahora a las funciones $\alpha, \beta : Ker(f) \longrightarrow S$ definidas por $\alpha(x, y) := x$ y $\beta(x, y) := y$. Para cada $(x, y), (w, z) \in Ker(f)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha((x, y)(w, z)) &= \alpha(xw, yz) \\ &= xw \\ &= \alpha(x, y)\alpha(w, z) \end{aligned}$$

De ahí que α es un morfismo de semigrupos. De manera análoga se exhibe que β es un morfismo de semigrupos. Más aún, para cada $(x, y) \in Ker(f)$ se tiene que $f(\alpha(x, y)) = f(x) = f(y) = f(\beta(x, y))$ y por consiguiente $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Ahora bien, como f es, por hipótesis, monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$ se sigue entonces que $\alpha = \beta$. Si $a, b \in S$ son tales que $f(a) = f(b)$, entonces $(a, b) \in Ker(f)$ y al ser $\alpha = \beta$ se tiene que $\alpha(a, b) = \beta(a, b)$ y por consiguiente $a = b$. En consecuencia f debe ser inyectiva.

$\Longleftarrow$) Suponga que f es inyectiva. Sean R un semigrupo y $\alpha, \beta : R \longrightarrow S$ morfismos de semigrupos tales que $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Como en particular R, S y T son conjuntos y α, β y f son funciones, entonces debido a que las funciones inyectivas son cancelables a la izquierda se sigue que $\alpha = \beta$ y por consiguiente f debe ser un monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. □

Teorema 3.19. *En $\mathcal{SGRP}$ hay un epimorfismo que no es sobreyectivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Defínase $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y considere a los semigrupos $(\mathbb{N}_0, +)$ y $(\mathbb{Z}, +)$. Sea $\iota : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función inclusión. Es claro que ι es un morfismo de semigrupos. Además, observe que ι no es una función sobreyectiva. Ahora bien, sean S un semigrupo y $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \longrightarrow S$ morfismos de semigrupos tales que $\alpha \circ \iota = \beta \circ \iota$. Veamos que $\alpha(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\alpha(0)$, puesto que α es un morfismo de semigrupos, se deduce que $\alpha(\mathbb{Z})$ es un semigrupo bajo la operación de S. [3] Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\alpha(n)\alpha(0) = \alpha(n + 0) = \alpha(n)$ y también $\alpha(0)\alpha(n) = \alpha(0 + n) = \alpha(n)$. Por consiguiente $\alpha(n)\alpha(0) = \alpha(n) = \alpha(0)\alpha(n)$ y en consecuencia $\alpha(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\alpha(0)$. De manera análoga se deduce que $\beta(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\beta(0)$. Como $\alpha \circ \iota = \beta \circ \iota$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= \alpha(\iota(n)) \\ &= \beta(\iota(n)) \\ &= \beta(n) \end{aligned}$$

[3] Si $f : S \longrightarrow T$ es un morfismo de semigrupos, entonces $f(S)$ es un semigrupo bajo la operación de T. En efecto, si $x, y, z \in S$, entonces $f(x)f(y) = f(xy) \in f(S)$, y además $f(x)(f(y)f(z)) = f(x)f(yz) = f(x(yz)) = f((xy)z)) = f(xy)f(z) = (f(x)f(y))f(z)$.

En particular $\alpha(0) = \beta(0)$. Veamos que $\alpha = \beta$. Para exhibir que $\alpha = \beta$ solo resta mostrar que para cada $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ se tiene que $\alpha(n) = \beta(n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $-n < 0$ y se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\alpha(-n) &= \alpha(-n)\alpha(0) \\
&= \alpha(-n)\beta(0) \\
&= \alpha(-n)\beta(n + (-n)) \\
&= \alpha(-n)(\beta(n)\beta(-n)) \\
&= \alpha(-n)(\alpha(n)\beta(-n)) \\
&= (\alpha(-n)\alpha(n))\beta(-n) \\
&= \alpha(-n + n)\beta(-n) \\
&= \alpha(0)\beta(-n) \\
&= \beta(0)\beta(-n) \\
&= \beta(-n)
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que, en definitiva, $\alpha = \beta$. Esto último permite concluir que $\iota : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un epimorfismo en $\mathcal{SGRP}$ que no es sobreyectivo. $\square$

