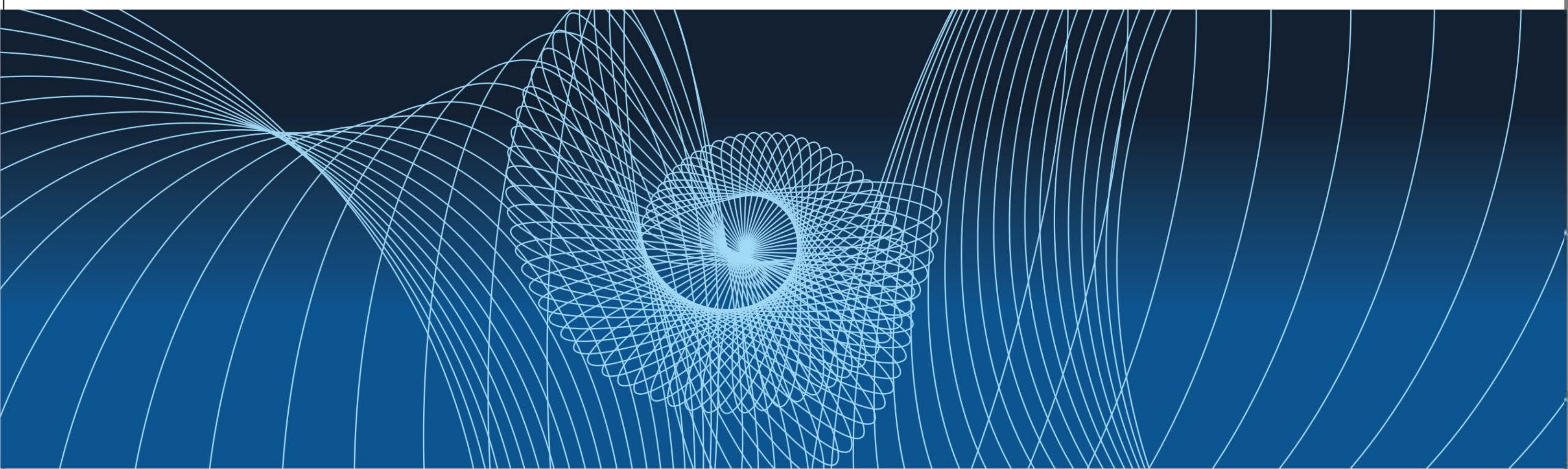
Dirección
General de
Publicaciones



Topología y sus aplicaciones 9

J. JUAN ANGOA AMADOR
AGUSTÍN CONTRERAS
RAÚL ESCOBEDO CONDE
MARÍA DE JESÚS LÓPEZ TORIZ

editores

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Topología
y sus aplicaciones 9

Juan Angoa

Agustín Contreras

Raúl Escobedo

María de Jesús LópezToriz

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
◆ *Rectora*: María Lilia Cedillo Ramírez
◆ *Secretario General*: José Manuel Alonso Orozco
◆ *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez
◆ *Director General de Publicaciones*: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2023
ISBN: 978-607-525-946-8

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Presentación

Apreciado lector, el cuerpo académico de topología y sus aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, pone ante tí el décimo tercer volumen de su serie de textos en topología.[1] Nuestra propuesta consiste en ofrecer un espacio para difundir y generar conocimiento, con artículos expositivos y de investigación en topología y temas afines, que pueden ser guía y motivación para los estudiantes, y de utilidad en la consulta para los especialistas.

Entre los diez capítulos que contiene este volumen se exponen temas de topología general, de dinámica topológica, de continuos e hiperespacios, y de categorías; particularmente se expone un trabajo sobre conjuntos preabiertos; se presenta un extenso tratado sobre las relaciones entre la teoría de números y la topología; se tratan diversos temas en sistemas dinámicos que incluyen funciones del tipo mezclante, sistemas compacto transitivos, entropía y transitividad topológica; se expone sobre una función en continuos, cuyos valores son conjuntos, similar a la conocida función de Jones; se presentan modelos geométricos de hiperespacios de arcos; y se discuten herramientas de categorías para el estudio de la estructura de los topos. Resaltamos que estos trabajos de investigación aportan a la generación de conocimiento resultados originales, o pruebas nuevas de resultados conocidos.

En esta entrega colaboran profesores, investigadores y estudiantes de las siguientes instituciones: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP-Puebla), Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), Univesidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Universidad del Papaloapan (UNPA) y Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

Agradecemos a los autores por elegir nuestra publicación para exponer sus trabajos, y a los árbitros por el rigor y por el tiempo para revisarlos. Especialmente te agradecemos a tí, que nos lees, por completar el enlace autor-árbitro-editor-lector.

Los editores
Diciembre de 2022

[1]La serie inició en 2007; los primeros volúmenes se denominan *Topología y sistemas dinámicos I-IV*, los siguientes *Topología y sus aplicaciones 1-8*. Contacto de editores: jangoa@fcfm.buap.mx, acontri@fcfm.buap.mx, escobedo@fcfm.buap.mx, mjlopez@fcfm.buap.mx

Contenido

Capítulo 1

Conjuntos preabiertos y algunos conceptos relacionados

Armando Martínez García, Manuel Ibarra Contreras
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En este capítulo se da una introducción a los conceptos de conjuntos preabierto, semiabierto, α abierto y localmente cerrado y algunas de las relaciones cercanas que existen con los conjuntos abiertos. En la sección 2 se dan los resultados básicos generales que son necesarios a lo largo de este trabajo; en la sección 3 se dan las definiciones de los conjuntos que dan nombre al capítulo así como algunas propiedades que satisfacen estos conjuntos; en la sección 4 se veran algunas clases de espacios que se usan en algunas variaciones del concepto de continuidad y se prueban algunas equivalencias de estas empleando los conjuntos vistos en la sección 3. Finalmente, en la sección 5 se ven algunas relaciones entre los conjuntos que allí se definen y los conjuntos abiertos.

2. Resultados generales

En esta sección daremos las definiciones y resultados generales que ocuparemos en este capítulo. Si el lector quiere encontrar información más detallada y completa acerca de los conceptos que se definen aquí, puede consultar [**3**] o [**6**].

Dado (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ denotaremos con $X \setminus A$ (o A^c cuando no haya lugar a confusión y sea más fácil de leer), $Int_X(A)$ y $cl_X(A)$ el complemento, interior y la cerradura de A en X, respectivamente. Recordemos también que $D \subset X$ es denso en X si todo abierto no vacío tiene intersección no vacía con D, y que D es nada denso si $X \setminus cl_X(D)$ es denso en X.

En la siguiente observación se resumen propiedades elementales y muy conocidas de estos conceptos.

Observación 2.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A, F, D \subset X$, entonces*

1. $Int_X(A) \subset A$.
2. $A \subset cl_X(A)$.

3. *$A = Int_X(A)$ si y sólo si A es un conjunto abierto de X.*
4. *$A = cl_X(A)$ si y sólo si A es un conjunto cerrado de X.*
5. *Si $U \subset X$ es un conjunto abierto tal que $U \subset A$, entonces $U \subset Int_X(A)$.*
6. *Si $F \subset X$ es un conjunto cerrado tal que $A \subset F$, entonces $cl_X(A) \subset F$.*
7. *D es un conjunto denso de X si $cl_X(D) = X$.*
8. *D es un conjunto nada denso de X si $Int_X[cl_X(D)] = \emptyset$.*

Lema 2.2. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $Int_X(A) = [cl_X(A^c)]^c$.*

Lema 2.3. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $D \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *D es un conjunto denso de X.*
2. *Para todo conjunto abierto no vacio $U \subset X$, $cl_X(U) = cl_X(U \cap D)$.*

Lema 2.4. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $D \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *D es un conjunto nada denso de X.*
2. *Para todo conjunto abierto $U \subset X$, existe un conjunto abierto $W \subset U$ tal que $W \cap D = \emptyset$.*

Del Lema 2.4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.5. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

1. *Si $O \subset X$ un conjunto abierto, entonces $cl_X(O) \setminus O$ es un conjunto nada denso de X.*
2. *Si $A \subset X$ es un conjunto nada denso y $B \subset A$, entonces B es un conjunto nada denso de X.*

Lema 2.6. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen.*

1. *$Int_X[cl_X(A)] = Int_X[cl_X(Int_X[cl_X(A)])]$.*
2. *$cl_X[Int_X(A)] = cl_X[Int_X(cl_X[Int_X(A)])]$.*

Definición 2.7. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces*

1. *A es un abierto regular si $A = Int_X[cl_X(A)]$.*
2. *A es un cerrado regular si $A = cl_X[Int_X(A)]$.*

Del Lema 2.6 y la Definición 2.7 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.8. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces*

1. *Si A es un conjunto abierto, entonces $cl_X(A)$ es un cerrado regular.*
2. *Si A es un conjunto cerrado, entonces $Int_X(A)$ es un abierto regular.*

3. Conjuntos preabiertos, semiabiertos y α abiertos

Los conceptos de conjunto preabierto, conjunto semiabierto y conjunto α abierto fueron formulados por Mashhour et. al. en [**14**], Levine en [**13**] y Njasted en [**15**], respectivamente, mientras que Ganster y Reilly, en [**8**] usaron el concepto de conjunto localmente cerrado para estudiar algunas nociones generalizadas de continuidad aunque ellos mencionan que este concepto estaba implícito en [**12**]; aquí usaremos la definición de Bourbaki dada en [**1**] al igual que Ganster y Reilly.

Definición 3.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces diremos que*

1. *A es un conjunto preabierto si $A \subset Int_X[cl_X(A)]$.*
2. *A es un conjunto semiabierto si $A \subset cl_X[Int_X(A)]$.*
3. *A es un conjunto α abierto si $A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$.*
4. *A es un conjunto localmente cerrado si existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que $A = U \cap F$.*

Observación 3.2. *No es difícil probar que que si $A \subset X$ es un conjunto abierto, entonces A es conjunto preabierto, semiabierto y α abierto. Así tambien, si $D \subset X$ es un conjunto denso en X, entonces D es un conjunto preabierto.*

Para simplificar la escritura de las propiedades que estudiamos a continuación vamos a convenir en lo siguiente para cualquier espacio topológico (X, τ):
$PO(X, \tau) = \{A \subset X : A$ es un conjunto preabierto$\}$,
$SO(X, \tau) = \{A \subset X : A$ es un conjunto semiabierto$\}$,
$\tau_\alpha = \{A \subset X : A$ es un conjunto α abierto$\}$.
Ya con esta convención enunciamos nuestro primer lema.

Lema 3.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

1. *Si $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \in PO(X, \tau)$.*
2. *Si $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \in SO(X, \tau)$.*
3. *Si $A \in PO(X, \tau) \cap SO(X, \tau)$, entonces $A \in \tau_\alpha$.*
4. *Si $A \in PO(X, \tau)$ y $U \subset X$ es un conjunto abierto, entonces $U \cap A \in PO(X, \tau)$.*
5. *Si $A \in SO(X, \tau)$ y $U \subset X$ es un conjunto abierto, entonces $U \cap A \in SO(X, \tau)$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$.

Como $Int_X(A) \subset A$, entonces $cl_X[Int_X(A)] \subset cl_X(A)$ de donde se sigue que
$$Int_X(cl_X[Int_X(A)]) \subset Int_X[cl_X(A)],$$
entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in PO(X, \tau)$.

2) Sea $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$.

Dado que
$$Int_X(cl_X[Int_X(A)]) \subset cl_X[Int_X(A)] \text{ y } A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)]),$$
entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in SO(X, \tau)$.

3) Sea $A \in PO(X, \tau) \cap SO(X, \tau)$, entonces $A \in SO(X, \tau)$ es decir $A \subset cl_X[Int_X(A)]$ lo cual implica que $Int_X[cl_X(A)] \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$ y como $A \in PO(X, \tau)$ entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$, de donde se sigue que $A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$.

Por lo tanto $A \in \tau_\alpha$.

4) Sean $A \in PO(X, \tau)$ y $U \subset X$ es un conjunto abierto.

Como $U \cap A \subset U \cap cl_X(A) \subset cl_X(U \cap A)$, entonces $Int_X(U \cap cl_X(A)) \subset Int_X(cl_X(U \cap A))$ y
$$Int_X(U \cap cl_X(A)) = Int_X(U) \cap Int_X[cl_X(A)] = U \cap Int_X[cl_X(A)].$$
Y dado que $A \subset Int_X[cl_X(A)]$, entonces
$$U \cap A \subset U \cap Int_X[cl_X(A)] \subset Int_X(U \cap cl_X(A)) \subset Int_X(cl_X(U \cap A)).$$
Por lo tanto, $U \cap A \in PO(X, \tau)$.

5) Sean $A \in SO(X, \tau)$ y $U \subset X$ es un conjunto abierto.

Como $A \in SO(X,\tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$, de donde se sigue que,

$$U \cap A \subset U \cap cl_X[Int_X(A)] \subset cl_X(U \cap Int_X(A)) \subset cl_X(Int_X[U \cap (A)]),$$

lo cual implica que $U \cap A \subset cl_X(Int_X[U \cap (A)])$.

Por lo tanto $U \cap A \in SO(X,\tau)$. □

De los incisos 1, 2 y 3 del Lema 3.3 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $A \in \tau_\alpha$.
2. $A \in PO(X,\tau) \cap SO(X,\tau)$.

Corolario 3.5. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. $\tau \subset \tau_\alpha$.
2. *Si $U \subset X$ es un conjunto abierto y $A \in \tau_\alpha$, entonces $U \cap A \in \tau_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Si $U \subset X$ un conjunto abierto, entonces por la Observación 2, se sigue que $U \in PO(X,\tau) \cap SO(X,\tau)$ de donde aplicando el Corolario 3.4 se tiene que $U \in \tau_\alpha$.

Por lo tanto $\tau \subset \tau_\alpha$.

2) Si $U \subset X$ es un conjunto abierto y $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ de donde se sigue que

$$U \cap A \subset U \cap Int_X[cl_X(Int_X(A))] = Int_X(U \cap cl_X(Int_X(A))) \subset Int_X[cl_X(Int_X(U \cap A))]$$

de donde se sigue que $U \cap A \subset Int_X[cl_X(Int_X(U \cap A))]$.

Por lo tanto $U \cap A \in \tau_\alpha$. □

Teorema 3.6. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A \in \tau_\alpha$.
2. *Existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $U \subset A \subset Int_X[cl_X(U)]$.*
3. *Existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto nada denso $N \subset X$ tales que $A = U \setminus N$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2). Si $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$. Si consideramos $U = Int_X(A)$, es claro que

$$U \subset A \text{ y que } Int_X[cl_X(U)] = Int_X[cl_X(Int_X(A))],$$

de donde se sigue que $A \subset Int_X[cl_X(U)]$.

Por lo tanto $U \subset A \subset Int_X[cl_X(U)]$.

2) implica 1). Supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $U \subset A \subset Int_X[cl_X(U)]$. Como $U \subset A$, entonces $U \subset Int_X(A)$ lo cual implica que

$$A \subset Int_X[cl_X(U)] \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))].$$

Por lo tanto $A \in \tau_\alpha$.

1) implica 3). Si $A \in \tau_\alpha$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$, y es claro que

$$A = Int_X[cl_X(Int_X(A))] \setminus (Int_X[cl_X(Int_X(A))] \setminus A).$$

Definamos $U = Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ y $N = Int_X[cl_X(Int_X(A))] \setminus A$ y dado que

$$Int_X(A) \subset A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))] \subset cl_X(Int_X(A))$$

se sigue que $Int_X[cl_X(Int_X(A))] \setminus A \subset cl_X(Int_X(A)) \setminus Int_X(A)$.

Si $O = Int_X(A)$, entonces

$$cl_X(Int_X(A)) \setminus Int_X(A) = cl_X(O) \setminus O$$

y, del Corolario 2.5, se tiene que $cl_X(O) \setminus O$ es un conjunto nada denso en X y como $N \subset cl_X(O) \setminus O$ aplicando una vez más Corolario 2.5 se tiene que que N es un conjunto nada denso.

Por lo tanto, existe un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto nada denso $N \subset X$ tales que $A = U \setminus N$.

3) implica 1). Supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto nada denso $N \subset X$ tales que $A = U \setminus N$.

Es suficiente observar que $U \subset cl_X[Int_X(U)]$ y que $A \subset U$; de aquí se sigue que $A \subset U \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$. Por lo tanto $A \in \tau_\alpha$. □

Lema 3.7. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $A \in SO(X,\tau)$.
2. $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$.

Demostración: 1) implica 2). Si $A \in SO(X,\tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$ lo cual implica que

$$cl_X(A) \subset cl_X(cl_X[Int_X(A)]) = cl_X[Int_X(A)]$$

de donde se sigue que $cl_X(A) \subset cl_X[Int_X(A)]$.

Ahora, como $Int_X(A) \subset A$, se tiene que $cl_X[Int_X(A)] \subset cl_X(A)$ y, por lo tanto, $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$.

2)implica 1). Supongamos que $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$. Como $A \subset cl_X(A)$ y $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in SO(X,\tau)$. □

Lema 3.8. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A \in SO(X,\tau)$.
2. *Para todo conjunto denso $D \subset X$, $cl_X(A) = cl_X(A \cap D)$.*

Demostración: 1) implica 2). Sean $A \in SO(X,\tau)$ y $D \subset X$ un conjunto denso. Es claro que $A \cap D \subset A$ de donde se sigue que $cl_X(A \cap D) \subset cl_X(A)$.

Ahora, como $Int_X(A)$ es un conjunto abierto y D es denso, entonces del Lema 2.3 se sigue que
$cl_X[Int_X(A)] = cl_X[Int_X(A) \cap D]$ y dado que $Int_X(A) \subset A$ y $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$ tenemos que

$$cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)] = cl_X[Int_X(A) \cap D] \subset cl_X(A \cap D)$$

de donde se sigue que $cl_X(A) \subset cl_X(A \cap D)$.

Por lo tanto $cl_X(A) = cl_X(A \cap D)$.

2) implica 1). Sea $A \in SO(X,\tau)$ y supongamos que para todo conjunto denso $D \subset X$, $cl_X(A) = cl_X(A \cap D)$.

Si definimos $D = (X \setminus A) \cup Int_X(A)$ es claro que D es un conjunto denso en X, lo cual implica que

$$cl_X(A) = cl_X(A \cap D) = cl_X(A \cap (X \setminus A) \cup Int_X(A)) = cl_X[Int_X(A)]$$

y de aquí se sigue que $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$ lo cual implica que $A \subset cl_X[Int_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in SO(X,\tau)$. $\square$

Teorema 3.9. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A \in SO(X,\tau)$.
2. *Existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $U \subset A \subset cl_X(U)$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2). Si $A \in SO(X,\tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$. Si definimos $U = Int_X(A)$, obtenemos que

$$U \subset A \subset cl_X(U).$$

2) implica 1) Sean $A \subset X$ y $U \subset X$ un conjunto abierto tales que $U \subset A \subset cl_X(U)$.

Supongamos que $A \not\subset cl_X[Int_X(A)]$, entonces existe $x \in A$ tal que $x \notin cl_X[Int_X(A)]$ lo cual implica que existe un conjunto abierto $W \subset X$ tal que

$$x \in W \text{ y } W \cap Int_X(A) = \emptyset,$$

de donde se sigue que $W \cap U = \emptyset$.

Ahora, como $x \in A$ y $A \subset cl_X(U)$, entonces $x \in cl_X(U)$ lo cual implica que $W \cap U \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $A \in SO(X,\tau)$. $\square$

Teorema 3.10. *Si $A \in SO(X,\tau)$, entonces existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto nada denso $B \subset X$ tales que*

1. $A = U \cup B$.
2. $U \cap B = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: Como $A \in SO(X,\tau)$, por el Teorema 3.9, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $U \subset A \subset cl_X(U)$, de donde se sigue que $A \setminus U \subset (cl_X(U) \setminus U)$.

Si definimos $B = A \setminus U$, es claro que 1. y 2. se satisfacen y, por el Corolario 2.5, $(cl_X(U) \setminus U)$ es nada denso, y como $B \subset (cl_X(U) \setminus U)$, entonces B es nada denso. $\square$

Lema 3.11. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. *Si $A \in SO(X,\tau)$ y $A \neq \emptyset$, entonces $Int_X(A) \neq \emptyset$.*
2. *Si $A_i \in SO(X,\tau)$ para todo $i \in I$, entonces $\cup\{A_i : i \in I\} \in SO(X,\tau)$.*
3. *Si $\{x\} \in SO(X,\tau)$, entonces $\{x\}$ es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN: 1). Sea $A \in SO(X,\tau)$ con $A \neq \emptyset$.

Si $Int_X(A) = \emptyset$, entonces $cl_X[Int_X(A)] = \emptyset$ y como $A \in SO(X,\tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$ de donde se sigue que $A = \emptyset$ lo cual no puede ser.

Por lo tanto $Int_X(A) \neq \emptyset$.

2). Supongamos que para todo $i \in I$, $A_i \in SO(X,\tau)$. Como $A_i \subset \cup\{A_i : i \in I\}$, se sigue que $Int_X(A_i) \subset Int_X(\cup\{A_i : i \in I\})$ lo cual implica que $cl_X[Int_X(A_i)] \subset cl_X[Int_X(\cup\{A_i : i \in I\})]$ de donde obtenemos que

$$\cup\{cl_X[Int_X(A_i)] : i \in I\} \subset cl_X[Int_X(\cup\{A_i : i \in I\})].$$

Ahora, como $A_i \in SO(X,\tau)$ para todo $i \in I$, entonces $A_i \subset cl_X[Int_X(A_i)]$ para todo $i \in I$ lo cual implica que $\cup\{A_i : i \in I\} \subset \cup\{cl_X[Int_X(A_i)] : i \in I\}$ de donde se sigue que

$$\cup\{A_i : i \in I\} \subset cl_X[Int_X(\cup\{A_i : i \in I\})].$$

Por lo tanto $\cup\{A_i : i \in I\} \in SO(X,\tau)$.

3). Como $\{x\} \in SO(X,\tau)$, por el inciso 1., $Int_X(\{x\}) \neq \emptyset$ lo cual implica que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset \{x\}$. Por lo tanto, $\{x\}$ es un conjunto abierto. □

Teorema 3.12. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A \in \tau_\alpha$.
2. *Para todo $B \in SO(X,\tau)$, $A \cap B \in SO(X,\tau)$.*

Demostración: 1) implica 2). Sean $A \in \tau_\alpha$ y $B \in SO(X,\tau)$.

Si $x \in A \cap B$, entonces $x \in A \subset Int_X(cl_X(Int_X(A)))$ y $x \in B \subset cl_X(Int_X(B))$ de donde se sigue que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$. Como $x \in A$ y $A \in \tau_\alpha$, entonces $x \in Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ de donde se sigue que $x \in U \cap Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ y dado que $x \in B$ y $B \in SO(X,\tau)$ se tiene que $x \in cl_X(Int_(B))$ lo cual implica que

$$(U \cap Int_X[cl_X(Int_X(A))]) \cap Int_X(B) \neq \emptyset.$$

Sea $V = (U \cap Int_X[cl_X(Int_X(A))]) \cap Int_X(B) \neq \emptyset$. Dado que $Int_X[cl_X(Int_X(A))] \subset cl_X(Int_X(A))$, entonces $V \subset cl_X(Int_X(A))$ de donde se tiene que $V \cap Int_X(A) \neq \emptyset$ y, como $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ se sigue que $Int_X(A) \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ lo cual implica que

$$V \cap Int_X(A) = [(U \cap Int_X(B)] \cap Int_X(A)$$

de donde se sigue que $\emptyset \neq U \cap (Int_X(A) \cap Int_X(B)) = U \cap Int_X(A \cap B)$ lo cual implica que

$$x \in cl_X[Int_X(A \cap B)].$$

Por lo tanto $A \cap B \in SO(X,\tau)$.

2) implica 1). Sea $A \subset X$. Como $X \in SO(X,\tau)$, entonces $A \cap X \in SO(X,\tau)$, es decir, $A \in SO(X,\tau)$.

Supongamos que existe $x \in A \cap (Int_X[cl_X(Int_X(A))])^c$ y sea $B = [cl_X(Int_X(A))]^c$, entonces $x \in cl_X(B)$.

Probemos que $\{x\} \cup B \in SO(X,\tau)$. Sea $y \in (\{x\} \cup B)$ y supongamos que existe un conjunto abierto

$$W \subset X \text{ tal que } y \in W \text{ y } W \cap Int_X(\{x\} \cup B) = \emptyset.$$

Como $W \cap Int_X(\{x\} \cup B) = \emptyset$, entonces $Int_X(\{x\} \cup B) \subset W^c$ de donde se sigue que $cl_X[Int_X(\{x\} \cup B)] \subset W^c$ y, como $B = Int_X(B) \subset Int_X(\{x\} \cup B)$, entonces $cl_X(B) \subset W^c$.

Como $x \in cl_X(B)$ se sigue que $(\{x\} \cup B) \subset cl_X(B) \subset W^c$ lo cual implica que $y \in W^c$ y esto no puede ser.

Por lo tanto $\{x\} \cup B \in SO(X,\tau)$ de donde por hipotesis se sigue que

$$A \cap (\{x\} \cup B) \in SO(X,\tau)$$

y dado que $A \cap (\{x\} \cup B) = \{x\}$, entonces $\{x\} \in SO(X,\tau)$ y, por el Lema 3.11, se tiene que $\{x\}$ es un conjunto abierto lo cual implica que $x \in Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ que es una contradicción.

Por lo tanto si $x \in A$, entonces $x \in Int_X[cl_X(Int_X(A))]$.

Concluimos que $A \in \tau_\alpha$. □

Teorema 3.13. *Si (X,τ) es un espacio topológico con $SO(X,\tau) \neq \tau_\alpha$, entonces existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $cl_X(U)$ no es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN: Como $SO(X,\tau) \neq \tau_\alpha$, por el Lema 3.3 se sigue que existe un conjunto $A \in SO(X,\tau)$ tal que $A \notin \tau_\alpha$, lo cual implica que $A \subset cl_X[Int_X(A)]$ y $A \not\subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])$.

Si definimos $U = Int_X(A)$, U es un conjunto abierto y si $cl_X(U)$ fuese un conjunto abierto, entonces $cl_X(U) = Int_X[cl_X(U)]$ de donde se sigue que $cl_X(Int_X(A)) = Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ lo cual implica que $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$ que es una contradicción.

Por lo tanto $cl_X(U)$ no es un conjunto abierto. □

Teorema 3.14. *Si (X,τ) es un espacio topológico tal que para todo $A, B \in SO(X,\tau)$, $A \cap B \in SO(X,\tau)$, entonces para todo conjunto abierto $U \subset X$, $cl_X(U)$ es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (X,τ) un espacio topológico tal que para todo $A, B \in SO(X,\tau)$, $A \cap B \in SO(X,\tau)$ y supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $cl_X(U)$ no es un conjunto abierto.

Como $cl_X(U)$ no es un conjunto abierto, entonces existe $x_0 \in cl_X(U) \backslash Int_X[cl_X(U)]$.

Definamos los conjuntos

$$A = \{x_0\} \cup Int_X[cl_X(U)] \text{ y } B = [Int_X[cl_X(U)]]^c.$$

Como $A = \{x_0\} \cup Int_X[cl_X(U)]$, entonces

$$Int_X(A) = Int_X(\{x_0\} \cup Int_X[cl_X(U)]) \supset Int_X(\{x_0\}) \cup Int_X[cl_X(U)]) \supset Int_X[cl_X(U)])$$

de donde se sigue que $cl_X(Int_X(A)) \supset cl_X(Int_X[cl_X(U)]))$ y como U es un conjunto abierto, entonces del Corolario 2.8 y Definición 2.7 tenemos que $cl_X(Int_X[cl_X(U)]) = cl_X(U)$ por lo tanto $cl_X(Int_X(A)) \supset cl_X(U)$.

Ahora como $Int_X[cl_X(U)] \subset cl_X(U)$ y $x_0 \in cl_X(U)$, entonces

$$\{x_0\} \cup Int_X[cl_X(U)] \subset cl_X(U)$$

de donde se sigue que $cl_X[Int_X(A)] \subset cl_X(U)$.

Por lo tanto

$$cl_X(Int_X(A)) = cl_X(U).$$

En forma similar podemos ver que

$$cl_X(Int_X(B)) = [Int_X[cl_X(U)]]^c \cup Fr(U)$$

de donde se sigue que

$$A \subset cl_X(Int_X(A)) \text{ y } B \subset cl_X(Int_X(B))$$

de tal manera que $A, B \in SO(X,\tau)$.

Es claro que $A \cap B = \{x_0\}$ y como $x_0 \in cl_X(U) \backslash Int_X[cl_X(U)]$ se tiene que $\{x_0\}$ no es un conjunto abierto. Por lo tanto, del Lema 3.11, se sigue que $\{x_0\} \notin SO(X,\tau)$ lo cual implica que $A \cap B \notin SO(X)$ que no puede ser.