Teorema 3.20. *En $\mathcal{SGRP}$, todo morfismo sobreyectivo es un epimorfismo.*

Demostración: Sea $f : S \longrightarrow T$ un morfismo sobreyectivo de semigrupos. Tómense un semigrupo arbitrario, digamos R, y un par de morfismos de semigrupos $\alpha, \beta : T \longrightarrow R$ tales que $\alpha \circ f = \beta \circ f$. Si $t \in T$, de la sobreyectividad de f puede escribirse $t = f(s)$ para algún $s \in S$. Así, $\alpha(t) = \alpha(f(s)) = \beta(f(s)) = \beta(t)$ y por consiguiente $\alpha = \beta$. En consecuencia, f es un epimorfismo en $\mathcal{SGRP}$. $\square$

Si se escribe $\mathcal{INY}$ para denotar a la clase de todos los morfismos inyectivos de semigrupos y $\mathcal{SOBRE}$ para la clase de todos los morfismos sobreyectivos de semigrupos, entonces de los Teoremas 3.18, 3.19 y 3.20 se sigue que $\mathcal{INY} = \mathcal{MONO}$ y $\mathcal{SOBRE} \subsetneq \mathcal{EPI}$ (véase la notación establecida en la Definición 2.1). A pesar de que no todo epimorfismo es un morfismo sobreyectivo, si se tiene lo siguiente.

Teorema 3.21. *Sea $S \xrightarrow{g} L$ un morfismo en $\mathcal{SGRP}$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(1) g es un epimorfismo regular (ver Definición 2.4).
(2) g es un epimorfismo extremal (ver Definición 2.7).
(3) g es un morfismo sobreyectivo.

Demostración:

1) $\Longrightarrow$ 2) Se sigue de la Proposición 2.9.

2) $\Longrightarrow$ 3) Suponga que $S \xrightarrow{g} L$ es un epimorfismo extremal. De acuerdo con el Corolario 3.15 existen morfismos de semigrupos m y e tales que $g = m \circ e$ con m inyectivo y e sobreyectivo. Ahora bien, puesto que m es un monomorfismo (ver Teorema 3.18) y g es un epimorfismo extremal se deduce que m debe ser un isomorfismo en $\mathcal{SGRP}$, y en particular, m debe ser una función sobreyectiva (ver Teorema 3.17). Así, g es composición de dos funciones sobreyectivas y por lo tanto g debe ser una función sobreyectiva.

3) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que $S \xrightarrow{g} L$ es un morfismo sobreyectivo. De acuerdo con la Observación 3.13, $Ker(g)$ es un semigrupo bajo la operación $(x,y)(w,z) := (xw, yz)$. Considere ahora a las funciones $\alpha, \beta : Ker(g) \longrightarrow S$ definidas por $\alpha(x,y) := x$ y $\beta(x,y) := y$. Para cada $(x,y),(w,z) \in Ker(g)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha((x,y)(w,z)) &= \alpha(xw, yz)\\ &= xw\\ &= \alpha(x,y)\alpha(w,z)\end{aligned}$$

De ahí que α es un morfismo de semigrupos. De manera análoga se exhibe que β es un morfismo de semigrupos. Más aún, para cada $(x,y) \in Ker(g)$ se tiene que $g(\alpha(x,y)) = g(x) = g(y) = g(\beta(x,y))$ y por consiguiente $g \circ \alpha = g \circ \beta$. Se tiene así que el diagrama $Ker(g) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{g} L$ es conmutativo. Sea $S \xrightarrow{f} T$ un morfismo de semigrupos que hace conmutativo al diagrama $Ker(g) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S \xrightarrow{f} T$ i,e, tal que $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Si $(x,y) \in Ker(g)$, entonces $f(\alpha(x,y)) = f(\beta(x,y))$ y por consiguiente $f(x) = f(y)$, de donde $(x,y) \in Ker(f)$ y en consecuencia $Ker(g) \subseteq Ker(f)$. De esto último y de que g es un morfismo sobreyectivo se sigue al aplicar el Teorema 3.16 que existe un único morfismo de semigrupos $L \xrightarrow{h} T$ que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & L \arrow[dl, "h"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Se puede concluir así que g es co-igualador (ver Definición 2.3) de los morfismos α y β y por consiguiente g es un epimorfismo regular. $\square$

Dicho de otra forma, el Teorema 3.21 afirma que en la categoría de semigrupos

$$\mathcal{EPI}-\mathcal{REG} = \mathcal{EPI}-\mathcal{EXT} = \mathcal{SOBRE}$$

Teorema 3.22. *En $\mathcal{SGRP}$, todo par de morfismos tiene un co-igualador.*

Demostración:

Tómense un par de morfismos de semigrupos, digamos $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} T$, y considere al siguiente subconjunto de $T \times T$:

$$X := \{(\alpha(a), \beta(a)) \mid a \in S\}$$

Sea $\rho := \rho_X$ la congruencia generada por X (ver Definición 3.8). Veamos que el morfismo $T \xrightarrow{\pi_\rho} \frac{T}{\rho}$ es co-igualador de α y β, para cada $a \in S$ se tiene que $(\alpha(a), \beta(a)) \in X$ y a la vez $X \subseteq \rho$, por lo tanto $(\alpha(a), \beta(a)) \in \rho$. De ahí que $[\alpha(a)]_\rho = [\beta(a)]_\rho$ y por consiguiente $\pi_\rho(\alpha(a)) = \pi_\rho(\beta(a))$. Luego $\pi_\rho \circ \alpha = \pi_\rho \circ \beta$ y así el diagrama $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{\pi_\rho} \frac{T}{\rho}$ conmuta. Sea $T \xrightarrow{f} R$ un morfismo de semigrupos tal que el diagrama $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{f} R$ conmuta. Entonces para cada $a \in S$ se tiene que $f(\alpha(a)) = f(\beta(a))$ y así $(\alpha(a), \beta(a)) \in Ker(f)$, de donde $X \subseteq Ker(f)$. Luego, debe ocurrir que $\rho \subseteq Ker(f)$ de manera que de acuerdo al Teorema 3.14 existe un único morfismo de semigrupos $\frac{T}{\rho} \xrightarrow{\bar{f}} R$ que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\pi_\rho"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{T}{\rho} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $T \xrightarrow{\pi_\rho} \frac{T}{\rho}$ es co-igualador de α y β. $\square$

3.3. Mono-fuentes en $\mathcal{SGRP}$.

Proposición 3.23. *Sea $\mathcal{F} = \{ S \xrightarrow{f_i} S_i \}_{i\in I}$ una $\mathcal{SGRP}$−fuente. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$ es una mono-fuente.

(2) Para cada $x, y \in S$ con $x \neq y$ existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Demostración:

1) $\Longrightarrow$ 2) Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$. Considere al semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ y a las funciones $\mathbb{N} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S$ definidas por $\alpha(n) := x^n$ y $\beta(n) := y^n$ respectivamente. De las leyes de exponenciación en un semigrupo se sigue que α y β son morfismos de semigrupos. Ahora bien, suponga que $f_i(x) = f_i(y)$ para cada $i \in I$. Luego, para cada $i \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_i(\alpha(n)) &= f_i(x^n) \\ &= f_i(x)^n \\ &= f_i(y)^n \\ &= f_i(y^n) \\ &= f_i(\beta(n)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f_i \circ \alpha = f_i \circ \beta$ y así $\mathcal{F} \circ \alpha = \mathcal{F} \circ \beta$, de manera que al ser $\mathcal{F}$ una mono-fuente se debe tener que $\alpha = \beta$ y en particular que $\alpha(1) = \beta(1)$, o lo que es lo mismo $x = y$, una contradicción. Por consiguiente existe $i \in I$ para el cual $f_i(x) \neq f_i(y)$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Sean $T \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} S$ un par de morfismos de semigrupos tales que $\mathcal{F} \circ \alpha = \mathcal{F} \circ \beta$. Suponga que $t \in T$ es tal que $\alpha(t) \neq \beta(t)$. Entonces existe $i \in I$ de manera que $f_i(\alpha(t)) \neq f_i(\beta(t))$, pero al ser $\mathcal{F} \circ \alpha = \mathcal{F} \circ \beta$ se tiene que en particular $f_i \circ \alpha = f_i \circ \beta$ y por lo tanto $f_i(\alpha(t)) = f_i(\beta(t))$, una contradicción. Por consiguiente $\alpha = \beta$ y $\mathcal{F}$ es mono-fuente. $\square$