Por lo tanto para todo conjunto abierto $U \subset X$, $cl_X(U)$ es un conjunto abierto. □

Lema 3.15. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces para cada $x \in X$ se satisface una y sólo una de las siguientes afirmaciones $\{x\} \in PO(X,\tau)$ o $Int_X[cl_X(\{x\})] = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in X$ es tal que $Int_X[cl_X(\{x\})] \neq \emptyset$, entonces existe $y \in Int_X[cl_X(\{x\})]$ lo cual implica que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que

$y \in U \subset cl_X(\{x\})$ así que $x \in U$ de donde se sigue que $x \in U \subset cl_X(\{x\})$, es decir, $\{x\} \subset Int_X[cl_X(\{x\})]$.

Por lo tanto $\{x\} \in PO(X,\tau)$. □

Observemos que si $\{x\} \notin PO(X,\tau)$, entonces $Int_X[cl_X(\{x\})] \neq \emptyset$.

Lema 3.16. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

1. *Si $A \in PO(X,\tau)$, entonces $cl_X(A) = cl_X[Int_X(cl_X(A))]$.*
2. *Si $A_i \in PO(X,\tau)$ para todo $i \in I$, entonces $\cup\{A_i : i \in I\} \in PO(X,\tau)$.*

Demostración: 1). Si $A \in PO(X,\tau)$, entonces $A \subset Int_X(cl_X(A))$ de donde $cl_X(A) \subset cl_X[Int_X(cl_X(A))]$ y como $Int_X(cl_X(A)) \subset cl_X(A)$, tenemos que

$$cl_X[Int_X(cl_X(A))] \subset cl_X(A)$$

de donde se sigue que $cl_X(A) = cl_X[Int_X(cl_X(A))]$.

2). Sean $A_i \in PO(X,\tau)$ para todo $i \in I$. Como $A_i \subset \cup\{A_i : i \in I\}$, entonces $cl_X(A_i) \subset cl_X(\cup\{A_i : i \in I\})$, de donde se sigue que $Int_X[cl_X(A_i)] \subset Int_X[cl_X(\cup\{A_i : i \in I\})]$ lo cual implica que

$$\cup\{Int_X[cl_X(A_i)] : i \in I\} \subset Int_X[cl_X(\cup\{A_i : i \in I\})]$$

y dado que $A_i \in PO(X,\tau)$ para todo $i \in I$, entonces $A_i \subset Int_X[cl_X(A_i)]$ lo cual implica que $\cup\{A_i : i \in I\} \subset \cup\{Int_X[cl_X(A_i)] : i \in I\}$, de donde se sigue que $\cup\{A_i : i \in I\} \subset Int_X[cl_X(\cup\{A_i : i \in I\})]$.

Por lo tanto $\cup\{A_i : i \in I\} \in PO(X,\tau)$. □

Lema 3.17. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A \in PO(X,\tau)$.*
2. *Existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $A \subset U \subset cl_X(A)$.*

Demostración: 1) implica 2). Si $A \in PO(X,\tau)$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$. Si $U = Int_X[cl_X(A)]$, como $cl_X(A) = cl_X(Int_X[cl_X(A)])$, entonces $A \subset U \subset cl_X(A)$.

2) implica 1). Supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $A \subset U \subset cl_X(A)$.

Como $U \subset cl_X(A)$ y U es un conjunto abierto, entonces $U \subset Int_X[cl_X(A)] \subset cl_X(A)$, de donde se sigue que $A \subset Int_X[cl_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in PO(X,\tau)$. □

Lema 3.18. *Si (X,τ) es un espacio topológico, $A \in PO(X,\tau)$, $G = Int_X[cl_X(A)]$ y $D = (X \setminus G) \cup A$, entonces*

1. *$cl_X(A) = cl_X(G)$,*
2. *G es un abierto regular,*
3. *D es un conjunto denso en X y*
4. *$A = G \cap D$.*

Demostración: 1) Sean $A \in PO(X,\tau)$ y $G = Int_X[cl_X(A)]$, entonces $A \subset G$ de donde se sigue que $cl_X(A) \subset cl_X(G)$.

Ahora sean $x \in cl_X(G)$ y $U \subset X$ un conjunto abierto tal que $x \in U$, entonces $U \cap G \neq \emptyset$ lo cual implica que existe $y \in U \cap Int_X[cl_X(A)]$ de donde se sigue que $y \in U \cap cl_X(A)$, es decir $U \cap A \neq \emptyset$, con lo cual tenemos que $cl_X(G) \subset cl_X(A)$.

Por lo tanto $cl_X(A) = cl_X(G)$.

2) Se sigue del Lema 2.6.

3) Como

$$cl_X(D) = cl_X[(X \setminus G) \cup A] = cl_X(X \setminus G) \cup cl_X(A) = cl_X(X \setminus G) \cup cl_X(G) = X,$$

D es denso en X.

4) Como $A \subset G$ y $A \subset D$, entonces $A \subset G \cap D$ y es claro que $G \cap D \subset A$.

Por lo tanto $A = G \cap D$. □

Teorema 3.19. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$A \in PO(X, \tau)$.*
2. *Existe un abierto regular $G \subset X$ tal que $A \subset G$ y $cl_X(A) = cl_X(G)$.*
3. *Existen un abierto regular $G \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = G \cap D$.*
4. *Existen un conjunto abierto $G \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = G \cap D$.*

Demostración: 1) implica 2). Se sigue de los incisos 1 y 2 del Lema 3.18.

2) implica 3). Se sigue de los incisos 2 y 3 del Lema 3.18.

3) implica 4). Inmediato.

4) implica 1). Supongamos que $A = G \cap D$ con $G \subset X$ un conjunto abierto y $D \subset X$ un conjunto denso. Por el Lema 2.3 tenemos que $cl_X(G \cap D) = cl_X(G)$ de donde se sigue que $cl_X(A) = cl_X(G)$ lo cual implica que $G \subset cl_X(A)$ y dado que G es un conjunto abierto tenemos que $G \subset Int_X[cl_X(A)]$ y de aquí se sigue que $A \subset Int_X[cl_X(A)]$.

Por lo tanto $A \in PO(X, \tau)$. □

Del Teorema 3.19 incisos 1 y 4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.20. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A \in PO(X, \tau)$.*
2. *Existen un conjunto abierto $G \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = G \cap D$.*

Corolario 3.21. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$PO(X, \tau)$ es topología.*
2. *Para cualesquiera conjuntos densos $D_1, D_2 \subset X$, $D_1 \cap D_2 \in PO(X, \tau)$.*

Demostración: 1) implica 2) Sean $D_1, D_2 \subset X$ conjuntos densos de la Observación 3.2 se sigue que $D_1, D_2 \in PO(X, \tau)$ lo cual implica que $D_1 \cap D_2 \in PO(X, \tau)$.

2) implica 1) Es claro que $\emptyset, X \in PO(X, \tau)$ ademas si $A, B \in PO(X, \tau)$, entonces $A \cup B \in PO(X, \tau)$ ya que como $A, B \in PO(X, \tau)$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$, $B \subset Int_X[cl_X(B)]$ y dado que

$$Int_X[cl_X(A)] \subset Int_X[cl_X(A \cup B)] \text{ y } Int_X[cl_X(B)] \subset Int_X[cl_X(A \cup B)]$$

se sigue que $A \cup B \subset Int_X[cl_X(A \cup B)]$ de donde podemos concluir que $PO(X, \tau)$ es cerrado bajo uniones.

Ahora como $A, B \in PO(X, \tau)$, entonces del Teorema 3.19 se sigue que existen Conjuntos abiertos U_1, U_2 y conjuntos densos D_1, D_2 tales que $A = U_1 \cap D_1$ y $B = U_2 \cap D_2$ de donde

$$A \cap B = (U_1 \cap U_2) \cap (D_1 \cap D_2)$$

y dado que $U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto y $D_1 \cap D_2 \in PO(X,\tau)$ aplicando el Lema 3.3 podemos asegurar que $A \cap B \in PO(X,\tau)$ lo cual implica que $PO(X,\tau)$ es topología. $\square$

Teorema 3.22. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Para todo $A \in PO(X,\tau)$, A es un conjunto abierto.*
2. *Para todo conjunto denso $D \subset X$, D es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2). Supongamos que para todo $A \in PO(X,\tau)$, A es un conjunto abierto y sea $D \subset X$ un conjunto denso. De la Observación 3.2 tenemos que $D \in PO(X,\tau)$. Por lo tanto, D es un conjunto abierto.

2) implica 1). Supongamos que para todo conjunto denso $D \subset X$, D es un conjunto abierto y sea $A \in PO(X,\tau)$. Del Corolario 3.20, existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = U \cap D$. Como D es un conjunto denso, entonces D es un conjunto abierto. Por lo tanto A es un conjunto abierto. $\square$

Del Teorema 3.22 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.23. *Si (X,τ) es un espacio topológico tal todo conjunto denso es un conjunto abierto, entonces $PO(X,\tau) = \tau$.*

Teorema 3.24. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo conjunto $A \subset X$, $A \in PO(X,\tau)$.*
2. *Para todo conjunto abierto $U \subset X$, U es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2). Sea $U \subset X$ es un conjunto abierto, entonces $X \setminus U = cl_X(X \setminus U) \subset X$, de donde por hipotesis se sigue que $cl_X(X \setminus U) \in PO(X,\tau)$, entonces

$$cl_X(X \setminus U) \subset Int_X[cl_X[cl_X(X \setminus U)]] = Int_X[cl_X(X \setminus U)] = Int_X(X \setminus U)$$

de donde se sigue que $X \setminus U \subset Int_X(X \setminus U)$ lo cual implica que $X \setminus U = Int_X(X \setminus U)$. Por lo tanto U es un conjunto cerrado.

2) implica 1). Supongamos que para todo conjunto abierto $U \subset X$, U es un conjunto cerrado y sea $A \subset X$. Como $X \setminus cl_X(A)$ es un conjunto abierto, entonces $X \setminus cl_X(A)$ es un conjunto cerrado de donde se sigue que

$$X \setminus cl_X(A) = cl_X(X \setminus cl_X(A)) = X \setminus Int_X[cl_X(A)]$$

lo cual implica que $cl_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$ y así tenemos que $A \subset Int_X[cl_X(A)]$. Por lo tanto $A \in PO(X,\tau)$. $\square$

Lema 3.25. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $S \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *S es un conjunto localmente cerrado.*
2. *Existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $S = U \cap cl_X(S)$.*
3. *$cl_X(S) \setminus S$ es un conjunto cerrado.*
4. *$S \cup (X \setminus cl_X(S))$ es un conjunto abierto.*
5. *$S \subset Int_X(S \cup [X \setminus cl_X(S)])$.*

Demostración: 1) implica 2). Si S es un conjunto localmente cerrado, entonces por Definición 3.1 existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que $S = U \cap F$, de donde se sigue que $S \subset U$ y $S \subset F$.

Dado que F es un conjunto cerrado y $S \subset F$ se sigue que $S \subset clX(S) \subset F$, entonces

$$S = U \cap S \subset U \cap cl_X(S) \subset U \cap F = S.$$

Por lo tanto $S = U \cap cl_X(S)$.

2) implica 3). Supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $S = U \cap cl_X(S)$, entonces S es un conjunto abierto en $cl_X(S)$ lo cual implica que $cl_X(S) \setminus S$ es un conjunto cerrado en $cl_X(S)$ y, como $cl_X(S)$ es un conjunto cerrado en X, entonces $cl_X(S) \setminus S$ es un conjunto cerrado en X.

3) implica 4). Supongamos que $cl_X(S) \setminus S$ es un conjunto cerrado en X, entonces $X \setminus (cl_X(S) \setminus S)$ es un conjunto abierto y, como

$$X \setminus (cl_X(S) \setminus S) = (X \setminus cl_X(S)) \cup (X \cap S) = (X \setminus cl_X(S)) \cup S,$$

obtenemos que $(X \setminus cl_X(S)) \cup S$ es un conjunto abierto.

4) implica 5). Supongamos que $(X \setminus cl_X(S)) \cup S$ es un conjunto abierto. Es claro que $S \subset (X \setminus cl_X(S)) \cup S$ y como $(X \setminus cl_X(S)) \cup S$ es un conjunto abierto, entonces

$$(X \setminus cl_X(S)) \cup S = Int_X[(X \setminus cl_X(S)) \cup S].$$

Por lo tanto $S \subset Int_X[(X \setminus cl_X(S)) \cup S]$.

5) implica 1). Supongamos que $S \subset Int_X[(X \setminus cl_X(S)) \cup S]$, entonces

$$S = S \cap cl_X(S) \subset Int_X[(X \setminus cl_X(S)) \cup S] \cap cl_X(S) = S.$$

de donde se sigue que $S = Int_X[(X \setminus cl_X(S)) \cup S] \cap cl_X(S)$. Por lo tanto S es un conjunto localmente cerrado. $\square$

4. Espacios submaximales y conceptos cercanos

El concepto de espacio submaximal fue introducido por Bourbaki en [**1**] y parece ser que una de las razones para considerar esta clase de espacios es el estudio de los espacios maximales. Los espacios extremadamente disconexos fueron definidos por M. H. Stone en [**22**] y, según T. Noiri, los espacios hiperconexos o irreducibles se definieron en [**21**]. En [**11**] es donde por primera vez se definen los espacios puerta.

Definición 4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que*

1. *(X, τ) es un espacio submaximal si todo conjunto denso es un conjunto abierto en X.*
2. *(X, τ) es un espacio es localmente indiscreto si todo conjunto abierto es un conjunto cerrado en X.*
3. *(X, τ) es un espacio extremadamente disconexo si para todo conjunto abierto $U \subset X$, $cl_X(U) \in \tau$.*
4. *(X, τ) es un espacio hiperconexo si para todo conjunto abierto $V \subset X$, con $V \neq \emptyset$, V es un conjunto denso.*
5. *(X, τ) es un espacio puerta si para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto abierto o cerrado en X.*

Teorema 4.2. *Si (X, τ) es un espacio submaximal, entonces todo conjunto $A \in PO(X, \tau)$ es un conjunto abierto de X.*

Demostración: Se sigue del Teorema 3.22. $\square$

Corolario 4.3. *Si (X, τ) es un espacio submaximal, entonces para todo $A_1, A_2 \in PO(X, \tau)$, $A_1 \cap A_2 \in PO(X, \tau)$.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del Corolario 3.23. $\square$

Corolario 4.4. *Si (X, τ) es un espacio submaximal, entonces $PO(X, \tau)$ es una topología sobre X.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del Corolario 3.23. $\square$

Teorema 4.5. *Si (X, τ) es un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *(X, τ) es un espacio submaximal.*
2. *Para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto localmente cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: 2) implica 1). Supongamos que para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto localmente cerrado. Si $D \subset X$ es un conjunto denso, entonces D es un conjunto localmente cerrado. Si aplicamos el Lema 3.25, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $D = U \cap cl_X(D)$. De aquí se tiene que

$$D = U \cap cl_X(D) = U \cap X = U.$$

Por lo tanto D es un conjunto abierto.

1) implica 2). Supongamos que X es un espacio submaximal y sea $A \subset X$ y definamos $D = (X \setminus cl_X(A)) \cup A$. Es fácil ver que D es un conjunto denso y, por lo tanto, un conjunto abierto; además:

$$A = D \cap cl_X(A).$$

Por lo tanto A es un conjunto localmente cerrado. $\square$

Es claro que si todo subconjunto S de (X, τ) satisface cualquiera de las condiciones del Lema 3.25, entonces (X, τ) es un espacio submaximal.

Teorema 4.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio localmente indiscreto.*
2. *Para todo $A \subset X$, $A \in PO(X, \tau)$.*
3. *Para todo $x \in X$, $\{x\} \in PO(X, \tau)$.*
4. *Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, $F \in PO(X, \tau)$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) si y sólo si 2) se sigue del Teorema 3.24.

2) si y sólo si 3) se sigue del Lema 3.16 y 2) implica 4) es inmediato.

4) implica 2). Supongamos que para todo conjunto cerrado $F \subset X$, $F \in PO(X, \tau)$ y sea $A \subset X$. Por hipótesis $cl_X(A) \in PO(X, \tau)$ de donde $cl_X(A) \subset Int_X[cl_X[cl_X(A)]] = Int_X[cl_X(A)]$ lo cual implica que $cl_X(A) \subset Int_X[cl_X(A)]$ y de aquí que $A \subset Int_X[cl_X(A)]$. Por lo tanto para todo $A \subset X$, $A \in PO(X, \tau)$. $\square$

Teorema 4.7. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para todo $B \subset X$ tal que $B = cl_X[Int_X(B)]$, $B \in PO(X, \tau)$.*
2. *Para todo $B \in SO(X, \tau)$, $B \in PO(X, \tau)$.*

Demostración: 1) implica 2). Supongamos que para todo $B \subset X$ tal que $B = cl_X[Int_X(B)]$, $B \in PO(X,\tau)$ y sea $A \in SO(X,\tau)$. Como $A \in SO(X,\tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$ de donde aplicando el Lema 3.8 tenemos que $cl_X(A) = cl_X[Int_X(A)]$ y aplicando el Lema 2.6 y la Definición 2.7 tenemos que $cl_X[Int_X(A)]$ es un cerrado regular, así que

$$cl_X(A) \subset Int_X[cl_X[cl_X(A)]] = Int_X[cl_X(A)].$$

Esto implica que $cl_X(A) \subset Int_X[cl_X(A)]$ y como $A \subset cl_X A$, entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$. Por lo tanto $A \in PO(X,\tau)$.

2) implica 1). Supongamos que para todo $B \in SO(X,\tau)$, $B \in PO(X,\tau)$ y

que existe $A \subset X$ tal que $A = cl_X[Int_X(A)$ y $A \notin PO(X,\tau)$. Como $A = cl_X[Int_X(A)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)$ lo cual implica que $A \in SO(X,\tau)$ y de aquí que $A \in PO(X,\tau)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, para todo $B \subset X$ tal que $B = cl_X[Int_X(B)]$, $B \in PO(X,\tau)$. □

Lema 4.8. *Si (X,τ) es un espacio topológico extremadamente disconexo, entonces $SO(X,\tau) = \tau_\alpha$.*

Demostración: Se sigue del Teorema 3.13. □

Teorema 4.9. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio extremadamente disconexo.*
2. *Para todo $A \subset X$ tal que $A = cl_X[Int_X(A)]$, $A \in PO(X,\tau)$.*
3. *Para todo $A \in SO(X,\tau)$, $A \in PO(X,\tau)$.*
4. *Para todo $A \in PO(X,\tau)$, $cl_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$.*
5. *Para todo $A \in PO(X,\tau)$, $cl(A) \in PO(X,\tau)$.*

Demostración: 1) implica 4). Si X es un espacio extremadamente disconexo y $A \in PO(X,\tau)$, entonces por el Teorema 3.19, existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = U \cap D$ así que, si aplicamos el Lema 2.3 y la hipótesis, se sigue que

$$cl_X(A) = cl_X(U \cap D) = cl_X(U) = U$$

lo cual implica que $cl_X(A) = U$ y, entonces

$$cl_X(A) = U = Int_X(U) = Int_X[cl_X(A)].$$

Por lo tanto, $cl_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$.

4) implica 1). Supongamos que para todo $A \in PO(X,\tau)$, $cl_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$ y sea $U \subset X$ un conjunto abierto. Como para cualquier conjunto abierto $U \subset X$, $U \in PO(X,\tau)$, entonces

$$cl_X(U) = Int_X[cl_X(U)].$$

Por lo tanto, X es un espacio extremadamente disconexo.

5) implica 4). Supongamos que $cl_(A) \in PO(X,\tau)$. Por lo tanto, para todo $A \in PO(X,\tau)$ se tiene que

$$cl_X(A) \subset Int_X[cl_X[cl_X(A)]] = Int_X[cl_X(A)]$$

y dado que siempre se tiene que $Int_X[cl_X(A)] \subset cl_X(A)$, entonces para todo $A \in PO(X,\tau)$, $cl_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$.

4) implica 5) se sigue de la siguiente igualdad $Int_X[cl_X[cl_X(A)]] = Int_X[cl_X(A)]$.

2) implica 3) se sigue del Teorema 4.7.

3) implica 2) se sigue del Teorema 4.7.

1) implica 3). Supongamos que X es un espacio extremadamente disconexo y que $A \in SO(X, \tau)$, entonces $A \subset cl_X[Int_X(A)]$. Dado que $Int_X(A)$ es un conjunto abierto, por hipotesis se sigue que $cl_X[Int_X(A)] = Int_X[cl_X[Int_X(A)]]$ lo que implica que $A \subset Int_X[cl_X[Int_X(A)]]$ que, por la Definición 3.1 se tiene que $A \in \tau_\alpha$. Por lo tanto, del Lema 3.3 se tiene que $A \in PO(X, \tau)$.

3) implica 1). Supongamos que para todo $A \in SO(X, \tau)$, $A \in PO(X, \tau)$ y sea $U \subset X$ un conjunto abierto,

entonces $U \subset cl_X(Int_X(U))$ de donde, por el Lema 3.7, se tiene que $cl_X(U) = cl_X(Int_X(U))$ y como $cl_X(Int_X(U))$ es un conjunto cerrado regular, entonces $cl_X(U)$ es un conjunto cerrado regular y así, por el Teorema 4.7 tenemos que

$$cl_X(U) \subset Int_X(cl_X[cl_X(U)]) = Int_X(cl_X(U))$$

de donde se sigue que $cl_X(U) \subset Int_X(cl_X(U))$ y como $Int_X(cl_X(U)) \subset cl_X(U)$ concluimos que

$$cl_X(U) = Int_X(cl_X(U)).$$

Por lo tanto X es un espacio extremadamente disconexo. □

Corolario 4.10. *Si (X, τ) es un espacio localmente indiscreto, entonces (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo.*

Teorema 4.11. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es un espacio hiperconexo.*
2. *Para todo $A \in PO(X, \tau)$, A es denso en X.*

Demostración: 1) implica 2). Supongamos que X es un espacio hiperconexo y que $A \in PO(X, \tau)$, entonces existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un denso $D \subset X$ tales que $A = U \cap D$, de donde se sigue que

$$cl_X(A) = cl_X(U \cap D) = cl_X(U) = X$$

lo que implica que $cl_X(A) = X$.

2) implica 1) se sigue del hecho de que todo conjunto abierto es un conjunto preabierto. □

Teorema 4.12. *Si (X, τ) es un espacio puerta y $A \in PO(X, \tau)$, entonces A es un conjunto abierto.*

Demostración: Supongamos que existe $A \in PO(X, \tau)$ tal que A no es un conjunto abierto, entonces A es un conjunto cerrado lo cual implica que $A = cl_X(A)$, de donde se sigue que $Int_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$ y, como $A \subset Int_X[cl_X(A)]$, entonces $A \subset Int_X(A)$ lo que implica que A es un conjunto abierto contradiciendo nuestra suposición original. Por lo tanto, si $A \in PO(X, \tau)$, entonces A es un conjunto abierto. □

Teorema 4.13. *Si (X, τ) es un espacio puerta, entonces (X, τ) es un espacio submaximal.*

Demostración: Si $D \subset X$ un conjunto denso en X y D no es un conjunto abierto, entonces D es un conjunto cerrado de donde se sigue que $D = cl_X(D)$ y como $cl_X(D) = X$, entonces $D = X$ y esto implica que D es un conjunto abierto. Por lo tanto (X, τ) es un espacio submaximal. □

Teorema 4.14. *Sea (X,τ) un espacio hiperconexo. Si (X,τ) es un espacio submaximal, entonces (X,τ) es un espacio puerta.*

Demostración: Sea $A \subset X$. Si A es un conjunto denso, entonces A es un conjunto abierto. Si A no es un conjunto denso en X, entonces existe un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \subset (X \setminus A)$ y, como X es hiperconexo, U es un conjunto denso y así, $X \setminus A$ es un conjunto denso, es decir, un conjunto abierto de donde se sigue que A es un conjunto cerrado.

Por lo tanto (X,τ) es un espacio puerta. $\square$

5. $\mathcal{B}$ conjuntos y $\mathcal{A}$ conjuntos

Los conceptos de $\mathcal{A}$ conjunto y $\mathcal{B}$ conjunto se introdujeron por Tong en 1986 ([**23**]) y 1989 ([**24**]), respectivamente con el objetivo de obtener nuevas descomposiciones de continuidad. La razón por la que ponemos esta corta sección es porque la clase de los espacios localmente cerrados está entre estas clases, aquí solo veremos que a través de ellas se pueden caracterizar varias topologías.

Definición 5.1. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que*

1. *A es un t conjunto si $Int_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$.*
2. *A es un $\mathcal{B}$ conjunto si existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un t conjunto $B \subset X$, tales que $A = U \cap B$.*
3. *A es un $\mathcal{A}$ conjunto si existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un cerrado regular $R \subset X$, tales que $A = U \cap R$.*

Es claro que si A es un $\mathcal{A}$ conjunto, entonces A un conjunto localmente cerrado y que todo conjunto localmente cerrado es un $\mathcal{B}$ conjunto.

Lema 5.2. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $U \subset X$ un conjunto abierto, entonces*

1. *U es un $\mathcal{A}$ conjunto y*
2. *U es un $\mathcal{B}$ conjunto.*

Teorema 5.3. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $S \in PO(X,\tau)$ es un conjunto localmente cerrado, entonces S es un conjunto abierto.*

Demostración: Si $S \in PO(X,\tau)$, entonces $S \subset Int_X[cl_X(S)]$ y dado que S es un conjunto localmente cerrado, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $S = U \cap cl_X(S)$. De aquí se obtiene que

$$S = (U \cap cl_X(S)) \cap Int_X[cl_X(S)] = U \cap Int_X[cl_X(S)] = Int_X(U \cap cl_X(S)) = Int_X(S)$$

de donde se sigue que $S \subset Int_X(S)$, lo cual implica que $S = Int_X(S)$. Por lo tanto S es un conjunto abierto. $\square$

Teorema 5.4. *Si (X,τ) es un espacio topológico y $S \in PO(X,\tau)$ es un $\mathcal{B}$ conjunto, entonces S es un conjunto abierto.*

Demostración: Si $S \in PO(X,\tau)$, entonces $S \subset Int_X[cl_X(S)]$ y dado que S es un $\mathcal{B}$ conjunto, existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un t conjunto A tales que $S = U \cap A$. Como $S = U \cap A$ y $Int_X(A) = Int_X[cl_X(A)]$, entonces

$$Int_X[cl_X(S)] = Int_X[cl_X(U \cap A)] \subset Int_X[cl_X(U) \cap cl_X(A)] =$$
$$Int_X[cl_X(U)] \cap Int_X[cl_X(A)] = Int_X[cl_X(U)] \cap Int_X(A)$$

de donde se sigue que $Int_X[cl_X(S)] \subset Int_X[cl_X(U)] \cap Int_X(A)$.

Dado que

$$S = U \cap A = (U \cap A) \cap U \subset Int_X[cl_X(S)] \cap U \subset (Int_X[cl_X(U)] \cap Int_X(A)) \cap U = Int_X[cl_X(U)] \cap U \cap Int_X(A) = U \cap Int_X(A) \subset U \cap A = S,$$

se obtiene que $S = U \cap Int_X(A)$. □

Del Teorema 5.4 y dado que todo $\mathcal{A}$ conjunto es un $\mathcal{B}$ conjunto tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.5. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $S \in PO(X, \tau)$ es un $\mathcal{A}$ conjunto, entonces S es un conjunto abierto.*

Del Lema 5.2 y los Teoremas 5.3 y 5.4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.6. *Sean (X, τ) un espacio topologico y $U \subset X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *U es un conjunto abierto.*
2. *$U \in PO(X, \tau)$ y U es un conjunto localmente cerrado.*
3. *$U \in PO(X, \tau)$ y U es un $\mathcal{B}$ conjunto.*

Para finalizar, queremos agradecer al árbitro el tiempo dedicado a la revisión de este capítulo; sus sugerencias fueron muy útiles para la presentación de esta versión final.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki, *General Topology, Part I*, Addison-Wesley, Reading Mass. (1966).

[2] M. Caldas, S. Jafari and R. K. Saraf, *New classes of maps Betwen*, Bulletin of the Iranian. Math. Soc 31 (2005) 37-52.

[3] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de topología general*, UNAM, Aportaciones matemáticas, serie textos, 37, 2015.

[4] J. Dontchev, *Betwen $\mathcal{A}$-and $\mathcal{B}$ sets*, Math. Balkanica 12 (1998).

[5] J. Dontchev, *Survey on preopen sets*,The Proccedings of the 1998 Yatsuhiro Topological conferens 1-18.

[6] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Sigma series in pure mathematics, vol 6, 1989.

[7] M. Ganster, *Preopen sets and resolvable spaces*, Kyungpook Math. J. 27 (1987) 135-143.

[8] M. Ganster and I. Reilly, *Locally closed and LC-continuous functions Preopen*, Internat J. Math and Math. Sci 3 (1989) 417-424.

[9] D. S. Jankovic and I. L. Reilly, *On semi separation properties*, Indian J. pure Math., 16 (1985) 957-964.