Teorema 3.24. *La categoría $\mathcal{SGRP}$ es $(\mathcal{EPI}, MF)-$factorizable (ver Definición 2.13).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\mathcal{F} = \{\ S \xrightarrow{f_i} S_i\ \}_{i\in I}$ una $\mathcal{SGRP}-$fuente indexada por una clase arbitraria I. Considere a la siguiente relación en S:

$$\rho := \{(a,b) \in S \times S \mid f_k(a) = f_k(b) \quad \text{para cada } k \in I\}$$

Es fácil verificar que ρ es una relación de equivalencia en S. Por otro lado, si $a\rho b$, $c\rho d$ y $k \in I$ es arbitrario, entonces $f_k(a) = f_k(b)$ y $f_k(c) = f_k(d)$, luego $f_k(a)f_k(c) = f_k(b)f_k(d)$ y por consiguiente $f_k(ac) = f_k(bd)$. De ahí que $ac\rho bd$ y en consecuencia ρ es una congruencia sobre S. Veamos que para cada $i \in I$, $\rho \subseteq Ker(f_i)$, si $i \in I$ es arbitrario y $a\rho b$, entonces para cada $k \in I$, $f_k(a) = f_k(b)$. En particular para $k = i$ se tiene que $f_i(a) = f_i(b)$ y por lo tanto $a \ker(f_i) b$. De ahí que $\rho \subseteq Ker(f_i)$. Así, haciendo uso del Teorema 3.14 se sigue que para cada $i \in I$ existe un único morfismo de semigrupos $\bar{f}_i : \frac{S}{\rho} \longrightarrow S_i$, dado por $\bar{f}_i([a]_\rho) := f_i(a)$, que hace conmutativo al siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & S_i \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}_i"'] & \end{tikzcd}$$

De esto último se infiere que $\mathcal{F} = \mathcal{M} \circ \pi_\rho$ donde $\mathcal{M} := \{\ \frac{S}{\rho} \xrightarrow{\bar{f}_i} S_i\ \}_{i\in I}$. Puesto que π_ρ es un epimorfismo, para concluir la demostración solo resta exhibir que $\mathcal{M}$ es una mono-fuente. Para ello, suponga que $[a]_\rho \neq [b]_\rho$. Entonces, de la manera en que ρ está definida se sigue que existe $i \in I$ para el cual $f_i(a) \neq f_i(b)$ y por lo tanto $\bar{f}_i([a]_\rho) \neq \bar{f}_i([b]_\rho)$. Así, de la Proposición 3.23 se deduce que $\mathcal{M}$ es una mono-fuente. □

3.4. La categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U)$.

Definición 3.25. *El funtor* ***olvidadizo*** $U : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}$ *es definido como sigue:*

$$U(\ S \xrightarrow{f} T\ ) :=\ S \xrightarrow{f} T$$

Esto es, a cada semigrupo U le asigna su conjunto subyacente y a cada morfismo de semigrupos su función subyacente. (Cabe mencionar que en otros textos a este funtor se le llama funtor que olvida)

No es difícil verificar que en efecto $U : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}$ es un funtor. Además, tampoco es difícil exhibir que U es un funtor fiel. A lo largo de toda esta sección U denotará al funtor olvidadizo definido anteriormente.