[10] D. S. Jankovic and I. L. Reilly, *On semi-separation properties*, Indian J. Pure Appl. Math., 16 (1985) 957-964.

[11] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1955.

[12] C. Kuratoski and W. Sierpinski, *Sur les differences de deux ensembles fermes*, Tohoku Math. J. 20 (1921), 22-25.

[13] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological space*, Amer. Math. Monthly 70(1963) 36-41.

[14] A. S. Mashhor, M. E. Abd El-Monsef and S.N. El-Deeb, *On precontinuo μs and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. and Phys. Soc., Egypt 51 (1981).

[15] O. Njastad, *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. 15 (1965) 961-970.

[16] T. Noiri, *On semicontinuous mappings*, Kyungpook Math. J. 27 (1987) 135-143.

[17] T. Noiri, *On α-continuous functions*, Casopis pro Pestovani Matematiky 109 (1984) 118-126.

[18] T. Noiri, *A function which preserves connected spaces*, Casopis pro Pestovani Matematiky 107 (1982)

[19] I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, *On α continuity in topological spaces*, Acta Math. Hung. 45 (1985) 27-32.

[20] I.L. Reilly and M.K. Vamanamurthy, *On some questions concerning preopen sets*, Kyungpook Math. J. (1990) 87-93.
[21] L. A. Steen and J.A. Seebach Jr, *Couteraxamples in topology*, Holt, Rinehart and Winster, New York, 1970.
[22] M. H. Stone, *Algebraic characterizations of special Boolean rings*, Fund. Math. 29 (1937) 223-302.
[23] J. Tong, *A decomposition of continuity*, Acta Math. Hungar., 48 (1-2) (1986), 11-15.
[24] J. Tong, *On decomposition of continuity in topological spaces*, Acta Math. Hungar., 54 (1-2) (1989), 51-55.

Correos electrónicos:
maga@fcfm.buap.mx (Armando Martínez),
mibarra@fcfm.buap.mx (Manuel Ibarra).

Capítulo 2

Aritmética topológica

Gerardo Acosta
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México
José del Carmen Alberto-Domínguez
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán, Tabasco, México
Maira Madriz-Mendoza
Instituto Tecnológico Autónomo de México, CDMX, México

1. Introducción

En el presente trabajo, las letras $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ denotan los conjuntos de los números enteros y de los números naturales, respectivamente. Definimos

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{N}_b = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq b\}, \text{ para toda } b \in \mathbb{N}.$$

Para cada $a, b \in \mathbb{N}$, definimos la progresión aritmética en $\mathbb{N}$ mediante

$$P(a,b) = \{b + an \colon n \in \mathbb{N}_0\} = b + a\mathbb{N}_0.$$

Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$, consideramos las siguientes progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{N}$

$$P_F(a,b) = \{b + az \colon z \in \mathbb{Z}\} = b + a\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad M(a) = \{an \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

En la literatura es común denotar a $P(a,b)$ como $\{an+b\}$, a $P_F(a,b)$ como $\{az+b\}$ y a $M(a)$ como $\{an\}$.

En 1955, H. Furstenberg consideró en [**17**] (un pequeño artículo de doce líneas), la familia

$$\mathcal{B}_F = \{P_F(a,b) \colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}, \tag{1.1}$$

la cual es base para una topología τ_F en $\mathbb{Z}$, que llamamos la **topología de Furstenberg**. El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, conocido como el **espacio de Furstenberg**, es metrizable y cada miembro de $\mathcal{B}_F$ es abierto y cerrado en $(\mathbb{Z}, \tau_F)$, así que este espacio es cero-dimensional y por tanto hereditariamente disconexo.

El presente trabajo se sitúa en la frontera de la teoría de números y la topología de espacios no metrizables. El término «aritmética topológica», es una traducción de «arithmetica topologica», el cual fue utilizado en 1961 por S. W. Golomb en la plática que impartió durante el primer Toposym en la ciudad de Praga. Con este término, S. W. Golomb pretendió englobar aquellos problemas que se pueden plantear en el lenguaje de la teoría de números, y que se pueden interpretar y resolver desde un punto de vista topológico. Una prueba topológica del hecho de que el conjunto de los números primos es infinito (ver corolario 5.4), es una buena muestra del uso de este término. Dar una prueba topológica del famoso teorema de Dirichlet (ver teorema 5.7), que se estudia en un curso de teoría analítica de números y cuya demostración es complicada, es otra muestra del uso del término.

Utilizamos el término «aritmética topológica» no solo en el sentido de S. W. Golomb, sino también para referirnos a aquellos resultados topológicos en donde la teoría de números juega un papel importante en su demostración. Conforme se avance en la lectura, se verá que la teoría de números ayuda para probar resultados topológicos y que, a la inversa, algunos resultados aritméticos pueden probarse usando topología.

El contenido de este trabajo está basado en los artículos [**2**] y [**4**], los cuales forman parte de la tesis de doctorado del segundo autor. Un trabajo inicial apareció en [**3**], cuando el segundo autor desarrollaba lo que se convirtió en [**1**], su tesis de maestría. Incluimos también resultados que aparecen en [**28**], tesina de maestría dirigida por el primer autor. También aparecen resultados nuevos que incluso generalizan algunos presentados en [**2**].

Nuestro objetivo es considerar en $\mathbb{N}$ cuatro topologías. Cada una de ellas tiene por abierto básico a una progresión aritmética especial. Una vez definida la respectiva topología, presentamos propiedades tanto conocidas como nuevas del correspondiente espacio topológico. Hemos dividido el escrito en ocho secciones. Luego de la presente introducción, en la sección 2 incluimos nociones de espacios topológicos que se utilizan en secciones posteriores. También introducimos notación propia de la teoría de números que es importante para el desarrollo de nuestro trabajo.

En la sección 3 definimos dos clases fundamentales para nuestros objetivos, a saber, la de los espacios Brown y los totalmente Brown (ver definición 3.1). Como hacemos ver, los espacios totalmente Brown son Brown y los espacios Brown son conexos. En la subsección 3.1, damos un ejemplo de un espacio Brown que no es totalmente Brown. Posteriormente, en la subsección 3.2, presentamos propiedades de los espacios Brown y de los totalmente Brown. Algunas de ellas son similares a propiedades conocidas de los espacios conexos. En la subsección 3.3, proponemos una definición de aposindesis que aplica en cualquier espacio topológico (ver definición 3.13). Con ella mostramos, en el teorema 3.14, que todo espacio totalmente Brown y T_2 es aposindético.

En la sección 4 realizamos un estudio sistemático de las progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$. En la subsección 4.1, presentamos propiedades elementales de las progresiones aritméticas. Posteriormente, en la subsección 4.2, centramos nuestra atención en el problema de caracterizar la intersección de una cantidad finita de progresiones aritméticas. Por la importancia que tienen en el resto del trabajo, destacamos de dicha subsección los teoremas 4.16, 4.18 y 4.20. En la subsección 4.3, descomponemos una progresión aritmética en $\mathbb{N}$, cuya diferencia común es mayor que uno, como la unión de otras progresiones aritméticas que son ajenas dos a dos.

En la sección 5 consideramos el *espacio de Golomb* $(\mathbb{N}, \tau_G)$, y mostramos propiedades tanto conocidas como nuevas de dicho espacio. Entre las propiedades conocidas, vemos en el teorema 5.5 que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2 y que, con dicho espacio se puede dar una prueba topológica del hecho de que el conjunto de los números primos es infinito (ver corolario 5.4).

En [**23**, teorema 1, p. 169], A. M. Kirch probó que el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo en 1. En dicho artículo nada se dice sobre la conexidad local de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ en un punto distinto de 1. Entre los resultados nuevos tenemos, por el corolario 5.11, que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo en ninguno de sus puntos. En la subsección 5.2, mostramos progresiones aritméticas que están totalmente separadas en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En la subsección 5.3, presentamos varios resultados que involucran a la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de una progresión aritmética. Por su importancia en el resto del trabajo, destacamos el teorema 5.17.

En la subsección 5.4 presentamos varios subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. El principal resultado es el teorema 5.23 en el que mostramos que, para una progresión aritmética en $\mathbb{N}$, ser totalmente Brown, ser Brown y ser conexo son equivalentes. Como una consecuencia de dicho resultado, tenemos el corolario 5.26 en el que mostramos que una progresión aritmética está totalmente separada o es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, sin importar el caso, su cerrradura en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ siempre es totalmente Brown (ver teorema 5.30). En el corolario 5.24 mostramos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es aposindético. En el teorema 5.29, vemos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ posee subespacios no degenerados que no son totalmente Brown ni Brown.

En el resto de las secciones realizamos un trabajo similar al hecho en la sección 5 con $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En la sección 6 consideramos el *espacio de Kirch* $(\mathbb{N}, \tau_K)$, y mostramos propiedades tanto conocidas como nuevas de dicho espacio. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es totalmente Brown, aposindético y T_2. En la subsección 6.1, presentamos varios resultados que involucran a la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ de una progresión aritmética. Muchos de los teoremas que aparecen en la subsección 5.3, para el espacio de Golomb, permanecen válidos en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, y así lo hacemos ver. Otros resultados son diferentes como, por ejemplo, el teorema 6.8 en contraste con su versión para el espacio de Golomb, que es el teorema 5.16. En el teorema 6.15 calculamos la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ de una progresión aritmética.

La subsección 6.2 es el equivalente en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ de lo que es la subsección 5.4. En contraste con lo que sucede en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, en el que una progresión aritmética está totalmente separada o es totalmente Brown, en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ todas las progresiones aritméticas son totalmente Brown, de acuerdo con el teorema 6.20.

En la sección 7 consideramos el *espacio de Szczuka* $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Mostramos, por ejemplo, que este espacio es totalmente Brown, no homogóneo y, con respecto a los axiomas de separación, vemos que es T_D pero no $T_{\frac{1}{2}}$. En la subsección 7.3 probamos que $P(a, b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, cuando $a \in \mathbb{N}_2$. En la subsección 7.4 vemos que 1 es el único elemento en donde $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es localmente conexo. Mas aún, en cada punto distinto de 1, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es conexo en pequeño ni casi conexo en pequeño.

En la subsección 7.5 presentamos resultados que involucran a la cerradura de una progresión aritmética, con respecto a $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Los resultados importantes de esta subsección, son los teoremas 7.20, 7.21 y 7.22 dado que, con ellos, podemos calcular de manera sencilla la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de cualquier progresión aritmética. En la subsección 7.6 caracterizamos, en el teorema 7.29, a las progresiones aritméticas que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Resulta, como en el caso del espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$, que cada progresión aritmética está totalmente separada o bien es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$.

En la sección 8 consideramos el *espacio de Rizza* $(\mathbb{N}, \tau_R)$ y probamos propiedades que posee. Por ejemplo, igual que sucede con $(\mathbb{N}, \tau_S)$, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es T_D pero no $T_{\frac{1}{2}}$. Mientras que ninguno de los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es de Alexandroff, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es de Alexandroff. En la subsección 8.2, presentamos resultados que involucran a la cerradura de una progresión aritmética con respecto a $(\mathbb{N}, \tau_R)$. La mayoría de éstos son similares a los que obtuvimos en la subsección 7.5 para $(\mathbb{N}, \tau_S)$. En la subsección 8.3 mostramos, en el teorema 8.12, que cada progresión aritmética es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, justo como sucede en el espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Usando resultados que presentamos en la sección 3, y no las técnicas usuales para estudiar un espacio de Alexandroff y T_0 en términos de su conjunto parcialmente ordenado asociado, mostramos que los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$ que son abiertos o bien cerrados, son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

2. Topología y teoría de números

En la presente sección damos una serie de nociones, resultados y terminología, propios de la topología general, y que se utilizan en el resto del trabajo. Para un conjunto Z, el símbolo $|Z|$ denota la cardinalidad de Z. Decimos que Z es **degenerado** si posee solamente un elemento, y que Z es **no degenerado** si Z posee por lo menos dos elementos.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$ e $\mathrm{int}_X(A)$ denotan la cerradura y el interior de A en (X, τ), respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces

$$\mathrm{cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{cl}_X(A).$$

Si deseamos especificar la topología τ en X, escribimos $\mathrm{cl}_{(X,\tau)}(A)$ e $\mathrm{int}_{(X,\tau)}(A)$, respectivamente. El **conjunto derivado** de A es

$$A' = \{y \in X : \text{para cada } U \in \tau \text{ con } y \in U, \text{ tenemos que } A \cap (U \setminus \{y\}) \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $\mathrm{cl}_X(A) = A \cup A'$ y que, para cada $x \in X$,

$$\{x\}' = \{y \in X : \text{para cada } U \in \tau \text{ con } y \in U, \text{ tenemos que } x \in U \setminus \{y\}\}.$$

En [**25**, definición 2.1, p. 90] se dice que A es g-**cerrado** si para cada $U \in \tau$ con $A \subset U$, se sigue que $\mathrm{cl}_X(A) \subset U$. Es claro que todo subconjunto cerrado en X es g-cerrado. Decimos que $x \in X$ es un **punto indiscreto** de X si $\{U \in \tau \colon x \in U\} = \{X\}$, es decir, X es el único abierto de (X, τ) que tiene a x.

A continuación enlistamos una serie de conceptos topológicos que utilizamos a lo largo del presente trabajo. El espacio topológico (X, τ) es

1) **indiscreto** si $\tau = \{\emptyset, X\}$ y **discreto** si $\tau = \{A \colon A \subset X\}$;
2) T_0 si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$;
3) T_D [**7**, p. 29] si para cada $x \in X$ el conjunto derivado $\{x\}'$ es cerrado en X;
4) $T_{\frac{1}{2}}$ [**25**, definición 5.1, p. 93] si cada conjunto g-cerrado es cerrado en X;
5) T_1 si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X;
6) T_2 o de **Hausdorff** si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$;
7) $T_{2\frac{1}{2}}$ o de **Urysohn** si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) = \emptyset$;
8) **regular** si para todo $x \in X$ y cada subconjunto cerrado C de X con $x \notin C$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $C \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$;
9) T_3 si X is regular y T_1;
10) **hereditariamente disconexo** si X no contiene subconjuntos conexos de cardinalidad mayor que uno;
11) **totalmente separado** si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$, $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$;
12) **conexo en pequeño en** $x \in X$ si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe un subconjunto conexo V de X tal que $x \in \mathrm{int}_X(V) \subset V \subset U$;
13) **casi conexo en pequeño en** $x \in X$ si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe un subconjunto cerrado y conexo V de X tal que $\mathrm{int}_X(V) \neq \emptyset$ y $V \subset U$;
14) **localmente conexo en** $x \in X$ si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $V \in \tau$ conexo tal que $x \in V \subset U$; y **localmente conexo** si X es locamente conexo en cada uno de sus puntos;
15) **homogóneo** si para cada $x, y \in X$, existe un homeomofismo $f \colon X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Notemos que un espacio no degenerado y T_1 no posee puntos indiscretos. En la literatura, a los espacios de Urysohn también se les conoce como «espacios completamente Hausdorff». Es conocido que

$$T_3 \implies T_{2\frac{1}{2}} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_{\frac{1}{2}} \implies T_D \implies T_0$$

y que las implicaciones no son reversibles. El espacio de Bing (B, τ_B) que definimos en la subsección 3.1, el espacio de Golomb $(\mathbb{N}, \tau_G)$, que definimos en la sección 5 y el espacio de Kirch $(\mathbb{N}, \tau_K)$ que definimos en la sección 6, son todos ellos espacios T_2 que no son $T_{2\frac{1}{2}}$. Tanto el espacio de Szczuka $(\mathbb{N}, \tau_S)$ como el espacio de Rizza $(\mathbb{N}, \tau_R)$ que definimos en las secciones 7 y 8, respectivamente, son espacios T_D que no son $T_{\frac{1}{2}}$. En [**14**] y en [**20**] se prueba que X es $T_{\frac{1}{2}}$ si y solo si, para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es abierto o bien cerrado en X.

Un espacio X es hereditariamente disconexo si y solo si, para cada $x \in X$, la componente conexa de x es $\{x\}$, mientras que X está totalmente separado si y solo si, para toda $x \in X$, la casi-componente de x es $\{x\}$. Por [**15**, teorema 6.1.22, p. 356] los espacios totalmente separados son hereditariamente disconexos. En [**31**, ejemplo 72, p. 91] se muestra un espacio hereditariamente disconexo que no está totalmente separado. Si X es compacto y T_2 entonces, por [**15**, teorema 6.1.23, p. 357], todo espacio hereditariamente disconexo está totalmente separado.

Aunque en general las nociones de espacio hereditariamente disconexo y de espacio totalmente separado son distintas, en la literatura ambos conceptos han aparecido con el nombre de «espacio totalmente disconexo». Entre las propiedades que usamos en el presente trabajo, notamos que estar totalmente separado es una propiedad hereditaria. Esto significa que todo subespacio de un espacio totalmente separado está totalmente separado.

Si X es localmente conexo en $x \in X$, entonces X es conexo en pequeño en x. En [**31**, ejemplos 119 y 120, p. 139] aparece un espacio conexo en pequeño en un punto y, que no es localmente conexo en y.

2.1. Espacios de Alexandroff. Un **espacio de Alexandroff** es un espacio topológico tal que la intersección arbitraria de abiertos es abierta. Esta clase de espacios fue introducida en 1937 por P. S. Alexandroff con el nombre de «espacios discretos». Aunque todo espacio discreto es de Alexandroff, existen espacios de Alexandroff que no son discretos, como por ejemplo $X = \{0, 1\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. En general, cualquier topología definida en un conjunto finito, produce un espacio de Alexandroff que no necesariamente es discreto. También cualquier topología con una cantidad finita de elementos, produce un espacio de Alexandroff.

De 1937 a 1990, los espacios de Alexandroff aparecieron de forma muy ocasional en la literatura. Su estudio se consideró importante entre 1990 y 1992, cuando se gestó lo que ahora se llama topología digital, en donde el estudio de los espacios topológicos finitos (y, por tanto de Alexandroff) es un tema central. El primer trabajo sistemático de los espacios de Alexandroff apareció en 1999, por F. G. Arenas.

Notemos que los espacios de Alexandroff se presentan en parejas, es decir, si (X, τ) es de Alexandroff entonces la familia $\rho = \{X \setminus U : U \in \tau\}$, de los subconjuntos cerrados de (X, τ), es una topología en X y el espacio topológico (X, ρ) también es de Alexandroff.

En [**29**, teorema 8.1.2, p. 182] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Si X es de Alexandroff y T_1, entonces X es discreto.*

Existe una relación muy estrecha entre los espacios de Alexandroff que son T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $x \in X$, definimos el **conjunto alto** de x como

$$\uparrow x = \{y \in X : x \leq y\}.$$

En [**29**, teorema 8.3.1, p. 194] se muestra que la familia

$$\mathcal{B} = \{\uparrow x \colon x \in X\}$$

es base de una topología $\tau_{\leq}$ en X tal que el espacio topológico $(X, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff y T_0. Por otro lado, si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y T_0, en [**29**, teorema 8.3.3, p. 195] se prueba que la relación $\leq_\tau$ definida como

$$x \leq_\tau y \quad \text{si y solo si} \quad x \in \mathrm{cl}_X(\{y\})$$

es un orden parcial en X, así que $(X, \leq_\tau)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

En [**29**, teorema 8.3.3, p. 195] también se prueba que

$$\leq_{\tau_{\leq}} = \leq \qquad \text{y} \qquad \tau_{\leq_\tau} = \tau.$$

La primera igualdad significa que si iniciamos con un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, consideremos la topología $\tau_{\leq}$ inducida por $\leq$ y, posteriormente, tomamos el orden parcial $\leq_{\tau_{\leq}}$ inducido por $\tau_{\leq}$, obtenemos $\leq$. La segunda igualdad significa que si iniciamos con un espacio (X, τ) que es de Alexandroff y T_0, consideramos el orden parcial $\leq_\tau$ inducido por τ y, posteriormente, tomamos la topología $\tau_{\leq_\tau}$ inducida por $\leq_\tau$, obtenemos τ.

Supongamos que (X, τ) es un espacio de Alexandroff y T_0. Hoy en día es muy común estudiar a X, pensando que τ es la topología inducida por el orden parcial $\leq_\tau$. Propiedades topológicas como la conexidad, tienen una representación en términos de conceptos ligados al orden parcial $\leq_\tau$, como por ejemplo cotas superiores o inferiores, elementos maximales o bien minimales. En el presente trabajo, utilizamos de los espacios de Alexandroff lo que hemos presentado en esta subsección.

Para conceptos y resultados propios de la topología general que no se mencionan aquí, referimos al lector a [**15**]. Para un estudio de los espacios de Alexandroff, recomendamos [**26**] y [**29**, capítulo 8]. Una referencia en castellano, en donde aparecen propiedades de los espacios de Alexandroff, es [**28**].

2.2. Teoría de números. Ahora introducimos notación propia de la teoría de números, y presentamos algunos resultados. El símbolo $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos. Consideramos que $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Para dos enteros a y b distintos de cero, el símbolo $\langle a, b\rangle$ denota el máximo común divisor de a y b. Para $k \in \mathbb{N}_2$ y enteros $a_1, a_2, \ldots, a_k$ distintos de cero, el símbolo $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ denota el mínimo común múltiplo de $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Decimos que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son **primos relativos dos a dos** si $\langle a_i, a_j\rangle = 1$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $i \neq j$. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, el símbolo $a|b$ significa que $b = ac$ para alguna $c \in \mathbb{Z}$. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, el símbolo $a \equiv b \pmod{m}$ significa que $m|(a-b)$.

En la prueba de varios resultados usamos propiedades básicas de la divisibilidad, la congruencia módulo m, así como del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. Por ejemplo $\langle a, b\rangle, [a, b] \in \mathbb{N}$ y $\langle a, b\rangle[a, b] = |ab|$. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $\langle b, c\rangle = 1$, entonces $\langle a, bc\rangle = \langle a, b\rangle\langle a, c\rangle$. Si $a, b, c, z \in \mathbb{Z}$ satisfacen que $c = az + b$, entonces $\langle c, a\rangle = \langle a, b\rangle$.

Si $a \in \mathbb{N}_2$ su **descomposición canónica** es el producto $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, donde para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $i \neq j$, $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $p_i \neq p_j$, $p_i^{\alpha_i} | a$ y $p_i^{\alpha_i+1}$ no divide a a. Decimos que $a \in \mathbb{N}_2$ es **libre de cuadrados** si no posee factores primos repetidos, es decir, si para cada $p \in \mathbb{P}$ sucede que p^2 no divide a a. Esto equivale a decir que la descomposición canónica de a es de la forma $\prod_{i=1}^{k} p_i$. En algunos textos se dice que el número natural 1 es libre de cuadrados.

Si $a, b \in \mathbb{N}_2$ son libres de cuadrados y $\langle a, b\rangle \neq 1$, es fácil probar que $\langle a, b\rangle$ y $[a, b]$ son libres de cuadrados. Más aún el producto ab es libre de cuadrados si y solo si a y b son libres de cuadrados y $\langle a, b\rangle = 1$. Otra propiedad se presenta en el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ es libre de cuadrados y $b \in \mathbb{N}$, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b] = bq$, $q|a$ y $\langle q, b\rangle = 1$.*

Demostración: Sea $A = \{p \in \mathbb{P} \colon p|a \text{ y } p \nmid b\}$. Si $A = \emptyset$ entonces $a|b$, por lo que $\langle a, b\rangle = a$ y

$$[a, b] = \frac{ab}{\langle a, b\rangle} = b.$$

Haciendo $q = 1$ se cumple lo que se indica en el teorema. Si $A \neq \emptyset$ entonces $q = \prod_{p\in A} p$ satisface lo que se requiere. En efecto, pensando que la letra p denota un número primo que divide a a, sucede que $p \notin A$ si y solo si $p|a$ y $p|b$. Luego $a = \left(\prod_{p\in A} p\right)\left(\prod_{p\notin A} p\right)$ por lo que

$$\langle a, b\rangle = \prod_{p\notin A} p \quad \text{ y entonces } \quad [a, b] = \frac{ab}{\langle a, b\rangle} = b\left(\prod_{p\in A} p\right) = bq.$$

Es claro que $q|a$ y $\langle q, b\rangle = 1$. $\square$

2.3. El conjunto $\Theta(a)$. Dado un número natural a, utilizamos a lo largo del presente trabajo el conjunto $\Theta(a)$ de los números primos que dividen a a, es decir,

$$\Theta(a) = \{p \in \mathbb{P} \colon p|a\}. \tag{2.1}$$

Notemos que $\Theta(a)$ es finito y que $\Theta(a) = \emptyset$ si y solo si $a = 1$. En el siguiente resultado, cuya prueba es sencilla, enlistamos una serie de propiedades del conjunto que acabamos de definir.

Proposición 2.3. *Para cada $a, b, c \in \mathbb{N}$ sucede que:*

1) $\Theta(ab) = \Theta(a) \cup \Theta(b)$. *En particular, para toda* $n \in \mathbb{N}$, $\Theta(a^n) = \Theta(a)$ *y* $\Theta(a^n) = \{a\}$ *si y solo si* $a \in \mathbb{P}$;
2) $\Theta(\langle a, b\rangle) = \Theta(a) \cap \Theta(b)$. *En particular,* $\Theta(a) \cap \Theta(b) = \emptyset$ *si y solo si* $\langle a, b\rangle = 1$;
3) *si* $d \in P(a, b)$ *y* $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, *entonces* $\Theta(a) \subset \Theta(d)$;
4) *si* $\Theta(a) \subset \Theta(c)$ *y* $\Theta(b) \subset \Theta(c)$, *entonces* $\Theta(ab) \subset \Theta(c)$.

Para conceptos y resultados propios de la teoría de números que de manera explícita no se mencionan aquí, referimos al lector a **[16]**.

3. Espacios totalmente Brown

En esta sección presentamos propiedades de los espacios que describimos en la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un*

1) ***espacio Brown** si para cada dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, tenemos que $cl_X(U) \cap cl_X(V) \neq \emptyset$;*
2) ***espacio totalmente Brown** si para toda $n \in \mathbb{N}_2$ y cada n subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X, sucede que*

$$cl_X(U_1) \cap cl_X(U_2) \cap \cdots \cap cl_X(U_n) \neq \emptyset.$$

Los espacios Brown fueron formalmente introducidos en 2019 por P. L. Clark, N. Lebowitz-Lockard y P. Pollack en [**12**, p. 77], aunque desde el 2017 ya circulaba una versión preliminar de dicho artículo, con la noción de espacio Brown. Los espacios totalmente Brown fueron introducidos en 2018, con el nombre de «espacios superconexos», por T. Banakh, J. Mioduszewski y S. Turek en [**8**, p. 424]. Preferimos el nombre dado en la Definición 3.1 pues, en la literatura, la noción de espacio superconexo ha aparecido con significados distintos.

En la siguiente definición presentamos dos nociones de superconexidad. Para distinguirlas, agregamos los apellidos de los autores que las definieron originalmente.

Definición 3.2. *Un espacio topológico X es **Dontchev-superconexo** [**13**], si X es conexo y cada subconjunto de X con interior no vacío es abierto en X. Decimos que X es **Nanda-Panda superconexo** [**27**], si X no contiene dos subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos.*

Notemos que en un espacio Dontchev-superconexo, todo subconjunto cerrado propio y no vacío, tiene interior vacío. Es claro que ningún espacio no degenerado y Nanda-Panda superconexo es T_2. Escribimos esto último como un teorema.

Teorema 3.3. *Si X es no degenerado y T_2, entonces X no es Nanda-Panda superconexo.*

Notemos que

$$\text{totalmente Brown} \implies \text{Brown} \implies \text{conexo}.$$

El hecho de que los espacios Brown son conexos aparece en [**12**, proposición 7, p. 77]. Es claro que si X es un espacio Brown no degenerado, entonces X no es $T_{2\frac{1}{2}}$. Por tanto un espacio no degenerado conexo y $T_{2\frac{1}{2}}$ no es Brown ni totalmente Brown.

3.1. El espacio de Bing. Ahora vamos a dar un espacio Brown (B, τ_B) que no es totalmente Brown. La letra $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales. Sea

$$B = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \colon r_2 \geq 0\}.$$

Para cada $\overline{x} = (q, 0) \in B$ y toda $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n(\overline{x}) = \left\{(r, 0) \in B \colon |r - q| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Si $\overline{x} = (q_1, q_2) \in B$ y $q_2 > 0$, definimos $\overline{x}_i = (x_i, 0)$ y $\overline{x}_d = (x_d, 0)$, donde

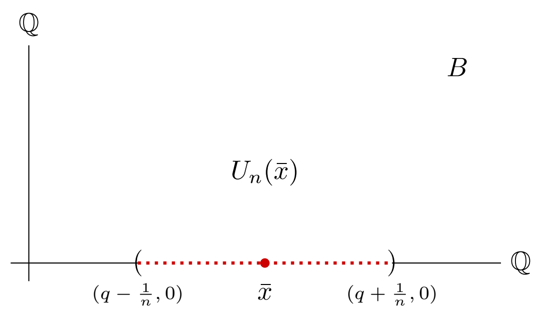
$$x_i = q_1 - \frac{q_2}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad x_d = q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{3}}.$$

El triángulo que tiene por vértices a $\overline{x}$, $\overline{x}_i$ y $\overline{x}_d$ es equilátero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

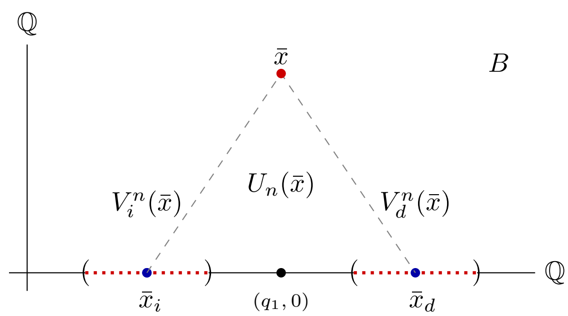
$$U_n(\overline{x}) = \{x\} \cup V_i^n(\overline{x}) \cup V_d^n(\overline{x}),$$

donde

$$V_i^n(\overline{x}) = \left\{(r,0) \in B \colon |r - x_i| < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{y} \quad V_d^n(\overline{x}) = \left\{(r,0) \in B \colon |r - x_d| < \frac{1}{n}\right\}.$$



a) $U_n(\bar{x})$, si $\bar{x} = (q, 0)$.



b) $U_n(\bar{x})$, si $\bar{x} = (q_1, q_2)$ con $q_2 > 0$.

FIGURA 1. Los Conjuntos $U_n(x)$.

Tenemos así definido un conjunto $U_n(\overline{x})$, para cada $(\overline{x}, n) \in B \times \mathbb{N}$, como se ilustra en la figura 1. Para toda $\overline{x} \in B$ definimos

$$\mathcal{B}_{\overline{x}} = \{U_n(\overline{x}) \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Es fácil ver que la colección $\{\mathcal{B}_{\overline{x}} \colon \overline{x} \in B\}$ genera una topología τ_B en B tal que, para cada $\overline{x} \in B$, la familia $\mathcal{B}_{\overline{x}}$ es una base local en $\overline{x}$. El espacio topológico (B, τ_B) se llama el **espacio de Bing**, y fue definido en 1953 por R.H. Bing en [**10**].

El espacio de Bing (B, τ_B) tiene varias propiedades interesantes. Por ejemplo, si $\overline{x} = (q_1, q_2) \in B$ y $q_2 > 0$ entonces $\overline{x}_i, \overline{x}_d \notin B$. Si L_i es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $\overline{x}$ y $\overline{x}_i$, entonces $L_i \cap B = \{\overline{x}\}$, mientras que si L_d es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $\overline{x}$ y $\overline{x}_d$, sucede que $L_d \cap B = \{\overline{x}\}$. Usando esto es fácil probar que (B, τ_B) es T_2.

Vamos a describir la cerradura en (B, τ_B) de los básicos locales. Si $\overline{x} = (q, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos tres conjuntos $A_n^+(\overline{x})$, $A_n^-(\overline{x})$ y $A_n(\overline{x})$ como sigue. Sean

$$a_n = \left(q - \frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{y} \quad b_n = \left(q + \frac{1}{n}, 0\right).$$

Consideramos las rectas L y L' en $\mathbb{R}^2$ que pasan, respectivamente por a_n y b_n y tienen pendiente igual a $60°$, así como las rectas T y T' en $\mathbb{R}^2$ que pasan, respectivamente, por a_n y b_n y tienen pendiente igual a $120°$.

Si $\overline{x} = (q, 0) \in B$, entonces

$$L \cap B = \{a_n\} = T \cap B \quad \text{y} \quad L' \cap B = \{b_n\} = T' \cap B,$$

mientras que si $\overline{x} \notin B$, sucede que

$$L \cap B = \emptyset = T \cap B \quad \text{y} \quad L' \cap B = \emptyset = T' \cap B.$$

Definimos $A_n^+(\overline{x})$ como el conjunto de elementos de B que están por encima de L' y por debajo de L, mientras que $A_n^-(\overline{x})$ es el conjunto de miembros de B que están por encima de T y por debajo de T'. Definimos también

$$A_n(\overline{x}) = A_n^-(\overline{x}) \cup A_n^+(\overline{x}).$$

Notemos que si $\overline{x} = (q, 0)$ y $\overline{y} = (r, 0)$ están en $\mathbb{R}^2$ y $q \leq r$ entonces

$$A_n^+(\overline{x}) \cap A_m^-(\overline{y}) \neq \emptyset, \quad \text{para toda } n, m \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Además, para cada $\overline{x} = (q, 0) \in B$ y toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $U_n(\overline{x}) \subset A_n(\overline{x})$ y

$$\mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_n(\overline{x})) = A_n(\overline{x}).$$

Ahora tomemos $\overline{x} = (r_1, r_2) \in B$ con $r_2 > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sucede que

$$U_n(\overline{x}) \subset A_n(\overline{x}_i) \cup A_n(\overline{x}_d)$$

y

$$\mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_n(\overline{x})) = A_n(\overline{x}_i) \cup A_n(\overline{x}_d).$$

De (3.1) y la ecuación para la cerradura de los básicos locales se sigue que, para cada $\overline{x}, \overline{y} \in B$, sucede que

$$\mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_n(\overline{x})) \cap \mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_m(\overline{y})) \neq \emptyset, \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que (B, τ_B) es Brown. Por tanto (B, τ_B) es un espacio T_2 que no es $T_{2\frac{1}{2}}$ y, además, es conexo e infinito numerable. Tal espacio no es totalmente Brown. Por ejemplo, si $\overline{x} = (1, 0), \overline{y} = (2, 0)$ y $\overline{z} = (3, 0)$ entonces

$$\mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_2(\overline{x})) \cap \mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_2(\overline{y})) \cap \mathrm{cl}_{(B,\tau_B)}(U_2(\overline{z})) = \emptyset.$$

3.2. Propiedades de los espacios totalmente Brown. En esta subsección presentamos una serie de propiedades de los espacios Brown y de los totalmente Brown. Ya indicamos que los espacios Brown no degenerados no son $T_{2\frac{1}{2}}$. Como consecuencia de esto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Si X es Brown T_1 y no degenerado, entonces X es infinito.*

Demostración: Si X es finito, como X es T_1, sucede que X es discreto. En particular, X es $T_{2\frac{1}{2}}$. Por tanto X no es Brown. De esta contradicción se infiere que X es infinito. □

Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Es fácil probar que Y es totalmente Brown en X si y solo si para toda $n \in \mathbb{N}_2$ y cada n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de Y, sucede que

$$Y \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_X(O_n) \neq \emptyset.$$

De manera similar, Y es Brown en X si y solo si para cada dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de Y tenemos que

$$Y \cap \mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset.$$

En el teorema 5.29 vamos a probar que el espacio de Golomb $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es totalmente Brown y posee subespacios que no son Brown ni totalmente Brown. Por tanto ser Brown y ser totalmente Brown no son propiedades hereditarias. En la presente subsección vamos a mostrar resultados, bajo los cuales, algunos subespacios de un espacio Brown o totalmente Brown respetan dicha propiedad. Antes notemos que, en [**12**, proposición 7, p. 77] se prueba lo siguiente:

1) un espacio Brown X es regular si y solo si X es indiscreto;
2) todo espacio que posee un punto indiscreto es Brown.

A continuación generalizamos este resultado.

Teorema 3.5. *Si X tiene un punto indiscreto, entonces X es compacto y cada subconjunto cerrado y no vacío de X es totalmente Brown en X. En particular, X es totalmente Brown.*

Demostración: Sea $x \in X$ un punto indiscreto de X. Notemos que toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X cumple que $X \in \mathcal{A}$. Esto implica que X es compacto.

Supongamos ahora que C es un subconjunto cerrado y no vacío de X. Como X es el único abierto en X que tiene a x, sucede que $x \in C$. Además, para cada subconjunto no vacío U de C, sucede que $x \in \mathrm{cl}_X(U)$. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de C. Luego

$$x \in C \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_X(O_n),$$

así que C es totalmente Brown en X. □

Por tanto, en presencia de un punto indiscreto, ser Brown o bien totalmente Brown se hereda a los subespacios cerrados y no vacíos. Ahora, como consecuencia del siguiente resultado, cuando todos los subconjuntos abiertos y no vacíos son densos, ser Brown o bien totalmente Brown se hereda a los subespacios abiertos y no vacíos.

Teorema 3.6. *Si X es un espacio cuyos subconjuntos abiertos y no vacíos son densos en X, entonces cada subconjunto abierto y no vacío de X es totalmente Brown en X. En particular, X es totalmente Brown.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de U. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto O_i es abierto y no vacío en X, así que es denso en X. Luego

$$U \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_X(O_n) = U \neq \emptyset.$$

Esto muestra que U es totalmente Brown en X. □

Si X es un conjunto infinito con la topología cofinita

$$\tau_C = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \colon |X \setminus U| < \aleph_0\},$$

entonces todo subconjunto abierto y no vacío de X es denso en (X, τ_C) así que, por el teorema 3.6, cada subconjunto abierto y no vacío de X es totalmente Brown en (X, τ_C).

Un subconjunto A de un espacio topológico X es un **dominio cerrado** si

$$A = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(A)).$$

A los dominios cerrados también se les llama «conjuntos cerrados regulares». Como consecuencia del siguiente resultado, ser Brown y ser totalmente Brown se hereda a los dominios cerrados y no vacíos.

Teorema 3.7. *Si X es totalmente Brown (respectivamente, Brown) y U es un subconjunto abierto y no vacío de X, entonces $\mathrm{cl}_X(U)$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X. En particular si $A \subset X$ es un dominio cerrado no vacío, entonces A es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X.*

Demostración: Supongamos que U es un subconjunto abierto y no vacío de X. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de $\mathrm{cl}_X(U)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea U_i un subconjunto abierto de X tal que

$$O_i = \mathrm{cl}_X(U) \cap U_i.$$

Entonces $U \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego

$$\{U \cap U_1, U \cap U_2, \ldots, U \cap U_n\}$$

es una familia de n subconjuntos abiertos y no vacíos del espacio X, que es totalmente Brown. Por tanto,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(U \cap U_i) = \mathrm{cl}_X(U) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(U \cap U_i) \right) \subset$$

$$\subset \mathrm{cl}_X(U) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(\mathrm{cl}_X(U) \cap U_i) \right) = \mathrm{cl}_X(U) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(O_i) \right).$$

Esto muestra que $\mathrm{cl}_X(U)$ es totalmente Brown en X. Si X es Brown, procediendo como antes, obtenemos que $\mathrm{cl}_X(U)$ es Brown en X. Así termina la primera parte de la demostración.

Para probar la segunda parte, supongamos que X es totalmente Brown (respectivamente, Brown) y que $A \subset X$ es un dominio cerrado no vacío. Sea $U = \operatorname{int}_X(A)$. Como $A \neq \emptyset$ y $A = \operatorname{cl}_X(U)$, sucede que $U \neq \emptyset$. Así, U es un subconjunto abierto y no vacío de X. Esto implica, por la primera parte, que $\operatorname{cl}_X(U) = A$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown). $\square$

Ahora mostramos otras propiedades de los espacios Brown y de los totalmente Brown, las cuales son parecidas a propiedades de los espacios conexos.

Teorema 3.8. *Sean X un espacio topológico y $B, Y \subset X$ tales que $Y \subset B \subset$ $cl_X(Y)$. Si Y es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X, entonces B es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X.*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de B. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea U_i un subconjunto abierto de X tal que $O_i = B \cap U_i$. Luego $U_i \cap \operatorname{cl}_X(Y) \neq \emptyset$, así que $Y \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esto significa que

$$\{Y \cap U_1, Y \cap U_2, \ldots, Y \cap U_n\}$$

es una familia de n subconjuntos abiertos y no vacíos del espacio Y, que es totalmente Brown en X. Por tanto,

$$\emptyset \neq Y \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_X(Y \cap U_i) \right) \subset B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_X(B \cap U_i) \right) = B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_X(O_i) \right).$$

Esto prueba que B es totalmente Brown en X. Si Y es Brown en X, procediendo como antes, obtenemos que B es Brown en X. $\square$

Corolario 3.9. *Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Si Y es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X, entonces $cl_X(Y)$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X. En particular, si Y es denso y totalmente Brown (respectivamente, Brown) en X, entonces X es totalmente Brown (respectivamente, Brown).*

El siguiente resultado aparece en [**8**, proposición 2.1, p. 424], para espacios totalmente Brown.

Teorema 3.10. *Sea $f \colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es totalmente Brown (respectivamente, Brown), entonces Y es totalmente Brown (respectivamente, Brown).*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de Y. Luego $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \ldots, f^{-1}(V_n)$ son abiertos y no vacíos de X, el cual es totalmente Brown, así que

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_X(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\operatorname{cl}_Y(V_i)) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_Y(V_i) \right).$$

Esto implica que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_Y(V_i) \neq \emptyset$, por lo que Y es totalmente Brown. Si X es Brown, procediendo de manera similar, se prueba que Y es Brown. $\square$

Del teorema 3.10 se sigue que si $\{X_s \colon s \in S\}$ es una familia de espacios topológicos tales que el producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$, con la topología producto, es totalmente Brown (respectivamente, Brown), entonces cada X_s es totalmente Brown (respectivamente, Brown). A la inversa, no es difícil probar que si cada X_s es totalmente Brown (respectivamente, Brown), entonces $\prod_{s\in S} X_s$ también es totalmente Brown (respectivamente, Brown). Esto, puesto en otros términos, significa que «ser Brown» y «ser totalmente Brown» son propiedades multiplicativas y factorizables.

Cuando a un espacio le damos dos topologías comparables, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11. *Si τ_1 y τ_2 son dos topologías en X tales que $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *si $A \subset X$, entonces $cl_{(X,\tau_2)}(A) \subset cl_{(X,\tau_1)}(A)$;*
2) *si $C \subset X$ es conexo en (X,τ_2), entonces C es conexo en (X,τ_1);*
3) *si $C \subset X$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en (X,τ_2), entonces C es totalmente Brown (respectivamente, Brown) en (X,τ_1).*

Demostración: Para probar 1) sean $x \in \mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(A)$ y $U \in \tau_1$ tales que $x \in U$. Entonces $U \in \tau_2$ así que $U \cap A \neq \emptyset$, de donde $x \in \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(A)$. Esto prueba 1).

Para ver 2) supongamos que C es conexo en (X,τ_2). Si C no es conexo en (X,τ_1), existen $U,V \in \tau_1\backslash\{\emptyset\}$ tales que $X = U\cup V$ y $U\cap V = \emptyset$. Luego $U,V \in \tau_2\backslash\{\emptyset\}$ y con esto se contradice la conexidad de C en (X,τ_2). Así se prueba 2).

Para ver 3) supongamos que C es totalmente Brown en (X,τ_2). Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ y abiertos no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ del subespacio C de (X,τ_1). Para toda $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ existe $U_i \in \tau_1$ tal que $O_i = C \cap U_i$. Como cada U_i está en τ_2, los conjuntos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ son abiertos no vacíos en (X,τ_2). Esto implica, usando 1), que

$$\emptyset \neq C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(X,\tau_2)}(O_i)\right) \subset C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(X,\tau_1)}(O_i)\right).$$

De esta manera, C es totalmente Brown en (X,τ_1). Si C es Brown en (X,τ_2), procediendo como antes, vemos que C es Brown en (X,τ_1). $\square$

Bajo las hipótesis del teorema 3.11, si (X,τ_2) es totalmente Brown (respectivamente, conexo, Brown), entonces (X,τ_1) es totalmente Brown (respectivamente, conexo, Brown).

El siguiente resultado presenta una condición, bajo la cual, la unión de espacios Brown es un espacio Brown.

Teorema 3.12. *Sean X un espacio topológico y $\{B_i : i \in I\}$ una familia de espacios Brown en X. Supongamos que se cumple la siguiente propiedad:*

($\star$) *para cada $i,j \in I$ con $i \neq j$ si U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de B_i y de B_j, respectivamente, entonces*

$$cl_X(V) \cap cl_{B_i}(U) \neq \emptyset \quad \text{o bien} \quad cl_X(U) \cap cl_{B_j}(V) \neq \emptyset.$$

Entonces $B = \bigcup_{i\in I} B_i$ es Brown en X.

DEMOSTRACIÓN: Sean O_1 y O_2 dos subconjuntos abiertos y no vacíos de B. Tomentos abiertos no vacíos U_1 y U_2 de X tales que

$$O_1 = B \cap U_1 = \bigcup_{i \in I}(B_i \cap U_1) \quad \text{y} \quad O_2 = B \cap U_2 = \bigcup_{i \in I}(B_i \cap U_2).$$

Como O_1 y O_2 son no vacíos, existen $i, j \in I$ tales que

$$U = B_i \cap U_1 \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V = B_j \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Es claro que $B_i, B_j \subset B$, $U \subset O_1$ y $V \subset O_2$. Si $i = j$, utilizando que U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos del espacio de Brown B_i, tenemos que

$$B_i \cap \mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset.$$

Luego

$$\emptyset \neq B_i \cap \mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \subset B \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2).$$

Si $i \neq j$, utilizando $(\star)$ podemos suponer sin perder generalidad que

$$\mathrm{cl}_X(V) \cap \mathrm{cl}_{B_i}(U) \neq \emptyset.$$

Por tanto,

$$\emptyset \neq \mathrm{cl}(V) \cap \mathrm{cl}_{B_i}(U) = B_i \cap \mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \subset B \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2).$$

Tenemos, en los dos casos, que $B \cap \mathrm{cl}_X(O_1) \cap \mathrm{cl}_X(O_2) \neq \emptyset$, así que B es Brown en X. $\square$

3.3. Aposindesis. En la teoría de continuos, es decir en el estudio de los espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos, aparece la noción de aposindesis, introducida por F. B. Jones en [**21**]. La siguiente definición es una propuesta de dicho concepto para espacios topológicos en general.

Definición 3.13. *Sean X un espacio topológico no degenerado y $a, b \in X$ con $a \neq b$. Decimos que X es* ***aposindético en*** a ***con respecto a*** b*, si existe un subconjunto cerrado y conexo M de X tal que $a \in \mathrm{int}_X(M)$ y $b \notin M$. Si para cada $x \in X \setminus \{a\}$, tenemos que X es aposindético en a con respecto a x, decimos que X es* ***aposindético en*** a*. Finalmente, X es* ***aposindético*** *si X es aposindético en cada uno de sus puntos.*

Si X es no degenerado, T_3 y conexo en pequeño en a, entonces X es aposindético en a. En este sentido, en la familia de los espacios T_3, la aposindesis en un punto generaliza la noción de conexidad en pequeño en dicho punto. Ahora bien, de acuerdo al siguiente resultado, los espacios totalmente Brown T_2 y no degenerados son aposindéticos.

Teorema 3.14. *Sea X un espacio T_2 y no degenerado. Si X es totalmente Brown (respectivamente, Brown), entonces X es aposindético.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $a \in X$ y sea $b \in X \setminus \{a\}$. Como X es T_2 existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Usando esto y el teorema 3.7, el conjunto $M = \mathrm{cl}_X(U)$ es un subconjunto cerrado y conexo de X tal que $a \in \mathrm{int}_X(M)$ y $b \notin M$. Por tanto X es aposindético en a. $\square$

Si en la definición de ser aposindético en a con respecto a b, pedimos que M sea un subconjunto compacto y conexo de X tal que $a \in \mathrm{int}_X(M)$ y $b \notin M$, podríamos decir en su lugar que X es **compacto-aposindético en** a **con respecto a** b. Las modificaciones naturales nos llevarían a definir **compacto-aposindético en** a y **compacto-aposindético**.

Sería interesante relacionar el ser totalmente Brown o el ser Brown, con ser compacto-aposindético.

Terminamos la presente sección con los siguientes comentarios, en el que hacemos uso de la relación entre un conjunto parcialmente ordenado y un espacio de Alexandroff y T_0, como mencionamos en la subsección 2.1. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, es fácil probar que, para cada $x \in X$, el conjunto alto $\uparrow x$ es conexo en $(X, \tau_{\leq})$. Como los conjuntos altos $\uparrow x$ son los básicos de $(X, \tau_{\leq})$, tenemos que $(X, \tau_{\leq})$ es localmente conexo.

Consideramos interesante encontrar condiciones, bajo las cuales, el conjunto alto $\uparrow x$ es Brown o bien totalmente Brown en $(X, \tau_{\leq})$. Incluso encontrar condiciones bajo las que podamos determinar si un subconjunto no vacío C de X es Brown o bien totalmente Brown en $(X, \tau_{\leq})$. Estamos pensando que las condiciones a encontrar, deben involucrar al orden parcial $\leq$ de X.

4. Un estudio de las progresiones aritméticas

Recordemos que para cada $a, b \in \mathbb{N}$, definimos

$$P(a,b) = \{b + an \colon n \in \mathbb{N}_0\} = \{b, b+a, b+2a, b+3a, \ldots\}. \tag{4.1}$$

Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$ también definimos

$$P_F(a,b) = \{b + az \colon z \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad M(a) = \{an \colon n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.2}$$

Notemos que en $M(a)$ se encuentran los múltiplos de a en $\mathbb{N}$. Recordemos que $\mathbb{N}_b$ es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que b.

En la presente sección realizamos un estudio sistemático de las progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{N}$. En muchos artículos en donde se estudia alguna de las cuatro topologías que mencionamos en la introducción, aparece involucrada alguna propiedad de una progresión aritmética y, en muchos casos, no se ofrece una demostración ni se dice de manera explícita la propiedad que se está utilizando. Consideramos por tanto importante tener una lista ordenada de propiedades de las progresiones aritméticas. Como veremos en las siguientes secciones, un estudio sistemático de las progresiones aritméticas, ayuda incluso a simplificar resultados que involucran alguna de las topologías en $\mathbb{N}$ que estudiamos.

Dadas $P(a,b)$ y $P_F(a,b)$, a b se le llama el **término inicial** de la progresión aritmética, mientras que a es la **diferencia común** de la progresión. Notemos que

$$P(a,b) \subset \mathbb{N}_b, \qquad M(a) = P(a,a), \qquad M(1) = \mathbb{N}$$

y

$$P(a,b) = P_F(a,b) \cap \mathbb{N}_b. \tag{4.3}$$

Por tanto $P(a,b) \subset P_F(a,b)$.

4.1. Propiedades elementales. Notemos que

$$x \in P_F(a,b) \iff a|(x-b) \iff x \equiv b \,(\text{mód}\, a)\,.$$

Similarmente $x \in P(a,b)$ si y sólo si $a|(x-b)$ y $x \geq b$, es decir, $x \equiv b \,(\text{mód}\, a)$ y $x \in \mathbb{N}_b$. Dadas dos progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, el siguiente resultado caracteriza cuando una de ellas está contenida en la otra.

Teorema 4.1. *Si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, entonces*

$$P(c,d) \subset P(a,b) \quad \textit{si y solo si} \quad a|c \textit{ y } d \in P(a,b). \tag{4.4}$$

En particular,

1) *si $c \in P(a,b)$, entonces $P(a,c) \subset P(a,b)$ y $\langle c,a\rangle = \langle a,b\rangle$;*
2) *$P(ac,b) \subset P(a,b) \cap P(c,b)$;*
3) *$P(a^n,b) \subset P(a,b)$, para toda $n \in \mathbb{N}$;*
4) *si $b, c \in M(a)$, entonces $P(c,b) \subset M(a)$;*
5) *$P(a,b) = P(c,d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.*

Demostración: Supongamos que $P(c,d) \subset P(a,b)$. Entonces $d, d+c \in P(a,b)$, así que $a|(d-b)$ y $a|[(d+c)-b]$. Luego $a|[(d+c-b)-(d-b)]$, es decir, $a|c$. Ahora supongamos que $a|c$ y $d \in P(a,b)$. Notemos que $a|(d-b)$ y $d \geq b$. Si $z \in P(c,d)$, entonces $c|(z-d)$ y $z \geq d$. Luego $a|[(z-d)+(d-b)]$, es decir, $a|(z-b)$ y $z \geq b$. Por tanto $z \in P(a,b)$, completando así la prueba de (4.4).

Como $a|a$ y $c \in P(a,b)$, por (4.4) se tiene que $P(a,c) \subset P(a,b)$. Esto prueba 1). Notemos que $a|ac$, $c|ac$, $b \in P(a,b)$ y $b \in P(c,b)$ así que, por (4.4),

$$P(ac,b) \subset P(a,b) \cap P(c,b).$$

De esta manera, 2) se satisface. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $a|a^n$ y, como también $b \in P(a,b)$, por (4.4) tenemos que $P(a^n,b) \subset P(a,b)$. Esto muestra 3). Si $b, c \in M(a)$, entones $a|c$ y $b \in P(a,a) = M(a)$ así que, por (4.4), $P(c,b) \subset M(a)$ y 4) se cumple.

Notemos que 5) afirma que una progresión aritmética en $\mathbb{N}$ queda caracterizada por su término inicial y su diferencia común. Para probarlo, supongamos que $P(a,b) = P(c,d)$. Notemos que $P(a,b) \subset P(c,d)$ y, por (4.4), $c|a$ y $b \in P(c,d)$. También $P(c,d) \subset P(a,b)$ así que, aplicando de nuevo (4.4), $a|c$ y $d \in P(a,b)$. De $a|c$ y $c|a$ se sigue que $a = c$. Tomemos $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $b = cn + d$ y $d = am + b$. Luego

$$b = cn + d = an + am + b = a(n+m) + b,$$

por lo que $a(n+m) = 0$, de donde $n + m = 0$. Esto implica que $n = m = 0$ y, así $b = d$. Por tanto si $P(a,b) = P(c,d)$, entonces $a = c$ y $b = d$. La otra implicación es clara. $\square$

Para progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$, la contención está regida por el siguiente criterio, similar al indicado en (4.4).

Teorema 4.2. *Sean $a, c \in \mathbb{N}$ y $b, d \in \mathbb{Z}$. Entonces $P_F(c,d) \subset P_F(a,b)$ si y solo si $a|c$ y $d \in P_F(a,b)$.*

Demostración: Supongamos que $P_F(c,d) \subset P_F(a,b)$. Como $d, c+d \in P_F(c,d)$ tenemos que $d, c+d \in P_F(a,b)$, así que $a|(d-b)$ y $a|[(c+d)-b)]$. Por tanto

$$a|[(c+d-b)-(d-b)],$$

es decir, $a|c$. A la inversa, si $a|c$ y $d \in P_F(a,b)$, procediendo como en el teorema 4.1, sucede que $P_F(c,d) \subset P_F(a,b)$. □

Como ya mencionamos, dos progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ son iguales si y solo si tienen el mismo término inicial y la misma diferencia común. Para dos progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$, con el mismo término inicial, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Sean $a, c \in \mathbb{N}$. Si $b \in \mathbb{Z}$, entonces $P_F(a,b) = P_F(c,b)$ si y solo si $a = c$.*

Demostración: Supongamos que $P_F(a,b) = P_F(c,b)$. Notemos que $a+b \in P_F(a,b) = P_F(c,b)$, así que $c|[(a+b)-b]$, es decir, $c|a$. De manera similar $c+b \in P_F(c,b) = P_F(a,b)$ por lo que $a|[(c+b)-b]$, es decir, $a|c$. Por tanto $a = c$. La otra implicación es clara. □

A continuación presentamos otras propiedades elementales de las progresiones aritméticas.

Teorema 4.4. *Para cada $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) *$P_F(a,b)$ es infinito numerable, $b \in P_F(a,b)$ y $P_F(1,b) = \mathbb{Z}$;*
2) *si $c \in \mathbb{N}$, entonces $P(a,c)$ es infinito numerable, $c \in P(a,c)$ y $P(1,c) = \mathbb{N}_c$;*
3) *si $c \in P_F(a,b)$, entonces $P_F(a,c) = P_F(a,b)$;*
4) *si $c \in \mathbb{N}$, entonces $P_F(ac,b) \subset P_F(a,b) \cap P_F(c,b)$.*

Demostración: Tomemos $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{N}$. Las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to P_F(a,b)$ y $g\colon \mathbb{N}_0 \to P(a,c)$ definidas, para $z \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ como $f(z) = az+b$ y $g(n) = an+c$, son biyectivas. Esto implica, pues $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}_0$ son infinitos numerables, que $P_F(a,b)$ y $P(a,c)$ son infinito numerables. Como $b = a \cdot 0 + b$ y $c = a \cdot 0 + c$, tenemos que $b \in P_F(a,b)$ y $c \in P(a,c)$. Si $z \in \mathbb{Z}$, entonces $z = 1(z-b)+b \in P(1,b)$. Luego $P_F(1,b) = \mathbb{Z}$. Es claro que $P(1,c) = \{c, c+1, c+2, \ldots\} = \mathbb{N}_c$. Con esto probamos 1) y 2).