Proposición 3.26. *El funtor U tiene las siguientes propiedades:*

(1) U preserva epimorfismos extremales (ver Definición 2.26 inciso 2).
(2) U crea isomorfismos (ver Definición 2.19).

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $S \xrightarrow{f} T$ un epimorfismo extremal en $\mathcal{SGRP}$. Del Teorema 3.21 se sigue que f debe ser una función sobreyectiva y por consiguiente $U(f) := f$ es un epimorfismo en $\mathcal{SET}$. De la sobreyectividad de f (y del Axioma de elección) se sigue que existe una función $T \xrightarrow{g} S$ tal que $f \circ g = id_T$. Ahora bien, sean $S \xrightarrow{e} X \xrightarrow{m} T$ un par de funciones tales que $f = m \circ e$ con m inyectiva. De la igualdad $f = m \circ e$ se obtiene que $f \circ g = (m \circ e) \circ g$ y con ello que $id_T = m \circ (e \circ g)$. Por lo tanto m tiene una inversa derecha y en consecuencia m debe ser sobreyectiva. Esto último aunado a que m también es inyectiva permite concluir que m es una función biyectiva y por consiguiente un isomorfismo en $\mathcal{SET}$, concluyéndose de esta forma que $U(f) := f$ es un epimorfismo extremal en $\mathcal{SET}$.

2. Sea $X \xrightarrow{g} U(S) := S$ un isomorfismo $U-$estructurado en $\mathcal{SET}$. Entonces, $X \xrightarrow{g} S$ debe ser una función biyectiva con dominio el conjunto X y codominio el semigrupo S. Sea $S \xrightarrow{f} X$ la función inversa de g. A partir de las funciones f y g y de la operación en S se define la siguiente operación binaria sobre X: si $x, y \in X$, $x * y := f(g(x)g(y))$.

Para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * f(g(y)g(z)) \\ &= f(g(x)g(f(g(y)g(z)))) \\ &= f(g(x)(g(y)g(z))) \\ &= f((g(x)g(y))g(z)) \\ &= f(g(f(g(x)g(y)))g(z)) \\ &= f(g(x)g(y)) * z \\ &= (x * y) * z \end{aligned}$$

Por consiguiente X es un semigrupo bajo esta operación binaria. Observe que si $s, t \in S$

$$f(s) * f(t) := f(g(f(s))g(f(t))) = f(st)$$

De donde f es un isomorfismo del semigrupo S al semigrupo $(X, *)$. Por lo tanto de la Proposición 3.4 se sigue que g es un isomorfismo del semigrupo $(X, *)$ al semigrupo S . Ahora que g ya es un morfismo de semigrupos (y no solo una función) es claro que $U(g) = g$. Suponga que $T \xrightarrow{h} S$ es un isomorfismo del semigrupo $(T, \odot)$ al semigrupo S tal que $U(h) = g$. Entonces h y g son la misma función y por lo tanto debe ser que T y X son el mismo conjunto. Sean $a, b \in X$. Puesto que h es un morfismo de semigrupos que tiene la misma regla de correspondencia de g se tiene que $g(a \odot b) = g(a)g(b)$ y por lo tanto $f(g(a \odot b)) = f(g(a)g(b))$, de donde $a \odot b = f(g(a)g(b)) = a * b$ y en consecuencia $\odot = *$. Por consiguiente h y g son el mismo morfismo de semigrupos. Se concluye así que U crea isomorfismos. $\square$

A continuación se exhibe que para cada conjunto no vacío X existe un morfismo $U-$universal con dominio X. Para tal efecto es que se desarrollan las ideas que siguen.