Para ver 3) sea $c \in P_F(a,b)$. Tomemos $z \in \mathbb{Z}$ tal que $c = az+b$. Luego $b = a(-z)+c \in P_F(a,c)$. Como $a|a$, por el Teorema 4.2, $P_F(a,c) \subset P_F(a,b)$ y $P_F(a,b) \subset P_F(a,c)$, así que $P_F(a,c) = P_F(a,b)$ y 3) se cumple.

Para probar 4) tomemos $d \in P_F(ac,b)$. Notemos que $ac|(d-b)$, por lo que $a|(d-b)$ y $c|(d-b)$, de donde $d \in P_F(a,b) \cap P_F(c,b)$. Esto prueba 4). □

Presentamos ahora el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ son tales que $a|c$ y $d \equiv b \,(\text{mód}\, a)$, entonces*

$$P(c,d) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$$

y, si $a \geq b$, tenemos que $\mathbb{N} \cap P_F(c,d) \subset P(a,b)$. En particular

$$P(a,b) = \mathbb{N} \cap P_F(a,b), \qquad \text{si } a \geq b.$$

Demostración: Para ver que $P(c,d) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$, tomemos $z \in P(c,d)$. Entonces $c|(z-d)$ y $z \geq d$. Luego $a|(z-d)$ y $a|(d-b)$, por lo que $a|[(z-d)+(d-b)]$, es decir, $a|(z-b)$. Por tanto $z \in \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$. Esto muestra que $P(c,d) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$.

Ahora supongamos que $a \geq b$ y tomemos $x \in \mathbb{N} \cap P_F(c,d)$. Notemos que $c|(x-d)$ y $a|(d-b)$, por lo que $a|[(x-d)+(d-b)]$, es decir, $a|(x-b)$. Luego $x \in P_F(a,b)$. Si $x < b$, entonces $a, b-x \in \mathbb{N}$ y, como $a|(b-x)$, sucede que $a \leq b-x < b$, lo cual contradice el hecho de que $a \geq b$. Por tanto $x \geq b$ y, así, $x \in P_F(a,b) \cap \mathbb{N}_b = P(a,b)$. Esto prueba que $\mathbb{N} \cap P_F(c,d) \subset P(a,b)$.

Ahora supongamos que $a \geq b$. Como $a|a$ y $b \equiv b \pmod{a}$, por la primera parte $P(a,b) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$ y, por la segunda, $\mathbb{N} \cap P_F(a,b) \subset P(a,b)$. Luego $P(a,b) = \mathbb{N} \cap P_F(a,b)$. □

Corolario 4.6. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ son tales que $\langle a,b \rangle = 1$, entonces*

$$\mathbb{N} \cap P_F(c,b) \subset \mathbb{N} \setminus M(a), \qquad \text{para cada } c \in M(a). \tag{4.5}$$

En particular, para toda $d \in \mathbb{N}$ con $d \equiv b \pmod{a}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, sucede que

$$P(a^n, d) \subset \mathbb{N} \setminus M(a). \tag{4.6}$$

Demostración: Fijemos $c \in M(a)$ y tomemos $z \in \mathbb{N} \cap P_F(c,b)$. Si $z \in M(a)$, entonces $a|z$, $a|c$ y $c|(z-b)$, así que $a|(z-b)$ de donde $a|[z-(z-b)]$, es decir, $a|b$ contradiciendo el hecho de que $\langle a,b \rangle = 1$. Luego $z \in \mathbb{N} \setminus M(a)$. Esto prueba (4.5). Ahora sean $d, n \in \mathbb{N}$ tales que $d \equiv b \pmod{a}$. Como $a|a^n$ y $d \equiv b \pmod{a}$ por la primera parte del teorema 4.5 y (4.5), sucede que

$$P(a^n, d) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,b) \subset \mathbb{N} \setminus M(a).$$

□

4.2. Intersección de progresiones aritméticas. Dada $k \in \mathbb{N}_2$ en la presente sección damos un criterio, bajo el cual, la intersección de k progresiones aritméticas es no vacía. Además vemos cómo es tal intersección. El siguiente resultado se prueba en [**22**, teorema 3.12, p. 60], y es una extensión del teorema chino del residuo.

Teorema 4.7. *Para $k \in \mathbb{N}_2$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ y $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$, el sistema de congruencias lineales*

$$x \equiv b_1 \pmod{a_1} \quad x \equiv b_2 \pmod{a_2} \quad \cdots \quad x \equiv b_k \pmod{a_k} \tag{4.7}$$

tiene solución si y solo si $\langle a_i, a_j \rangle | (b_i - b_j)$, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $i \neq j$. Cuando esta condición se satisface, la solución general constituye una clase de equivalencia módulo $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Notemos que x es una solución del sistema de congruencias lineales (4.7) si y solo si $x \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i)$. Combinando esto con el teorema 4.7, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.8. *Para $k \in \mathbb{N}_2$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ y $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i) \neq \emptyset$;
2) $\langle a_i, a_j \rangle | (b_i - b_j)$, *para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $i \neq j$;*

3) *$P_F(a_i,b_i) \cap P_F(a_j,b_j) \neq \emptyset$, para todo $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ con $i \neq j$;*
4) *la intersección $\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i,b_i)$ contiene una progresión aritmética en $\mathbb{Z}$.*

Notemos que $\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i,b_i) \neq \emptyset$ si y solo si los miembros de la familia

$$\{P_F(a_i,b_i)\colon i \in \{1,2,\ldots,k\}\}$$

tienen, dos a dos, intersección no vacía. El teorema 4.8 permanece válido para progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ (ver [**8**, teorema 1.1, p. 424] y, para $k=2$, comparar con la parte 2 de [**31**, ejemplos 60 y 61, p. 82]).

Teorema 4.9. *Para $k \in \mathbb{N}_2$ y $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i) \neq \emptyset$;
2) *$\langle a_i,a_j\rangle|(b_i-b_j)$, para cada $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ con $i \neq j$;*
3) *$P(a_i,b_i) \cap P(a_j,b_j) \neq \emptyset$, para todo $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ con $i \neq j$;*
4) *la intersección $\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i)$ contiene una progesión aritmética en $\mathbb{N}$.*

Si los números naturales $a_1,a_2,\ldots,a_k$ son primos relativos dos a dos, entonces la afirmación 2) de los teoremas 4.8 y 4.9 se cumple, así que la afirmación 1) de tales teoremas también se satisface. Conviene considerar dicha afirmación 2) como el criterio para la intersección de una cantidad finita de progresiones aritméticas.

Por su importancia en este trabajo, mencionamos de manera explícita el criterio para la intersección de dos progresiones aritméticas. Sean $a,c \in \mathbb{N}$ y $b,d \in \mathbb{Z}$. Por el teorema 4.8,

$$P_F(a,b) \cap P_F(c,d) \neq \emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \langle a,c\rangle|(b-d). \tag{4.8}$$

Si en su lugar $b,d \in \mathbb{N}$, por el teorema 4.9,

$$P(a,b) \cap P(c,d) \neq \emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \langle a,c\rangle|(b-d). \tag{4.9}$$

En particular si $\langle a,c\rangle = 1$, entonces

$$P_F(a,b) \cap P_F(c,d) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P(a,b) \cap P(c,d) \neq \emptyset.$$

Como consecuencia del criterio para la intersección de dos progresiones aritméticas, tenemos los siguientes resultados.

Corolario 4.10. *Si $a,b,c \in \mathbb{N}$ y $\langle a,c\rangle = 1$, entonces $P(a,b) \cap M(c) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\langle a,c\rangle = 1$, tenemos que $\langle a,c\rangle|(b-c)$ así que, por (4.9), $P(a,b) \cap P(c,c) \neq \emptyset$. Luego $P(a,b) \cap M(c) \neq \emptyset$. □

Corolario 4.11. *Si $a,b,c \in \mathbb{N}$ son tales que $b \neq c$ y $\text{máx}\{b,c\} < a$, entonces*

$$P(a,b) \cap P(a,c) = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $d = \text{máx}\{b,c\}$ y $e = \text{mín}\{b,c\}$. Si $P(a,b) \cap P(a,c) \neq \emptyset$ entonces, por (4.9), $\langle a,a\rangle|(b-c)$, así que $a|(d-e)$ de donde $a \leq d-e < d$, lo cual contradice el hecho de que $d < a$. Por tanto, $P(a,b) \cap P(a,c) = \emptyset$. □

Como una aplicación del teorema 4.9, obtenemos una demostración simple del siguiente resultado, el cual se prueba de una forma distinta en [**38**, lema 3.2, p. 777] .

Teorema 4.12. *Para cada* $a, b \in \mathbb{N}$ *y* $c \in P(a, b)$ *tenemos que*

$$P(a, b) \cap M(b) \cap M(c) \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $a|(c-b)$ y $\langle a, c\rangle = \langle a, b\rangle$, sucede que

$$\langle a, b\rangle|(b-b), \qquad \langle a, c\rangle|(b-c) \qquad \text{y} \qquad \langle b, c\rangle|(b-c),$$

así que el resultado se sigue de esto y el teorema 4.9. □

Los tres resultados que mostramos a continuación, involucran la contención de dos progresiones aritméticas. El siguiente generaliza [**32**, lema 4.1, p. 904].

Teorema 4.13. *Sean* $a, c \in \mathbb{N}$ *tales que* $a|c$*. Si* $b, d \in \mathbb{Z}$ *son tales que*

$$P_F(a, b) \cap P_F(c, d) \neq \emptyset,$$

entonces $P_F(c, d) \subset P_F(a, b)$*. Más aún, si* $b, d \in \mathbb{N}$, $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$ *y* $b < a$, *entonces* $P(c, d) \subset P(a, b)$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar la primera parte, sean $b, d \in \mathbb{Z}$ tales que $P_F(a, b) \cap P_F(c, d) \neq \emptyset$. Por (4.8), $\langle a, c\rangle|(b-d)$. Como $a|c$ sucede que $\langle a, c\rangle = a$, por lo que $a|(b-d)$ o, lo que es lo mismo, $a|(d-b)$. Luego $d \in P_F(a, b)$. Esto y el hecho de que $a|c$ implican, por el teorema 4.2, que $P_F(c, d) \subset P_F(a, b)$.

Ahora tomemos $b, d \in \mathbb{N}$ tales que $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$ y $b < a$. Procediendo como en la primera parte, tenemos que $d \in P_F(a, b)$. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $d = ax + b$. Si $x \leq -1$, entonces $ax \leq -a$. Luego $d - b \leq -a$ de donde $0 < d \leq b - a$, por lo que $a < b$. En vista de que esto contradice el hecho de que $b < a$, resulta que $x \geq 0$ y, por tanto, $d \in P(a, b)$. Esto y el hecho de que $a|c$ implican, por (4.4), que $P(c, d) \subset P(a, b)$. □

Corolario 4.14. *Sean* $a, c \in \mathbb{N}$ *tales que* $a|c$*. Si* $b \in \mathbb{Z}$, *entonces* $P_F(c, b) \subset P_F(a, b)$*. Más aún, si* $b \in \mathbb{N}$ *y* $b < a$, *entonces* $P(c, b) \subset P(a, b)$.

Corolario 4.15. *Sean* $a, c \in \mathbb{N}$*. Si* $b \in \mathbb{Z}$, *entonces*

$$P_F(ac, b) \subset P_F([a, c], b).$$

Más aún, $P_F(ac, b) = P_F([a, c], b)$ *si y solo si* $\langle a, c\rangle = 1$*. Si* $b \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$P(ac, b) \subset P([a, c], b)$$

y $P(ac, b) = P([a, c], b)$ *si y solo si* $\langle a, c\rangle = 1$.

En el siguiente resultado analizamos la intersección de una cantidad finita de progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.16. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$*. Si* $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$ *son tales que*

$$\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i) \neq \emptyset$$

entonces, para cada $t \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i)$*, sucede que*

$$P_F([a_1, a_2, \ldots, a_k], t) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i) \tag{4.10}$$

y, si los números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *son primos relativos dos a dos, entonces*

$$P_F(a_1 a_2 \cdots a_k, t) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i). \tag{4.11}$$

Sean $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{N}$ *tales que* $\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \neq \emptyset$*. Para cada* $t \in \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)$*, tenemos que*

$$P([a_1, a_2, \ldots, a_k], t) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \right) \cap \mathbb{N}_t \tag{4.12}$$

y, si los números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *son primos relativos dos a dos, entonces*

$$P(a_1 a_2 \cdots a_k, t) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \right) \cap \mathbb{N}_t. \tag{4.13}$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i) \neq \emptyset$. Fijemos $t \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i)$. Por tanto $a_i | (t - b_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Sean

$$z \in P_F([a_1, a_2, \ldots, a_k], t) \quad \text{e} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Notemos que $[a_1, a_2, \ldots, a_k] \mid (z - t)$, así que $a_i | (z - t)$. Luego $a_i | [(z - t) + (t - b_i)]$, es decir, $a_i | (z - b_i)$, por lo que $z \in P_F(a_i, b_i)$. Esto muestra que $z \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i)$ así que el lado izquierdo de (4.10) está contenido en su lado derecho.

Ahora consideremos que $z \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i)$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tenemos que $a_i | (z - b_i)$ y, como $a_i | (t - b_i)$, sucede que $a_i | [(z - b_i) - (t - b_i)]$, es decir, $a_i | (z - t)$. Esto implica que $[a_1, a_2, \ldots, a_k] | (z - t)$, de donde $z \in P_F([a_1, a_2, \ldots, a_k], t)$. De esta manera, (4.10) se cumple. Si los números naturales $a_1, a_2 \ldots, a_k$ son primos relativos dos a dos, entonces $[a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 a_2 \cdots a_k$, por lo que (4.11) se sigue de esto y (4.10).

Ahora supongamos que $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{N}$ son tales que $\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \neq \emptyset$. Fijemos $t \in \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)$. Notemos que $t \geq b_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, así que $\mathbb{N}_t \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{N}_{b_i}$ y, por (4.3) y (4.10),

$$\begin{aligned}
P([a_1, a_2, \ldots, a_k], t) &= P_F([a_1, a_2, \ldots, a_k], t) \cap \mathbb{N}_t = \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{N}_{b_i} \right) \cap \mathbb{N}_t = \left(\bigcap_{i=1}^{k} [P_F(a_i, b_i) \cap \mathbb{N}_{b_i}] \right) \cap \mathbb{N}_t = \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \right) \cap \mathbb{N}_t = \bigcap_{i=1}^{k} [P(a_i, b_i) \cap \mathbb{N}_t].
\end{aligned}$$

Así (4.12) se cumple. La prueba de (4.13) es como la de (4.11). $\square$

Corolario 4.17. *Sean* $a_1, a_2 \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. *Si* $b \in \mathbb{Z}$, *entonces*

$$P_F([a_1, a_2, \ldots, a_k], b) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b)$$

y, si los números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *son primos relativos dos a dos, entonces*

$$P_F(a_1 a_2 \cdots a_k, b) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(a_i, b). \tag{4.14}$$

Más aún, si $b \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$P([a_1, a_2, \ldots, a_k], b) = \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b) \tag{4.15}$$

y, si los números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *son primos relativos dos a dos, entonces*

$$P(a_1 a_2 \cdots a_k, b) = \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i).$$

Sean $a, c \in \mathbb{N}$. Por el teorema 4.16 si $b, d \in \mathbb{Z}$ son tales que $P_F(a,b) \cap P_F(c,d) \neq \emptyset$ entonces, para cada $t \in P_F(a,b) \cap P_F(c,d)$,

$$P_F([a,c], t) = P_F(a,b) \cap P_F(c,d).$$

Más aún si $b, d \in \mathbb{N}$ y $P(a,b) \cap P(c,d) \neq \emptyset$ entonces, para cada $t \in P(a,b) \cap P(c,d)$,

$$P([a,c], t) = P(a,b) \cap P(c,d) \cap \mathbb{N}_t. \tag{4.16}$$

Por tanto,

$$P([a,c], t) \subset P(a,b) \cap P(c,d). \tag{4.17}$$

La inclusión (4.17) puede ser propia. Tomemos, por ejemplo, $P(2,3)$ y $P(6,1)$. Es claro que $13 \in P(6,1) \cap P(2,3)$ así que, por (4.17),

$$P(6,13) = P([6,2], 13) \subset P(6,1) \cap P(2,3).$$

Notemos que $7 \in [P(6,1) \cap P(2,3)] \setminus P(6,13)$. Por (4.16)

$$P(6,13) = P(6,1) \cap P(2,3) \cap \mathbb{N}_{13} = P(6,1) \cap P(2,3) \cap P(1,13).$$

Ahora consideramos la intersección de una cantidad finita de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$.

Teorema 4.18. *Para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *sean* $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \neq \emptyset.$$

Si $z \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$P([a_1, a_2, \ldots, a_k], z) = \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \tag{4.18}$$

si y solo si

$$z = \text{mín}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)\right). \tag{4.19}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $a = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Supongamos primero que z se define como en (4.19). Notemos que $\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \subset \mathbb{N}_z$. Usando esto y (4.12) tenemos que

$$P(a,z) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i)\right) \cap \mathbb{N}_z = \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i).$$

Ahora supongamos que $z \in \mathbb{N}$ es tal que (4.18) se cumple. Como $z \in P(a,z)$ sucede que $z \in \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)$ y, si $t \in \bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)$, entonces $t \in P(a,z)$ así que $t \geq z$. Por tanto, $z = \text{mín}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)\right)$. □

Notemos que $7 = \text{mín}(P(6,1) \cap P(2,3))$ así que, por el teorema 4.18,

$$P(6,7) = P(6,1) \cap P(2,3).$$

Si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ son tales que $P(a,b) \cap P(c,d) \neq \emptyset$ entonces, por el Teorema 4.18,

$$P([a,c],z) = P(a,b) \cap P(c,d) \quad \text{si y solo si} \quad z = \text{mín}(P(a,b) \cap P(c,d)).$$

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Como

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = \text{mín}\left(\bigcap_{i=1}^{k} M(a_i)\right)$$

y $M(a_i) = P(a_i, a_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, por el corolario 4.17 y el teorema 4.18 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.19. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{k} M(a_i) \neq \emptyset$ y*

$$M([a_1, a_2, \ldots, a_k]) = \bigcap_{i=1}^{k} M(a_i). \tag{4.20}$$

En particular, si los números naturales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son primos relativos dos a dos, entonces

$$M(a_1 a_2 \cdots a_k) = M(a_1) \cap M(a_2) \cap \cdots \cap M(a_k). \tag{4.21}$$

Como una aplicación del corolario 4.17 tenemos el siguiente resultado (conviene comparar (4.23) con (3.1) de [**35**, p. 15]).

Teorema 4.20. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $b \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$P_F(a,b) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(p_i^{\alpha_i}, b) \quad y \quad M(a) = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i}). \tag{4.22}$$

Más aún, si $b \in \mathbb{N}$, entonces

$$P(a,b) = \bigcap_{i=1}^{k} P(p_i^{\alpha_i}, b). \tag{4.23}$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $b \in \mathbb{Z}$. Dados $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $i \neq j$ de la igualdad $\langle p_i, p_j \rangle = 1$ se sigue que $\langle p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j} \rangle = 1$. Luego $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ son primos relativos dos a dos y entonces

$$[p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Como $b \in \bigcap_{i=1}^{k} P_F(p_i^{\alpha_i}, b)$, por (4.14) y (4.21),

$$P_F(a,b) = P_F(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, b) = \bigcap_{i=1}^{k} P_F(p_i^{\alpha_i}, b)$$

y

$$M(a) = M(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i}).$$

Entonces (4.22) se cumple. Si $b \in \mathbb{N}$, procediendo como antes obtenemos (4.23). $\square$

4.3. Descomposiciones de progresiones aritméticas. En varios artículos de P. Szczuka (también conocida como P. Szyszkowska), como en [**32**, p. 902], [**33**, p. 878], [**36**, p. 1010] y [**39**, p. 93], aparece sin demostración que una progresión aritmética en $\mathbb{N}$ se puede descomponer como una unión de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ que son ajenas dos a dos. En el siguiente resultado, enunciamos de manera precisa tal descomposición y presentamos una demostración.

Teorema 4.21. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces, para cada $c \in \mathbb{N}_2$ tal que $a|c$, sucede que*

$$P(a,b) = \bigcup_{k=0}^{\frac{c}{a}-1} P(c, ak+b). \tag{4.24}$$

Además, si $\frac{c}{a} \in \mathbb{N}_2$, los miembros de la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ P(c, ak+b) \colon k \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{c}{a} - 1\right\}\right\}$$

son ajenos dos a dos.

Demostración: Tomemos $c \in \mathbb{N}_2$ tal que $a|c$, así como $d \in \mathbb{N}$ de modo que $c = ad$. Si $d = 1$, es claro que se cumple la igualdad (4.24), por lo que supongamos que $d \in \mathbb{N}_2$. Definimos $A = \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Tomemos x en el lado derecho de (4.24). Entonces existen $m \in \mathbb{N}_0$ y $k_0 \in A$ tales que $x = cm + (ak_0 + b)$. Notemos que $dm + k_0 \in \mathbb{N}_0$, de donde

$$x = cm + (ak_0 + b) = adm + ak_0 + b = a(dm + k_0) + b \in P(a,b).$$

Esto prueba que el lado derecho de (4.24) es un subconjunto de su lado izquierdo. Ahora supongamos que x está en el lado izquierdo de (4.24). Sean $l, m \in \mathbb{N}_0$ y $k \in A$ tales que $x = al + b$ y $l = dm + k$. Luego

$$x = al + b = a(dm + k) + b = (ad)m + (ak + b) = cm + (ak + b) \in P(c, ak+b).$$

Por tanto x está en el lado derecho de (4.24) y, así, tal igualdad se cumple.

Para probar la segunda parte, sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ y $k_1, k_2 \in A$ tales que $k_1 \neq k_2$ y

$$cn_1 + (ak_1 + b) = cn_2 + (ak_2 + b).$$

Luego $d(n_1 - n_2) = k_2 - k_1$. Por tanto $k_2 \equiv k_1 \pmod{d}$. Ahora, como k_1 y k_2 son miembros distintos del conjunto A, el cual es un sistema completo de residuos módulo d, los enteros k_1 y k_2 son incongruentes módulo d. De esta contradicción se sigue que los miembros de $\mathcal{F}$ son ajenos dos a dos. $\square$

En el siguiente resultado presentamos un caso particular del teorema 4.21.

Teorema 4.22. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces, para cada $t \in \mathbb{N}_2$,*

$$P(a,b) = \bigcup_{k=0}^{a^{t-1}-1} P(a^t, ak+b) \tag{4.25}$$

y los miembros de la familia

$$\mathcal{F} = \{P(a^t, ak+b) \colon k \in \{0,1,\dots,a^{t-1}-1\}\}$$

son ajenos dos a dos.

Demostración: Sean $t \in \mathbb{N}_2$ y $c = a^t$. Notemos que $c \in \mathbb{N}_2$, $a|c$ y $\frac{c}{a} = a^{t-1} \in \mathbb{N}_2$. Por tanto, el resultado se sigue de esto y el teorema 4.21. $\square$

Dados una progresión aritmética $P(a,b)$ con $a \in \mathbb{N}_2$ y $x, y \in P(a,b)$ con $x \neq y$, vamos a descomponer $P(a,b)$ como la unión de dos conjuntos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Teorema 4.23. *Sean $a \in \mathbb{N}_2$, $b \in \mathbb{N}$ y $x, y \in P(a,b)$ tales que $x < y$. Escribamos $x = am+b$ y $y = an+b$ con $0 \leq m < n$. Por tanto $P(a,b) = U \cup V$, donde*

$$U = \bigcup_{k=0}^{m} P(a^{n+1}, ak+b) \quad y \quad V = \bigcup_{k=m+1}^{a^n-1} P(a^{n+1}, ak+b). \tag{4.26}$$

Más aún, $x \in U$, $y \in V$ y los miembros de la familia

$$\mathcal{F} = \{P(a^{n+1}, ak+b) \colon k \in \{0,1,\dots,a^n-1\}\}$$

son ajenos dos a dos. En particular, $U \cap V = \emptyset$.

Demostración: Como $0 \leq m < n < 2^n \leq a^n$, tenemos que

$$0 \leq m < m+1 \leq n \leq a^n - 1.$$

Luego

$$x = am+b = a^{n+1}\cdot 0 + am + b \in P(a^{n+1}, am+b) \subset U$$

y

$$y = an+b = a^{n+1}\cdot 0 + an + b \in P(a^{n+1}, an+b) \subset V.$$

Aplicando (4.25) con $t = n+1$, el cual pertenece a $\mathbb{N}_2$, tenemos que

$$\begin{aligned} P(a,b) = \bigcup_{k=0}^{a^{t-1}-1} P(a^t, ak+b) = \bigcup_{k=0}^{a^n-1} P(a^{n+1}, ak+b) = \\ = \left(\bigcup_{k=0}^{m} P(a^{n+1}, ak+b)\right) \cup \left(\bigcup_{k=m+1}^{a^n-1} P(a^{n+1}, ak+b)\right) = U \cup V. \end{aligned}$$

Más aún, por el teorema 4.22, los miembros de la familia

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{P(a^t, ak+b) \colon k \in \{0,1,\dots,a^{t-1}-1\}\} = \\ = \{P(a^{n+1}, ak+b) \colon k \in \{0,1,\dots,a^n-1\}\} \end{aligned}$$

son ajenos dos a dos. En particular, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Corolario 4.24. *Si $a \in \mathbb{N}_2$, $b \in \mathbb{N}$ y $x, y \in P(a,b)$ con $x \neq y$, entonces existen U y V tales que $P(a,b) = U \cup V$, $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

En una topología τ de $\mathbb{N}$ que haga que los conjuntos U y V que mencionamos en el corolario 4.24 sean abiertos en $(\mathbb{N}, \tau)$ resulta, por el mismo corolario, que cada progresión aritmética $P(a,b)$, con $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$, está totalmente separada en $(\mathbb{N}, \tau)$. Como probamos en los teoremas 5.9 y 7.13, la topología de Golomb τ_G y la topología de la división común τ_S cumplen con este propósito.

5. El espacio de Golomb

Tanto en 1959 como en 1962, S. W. Golomb presentó en [**18**, p. 663] y [**19**, p. 179] una topología τ_G que tiene como base a una familia especial de progresiones aritméticas. Para definirla, consideremos la familia

$$\mathcal{B}_G = \{P(a,b) \colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ y } \langle a,b \rangle = 1\}.$$

En el siguiente resultado definimos a τ_G y probamos las propiedades que hemos indicado.

Teorema 5.1. *La familia*

$$\tau_G = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{N} \colon \textit{para cada } b \in U \textit{ existe } a \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \langle a,b \rangle = 1 \textit{ y } P(a,b) \subset U\}$$

es una topología en $\mathbb{N}$. Además $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$ y $\mathcal{B}_G$ es una base del espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Demostración: Vamos a probar primero que τ_G es una topología en $\mathbb{N}$. Por definición $\emptyset \in \tau_G$. Sea $b \in \mathbb{N}$. Notemos que $\langle 1,b \rangle = 1$ y que $P(1,b) \subset \mathbb{N}$. Luego $\mathbb{N} \in \tau_G$. Ahora tomemos una familia $\{U_i \colon i \in I\}$ de miembros de τ_G y sea $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Supongamos, sin perder generalidad, que cada U_i es no vacío. Dada $b \in U$, existe $j \in I$ tal que $b \in U_j$. Como $U_j \in \tau_G$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a,b \rangle = 1$ y $P(a,b) \subset U_j$. Luego $P(a,b) \subset U$, de donde $U \in \tau_G$. Tomemos ahora $V, W \in \tau_G$ y supongamos, sin perder generalidad, que $V \cap W \neq \emptyset$. Si $b \in V \cap W$, entonces existen $c, d \in \mathbb{N}$ tales que $\langle c,b \rangle = \langle d,b \rangle = 1$, $P(c,b) \subset V$ y $P(d,b) \subset W$. Luego $\langle cd,b \rangle = 1$ y, por la parte 2) del teorema 4.1,

$$P(cd,b) \subset P(c,b) \cap P(d,b) \subset V \cap W.$$

Esto implica que $U \cap V \in \tau_G$ y, por tanto, τ_G es una topología en $\mathbb{N}$. Para probar que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$, sean $P(a,b) \in \mathcal{B}_G$ y $c \in P(a,b)$. Por la parte 1) del teorema 4.1, $P(a,c) \subset P(a,b)$ y $\langle a,c \rangle = \langle a,b \rangle = 1$. Luego $P(a,c) \in \mathcal{B}_G$ y, con esto, $P(a,b) \in \tau_G$. Esto prueba que $\mathcal{B}_G \subset \tau_G$.

Para ver la última parte, sean $U \in \tau_G \setminus \{\emptyset\}$ y $b \in U$. Entonces existe $a_b \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a_b, b \rangle = 1$ y $P(a_b, b) \subset U$. Luego $U = \bigcup_{b \in U} P(a_b, b)$, probando con esto que todo miembro de τ_G es unión de elementos de $\mathcal{B}_G$. Por tanto, $\mathcal{B}_G$ es una base del espacio topoló gico $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

En [**31**, ejemplos 60 y 61, p. 82] a la topología τ_G se le llama «la topología del entero primo relativo». Hoy en día es más popular referirse a τ_G y al espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ como indicamos a continuación.

Definición 5.2. *La topología τ_G que definimos en el teorema 5.1 se llama* ***topología de Golomb*** *de $\mathbb{N}$. Al espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_G)$ se le conoce como el* ***espacio de Golomb****.*

Históricamente, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ fue presentado en 1953 por M. Brown durante el congreso de la Sociedad Matemática Americana, que se llevó a cabo en la ciudad de Nueva York. M. Brown estudió el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ antes que S. W. Golomb, pero no publicó sus resultados. El resumen de la plática de M. Brown, publicado en [**11**, p. 367] y en donde se bosqueja la manera de probar la conexidad de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, motivó a P. L. Clark, N. Lebowitz-Lockard y P. Pollack a acuñar en 2019 la noción de espacio Brown, en el artículo [**12**]. La prueba de la conexidad de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, como la presentó S. W. Golomb, utiliza argumentos propios de la teoría de números. La prueba de M. Brown es más topológica que numérica.

5.1. Propiedades del espacio de Golomb. Vamos ahora a presentar varias propiedades del espacio de Golomb, algunas conocidas y otras nuevas. Los resultados que no aparecen con una referencia explícita son nuevos. Como la base $\mathcal{B}_G$ de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es numerable, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es segundo numerable. Por la parte 2) del teorema 4.4, cada miembro de $\mathcal{B}_G$ es infinito. Por tanto todo abierto no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es infinito.

Los siguientes tres resultados se probaron originalmente en [**18**, teoremas 1 y 2, p. 663], y también se pueden ver en [**1**, teoremas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3, p. 70]. Hasta donde hemos investigado, en el siguiente resultado, la parte que dice que $M(a)$ tiene interior vacío aparece aquí por primera vez.

Teorema 5.3. *Para cada $p \in \mathbb{P}$, el conjunto $M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Además, para toda $a \in \mathbb{N}_2$, el conjunto $M(a)$ tiene interior vacío en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.*

Demostración: Como $p \in \mathbb{P}$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, sucede que $\langle p, i\rangle = 1$. Por tanto, cada progresión aritmética $P(p, i)$ es abierta en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Además es fácil ver que

$$\mathbb{N} \setminus M(p) = \bigcup_{i=1}^{p-1} P(p, i).$$

Luego $\mathbb{N} \setminus M(p)$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, por tanto, $M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Tomemos ahora $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos, por reducción al absurdo, que el interior de $M(a)$ es no vacío. Por tanto existen $c, d \in \mathbb{N}$ tales que $\langle c, d\rangle = 1$ y $P(c, d) \subset M(a) = P(a, a)$. Esto implica, por (4.4), que $a|c$ y $d \in P(a, a)$. Luego $a|c$ y $a|d$, lo cual contradice el hecho de que $\langle c, d\rangle = 1$. De esta manera, $\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = \emptyset$. □

Corolario 5.4. *El conjunto $\mathbb{P}$ es infinito.*

Demostración: Por el teorema de factorización única, todo número natural distinto de 1 es múltiplo de algún número primo. Por tanto

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} M(p). \tag{5.1}$$

Si $\mathbb{P}$ es finito, por el teorema 5.3, el lado derecho de (5.1) es una unión finita de subconjuntos cerrados de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, por tanto, es un cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego el lado izquierdo de (5.1) también es un cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, por lo que el conjunto finito $\{1\}$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Esto contradice el hecho de que los abiertos no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son infinitos. Por tanto, $\mathbb{P}$ es infinito. □

Teorema 5.5. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *es* T_2.

DEMOSTRACIÓN: Sean $b, c \in \mathbb{N}$ tales que $b \neq c$. Por el corolario 5.4, existe $a \in \mathbb{P}$ de modo que $\text{máx}\{b, c\} < a$. Entonces $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle = 1$, así que $P(a, b)$ y $P(a, c)$ son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ que tienen a b y c, respectivamente. Por el corolario 4.11, $P(a, b) \cap P(a, c) = \emptyset$. Esto implica que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2. □

Incluimos la prueba del corolario 5.4, para ilustrar el término «aritmética topológica» al que hicimos referencia en la introducción. El enunciado aritmético «el conjunto $\mathbb{P}$ es infinito», se ha demostrado utilizando argumentos topológicos.

Conviene comparar el teorema 5.3 con el Corolario 5.20 en el que caracterizaremos, para $a \in \mathbb{N}_2$, los conjuntos $M(a)$ que son cerrados en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Recordemos que un espacio topológico X es Nanda-Panda superconexo, si X no contiene dos subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos. Combinando los teoremas 2.1, 3.3 y 5.5 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.6. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *no es Nanda-Panda superconexo ni de Alexandroff.*

El siguiente resultado se conoce como el teorema de Dirichlet.

Teorema 5.7. *Si* $a, b \in \mathbb{N}$ *son tales que* $\langle a, b\rangle = 1$, *entonces el conjunto* $P(a, b) \cap \mathbb{P}$ *es infinito.*

Como se comenta en [**3**, p. 209], la prueba del teorema de Dirichlet utiliza propiedades de ciertas funciones multiplicativas, así como varios resultados sobre aritmética de números complejos. En vista de que es bastante dispendiosa, no suele incluirse en textos básicos de teoría de números. Una prueba detallada aparece en [**6**, Capítulo 7].

En términos del espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$, el teorema de Dirichlet dice que todo miembro de la base $\mathcal{B}_G$ posee un número infinito de números primos. En [**18**, teorema 6, p. 664] y en [**19**, teorema 6, p. 181], S. W. Golomb prueba el siguiente resultado.

Teorema 5.8. *El teorema de Dirichlet es equivalente a afirmar que* $\mathbb{P}$ *es denso en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Como el teorema de Dirichlet es cierto, por el teorema 5.8, tenemos que $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. El teorema 5.8 indica que una afirmación aritmética (el teorema de Dirichlet, en este caso), es equivalente a una afirmación topológica (que $\mathbb{P}$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_G)$). Si podemos probar la correspondiente afirmación topológica, sin utilizar su equivalente aritmético, tendremos una prueba topológica del teorema de Dirichlet. Como se menciona en [**19**, p. 181], tal prueba muy probablemente requerirá introducir nuevas ideas topológicas y métodos poderosos, dado que la prueba del teorema de Dirichlet es complicada. Con todo, S. W. Golomb considera que vale la pena el esfuerzo por lograr tal demostración topológica. Hasta donde sabemos, el problema en cuestión permanece abierto.

5.2. Subconjuntos totalmente separados del espacio de Golomb. En la presente subsección probamos que los miembros de la base $\mathcal{B}_G$ de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, cuya diferencia común es mayor que uno, están totalmente separados. Luego presentamos varias consecuencias de esto. Con una prueba diferente, el siguiente resultado aparece en [**8**, proposición 3.2, p. 427].

Teorema 5.9. *Si* $a \in \mathbb{N}_2$ *y* $b \in \mathbb{N}$ *son tales que* $\langle a, b\rangle = 1$, *entonces* $P(a, b)$ *está totalmente separado en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$. *En particular,* $P(a, b)$ *es hereditariamente disconexo en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Demostración: Sean $x, y \in P(a, b)$ tales que $x \neq y$. Supongamos, sin perder generalidad, que $x < y$. Escribamos $x = am + b$ y $y = an + b$ con $0 \leq m < n$ y consideremos los conjuntos U y V definidos en (4.26). Por el teorema 4.23 tenemos que

$$P(a, b) = U \cup V, \qquad U \cap V = \emptyset, \qquad x \in U \quad \text{y} \quad y \in V.$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}_0$. Si $\langle a^{n+1}, ak + b\rangle \neq 1$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p|a^{n+1}$ y $p|(ak + b)$. Luego $p|a$ y $p|b$. Esto contradice el hecho de que $\langle a, b\rangle = 1$, así que $\langle a^{n+1}, ak + b\rangle = 1$. Esto prueba que U y V son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. $\square$

Ahora mostramos que cuando el término inicial y la diferencia común son primos relativos, la correspondiente progresión aritmética no es conexa en pequeño ni casi conexa en pequeño en cada uno de sus puntos. En el siguiente resultado, para $A \subset Y \subset \mathbb{N}$, el símbolo $\operatorname{int}_Y(A)$ representa el interior de A en el subespacio Y de $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 5.10. *Si* $a, b \in \mathbb{N}$ *y* $\langle a, b\rangle = 1$, *entonces en ninguno de sus puntos,* $P(a, b)$ *es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño.*

Demostración: Supongamos que $P(a, b)$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño en $c \in P(a, b)$. Dividimos la prueba en dos casos. Consideremos primero que $a \in \mathbb{N}_2$. Como $\langle a, c\rangle = \langle a, b\rangle = 1$ y $P(a, c) \subset P(a, b)$, tenemos que $P(a, c)$ es un abierto en $P(a, b)$ que contiene a c. Por tanto existe un subconjunto conexo C de $P(a, c)$ tal que $\operatorname{int}_{P(a,b)}(C) \neq \emptyset$. Luego $\operatorname{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(C) \neq \emptyset$ y, como los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son infinitos, C es infinito. Esto contradice el hecho de que, por el teorema 5.9, $P(a, c)$ es hereditariamente disconexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Ahora supongamos que $a = 1$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $c < p$. Notemos que $\langle p, c\rangle = 1$ y, como $P(p, c)$ es un subconjunto abierto de $P(a, b)$ que contiene a c, existe un subconjunto conexo D de $P(p, c)$ tal que $\operatorname{int}_{P(a,b)}(D) \neq \emptyset$. Luego $\operatorname{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(D) \neq \emptyset$ y, como los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ son infinitos, D es infinito. Esto contradice el hecho de que, por el teorema 5.9, $P(p, c)$ es hereditariamente disconexo. $\square$

Corolario 5.11. $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *no es conexo en pequeño ni casi conexo en pequeño en ninguno de sus puntos. En particular,* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *no es localmente conexo.*

Demostración: Como $\mathbb{N} = P(1, 1)$ el resultado se sigue del teorema 5.10. $\square$

Como mencionamos en la introducción, del corolario 5.11 se sigue que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.

5.3. La cerradura en la topología de Golomb. En esta subsección presentamos varios resultados que involucran a la cerradura de una progresión aritmética, con respecto al espacio de Golomb. El siguiente muestra que la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de $P(a,b)$ puede contener elementos de $P_F(a,b)$ que son números naturales menores que b.

Teorema 5.12. *Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $P_F(a,b) \cap \mathbb{N} \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b))$.*

Demostración: Sean $x \in P_F(a,b) \cap \mathbb{N}$ y W un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_G)$ con $x \in W$. Tomemos $c \in \mathbb{N}$ de modo que $\langle c, x\rangle = 1$ y $P(c,x) \subset W$. Como $\langle c, a\rangle | a$ y $a|(x-b)$, tenemos que $\langle c, a\rangle|(x-b)$. Luego, por (4.9),

$$\emptyset \neq P(c,x) \cap P(a,b) \subset W \cap P(a,b).$$

Por tanto, $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b))$. □

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$P(a^n, b) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a^n, b)).$$

En el siguiente resultado vemos que $M(a)$ también está contenido en $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a^n, b))$. Notemos que si $\langle a, b\rangle = 1$, entonces $\langle a^n, b\rangle = 1$, así que $P(a^n, b) \in \mathcal{B}_G$.

Teorema 5.13. *Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces*

$$M(a) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a^n, b)), \qquad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Más aún, para todo subconjunto abierto y no vacío U de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $M(c) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(U)$.

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sean $c \in M(a)$ y W un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tales que $c \in W$. Tomemos $d \in \mathbb{N}$ de modo que $\langle d, c\rangle = 1$ y $P(d,c) \subset W$. Si $\langle d, a^n\rangle \neq 1$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p|d$ y $p|a^n$. Luego $p|a$, así que $p|d$ y $p|c$ de donde $\langle d, c\rangle \neq 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\langle d, a^n\rangle = 1$. En particular $\langle d, a^n\rangle|(c-b)$ y, por (4.9),

$$\emptyset \neq P(d,c) \cap P(a^n, b) \subset W \cap P(a^n, b).$$

Así $c \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a^n, b))$ y (5.2) se cumple.

Ahora supongamos que U es un subconjunto abierto y no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Sean $b \in U$ y $c \in \mathbb{N}$ tales que $\langle c, b\rangle = 1$ y $P(c,b) \subset U$. Aplicando (5.2) obtenemos que

$$M(c) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c,b)) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(U).$$

□

Corolario 5.14. *Para cada $b \in \mathbb{N}$, la progresión aritmética $P(1,b)$ es densa en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, es decir,*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(1,b)) = \mathbb{N}.$$

Corolario 5.15. *Para cada colección finita* $\{P(a_i, b_i) : i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ *de progresiones aritméticas en* $\mathbb{N}$, *tenemos que*

$$M([a_1, a_2, \ldots, a_k]) \subset \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)). \tag{5.3}$$

En particular,

$$\bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)) \neq \emptyset.$$

Más aún, para toda $c \in \mathbb{N}$ *tenemos que*

$$M(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)) \right) \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

Demostración: Sean $a = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ y $c \in \mathbb{N}$. Por el teorema 5.13,

$$M(a_i) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)), \text{ para toda } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Usando esto y (4.20) se sigue que

$$M(a) = \bigcap_{i=1}^{k} M(a_i) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)).$$

Como $M(a) \neq \emptyset$, en particular tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)) \neq \emptyset.$$

Más aún

$$\emptyset \neq M([c, a]) = M(c) \cap M(a) \subset M(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)) \right).$$

$\square$

El siguiente resultado aparece como la parte 10 de [**31**, ejemplos 60 y 61, p. 83]. La prueba que presentamos es diferente.

Teorema 5.16. *Si* $b \in \mathbb{N}$ *y* $p \in \mathbb{P}$, *entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(p^n, b)) = M(p) \cup [P_F(p^n, b) \cap \mathbb{N}], \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

En particular

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(p^n)) = M(p), \quad \textit{para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Por los teoremas 5.12 y 5.13, el lado derecho de (5.5) está contenido en su lado izquierdo. Para mostrar la otra contención, tomemos $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(p^n, b))$ y supongamos que $x \notin M(p)$. Si $\langle p^n, x \rangle \neq 1$, entonces existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q | p^n$ y $q | x$. Luego $q | p$ así que $q = p$ de donde $p | x$, contradiciendo el hecho de que $x \notin M(p)$. Esto prueba que $\langle p^n, x \rangle = 1$, así que $P(p^n, x) \in \mathcal{B}_G$. De esto y el hecho de que $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(p^n, b))$, se sigue que $P(p^n, x) \cap P(p^n, b) \neq \emptyset$. Luego, por (4.9), $p^n | (x - b)$. Esto implica que $x \in P_F(p^n, b) \cap \mathbb{N}$ y, así, la prueba de (5.5) está completa.

Por (5.5) y la última parte del teorema 4.5, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(p^n)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(p^n,p^n)) = M(p) \cup [P_F(p^n,p^n) \cap \mathbb{N}] = \\ = M(p) \cup P(p^n,p^n) = M(p) \cup M(p^n) = M(p).\end{aligned}$$

Esto prueba (5.6). □

Si en el Teorema 5.16 sucede que $\langle p, b\rangle = 1$, entonces $\langle p^n, b\rangle = 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $P(p^n, b) \in \mathcal{B}_G$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por (5.3) la intersección de las cerraduras en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de un número finito de progresiones aritméticas siempre es no vacía. Notemos que la intersección de tales progresiones aritméticas puede ser vacía pero, cuando éste no es el caso, en el siguiente resultado calculamos la intersección de tales cerraduras, justo como la cerradura de las intersecciones de las progresiones.

Teorema 5.17. *Si $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ son tales que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i)) = \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i,b_i)). \tag{5.7}$$

Demostración: Es claro que el lado izquierdo de (5.7) está contenido en su lado derecho. Para probar la otra contención, supongamos b está en el lado derecho de (5.7) y que W es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $b \in W$. Tomemos $a \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b\rangle = 1$ y $P(a, b) \subset W$. Luego

$$P(a,b) \cap P(a_i,b_i) \neq \emptyset, \qquad \text{para cada } i \in \{1,2,\ldots,k\}. \tag{5.8}$$

Como $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$, por el teorema 4.9,

$$P(a_i,b_i) \cap P(a_j,b_j) \neq \emptyset, \qquad \text{para todo } i,j \in \{1,2,\ldots,k\} \text{ con } i \neq j. \tag{5.9}$$

Combinando (5.8) y (5.9) y aplicando de nuevo el teorema 4.9, tenemos que

$$P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i)\right) \neq \emptyset,$$

así que $W \cap \left(\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i)\right) \neq \emptyset$ y entonces b está en el lado izquierdo de (5.7). □

En el siguiente resultado, que aparece con una prueba muy diferente en [**8**, lema 2.2, p. 425], calculamos la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de cualquier progresión aritmética $P(a, b)$ con $a \geq 2$ (para $a = 1$, en el corolario 5.14 ya vimos que $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(1, b)) = \mathbb{N}$).

Teorema 5.18. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongmos que $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $b \in \mathbb{N}$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} [M(p_i) \cup P_F(p_i^{\alpha_i}, b)]\right). \tag{5.10}$$

Demostración: Combinando (4.23), (5.5) y (5.7) tenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\bigcap_{i=1}^{k} P(p_i^{\alpha_i},b)) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(p_i^{\alpha_i},b)) =$$
$$= \bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup (P_F(p_i^{\alpha_i},b) \cap \mathbb{N})] = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup P_F(p_i^{\alpha_i},b)]\right).$$

□

Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, por (5.10) tenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup P_F(p_i^{\alpha_i},a)]\right) = \bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup (P_F(p_i^{\alpha_i},a) \cap \mathbb{N})].$$

En (2.1) definimos el conjunto $\Theta(a)$ de los primos que dividen al número natural a. Como una aplicación del teorema 5.18, en el siguiente resultado calculamos la cerradura en $(\mathbb{N},\tau_G)$ de una progresión aritmética $P(a,b)$ con $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Como caso particular, también calculamos la cerradura en $(\mathbb{N},\tau_G)$ de $M(a)$.

Teorema 5.19. *Sean $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $q = p_1 p_2 \cdots p_k$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) = M(q). \tag{5.11}$$

En particular,

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = M(q). \tag{5.12}$$

Demostración: Dada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ como $p_i|a$ y $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, sucede que $p_i|b$. Luego

$$\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i},b) \subset M(p_i).$$

De esto y el teorema 5.18, se sigue que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup P_F(p_i^{\alpha_i},b)]\right) =$$
$$= \bigcap_{i=1}^{k}[M(p_i) \cup (\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i},b))] = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i) = M(q).$$

Esto prueba (5.11) y, como $\Theta(a) \subset \Theta(a)$, como caso particular de (5.11) tenemos (5.12). □

Corolario 5.20. *Si $a \in \mathbb{N}_2$, entonces $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N},\tau_G)$ si y solo si a es libre de cuadrados.*

Demostración: Supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Definimos $q = p_1 p_2 \cdots p_k$. Es claro que q es libre de cuadrados. Si $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N},\tau_G)$ entonces, por (5.12),

$$P(a,a) = M(a) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = M(q) = P(q,q).$$

Esto implica, por la parte 5) del teorema 4.1, que $a = q$. Por tanto, a es libre de cuadrados. Ahora supongamos que a es libre de cuadrados. Luego $a = q$ y, por (5.12),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = M(q) = M(a).$$

Por tanto, $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

Recordemos que, por el corolario 5.14, $M(1) = P(1, 1) = \mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Usando esto y el corolario 5.20, tenemos que $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y solo si $a = 1$ o bien a es libre de cuadrados.

En el siguiente resultado mostramos otras propiedades de los conjuntos $P(a, b)$, donde $a \in \mathbb{N}_2$ y $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico X es **denso en ninguna parte de** X si

$$\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A)) = \emptyset.$$

En tal situación, tenemos que $\mathrm{int}_X(A) \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A)) = \emptyset$, por lo que $\mathrm{int}_X(A) = \emptyset$. Luego

$$X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus A) = \mathrm{int}_X(A) = \emptyset.$$

Esto implica que $\mathrm{cl}_X(X \setminus A) = X$. Tenemos así que, cuando A es denso en ninguna parte de X, sucede que $\mathrm{int}_X(A) = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_X(X \setminus A) = X$.

Teorema 5.21. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ son tales que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, entonces $P(a, b)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$. En particular,*

$$\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a, b))) = \emptyset \text{ y } cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\mathbb{N} \setminus P(a, b)) = \mathbb{N}.$$

También tenemos que $M(a)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$,
$\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(a)) = \emptyset$ *y* $cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\mathbb{N} \setminus M(a)) = \mathbb{N}$.

Demostración: Supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Definimos $q = p_1 p_2 \cdots p_k$. Notemos que $q \in \mathbb{N}_2$. Por (5.11) y el teorema 5.3, tenemos que

$$\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}\big(\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a, b))\big) = \mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(M(q)) = \emptyset.$$

Esto prueba que $P(a, b)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$. El resto, como ya indicamos, se sigue de esta afirmación y del hecho de que $\Theta(a) \subset \Theta(a)$. □

5.4. Subconjuntos totalmente Brown del espacio de Golomb. En esta subsección describimos algunos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son totalmente Brown, y por tanto conexos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Vamos a utilizar las siguientes familias de progresiones aritméticas:

$$\mathcal{M} = \{M(a) \colon a \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P} = \{P(a, b) \colon (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Notemos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ y que, por (4.20), $\mathcal{M}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. El siguiente resultado muestra que cualquier colección de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, que contiene al menos un miembro de $\mathcal{M}$, es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Este resultado fue probado de manera distinta en [**8**, proposición 2.3, p. 425]. Como un caso particular del siguiente teorema, obtenemos [**34**, lema 3.2, p. 431] el cual dice que

$$M(p) \cup P(p, 1) \text{ es conexo en } (\mathbb{N}, \tau_G), \text{ para cada } p \in \mathbb{P}.$$

Teorema 5.22. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. Entonces $W = \bigcup \mathcal{A}$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En particular, cualquier unión de miembros de $\mathcal{M}$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.*

Demostración: Sea $c \in \mathbb{N}$ tal que $M(c) \in \mathcal{A}$. Luego $M(c) \subset W$. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de W. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean U_i un subconjunto abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $O_i = W \cap U_i$ y $b_i \in O_i$. Tomemos además $a_i, c_i, d_i \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a_i, b_i \rangle = 1$, $P(a_i, b_i) \subset U_i$ y $b_i \in P(c_i, d_i) \in \mathcal{A}$. Luego $P(c_i, d_i) \subset W$ y

$$P(c_i, d_i) \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset, \text{ para toda } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Combinando (5.4) y (5.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\emptyset \neq M(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left[\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, d_i)) \cap \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)) \right] \right) = \\
= M(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, d_i) \cap P(a_i, b_i)) \right) \subset \\
\subset W \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(W \cap U_i) \right) = W \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(O_i) \right).
\end{aligned}$$

Esto muestra que W es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

Supongamos que $a \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el teorema 5.22, $M(a)$ es totalmente Brown y por tanto conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En particular, como $M(1) = \mathbb{N}$, sucede que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es totalmente Brown. Si $a \in \mathbb{N}_2$, por el teorema 5.21, $M(a)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$. Si $a \in \mathbb{N}_2$ es libre de cuadrados, por el corolario 5.20, $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Por tanto, cuando $a \in \mathbb{N}_2$ es libre de cuadrados, la progresión aritmética $M(a)$ es un subconjunto cerrado, conexo y con interior vacío en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Nuestro siguiente objetivo es caracterizar a las progresiones aritméticas que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En [**32**, teorema 3.3, p. 901] se prueba que la progresión aritmética $P(a, b)$ es conexa en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y solo si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Usando los resultados que hemos mostrado hasta ahora, la prueba de que 3) implica 4) en el siguiente resultado, es más sencilla que la que aparece originalmente en [**32**, teorema 3.3, p. 901]. La parte 7) se prueba también en [**8**, corolario 2.4, p. 425]. Aunque la parte 5) se sigue del teorema 5.22, la prueba que presentamos utiliza la equivalencia entre las partes 1) y 4).

Teorema 5.23. *Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$;*
2) *$P(a, b)$ es Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$;*
3) *$P(a, b)$ es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$;*
4) *$\Theta(a) \subset \Theta(b)$.*

En particular

5) *$M(c)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, para cada $c \in \mathbb{N}$;*
6) *si $\langle a, b \rangle = 1$, entonces $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ si y solo si $a = 1$;*

7) $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *es totalmente Brown.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que 1) implica 2) y que 2) implica 3). Para ver que 3) implica 4) supongamos que $P(a,b)$ es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Si $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$, entonces $a \in \mathbb{N}_2$ y existe $p \in \Theta(a) \setminus \Theta(b)$. Luego $\langle p, b\rangle = 1$ y, por el teorema 5.9, $P(p,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Como $p|a$ tenemos que $P(a,b) \subset P(p,b)$ así que $P(a,b)$ también está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Puesto que esto contradice el hecho de que $P(a,b)$ es conexo, deducimos que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. De esta manera 3) implica 4).

Ahora supongamos que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \dots, O_n$ de $P(a,b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sean U_i un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ tal que $O_i = P(a,b) \cap U_i$ y $b_i \in O_i$. Luego $a|(b - b_i)$ y existe $a_i \in \mathbb{N}$ con $\langle a_i, b_i\rangle = 1$ y $P(a_i, b_i) \subset U_i$. Notemos que

$$P(a,b) \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset.$$

Supongamos que $\langle a, a_i\rangle \neq 1$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p|a$ y $p|a_i$. Luego $p|b$ pues $\Theta(a) \subset \Theta(b)$ y, como $a|(b - b_i)$, sucede que $p|b_i$. Esto contradice el hecho de que $\langle a_i, b_i\rangle = 1$, así que $\langle a, a_i\rangle = 1$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego $\langle a, a_1 a_2 \cdots a_n\rangle = 1$. Esto implica, por el corolario 4.10, que

$$P(a,b) \cap M(a_1 a_2 \cdots a_n) \neq \emptyset.$$

Por el teorema 5.13 y (5.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
\emptyset \neq P(a,b) \cap M(a_1 a_2 \cdots a_n) \subset P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} M(a_i)\right) \subset \\
\subset P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i,b_i))\right) = \\
= P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) \cap \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i,b_i))]\right) = \\
= P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b) \cap P(a_i,b_i))\right) \subset \\
\subset P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b) \cap U_i)\right) = P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(O_i)\right).
\end{aligned}$$

De esta manera, $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Por tanto 4) implica 1) y con esto se completa la demostración de que las afirmaciones 1)–4) son equivalentes.

Para probar 5) sea $c \in \mathbb{N}$. Como $M(c) = P(c,c)$ y $\Theta(c) \subset \Theta(c)$, de 4) implica 1), se sigue que $M(c)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Para probar 6) supongamos que $\langle a, b\rangle = 1$. Por la parte 2) de la proposición 2.3,

$$\Theta(a) \cap \Theta(b) = \Theta(\langle a, b\rangle) = \Theta(1) = \emptyset.$$

Si $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ entonces, de 1) implica 4), se tiene que $\Theta(a) \subset \Theta(b.)$ Luego $\emptyset = \Theta(a) \cap \Theta(b) = \Theta(a)$, de donde $a = 1$. A la inversa, si $a = 1$, entonces $\emptyset = \Theta(a) \subset \Theta(b)$ así que de 4) implica 1), $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Esto prueba 6). Por último, como $\mathbb{N} = M(1)$, aplicando 5) tenemos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es totalmente Brown. □

Corolario 5.24. *El espacio de Golomb* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *es aposindético* T_2 *y no* $T_{2\frac{1}{2}}$ *ni regular ni compacto.*

DEMOSTRACIÓN: En el teorema 5.5 vimos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2. Al ser $(\mathbb{N}, \tau_G)$ totalmente Brown y T_2, por el teorema 3.14, es aposindético. Como los espacios Brown no degenerados no son $T_{2\frac{1}{2}}$, tenemos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$. Si $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es regular, entonces es T_3 y, en particular, $T_{2\frac{1}{2}}$. Esto es una contradicción, por lo que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es regular. Si $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es compacto, como también es T_2, resulta ser T_4 y, en particular es $T_{2\frac{1}{2}}$, lo cual es una contradicción. De esta manera, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es compacto. □

Corolario 5.25. *Si* $a, b \in \mathbb{N}$, *entonces* $P(a,b)$ *está totalmente separado en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *si y solo si* $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $P(a,b)$ no es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y, por el teorema 5.23, $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$. Ahora supongamos que $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$ y sea $p \in \Theta(a) \setminus \Theta(b)$. Por tanto $\langle p, b\rangle = 1$ y, como $p|a$ tenemos que $P(a,b) \subset P(p,b)$. Por el teorema 5.9, $P(p,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $P(a,b)$ también está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

Corolario 5.26. *Para cada* $a, b \in \mathbb{N}$ *la progresión aritmética* $P(a,b)$ *es totalmente Brown o bien está totalmente separada en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, por el teorema 5.23, $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Si $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$, por el corolario 5.25, $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

Por los corolarios 5.11 y 5.24, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es aposindético en cada uno de sus puntos y conexo en pequeño en ninguno de sus puntos.