Definición 3.27. *Sea X un conjunto no vacío.*

- *Una* ***palabra*** *sobre el conjunto X es un símbolo de la forma $x_1x_2\cdots x_n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $x_i \in X$.*
- *Dos palabras $a_1a_2\cdots a_n$ y $b_1b_2\cdots b_m$* ***serán iguales*** *si y solo si $n = m$ y $a_i = b_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*
- *Se escribe X^+ para denotar a la colección de todas las palabras sobre el conjunto X.*

Si X es un conjunto no vacío y $a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_m \in X^+$, entonces a partir de estas dos palabras puede obtenerse una tercera definiendo:

$$a_1a_2\cdots a_n * b_1b_2\cdots b_m := a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m$$

A esta nueva palabra se le llamará la **concatenación** de $a_1a_2\cdots a_n$ con $b_1b_2\cdots b_m$. La concatenación de palabras es asociativa, pues

$$\begin{aligned} a_1a_2\cdots a_n * (b_1b_2\cdots b_m * c_1c_2\cdots c_r) &= a_1a_2\cdots a_n * (b_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_r) \\ &= a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_r \\ &= (a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m) * c_1c_2\cdots c_r \\ &= (a_1a_2\cdots a_n * b_1b_2\cdots b_m) * c_1c_2\cdots c_r \end{aligned}$$

Por consiguiente X^+ junto con la concatenación de palabras dan lugar a un semigrupo al que se le llama **semigrupo libre de palabras sobre** X.

Teorema 3.28. *Sea X un conjunto no vacío. Entonces para cada semigrupo T y cada función $f : X \longrightarrow T$ existe un único morfismo de semigrupos $\phi : X^+ \longrightarrow T$ que hace conmutar al triángulo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & & T \\ & X^+ \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\iota : X \longrightarrow X^+$ es la función inclusión

Demostración:
Sean $(T, \odot)$ un semigrupo y $f : X \longrightarrow T$ una función. A partir de f se define a $\phi : X^+ \longrightarrow T$ como $\phi(a_1a_2\cdots a_n) := f(a_1) \odot f(a_2) \odot \cdots \odot f(a_n)$. Observe que para cada $a \in X$ se verifica que $\phi(a) = f(a)$ y por consiguiente $f = \phi \circ \iota$. Ahora bien, se tiene que

$$\phi(a_1a_2\cdots a_n * b_1b_2\cdots b_m) = \phi(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m)$$
$$= f(a_1) \odot f(a_2) \odot \cdots \odot f(a_n) \odot f(b_1) \odot f(b_2) \odot \cdots \odot f(b_m)$$
$$= [f(a_1) \odot f(a_2) \odot \cdots \odot f(a_n)] \odot [(f(b_1) \odot f(b_2) \odot \cdots \odot f(b_m)]$$
$$= \phi(a_1a_2\cdots a_n) \odot \phi(b_1b_2\cdots b_m)$$

Por lo tanto ϕ es un morfismo de semigrupos. Suponga ahora que $\psi : X^+ \longrightarrow T$ es un morfismo de semigrupos tal que $f = \psi \circ \iota$. Entonces, si $a_1a_2\cdots a_n \in X^+$:

$$\begin{aligned}\psi(a_1a_2\cdots a_n) &= \psi(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)\\ &= \psi(a_1)\odot\psi(a_2)\odot\cdots\odot\psi(a_n)\\ &= f(a_1)\odot f(a_2)\odot\cdots\odot f(a_n)\\ &= \phi(a_1a_2\cdots a_n)\end{aligned}$$

De donde $\phi = \psi$ y el resultado se sigue. $\square$

Corolario 3.29. *Para cada conjunto no vacío X existe un morfismo $U-$universal con dominio X (ver Definición 2.15).*

DEMOSTRACIÓN:
Si X es un conjunto no vacío, entonces del Teorema 3.28 se deduce que $\iota : X \longrightarrow X^+$ es $U-$universal. $\square$

Observación 3.30. *Si X es un conjunto no vacío y $\eta : X \longrightarrow \bar{X}$ es cualquier otro morfismo $U-$universal con dominio X, entonces de acuerdo a la Proposición 2.16 debe ser que $X^+ \cong \bar{X}$ i,e, cualquier semigrupo que sea codominio de algún morfismo $U-$universal con dominio X debe ser isomorfo al semigrupo libre de palabras X^+(y en particular deben ser equipotentes). En este sentido, X^+ es el más óptimo posible.*

Ahora que se ha establecido que cada conjunto no vacío es dominio de algún morfismo $U-$universal queda averiguar si lo mismo ocurre para el conjunto vacío. Para tal efecto se toman en cuenta los siguientes conceptos.