En el siguiente resultado caracterizamos las progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ que son aposindéticas en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Resulta que son precisamente las mismas que son conexas, o bien Brown o bien totalmente Brown.

Teorema 5.27. *Para cada* $a, b \in \mathbb{N}$ *la progresión aritmética* $P(a,b)$ *es aposindética si y solo si* $\Theta(a) \subset \Theta(b)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $P(a,b)$ es aposindético. Si $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$, entonces por el corolario 5.25, $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En particular, $P(a,b)$ es hereditariamente disconexo. Esto implica que $P(a,b)$ no posee subconjuntos conexos y con más de un punto. Ahora bien, como $P(a,b)$ es aposindético, existe un subconjunto cerrado y conexo M de $P(a,b)$ tal que $b \in \mathrm{int}_{P(a,b)}(M)$ y $a + b \notin M$. Sea $c \in \mathbb{N}$ tal que $\langle b, c\rangle = 1$ y

$$b \in P(c,b) \cap P(a,b) \subset \mathrm{int}_{P(a,b)}(M) \subset M.$$

Por (4.15), $P(c,b) \cap P(a,b) = P([c,a],b)$ así que el conjunto conexo M contiene al conjunto infinito numerable $P([c,a],b)$. Esto implica que $P(a,b)$ posee un subconjunto conexo con más de un punto. Esto es una contradicción, por lo que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$.

Ahora supongamos que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Por la equivalencia entre 1) y 4) del teorema 5.23, $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Como $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es T_2 y esta propiedad es hereditaria, sucede que $P(a,b)$ es totalmente Brown y T_2. Luego, por el teorema 3.14, $P(a,b)$ es aposindético. □

Así pues, para una progresión aritmética $P(a,b)$ con $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, ser totalmente Brown, ser Brown, ser conexo y ser aposindético, son propiedades equivalentes.

Mencionamos otra aplicación del teorema 5.23. Dados $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ sea $q = \prod_{p \in \Theta(a)} p$. Notemos q es libre de cuadrados y, si $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, entonces $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $P(a,b) \subset M(q)$. Si $a = 1$, entonces $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $P(a,b) \subset M(a)$. Esto muestra que los miembros de la familia $\mathcal{P}$ que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, son subconjuntos de elementos de $\mathcal{M}$ de la forma $M(q)$ con $q = 1$ o bien q libre de cuadrados. En cualquiera de los dos casos, $M(q)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Recordemos que un espacio topológico X es Dontchev-superconexo, si X es conexo y cada subconjunto de X con interior no vacío es abierto en X. Ahora probamos el siguiente resultado.

Teorema 5.28. *El espacio de Golomb* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *no es Dontchev-superconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 5.23, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es conexo. Ahora vamos a mostrar que posee un subconjunto con interior no vacío que no es abierto. Por (5.5)

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(4,3)) = M(2) \cup [P_F(4,3) \cap \mathbb{N}] = M(2) \cup P(4,3).$$

Por tanto $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(4,3))$ es un subconjunto propio, no vacío y cerrado de $\mathbb{N}$ con interior no vacío, pues contiene al subconjunto abierto y no vacío $P(4,3)$ de $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Por la conexidad de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(4,3))$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. □

Ahora mostramos que ser totalmente Brown y ser Brown no son propiedades hereditarias.

Teorema 5.29. *El espacio de Golomb* $(\mathbb{N}, \tau_G)$ *posee subespacios no degenerados que no son totalmente Brown ni Brown en* $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 5.23, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es totalmente Brown. En particular es Brown. Para cada $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b \rangle = 1$, por el teorema 5.9, $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Luego $P(a,b)$ no es conexo de donde $P(a,b)$, como subespacio de $(\mathbb{N}, \tau_G)$, no es Brown ni totalmente Brown. □

Vale la pena comparar el corolario 5.11 con lo que se menciona en [**32**, p. 901], donde se dice que «podemos fácilmente ver que toda base de la topología τ_G contiene progresiones aritméticas disconexas». Posteriormente, y debido a este comenterio, se afirma que por la equivalencia entre las partes 3) y 4) del teorema 5.23, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es localmente conexo.

Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. Por el teorema 5.22 y el corolario 3.9, tanto $W = \bigcup \mathcal{A}$ como $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(W)$ son totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$. Como $(\mathbb{N},\tau_G)$ es totalmente Brown, por el teorema 3.7, para cada subconjunto abierto y no vacío U de $(\mathbb{N},\tau_G)$, el conjunto $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(U)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$.

A pesar de que, por el teorema 5.9, algunas progresiones aritméticas no son totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$, el siguiente resultado dice que su cerradura siempre es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$.

Teorema 5.30. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Si*

$$W = \bigcup \mathcal{A} \quad \text{y} \quad B = cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(W),$$

entonces B es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$. En particular, para cada $a, b \in \mathbb{N}$, el conjunto $cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b))$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$.

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de B. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sean U_i un abierto en $(\mathbb{N},\tau_G)$ tal que $O_i = B \cap U_i$ y $b_i \in O_i$. Tomemos $a_i \in \mathbb{N}$ con $\langle a_i, b_i \rangle = 1$ y $P(a_i, b_i) \subset U_i$. Como $b_i \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(W)$ tenemos que

$$W \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset,$$

así que existen $c_i, d_i, e_i \in \mathbb{N}$ tales que $e_i \in P(c_i, d_i) \in \mathcal{A}$ y $e_i \in P(a_i, b_i)$. Luego

$$P(c_i, e_i) \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset$$

y

$$P(c_i, e_i) \cap P(a_i, b_i) \subset P(c_i, d_i) \cap P(a_i, b_i) \subset W \cap P(a_i, b_i).$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, e_i) \cap P(a_i, b_i)) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, e_i)) \cap P(a_i, b_i)) \subset \\ \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(W) \cap U_i) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(O_i). \end{aligned}$$

Aplicando (5.3) con la colección finita

$$\{P(c_1, e_1)\} \cup \{P(c_i, e_i) \colon i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \cup \{P(a_i, b_i) \colon i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, así como (5.7), resulta que

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_1, e_1)) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, e_i)) \cap \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i))] \right) \subset \\ \subset B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(c_i, e_i) \cap P(a_i, b_i)) \right) \subset B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(O_i) \right). \end{aligned}$$

Esto prueba que B es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$. □

Corolario 5.31. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ son tales que $\langle a, b \rangle = 1$, entonces $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N},\tau_G)$ y $cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b))$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N},\tau_G)$.*

Demostración: El resultado se sigue de los teoremas 5.9 y 5.30. □

Consideremos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ de modo que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$. Si

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_k] \quad \text{y} \quad z = \text{mín}\left(\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i)\right)$$

entonces, por el teorema 4.18,

$$P(a, z) = \bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i).$$

Utilizando esto y el teorema 5.17 sucede que

$$\text{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a, z)) = \text{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i)) = \bigcap_{i=1}^k \text{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i)).$$

Además, por el teorema 5.30, $\text{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a, z))$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Esto muestra que, cuando una cantidad finita de progresiones aritméticas tiene intersección no vacía, la intersección de las cerraduras en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de dichas progresiones, es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Por el teorema 5.30, la unión de las cerraduras en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ de una cantidad finita de progresiones aritméticas, es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Terminamos la sección con las siguientes preguntas.

Problema 5.32. *Sean $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ de modo que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) = \emptyset$. ¿Es $\bigcap_{i=1}^k cl_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a_i, b_i))$ totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$?*

Problema 5.33. *¿Es $(\mathbb{N}, \tau_G)$ compacto-aposindético en alguno de sus puntos?*

6. El espacio de Kirch

En 1969, A. M. Kirch consideró en [**23**] la familia

$$\mathcal{B}_K = \{P(a, b) \in \mathcal{B}_G : a \text{ es libre de cuadrados}\}, \tag{6.1}$$

y mostró que es base para una topología τ_K de $\mathbb{N}$ tal que $\tau_K \subset \tau_G$. También hizo ver que el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es conexo, localmente conexo y Hausdorff. En [**31**, ejemplos 60 y 61, p. 82] a τ_K le se le llama «la topología del entero primo». Sin embargo, vamos a referirnos a τ_K y al espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$ como indicamos a continuación.

Definición 6.1. *La topología τ_K se llama la* ***topología de Kirch*** *de $\mathbb{N}$. Al espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_K)$ se le conoce como el* ***espacio de Kirch****.*

Para probar que la familia $\mathcal{B}_K$ es base para una topología de $\mathbb{N}$, necesitamos del siguiente resultado.

Teorema 6.2. *Supongamos que $P(a, b), P(c, d) \in \mathcal{B}_K$ son tales que $P(a, b) \cap P(c, d) \neq \emptyset$. Luego, para cada $t \in P(a, b) \cap P(c, d)$, tenemos que $P([a, c], t) \in \mathcal{B}_K$ y*

$$P([a, c], t) \subset P(a, b) \cap P(c, d). \tag{6.2}$$

Demostración: Tomemos $t \in P(a, b) \cap P(c, d)$. Como $a|[a, b]$ y $b|[a, b]$, por (4.4) se satisface (6.2). Además, por la parte 1) del teorema 4.1,

$$\langle t, a\rangle = \langle a, b\rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle t, c\rangle = \langle c, d\rangle = 1.$$

Luego $\langle ac, t\rangle = 1$. Esto implica, al ser $[a, c]$ un divisor de ac, que $\langle [a, c], t\rangle = 1$. Por tanto, $P([a, c], t) \in \mathcal{B}_G$. Ahora bien, como a y c son libres de cuadrados, tenemos que $[a, c]$ es libre de cuadrados. De esta manera, $P([a, c], t) \in \mathcal{B}_K$. $\square$

Teorema 6.3. *La familia $\mathcal{B}_K$, definida en* (6.1)*, es base para una topología τ_K de* $\mathbb{N}$.

Demostración: Tomemos $a \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $p > a$. Es claro que p es libre de cuadrados y que $\langle a, p\rangle = 1$. Luego $a \in P(p, a) \in \mathcal{B}_K$ por lo que $\mathbb{N} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_K} B$. Tomemos ahora $P(a, b), P(c, d) \in \mathcal{B}_K$ y $t \in P(a, b) \cap P(c, d)$. Por el teorema 6.2, $P([a, c], t) \in \mathcal{B}_K$ y $P([a, c], t) \subset P(a, b) \cap P(c, d)$. Esto muestra que $\mathcal{B}_K$ es base para una topología τ_K de $\mathbb{N}$. $\square$

Es claro que $\mathcal{B}_K \subset \mathcal{B}_G$, así que $\tau_K \subset \tau_G$. Además

$$\tau_K = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \colon \text{para cada } b \in U \text{ existe } P(a, b) \in \mathcal{B}_K \text{ tal que } P(a, b) \subset U\}.$$

La contención $\tau_K \subset \tau_G$ es propia pues, por ejemplo $P(4, 3) \in \tau_G$ y $P(4, 3) \notin \tau_K$. Para ver que $P(4, 3) \notin \tau_K$ supongamos, por el contrario, que $P(4, 3) \in \tau_K$. Notemos que existe $P(a, 3) \in \mathcal{B}_K$ tal que $P(a, 3) \subset P(4, 3)$. Esto implica, por (4.4), que $4|a$, contradiciendo el hecho de que a es libre de cuadrados. De esta manera, $P(4, 3) \notin \tau_K$ y así

$$\tau_K \subsetneq \tau_G.$$

En el siguiente resultado, mostramos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ posee una base que contiene propiamente a la base

$$\mathcal{B}_G = \{P(a, b) \colon a, b \in \mathbb{N} \text{ y } \langle a, b\rangle = 1\}.$$

También vemos que $(\mathbb{N}, \tau_K)$ posee una base que contiene propiamente a la base $\mathcal{B}_K$.

Teorema 6.4. *Las familias*

$$\overline{\mathcal{B}}_G = \{P(a, b) \in \mathcal{B}_G \colon b < a\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{B}}_K = \{P(a, b) \in \mathcal{B}_K \colon b < a\}$$

son bases para τ_G y τ_K, respectivamente.

Demostración: Vamos a probar que cada elemento de $\mathcal{B}_G$ es una unión de miembros de $\overline{\mathcal{B}}_G$. Sean $P(a, b) \in \mathcal{B}_G$ y $c \in P(a, b)$. Naturalmente si $b < a$, entonces $P(a, b) \in \overline{\mathcal{B}}_G$ y la prueba termina Supongamos que $a \leq b$. Por la parte 1) del teorema 4.1,

$$P(a, c) \in \mathcal{B}_G \quad \text{y} \quad P(a, c) \subset P(a, b).$$

Además $a \leq b \leq c$. Si $p_c \in \mathbb{P}$ es tal que $p_c > c$, entonces $\langle p_c, c\rangle = 1$ y, como también $\langle a, c\rangle = 1$, sucede que $\langle p_c a, c\rangle = 1$. Por tanto $P(p_c a, c) \in \mathcal{B}_G$. De $p_c > c$ sucede que $p_c a > ac \geq c$, de donde $P(p_c a, c) \in \overline{\mathcal{B}}_G$. Además

$$c \in P(p_c a, c) \subset P(a, c) \subset P(a, b).$$

Hemos probado que

$$P(a, b) = \bigcup_{c\in P(a,b)} P(p_c a, c), \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{N} \text{ con } \langle a, b\rangle = 1 \text{ y } a \leq b. \tag{6.3}$$

Así, todo elemento de $\mathcal{B}_G$ es una unión de miembros de $\overline{\mathcal{B}}_G$ y, por tanto, $\overline{\mathcal{B}}_G$ es una base de τ_G.

Ahora supongamos que $P(a,b) \in \mathcal{B}_K$ y $a \leq b$. Luego $P(a,b) \in \mathcal{B}_G$, por lo que (6.3) se cumple. Vamos a probar que $P(p_c a, c) \in \overline{\mathcal{B}}_K$, para toda $c \in P(a,b)$. Tomemos $c \in P(a,b)$. Ya indicamos que $P(p_c a, c) \in \mathcal{B}_G$ y que $c < p_c a$. Como a es libre de cuadrados y $p_c \in \mathbb{P}$ es tal que $a \leq b \leq c < p_c$, tenemos que $p_c a$ es libre de cuadrados. Esto prueba que $P(p_c a, c) \in \overline{\mathcal{B}}_K$. Por tanto, todo elemento de $\mathcal{B}_K$ es una unión de miembros de $\overline{\mathcal{B}}_K$ y, como consecuencia de esto, $\overline{\mathcal{B}}_K$ es una base de τ_K. $\square$

El hecho de que la familia $\overline{\mathcal{B}}_G$ es una base de τ_G aparece sin demostración en la prueba de [**34**, teorema 4.3, p. 434]. La demostración que presentamos del teorema 6.4, aparece originalmente en [**28**, teorema 3.21].

En algunos artículos de P. Szczuka, como en [**32**] y [**33**], la base del espacio de Kirch se dice que es, por definición, la familia $\overline{\mathcal{B}}_K$ mientras que en otros, como en [**37**] y [**38**], la base se toma de inicio como $\mathcal{B}_K$. En [**24**] se considera, por definición, que τ_G y τ_K tienen por base a $\overline{\mathcal{B}}_G$ y $\overline{\mathcal{B}}_K$, respectivamente. El teorema 6.4 dice que podemos proceder de una o de la otra forma, según convenga, tanto con la base de la topología de Kirch como con la de Golomb. En los textos en donde se admite que 1 es libre de cuadrados, las progresiones aritméticas $P(1,b)$ son miembros de $\mathcal{B}_K$, pero no de $\overline{\mathcal{B}}_K$.

Ahora presentamos otras propiedades del espacio de Kirch. Como la base $\mathcal{B}_K$ de $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es numerable, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es segundo numerable. Por la parte 2) del teorema 4.4, cada miembro de $\mathcal{B}_K$ es infinito. Por tanto todo abierto no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es infinito.

Teorema 6.5. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *es totalmente Brown, aposindético* T_2 *y no* $T_{2\frac{1}{2}}$ *ni regular ni compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Por la parte 5) del teorema 5.23, $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es totalmente Brown. Además $\tau_K \subset \tau_G$. Utilizando esto y la parte 3) del teorema 3.11, resulta que $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es totalmente Brown. La prueba de que $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es T_2 es idéntica a la dada en el teorema 5.5, para $(\mathbb{N}, \tau_G)$. El resto de la prueba es idéntica a la dada en el corolario 5.24, para $(\mathbb{N}, \tau_G)$. $\square$

La misma prueba que dimos para el corolario 5.6, se puede utilizar para probar el siguiente resultado.

Corolario 6.6. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_K)$ *no es Nanda-Panda superconexo ni de Alexandroff.*

Más adelante, en el corolario 6.21, vamos a probar que $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo, de una manera distinta a como se probó originalmente en [**23**, teorema 5, p. 170].

6.1. La cerradura en la topología de Kirch. De la contención $\tau_K \subset \tau_G$ y el teorema 3.11, tenemos que si $C \subset \mathbb{N}$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown, conexo) en $(\mathbb{N}, \tau_G)$, entonces C es totalmente Brown (respectivamente, Brown, conexo) en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. También tenemos que, para cada $A \subset \mathbb{N}$,

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(A) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(A).$$

Por tanto, muchos de los resultados presentados en la subsección 5.3 permanecen válidos en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. En particular, todos los que aparecen del teorema 5.12 al corolario 5.15 se cumplen en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y los enlistamos en el siguiente teorema.

Teorema 6.7. *Para $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $P_F(a, b) \cap \mathbb{N} \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a, b))$;
2) $M(a) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a^n, b))$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$;
3) *para cada subconjunto abierto y no vacío U de $(\mathbb{N}, \tau_K)$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que* $M(c) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(U)$;
4) $cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(1, b)) = \mathbb{N}$;
5) *para cada familia finita $\{P(a_i, b_i) \colon i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, tenemos que $M([a_1, a_2, \ldots, a_k]) \subset \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a_i, b_i))$ y, en particular, $\bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a_i, b_i)) \neq \emptyset$;*
6) $M(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a_i, b_i))\right) \neq \emptyset$, *para toda* $c \in \mathbb{N}$.

La parte 4) del teorema 6.7 es [**37**, comentario 4.1, p. 676]. Con respecto a la igualdad (5.5), su lado derecho está contenido en su lado izquierdo, considerando la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Sin embargo, la manera correcta de obtener la cerradura $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b))$, se presenta en el siguiente resultado (vale la pena comparar la primera parte con [**37**, teorema 4.4, p. 676] y, la segunda parte, con [**37**, corolario 4.5, p. 678]).

Teorema 6.8. *Si $b \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{P}$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b)) = M(p) \cup [P_F(p, b) \cap \mathbb{N}], \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

En particular,

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p, b)), \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Además se cumplen las siguientes propiedades:

1) *$M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$;*
2) *para cada $a \in \mathbb{N}_2$, el conjunto $M(a)$ tiene interior vacío en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.*

Demostración: Tomemos $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b))$ y supongamos que $x \notin M(p)$. Luego $\langle p, x\rangle = 1$. Esto implica, al ser $P(p, x)$ un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_K)$ que contiene a x, que

$$P(p, x) \cap P(p^n, b) \neq \emptyset.$$

Luego, por (4.9), $p|(x - b)$, así que $x \in P_F(p, b) \cap \mathbb{N}$. Esto muestra que x está en el lado derecho de (6.4).

Ahora supongamos que $x \in P_F(p, b) \cap \mathbb{N}$ y sea W un subconjunto abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ tal que $x \in W$. Por tanto, existe $c \in \mathbb{N}_2$, libre de cuadrados, de modo que $\langle c, x\rangle = 1$ y $P(c, x) \subset W$. Notemos que $\langle c, p^n\rangle = 1$ o bien $\langle c, p^n\rangle = p$. En cualquiera de los dos casos, como $p|(x - b)$, por (4.9) tenemos que

$$P(c, x) \cap P(p^n, b) \neq \emptyset.$$

Luego $W \cap P(p^n, b) \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b))$, de donde

$$P_F(p, b) \cap \mathbb{N} \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b)).$$

Por la parte 2) del teorema 6.7, tenemos que $M(p) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b))$. Esto prueba que el lado derecho de (6.4) está contenido en su lado izquierdo, terminando así la prueba de (6.4).

Ahora bien, de (6.4) se tiene que $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p, b))$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(p)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p,p)) = M(p) \cup [P_F(p,p) \cap \mathbb{N}] = M(p) \cup P(p,p) = M(p).$$

Por tanto $M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. La misma prueba que dimos en el teorema 5.3, puede aplicarse para mostrar que para toda $a \in \mathbb{N}_2$, el conjunto $M(a)$ tiene interior vacío en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Esto prueba 1) y 2). $\square$

En el teorema 5.28 vimos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ no es Dontchev-superconexo. De manera similar tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.9. *El espacio de Kirch $(\mathbb{N}, \tau_K)$ no es Dontchev-superconexo.*

Demostración: Por el teorema 6.5, $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es conexo. Ahora vamos a mostrar que posee un subconjunto con interior no vacío que no es abierto. Por (6.4)

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(3,1)) = M(3) \cup [P_F(3,1) \cap \mathbb{N}] = M(3) \cup P(3,1).$$

Por tanto $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(3,1))$ es un subconjunto propio, no vacío y cerrado de $\mathbb{N}$ con interior no vacío, pues contiene al subconjunto abierto y no vacío $P(3,1)$ de $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Por la conexidad de $(\mathbb{N}, \tau_K)$, $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(3,1))$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. $\square$

La misma prueba del teorema 5.17 se puede aplicar en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado.

Teorema 6.10. *Si $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ son tales que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i)) = \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a_i, b_i)). \tag{6.6}$$

Sean $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo con (6.5) y el hecho de que $M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, tenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(p^n)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p^n, p^n)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p,p)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(p)) = M(p),$$

es decir

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(p^n)) = M(p), \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

Tenemos así que (5.6) es válido en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. El teorema 5.19 también es válido en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, aunque su prueba es diferente a la que presentamos para $(\mathbb{N}, \tau_G)$. Para probarlo, procedemos como sigue. Primero mostramos que (5.12) es válido en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

Teorema 6.11. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $q = p_1 p_2 \cdots p_k$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(a)) = M(q). \tag{6.8}$$

Demostración: Por la segunda parte de (4.22), tenemos que $M(a) = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i})$. Luego, aplicando (6.6) y (6.7),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(a)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(\bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(p_i^{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i) = M(q).$$

□

Como consecuencia de esto, el corolario 5.20 también es válido en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ y su demostración es la misma. Tenemos así el siguiente resultado.

Corolario 6.12. *Si $a \in \mathbb{N}_2$, entonces $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ si y solo si a es libre de cuadrados.*

De todo esto deducimos que $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ si y solo si $a = 1$ o bien a es libre de cuadrados. Ahora mostramos que el teorema 5.19 es válido en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.

Teorema 6.13. *Sean $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $q = p_1 p_2 \cdots p_k$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) = M(q). \tag{6.9}$$

Demostración: Como q es libre de cuadrados, por el corolario 6.12, $M(q)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Además, la inclusión $\Theta(a) \subset \Theta(b)$ implica que $q|a$ y $q|b$, por lo que $P(a,b) \subset M(q)$. Al tomar cerraduras en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, sucede que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(q)) = M(q).$$

Ahora bien, por (5.11)

$$M(q) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_G)}(P(a,b)) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)).$$

Esto prueba (6.9). □

La misma demostración dada en el teorema 5.21 puede aplicarse en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, para obtener el siguiente teorema.

Teorema 6.14. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ son tales que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, entonces $P(a,b)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$. En particular,*

$$\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b))) = \emptyset \text{ y } cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(\mathbb{N} \setminus P(a,b)) = \mathbb{N}.$$

También tenemos que $M(a)$ es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$, $\mathrm{int}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(M(a)) = \emptyset$ y $cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(\mathbb{N} \setminus M(a)) = \mathbb{N}$.

El siguiente resultado aparece tanto en [**9**, lema 1, p. 4] como en [**37**, teorema 4.6, p. 678]. La demostración que presentamos es mas corta que la que aparece en [**37**], y un poco diferente a la que se encuentra en [**9**].

Teorema 6.15. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_K)} P(p_i^{\alpha_i}, b). \tag{6.10}$$

DEMOSTRACIÓN: El resultado se sigue de (4.23) y (6.6). □

A continuación presentamos la fórmula para calcular la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ de una progresión aritmética en $\mathbb{N}$.

Teorema 6.16. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $b \in \mathbb{N}$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^k [M(p_i) \cup P_F(p_i,b)] \right). \tag{6.11}$$

DEMOSTRACIÓN: Por (6.4) y (6.10) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(p_i^{\alpha_i},b)) = \bigcap_{i=1}^k [M(p_i) \cup (P_F(p_i,b) \cap \mathbb{N})] = \\ = \mathbb{N} \cap \left(\bigcap_{i=1}^k [M(p_i) \cup P_F(p_i,b)] \right).\end{aligned}$$

□

Tomemos, de nuevo, $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Definimos

$$c = p_1 p_2 \cdots p_k = \prod_{p \in \Theta(a)} p$$

y, para toda $b \in \mathbb{N}$, hagamos

$$A_b = \{d \in \mathbb{N} \colon d \leq c \text{ y para cada } i \in \{1,2,\ldots,k\}, p_i | d \text{ o bien } d \equiv b \,(\mathrm{m\acute{o}d}\, p_i)\}.$$

Sean $b \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b))$. Consideremos $n \in \mathbb{N}_0$ y $d \in \mathbb{N}$ tales que $x = cn+d$ y $d \leq c$. Dada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ tenemos que $p_i|c$ y, por (6.11),

$$cn + d \in M(p_i) \cup P_F(p_i,b).$$

Por consiguiente, $p_i|d$ o bien $d \equiv b \,(\mathrm{m\acute{o}d}\, p_i)$, de donde $d \in A_b$. Como además $x \in P(c,d)$, hemos probado que $x \in \bigcup_{d \in A_b} P(c,d)$. De todo esto,

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) \subset \bigcup_{d \in A_b} P(c,d).$$

La contención inversa también es cierta. Para probarlo, tomemos $x \in \bigcup_{d \in A_b} P(c,d)$ y $d \in A_b$ tales que $x \in P(c,d)$. Dada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ tenemos que $p_i|c$ y, como $d \in A_b$, resulta que $p_i|d$ o bien $d \equiv b \,(\mathrm{m\acute{o}d}\, p_i)$. En el primer caso, c y d pertenecen a $M(p_i)$, así que $x \in M(p_i)$. En el segundo caso, tenemos que $p_i|c$, $p_i|(d-b)$ y $c|(x-d)$, por lo que $p_i|[(x-d)+(d-b)]$, es decir, $p_i|(x-b)$. Luego $x \in \mathbb{N} \cap P_F(p_i,b)$. Hemos probado que

$$x \in \bigcap_{i=1}^k [M(p_i) \cup (P_F(p_i,b) \cap \mathbb{N})] = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)).$$

Por consiguiente

$$\bigcup_{d \in A_b} P(c,d) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)).$$

Tenemos así el siguiente resultado, que aparece originalmente en [**37**, teorema 4.7, p. 680].

Teorema 6.17. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $c = p_1 p_2 \cdots p_k$ entonces, para cada $b \in \mathbb{N}$,*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b)) = \bigcup_{d \in A_b} P(c,d). \tag{6.12}$$

Por (6.12) el lado derecho de (6.11) es la unión de un número finito de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, todas con la misma diferencia común.

Terminamos la presente subsección con el siguiente resultado, el cual es importante en la siguiente subsección para probar que todas las progresiones aritméticas son totalmente Brown en $\mathbb{N}$.

Teorema 6.18. *Sean $a, b, c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n \in \mathbb{N}$ tales que $P(c_i, d_i) \in \mathcal{B}_K$ y*

$$P(a,b) \cap P(c_i, d_i) \neq \emptyset, \qquad \textit{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Por tanto, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\emptyset \neq M(d) \cap P(a,b) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b) \cap P(c_i, d_i)).$$

Demostración: Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tomemos

$$b_i \in P(a,b) \cap P(c_i, d_i).$$

Luego $a|(b_i - b)$, $c_i|(b_i - d_i)$ y, por (4.12),

$$P([a, c_i], b_i) \subset P(a,b) \cap P(c_i, d_i). \tag{6.13}$$

Como $P(c_i, d_i) \in \mathcal{B}_K$, cada $c_i \in \mathbb{N}_2$ es libre de cuadrados y $\langle c_i, d_i \rangle = 1$. Así, por el teorema 2.2, existe $q_i \in \mathbb{N}$ tal que $[a, c_i] = a q_i$, $q_i | c_i$ y $\langle q_i, a \rangle = 1$. Sea

$$d = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

Como $\langle q_i, a \rangle = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $\langle d, a \rangle = 1$. Luego, por el corolario 4.10, $M(d) \cap P(a,b) \neq \emptyset$.