Definición 3.31. *Si S es un semigrupo, se dice que $\alpha \in S$ es **idempotente** si $\alpha^2 = \alpha$. Se denota al conjunto de idempotentes de S por $E(S)$.*

Hay semigrupos S para los cuales $E(S) = \emptyset$. En efecto, para el semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ (sin considerar al cero) se tiene que $E(\mathbb{N}) = \emptyset$. En contraste, también existen semigrupos repletos de idempotentes. Para ver esto, tómense dos conjuntos no vacíos A y B arbitrarios. Sobre $A \times B$ se define la siguiente operación binaria: si $(a, b), (c, d) \in A \times B$, $(a, b)(c, d) := (a, d)$. No resulta complicado verificar que esta es una operación asociativa. Ahora bien, para cada $(a, b) \in A \times B$ se tiene que $(a, b)^2 = (a, b)(a, b) = (a, b)$. Así, $A \times B$ con la operación definida anteriormente forma un semigrupo para el cual $E(A \times B) = A \times B$ (cabe mencionar que a todo semigrupo con tal propiedad se le da el nombre de **banda**). En particular, si alguno de los conjuntos A o B tiene exactamente un elemento, digamos A, entonces $|A \times B| = |B|$. De esta forma pueden construirse semigrupos con tantos idempotentes como se desee.

Lema 3.32. *Sean S y T semigrupos con $\alpha \in E(T)$. Entonces $h : S \longrightarrow T$ definida por $h(s) := \alpha$ es un morfismo de semigrupos.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x, y \in S$ se tiene que $h(xy) = \alpha$ mientras que $h(x)h(y) = \alpha^2 = \alpha$. Luego $h(xy) = h(x)h(y)$ y así h es un morfismo de semigrupos. $\square$

Teorema 3.33. *La categoría $\mathcal{SGRP}$ no tiene objeto inicial.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que S_0 es objeto inicial de $\mathcal{SGRP}$ y sea B un semigrupo con al menos dos idempotentes, digamos α y β ($\alpha \neq \beta$). Considere a las funciones $S_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ definidas como $f(s) := \alpha$ y $g(s) := \beta$. Del Lema 3.32 se sigue que f y g son morfismos de semigrupos, y al ser S_0 objeto inicial debe ocurrir que $f = g$. Tómese $s \in S_0$. Entonces $f(s) = g(s)$ y por consiguiente $\alpha = \beta$, lo cual contradice que $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto $\mathcal{SGRP}$ no tiene objeto inicial. $\square$

Del Teorema anterior se desprenden los siguientes tres resultados.

Corolario 3.34. *El conjunto vacío no puede ser dominio de ningún morfismo $U-$universal.*

DEMOSTRACIÓN:
Si $\iota : \emptyset \longrightarrow S_0$ es un morfismo $U-$universal, entonces de acuerdo con la Proposición 2.18 S_0 debe ser un objeto inicial de $\mathcal{SGRP}$, lo cual contradice al Teorema 3.33. $\square$

Corolario 3.35. *El funtor olvidadizo $U : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}$ no es adjunto.*

DEMOSTRACIÓN:
Si lo fuera, entonces todo objeto en $\mathcal{SET}$ sería dominio de algún morfismo $U-$universal. En particular el conjunto vacío. Pero eso no es posible según el Corolario anterior. $\square$

Corolario 3.36. *La categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U)$ no es una categoría esencialmente algebraica (y por lo tanto tampoco algebraica).*

DEMOSTRACIÓN:
Se sigue del Teorema 2.24 y del Corolario 3.35. $\square$

A pesar de lo anterior, si $\mathcal{O}$ denota a la clase de todos los conjuntos no vacíos y para cada $A, B \in \mathcal{O}$ se define $Hom(A, B) := \{f : A \longrightarrow B \mid f \text{ es función}\}$, entonces esto junto con la composición usual de funciones da lugar a una categoría que se denotará por $\mathcal{SET}^*$. Sea $U^* : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}^*$ definido por

$$U^*(\, S \xrightarrow{f} T \,) := \; S \xrightarrow{f} T$$

Esto es, a cada semigrupo U^* le asigna su conjunto subyacente y a cada morfismo de semigrupos su función subyacente. No es difícil exhibir que U^* es un funtor fiel. Además, imitando la demostración de la Proposición 3.26 se obtiene que el funtor U^* tiene las siguientes propiedades:

(1) U^* preserva epimorfismos extremales.
(2) U^* crea isomorfismos.

Más aún, del Teorema 3.28 se sigue que U^* es adjunto. Así, como $\mathcal{SGRP}$ es $(\mathcal{EPI}, MF)-$factorizable al aplicar el Teorema 2.25 se deduce que la categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U^*)$ si es una categoría algebraica.

4. Conclusiones

En este trabajo se exhibe que en cualquier categoría $\mathcal{A}$; la clase de los epimorfismos regulares está contenida en la clase de los epimorfismos extremales y que esta última a su vez está contenida en la clase de todos los epimorfismos, se muestra que para todo funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{SET}$, si $\iota : \emptyset \longrightarrow F(A)$ es un morfismo $F-$universal con dominio $\emptyset$ y $A \in Ob(\mathcal{A})$, entonces A es un objeto inicial de $\mathcal{A}$. También se exhibe que si la categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$, es esencialmente algebraica, entonces U es adjunto. Se dan condiciones necesarias para que la categoría concreta sobre $\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}, U)$ sea esencialmente algebraica.

Además, se muestra que en la categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$; la clase de los morfismos inyectivos de semigrupos, $\mathcal{INY}$ es igual a la clase de los monomorfismos de semigrupos $\mathcal{MONO}$, la clase de los morfismos sobreyectivos de semigrupos, $\mathcal{SOBRE}$, está contenida propiamente en la clase de los epimorfismos de semigrupos ,$\mathcal{EPI}$, y a pesar de que no todo epimorfismo es un morfismo sobreyectivo, se establece que en $\mathcal{SGRP}$ epimorfismo regular equivale a morfismo sobreyectivo y que morfismo sobryectivo equivale a epimorfismo extremal. También se exhibe que en $\mathcal{SGRP}$ todo par de morfismos tiene un co-igualador y que $\mathcal{SGRP}$ es $(\mathcal{EPI}, MF)-$factorizable.

Finalmente para la categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U)$; donde $U : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}$ es el funtor olvidadizo, se exhibe entre otras cosas que cualquier semigrupo que sea codominio de algún morfismo $U-$universal con dominio X, $X \neq \emptyset$, debe ser isomorfo al semigrupo libre de palabras X^+, así se establece que cada conjunto no vacío es dominio de algún morfismo $U-$universal, sin embargo el conjunto vacío no puede ser dominio de ningún morfismo $U-$universal, luego la categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U)$ no es una categoría algebraica, sin embargo la categoría concreta $(\mathcal{SGRP}, U^*)$ donde $U^* : \mathcal{SGRP} \longrightarrow \mathcal{SET}^*$, si es una categoría algebraica.

Agradecimientos: Los autores agradecen al árbitro por sus valiosos comentarios y sugerencias que contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de nuestro manuscrito.

Bibliografía

[1] Adámek J., Herrlich H., Strecker G.E., *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, Dover Books on Mathematics, (1990).

[2] Huerta-Sánchez L. A., *Semigrupos*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, (2023).

[3] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A., *Monoids, Acts and Categories*. Walter de Gruyter, (2000).

Correos electrónicos:
`huerta.25luis@gmail.com` (Luis Antonio Huerta-Sánchez),
`clopez@fcfm.buap.mx` (Carlos Alberto López-Andrade),
`vilchis.f@gmail.com` (Ivan Fernando Vilchis-Montalvo).

Topología y sus aplicaciones 10
Editores J. Juan Angoa Amador
Agustín Contreras Carreto
Raúl Escobedo Conde
María de Jesús López Toriz
21 de Mayo de 2024
Formato: PDF
Peso: 2.33 Mb