Fijemos ahora $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y tomemos $z \in M(d) \cap P(a,b)$, así como un subconjunto abierto U de $(\mathbb{N}, \tau_K)$ tal que $z \in U$. Por tanto, existe $x \in \mathbb{N}_2$ libre de cuadrados de modo que $\langle x, z \rangle = 1$ y $P(x,z) \subset U$. Como $a|(z-b)$ y $a|(b_i - b)$ tenemos que $a|[(z-b)-(b_i-b)]$, es decir, $a|(z-b_i)$. Notemos ahora que $\langle x, z \rangle = 1$, $q_i | d$ y $d|z$. Luego $\langle x, q_i \rangle = 1$, por lo que

$$\langle x, [a, c_i] \rangle = \langle x, a q_i \rangle = \langle x, a \rangle \langle x, q_i \rangle = \langle x, a \rangle.$$

Esto muestra que $\langle x, [a, c_i] \rangle | (z - b_i)$ y, aplicando (4.9) y (6.13),

$$\emptyset \neq P(x,z) \cap P([a, c_i], b_i) \subset U \cap P(a,b) \cap P(c_i, d_i).$$

De esta manera $z \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b) \cap P(c_i, d_i))$ probando, con todo, que

$$M(d) \cap P(a,b) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_K)}(P(a,b) \cap P(c_i, d_i)).$$

□

6.2. Subconjuntos totalmente Brown del espacio de Kirch. En esta subsección describimos algunos subconjuntos del espacio de Kirch que son totalmente Brown. Por el teorema 3.11, los resultados presentados en los teoremas 5.22 y 5.30 permanecen válidos en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Por la misma razón, la implicación 4) implica 1) en el teorema 5.23 también es válida en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 6.19. *Si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $\Theta(a) \subset \Theta(b)$, entonces $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.*

Por la parte 4) del teorema 6.7 y el teorema 6.19, tenemos que para cada $b \in \mathbb{N}$ la progresión aritmética $P(1,b)$ es totalmente Brown y densa en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Notemos que si $P(a,b) \in \mathcal{B}_K$ entonces, como $a \neq 1$ y $\langle a, b\rangle = 1$, sucede que $\Theta(a) \not\subset \Theta(b)$.

El siguiente resultado generaliza [**32**, teorema 3.5, p. 901] y el teorema 6.19.

Teorema 6.20. *Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_K)$.*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de $P(a,b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea U_i un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_K)$ tal que $O_i = P(a,b) \cap U_i$. Tomemos además $d_i \in O_i$ así como $c_i \in \mathbb{N}_2$, libre de cuadrados, tal que $\langle c_i, d_i\rangle = 1$ y $P(c_i, d_i) \subset U_i$. Notemos que $P(c_i, d_i) \in \mathcal{B}_K$ y

$$P(a,b) \cap P(c_i, d_i) \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Por el teorema 6.18, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\emptyset \neq M(d) \cap P(a,b) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_K)}(P(a,b) \cap P(c_i, d_i)).$$

Luego

$$\begin{aligned}\emptyset \neq M(d) \cap P(a,b) = P(a,b) \cap M(d) \cap P(a,b) \subset \\ \subset P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_K)}(P(a,b)) \cap P(c_i, d_i)\right) \subset \\ \subset P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_K)}(P(a,b)) \cap U_i\right) = P(a,b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_K)}(O_i)\right).\end{aligned}$$

Esto prueba que $P(a,b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. □

Corolario 6.21. *El espacio $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo. Más aún, si $P(a,b) \in \mathcal{B}_K$ y $c \in P(a,b)$, entonces $P(a,b)$ es localmente conexo en c.*

Demostración: Por el teorema 6.20, cada progresión aritmética es conexa en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. En particular los miembros de la base $\mathcal{B}_K$ son conexos. Esto muestra que $(\mathbb{N}, \tau_K)$ es localmente conexo. Para mostrar la segunda parte, tomemos $P(a,b) \in \mathcal{B}_K$ y $c \in P(a,b)$. Sea U un abierto en $P(a,b)$ tal que $c \in U$. Como $P(a,b)$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, sucede que U es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. Tomemos $P(d,c) \in \mathcal{B}_K$ tal que $P(d,c) \subset U$. Por el teorema 6.20, $P(d,c)$ es totalmente Brown. En particular, $P(d,c)$ es abierto y conexo en $(\mathbb{N}, \tau_K)$ tal que $P(d,c) \subset U \subset P(a,b)$. Esto muestra que $P(a,b)$ es localmente conexo en c. □

7. El espacio de Szczuka

Recordemos que, para cada $a \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Theta(a)$ es el de los números primos que dividen al número a. En 2013 P. Szczuka, también conocida como P. Szyszkowska, consideró en [**33**, sección 3, p. 877] la familia

$$\mathcal{B}_S = \{P(a,b) \colon a, b \in \mathbb{N} \text{ y } \Theta(a) \subset \Theta(b)\} \tag{7.1}$$

y mostró que es base para una topología τ_S de $\mathbb{N}$. En [**36**, p. 1009] P. Szczuka nombró a τ_S como indicamos a continuación.

Definición 7.1. *La topología τ_S se llama la* ***topología de la división común*** *de $\mathbb{N}$. Al espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_S)$ se le conoce como el* ***espacio de Szczuka****.*

Para cada $a \in \mathbb{N}$, tenemos que $M(a) = P(a,a) \in \mathcal{B}_S$ y $\mathbb{N}_a = P(1,a) \in \mathcal{B}_S$, pues $\Theta(a) \subset \Theta(a)$ y $\emptyset = \Theta(1) \subset \Theta(a)$. Además, por el teorema 5.23, los miembros de $\mathcal{B}_S$ son las progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

En el siguiente resultado mostramos que, en efecto, $\mathcal{B}_S$ es base para una topología de $\mathbb{N}$.

Teorema 7.2. *La familia $\mathcal{B}_S$, definida en* (7.1)*, es base para una topología τ_S de $\mathbb{N}$.*

Demostración: Sea $a \in \mathbb{N}$. Como $M(a) \in \mathcal{B}_S$ y $a = a \cdot 0 + a \in M(a)$, sucede que $\mathbb{N} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} M(a)$. Por tanto, $\mathbb{N}$ es unión de miembros de $\mathcal{B}_S$.

Tomemos ahora $P(a_1, b_1), P(a_2, b_2) \in \mathcal{B}_S$ y $x \in P(a_1, b_1) \cap P(a_2, b_2)$. Sean $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $x = a_1 m + b_1$ y $p \in \Theta(a_1) \subset \Theta(b_1)$. Notemos que $p | a_1$ y $p | b_1$ y en consecuencia $p | (a_1 m + b_1)$, es decir $p | x$. Así $\Theta(a_1) \subset \Theta(x)$. De forma análoga $\Theta(a_2) \subset \Theta(x)$. Luego

$$\Theta(a_1) \cup \Theta(a_2) \subset \Theta(x). \tag{7.2}$$

Sea $a = [a_1, a_2]$. Por la parte 1) de la proposición 2.3 y (7.2), tenemos que

$$\Theta(a) \subset \Theta(a_1 a_2) \subset \Theta(a_1) \cup \Theta(a_2) \subset \Theta(x).$$

Por tanto, $P(a,x) \in \mathcal{B}_S$. Además, como $a_1 | a$ y $a_2 | a$, por (4.4),

$$P(a,x) \subset P(a_1,x) \subset P(a_1,b_1) \quad \text{y} \quad P(a,x) \subset P(a_2,x) \subset P(a_2,b_2).$$

Luego $P(a,x) \subset P(a_1,b_1) \cap P(a_2,b_2)$. Esto muestra que $\mathcal{B}_S$ es base para una topología τ_S en $\mathbb{N}$. □

Es claro que

$$\tau_S = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \colon \text{para cada } b \in U \text{ existe } P(a,b) \in \mathcal{B}_S \text{ tal que } P(a,b) \subset U\}.$$

7.1. Propiedades del espacio de Szczuka. Vamos a probar ahora una serie de propiedades del espacio $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Como la base $\mathcal{B}_S$ de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es numerable, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es segundo numerable. Por la parte 2) del teorema 4.4, cada miembro de $\mathcal{B}_S$ es infinito. Por tanto todo abierto no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es infinito.

En el siguiente resultado hacemos explícita la siguiente propiedad que utilizamos en la prueba del teorema 7.2.

Teorema 7.3. *Si* $P(a,b) \in \mathcal{B}_S$ *y* $c \in P(a,b)$*, entonces* $P(a,c) \in \mathcal{B}_S$ *y* $P(a,c) \subset P(a,b)$*. Además*

$$\tau_S = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N} \colon \textit{para cada } b \in U \textit{ existe } P(a,c) \in \mathcal{B}_S \textit{ tal que } b \in P(a,c) \subset U\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por (4.4), tenemos que $P(a,c) \subset P(a,b)$. Si $p \in \Theta(a)$, entonces $p \in \Theta(b)$ y, por tanto, $p|a$ y $p|b$, así que p divide a cualquier combinación lineal de a y b. En particular $p|c$, pues $c \in P(a,b)$. Esto implica que $p \in \Theta(c)$, por lo que $\Theta(a) \subset \Theta(c)$ y, así, $P(a,c) \in \mathcal{B}_S$. $\square$

En el espacio de Szczuka tenemos un resultado análogo al teorema 6.4.

Teorema 7.4. *El conjunto*

$$\overline{\mathcal{B}}_S = \{P(a,b) \in \mathcal{B}_S \colon b \leq a\}$$

es una base para τ_S*.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $P(a,b) \in \mathcal{B}_S$ con $a < b$ y $c \in P(a,b)$. Por el teorema 7.3, $\Theta(a) \subset \Theta(c)$, $P(a,c) \in \mathcal{B}_S$ y $P(a,c) \subset P(a,b)$. Además $1 \leq a < b \leq c$, por lo que existe $p_c \in \mathbb{P}$ tal que $p_c|c$. Sea $k_c \in \mathbb{N}$ tal que $p_c^{k_c} a \geq c$. Claramente

$$\Theta\left(p_c^{k_c} a\right) = \{p_c\} \cup \Theta(a) \subset \{p_c\} \cup \Theta(c) = \Theta(c),$$

y en consecuencia $P(p_c^{k_c} a, c) \in \overline{\mathcal{B}}_S$. Además,

$$c \in P(p_c^{k_c} a, c) \subset P(a,c) \subset P(a,b),$$

por lo que

$$P(a,b) = \bigcup_{c \in P(a,b)} P(p_c^{k_c} a, c).$$

De esta manera, todo elemento de $\mathcal{B}_S$ es una unión de miembros de $\overline{\mathcal{B}}_S$. Por tanto $\overline{\mathcal{B}}_S$ es base de τ_S. $\square$

En la literatura, el teorema 7.4 aparece enunciado sin demostración en la prueba de [**39**, teorema 4.3, p. 96]. La demostración que presentamos aparece originalmente en [**28**, teorema 3.31].

En [**33**, proposición 3.1, p. 877] se muestra el siguiente resultado.

Teorema 7.5. *Todo subconjunto cerrado y no vacío de* $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *tiene a* 1*.*

DEMOSTRACIÓN: Sean F un subconjunto cerrado y no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ y $U = \mathbb{N} \setminus F$. Si $1 \in U$, entonces existe $P(a,1) \in \mathcal{B}_S$ tal que $P(a,1) \subset U$. Como $\Theta(a) \subset \Theta(1)$ y $\Theta(1) = \emptyset$, tenemos que $\Theta(a) = \emptyset$, por lo que $a = 1$. Luego $P(a,1) = \mathbb{N}$, así que $U = \mathbb{N}$ y $F = \emptyset$. De esta contradicción se sigue que $1 \notin U$, por lo que $1 \in F$. $\square$

Del teorema 7.5 se derivan varios resultados. Conviene comparar el siguiente con [**39**, lema 3.1, p. 93].

Teorema 7.6. 1 *es el único punto indiscreto de* $(\mathbb{N}, \tau_S)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $1 \in U$. Si $U \neq \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} \setminus U$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ que no tiene a 1, contradiciendo el teorema 7.5. Esto muestra que 1 es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Si $a \in \mathbb{N}_2$, entonces $M(a)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $a \in M(a)$ y $M(a) \neq \mathbb{N}$, así que a no es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$. □

Corolario 7.7. $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *es totalmente Brown y compacto. En particular, es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: El resultado se sigue de los teoremas 3.5 y 7.6. □

Corolario 7.8. $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *no es homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN: La imagen bajo un homeomorfismo de un punto indiscreto es un punto indiscreto y, como 1 es el único punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$, ningún homeomorfismo de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ sobre sí mismo manda 1 en 2. □

Notemos que, para cada $a \in \mathbb{N}_2$, el conjunto $M(a)$ es un subconjunto abierto y propio del espacio $(\mathbb{N}, \tau_S)$, el cual es totalmente Brown, y por tanto conexo. Luego $M(a)$ no es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Tenemos entonces que, para $a \in \mathbb{N}$, el conjunto $M(a)$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ si y solo si $a = 1$. Este resultado es diferente a lo que sucede en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, en donde $M(a)$ es cerrado si y solo si $a = 1$ o bien a es libre de cuadrados.

El siguiente resultado aparece en [**39**, comentario 3.5].

Teorema 7.9. $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *no es de Alexandroff.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k = P(2^k, 2)$. Hagamos $U = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$. Es claro que $\{U_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ es una familia de abiertos no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tales que $\{2\} \subset U$. Supongamos que existe $x \in U \setminus \{2\}$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > x$. Como $x \in U_k$, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $x = 2^k m + 2$. Al ser $x \neq 2$, tenemos que $m \in \mathbb{N}$. Luego

$$x = 2^k m + 2 > xm + 2 \geq x + 2,$$

de donde $2 < 0$. Esto una contradicción, así que $U = \{2\}$. Como los abiertos no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ son infinitos, U no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. □

Teorema 7.10. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *no es Nanda-Panda superconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Como $P(9,3), P(27,6) \in \mathcal{B}_S$ y $\langle 9, 27 \rangle = 9$ no divide a $6 - 3 = 3$, por (4.9) tenemos que $P(9,3) \cap P(27,6) = \emptyset$. Por tanto $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es Nanda-Panda superconexo. De hecho, para cada $p_1, p_2 \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ tenemos que $P(p_1^2, p_1), P(p_1^3, p_1 p_2) \in \mathcal{B}_S$ y, por (4.9),

$$P(p_1^2, p_1) \cap P(p_1^3, p_1 p_2) = \emptyset.$$

□

En el siguiente resultado describimos dos subconjuntos cerrados de $(\mathbb{N}, \tau_S)$, los cuales son importantes para determinar propiedades relacionadas con la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de una progresión aritmética.

Teorema 7.11. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in M(a)$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos*

$$[\mathbb{N} \cap P_F(a^n, b)] \cup [\mathbb{N} \setminus M(a)] \quad y \quad P(a^n, b) \cup [\mathbb{N} \setminus M(a)]$$

son cerrados en $(\mathbb{N}, \tau_S)$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y notemos que

$$\mathbb{N} \setminus [M(a) \setminus (\mathbb{N} \cap P_F(a^n, b))] = [\mathbb{N} \setminus M(a)] \cup [\mathbb{N} \cap P_F(a^n, b)].$$

Vamos a probar, por tanto, que

$$U = M(a) \setminus [\mathbb{N} \cap P_F(a^n, b)]$$

es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Si $z \in U$, entonces $a|z$ y $\Theta(a^n) = \Theta(a) \subset \Theta(z)$, así que $P(a^n, z)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $z \in P(a^n, z) \subset M(a)$. Como $a^n \nmid (z - b)$, por (4.9),

$$P(a^n, z) \cap P_F(a^n, b) = \emptyset.$$

Luego $P(a^n, z) \subset U$ y, así, U es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Como

$$\mathbb{N} \setminus [M(a) \setminus P(a^n, b)] = [\mathbb{N} \setminus M(a)] \cup P(a^n, b)$$

procediendo como antes, mostramos que $M(a) \setminus P(a^n, b)$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. □

7.2. Axiomas de separación en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Del hecho de que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es un espacio Brown no degenerado, se sigue que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es $T_{2\frac{1}{2}}$. Como $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es compacto y los espacios compactos y T_2 son T_4 y por tanto $T_{2\frac{1}{2}}$, sucede que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tampoco es T_2. En [**33**, proposición 3.3, p. 878] se prueba que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es un espacio T_0 que no es T_1. Recordemos que

$$T_1 \implies T_{\frac{1}{2}} \implies T_D \implies T_0.$$

En el siguiente resultado probamos un resultado un poco más fino que implica el de [**33**].

Teorema 7.12. $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *es* T_D *pero no* $T_{\frac{1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN: Como los conjuntos abiertos y no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ son infinitos y los conjuntos cerrados y no vacíos en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tienen a 1, para cada $b \in \mathbb{N}_2$ el conjunto $\{b\}$ no es abierto ni cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es $T_{\frac{1}{2}}$.

Para probar que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es T_D, sea $a \in \mathbb{N}$. Vamos a dividir la prueba en dos casos. Consideramos primero que $a \in \mathbb{N}_2$. Por reducción al absurdo, vamos a probar que

$$\{a\}' = \{1\}.$$

Supongamos que $c \in \{a\}'$ y $c \neq 1$. Luego $c \neq a$. Si $1 < c < a$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < c^n$. Por tanto, $P(c^n, c)$ es un subconjunto abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ que tiene a c y

$$a \notin P(c^n, c) \setminus \{c\}.$$

Si $a < c$, entonces $M(c)$ es un subconjunto abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ que tiene a c y

$$a \notin M(c) \setminus \{c\}.$$

En cualquiera de los dos casos, deducimos que $c \notin \{a\}'$. De esto y el teorema 7.6 se tiene que $\{a\}' = \{1\}$. Como $P(1, 2) \in \mathcal{B}_S$ y $\mathbb{N} \setminus P(1, 2) = \{1\}$, el conjunto $\{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto prueba que $\{a\}' = \{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, cuando $a \in \mathbb{N}_2$.

Ahora supongamos que $a = 1$. Si $b \in \mathbb{N}_2$, entonces $M(b)$ es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $1 \notin M(b) \setminus \{b\}$. Luego $b \notin \{1\}'$ y, como $1 \notin \{1\}'$, tenemos que $\{1\}' = \emptyset$. Esto termina la prueba del segundo caso. Hemos hecho ver, en ambos casos, que $\{a\}'$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Por tanto, $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es T_D. □

De la prueba del teorema 7.12 se tiene, para $a \in \mathbb{N}_2$, que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\{a\}) = \{1, a\} \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\{1\}) = \{1\}.$$

Por tanto, $\{1\}$ es el único subconjunto degenerado de $\mathbb{N}$ que es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Además, como 1 es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$, tenemos que 1 está en la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. De aquí también se deriva que, para cada $a \in \mathbb{N}_2$, el conjunto $M(a)$ no es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$.

7.3. Subconjuntos totalmente separados del espacio de Szczuka. Como ya mencionamos, los miembros de la base $\mathcal{B}_S$ de τ_S son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En particular, tales elementos son conexos en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En el teorema 5.9 vimos que cada progresión aritmética $P(a, b) \in \mathcal{B}_G$ con $a \in \mathbb{N}_2$, está totalmente separada en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En el espacio $(\mathbb{N}, \tau_S)$ se tiene un resultado análogo e, incluso, con un demostración similar.

Teorema 7.13. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $b \in \mathbb{N}$ son tales que $P(a, b) \in \mathcal{B}_S$, entonces $P(a, b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. En particular, $P(a, b)$ es hereditariamente disconexo.*

Demostración: Sean $x, y \in P(a, b)$ con $x \neq y$. Supongamos, sin perder generalidad, que $x < y$. Escribamos $x = am + b$, $y = an + b$ con $0 \leq m < n$ y consideremos los conjuntos U y V definidos en (4.26). Por el teorema 4.23 tenemos que

$$P(a, b) = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad x \in U \quad \text{y} \quad y \in V.$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}_0$. Como $\Theta(a) \subset \Theta(b)$ y $ak + b \in P(a, b)$, por las partes 1) y 3) de la proposición 2.3 tenemos que

$$\Theta(a^{n+1}) = \Theta(a) \subset \Theta(ak + b).$$

Luego U y V son abiertos en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. □

Por el teorema 7.13 tenemos que $M(a) = P(a, a) \in \mathcal{B}_S$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, para cada $a \in \mathbb{N}_2$. En particular $M(a)$ no es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto es una diferencia con respecto a lo que sucede en los espacios $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y $(\mathbb{N}, \tau_K)$ pues, como mostramos en la parte 5) del teorema 5.23 y en el teorema 6.20, $M(a)$ es totalmente Brown en dichos espacios.

Del hecho de que cada conjunto $M(a)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ y de que los subespacios de un espacio totalmente separados están totalmente separados, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 7.14. *Si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $\langle a, b\rangle \neq 1$, entonces $P(a, b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. En consecuencia, $P(a, b)$ no es aposindético.*

Demostración: Como $\langle a, b\rangle \neq 1$, por la parte 2) de la proposición 2.3, existe $p \in \Theta(a) \cap \Theta(b)$. Luego $P(a, b) \subset M(p)$. Puesto que $M(p) \in \mathcal{B}_S$, por el teorema 7.13, el conjunto $M(p)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Por consiguiente, $P(a, b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Si suponemos que $P(a,b)$ es aposindético, siguiendo la demostración que hicimos en la ida del teorema 5.27, usando que $P(a,b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, se obtiene una contradicción. Por tanto, $P(a,b)$ no es aposindético. $\square$

Del corolario 7.14 tenemos que si $P(a,b)$ es aposindético, entonces $\langle a,b\rangle = 1$.

Recordemos que un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cada función continua $f\colon X \to X$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Tal elemento x se llama un **punto fijo** de f. El siguiente resultado aparece en [**39**, teorema 3.2, p. 93]. Utilizando el teorema 7.13, presentamos una demostración más simple.

Teorema 7.15. *Si $f\colon (\mathbb{N}, \tau_S) \to (\mathbb{N}, \tau_S)$ es una función continua y no constante, entonces $f(1) = 1$. Consecuentemente, $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Sea $a = f(1)$ y supongamos, por reducción al absurdo, que $a \in \mathbb{N}_2$. Afirmamos que

1) $f(\mathbb{N}) \subset M(a)$.

Como $M(a) = P(a,a)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ que contiene a $f(1) = a$, por la continuidad de f, existe un subconjunto abierto U de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $1 \in U$ y $f(U) \subset M(a)$. Por el teorema 7.6, sabemos que 1 es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$, así que $U = \mathbb{N}$. Por tanto $f(\mathbb{N}) \subset M(a)$ y 1) se cumple.

Como $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es conexo y f es continua, por 1), $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto conexo del espacio $M(a)$ que, por el teorema 7.13, es hereditariamente disconexo. Esto implica que f es constante, lo cual es una contradicción. De esta manera $a = 1$ y, así, $f(1) = 1$.

Hemos probado que toda función continua y no constante de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ en sí mismo, posee un punto fijo. Naturalmente, toda función continua y constante de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ en sí mismo, también posee un punto fijo. Por tanto, $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

7.4. Conexidad local en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. En la presente subsección, estudiamos los puntos en donde $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es localmente conexo o bien conexo en pequeño o casi conexo en pequeño. Si $A \subset Y \subset \mathbb{N}$ denotamos por $\operatorname{int}_Y(A)$ el interior de A en el subespacio Y de $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Conviene comparar el siguiente resultado con el teorema 5.10, que se satisface en el espacio $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Teorema 7.16. *Para $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $P(a,b) \in \mathcal{B}_S$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *si $a \in \mathbb{N}_2$, entonces en ninguno de sus puntos, $P(a,b)$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño;*
2) *si $a = 1$, entonces en ningún punto $c \in P(a,b) \setminus \{1\}$, el conjunto $P(a,b)$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño.*

Demostración: Para probar 1), fijemos $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $P(a,b)$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño en $c \in P(a,b)$. Por el teorema 7.3 sucede que $P(a,c) \in \mathcal{B}_S$ y $P(a,c) \subset P(a,b)$. Como $P(a,c)$ es un subconjunto abierto de $P(a,b)$ que contiene a c, existe un subconjunto conexo C de $P(a,c)$ tal que $\text{int}_{P(a,b)}(C) \neq \emptyset$. Luego $\text{int}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(C) \neq \emptyset$ y, como los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N},\tau_S)$ son infinitos, el conjunto C es infinito. Esto contradice el hecho de que, por el teorema 7.13, $P(a,c)$ es hereditariamente disconexo. Por tanto, 1) se cumple.

Para probar 2), supongamos que $a = 1$ y que $P(a,b) = \mathbb{N}_b$ es conexo en pequeño o bien casi conexo en pequeño en $c \in P(a,b) \setminus \{1\}$. Luego $M(c)$ es un subconjunto abierto de $P(a,b)$ que contiene a c, por lo que existe un subconjunto conexo D de $M(c)$ tal que $\text{int}_{P(a,b)}(C) \neq \emptyset$. Por tanto, $\text{int}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(D) \neq \emptyset$ y como los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N},\tau_S)$ son infinitos, el conjunto D es infinito. Esto contradice el hecho de que, por el teorema 7.13, $M(c)$ is hereditariamente disconexo. Por tanto, 2) se cumple. □

Corolario 7.17. $(\mathbb{N},\tau_S)$ *es localmente conexo en* 1 *y no es conexo en pequeño ni casi conexo en pequeño en ningún punto* $c \in \mathbb{N}_2$. *En particular,* $(\mathbb{N},\tau_S)$ *no es localmente conexo.*

Demostración: Por el teorema 7.6, 1 es un punto indiscreto del espacio conexo $(\mathbb{N},\tau_S)$, así que $(\mathbb{N},\tau_S)$ es localmente conexo en 1. Como $\mathbb{N} = P(1,1)$ el resto de la prueba se sigue de la parte 2) del teorema 7.16. □

Del corolario 7.17 se sigue que 1 es el único punto en donde $(\mathbb{N},\tau_S)$ es localmente conexo.

7.5. La cerradura en el espacio de Szczuka. En esta subsección presentamos varios resultados que involucran la cerradura de una progresión aritmética con respecto al espacio de Szczuka. En [**36**, comentario 3.3, p. 1010] se menciona que

$$\text{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(1,b)) = \mathbb{N}, \qquad \text{para cada } b \in \mathbb{N}.$$

En particular, la cerradura en $(\mathbb{N},\tau_S)$ de $P(1,b)$ contiene a $\mathbb{P}$. En el siguiente resultado mostramos que la cerradura en $(\mathbb{N},\tau_S)$ de cada progresión aritmética, cuya diferencia común es mayor que uno, contiene una infinidad de números primos.

Teorema 7.18. *Si* $a \in \mathbb{N}_2$ *y* $b \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\bigcap_{p \in \Theta(a)} (\mathbb{N} \setminus M(p)) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)). \tag{7.3}$$

En particular,

$$\mathbb{P} \setminus \Theta(a) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)). \tag{7.4}$$

Demostración: Sean c en el lado izquierdo de (7.3) y U un subconjunto abierto y no vacío de $(\mathbb{N},\tau_S)$ tal que $c \in U$. Por tanto, existe $d \in \mathbb{N}$ de modo que $\Theta(d) \subset \Theta(c)$ y $P(d,c) \subset U$. Si $\langle d,a \rangle \neq 1$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p|d$ y $p|a$. Notemos que $p \in \Theta(a) \cap \Theta(c)$ así que $c \in M(p)$, contradiciendo la elección de c. Luego $\langle d,a \rangle = 1$, de donde $\langle d,a \rangle | (c-b)$. Esto implica, por (4.9), que

$$\emptyset \neq P(d,c) \cap P(a,b) \subset U \cap P(a,b).$$

Así $c \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a,b))$ y (7.3) se cumple. La contención (7.4) se sigue de (7.3) y el hecho de que

$$\mathbb{P} \setminus \Theta(a) \subset \{z \in \mathbb{N} \colon \langle z, p\rangle = 1 \text{ para cada } p \in \Theta(a)\} = \bigcap_{p \in \Theta(a)} (\mathbb{N} \setminus M(p)).$$

□

Si $a = 1$, entonces $\Theta(a) = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathbb{N}$, así que la contención (7.4) es válida para cada $a \in \mathbb{N}$.

Para calcular la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de una progresión aritmética, vamos a presentar una serie de resultados previos. Comenzamos con el siguiente.

Teorema 7.19. *Si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ son tales que $a|c$ y $d \equiv b \,(\mathrm{mód}\, a)$, entonces*

$$\mathbb{N} \cap P_F(c,d) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)). \tag{7.5}$$

En particular

$$\mathbb{N} \cap P_F(a^n,b) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)), \qquad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Demostración: Si $a \geq b$, por la segunda parte del teorema 4.5,

$$\mathbb{N} \cap P_F(c,d) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\mathbb{N} \cap P_F(c,d)) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)).$$

Vamos a probar que la contención (7.5) se cumple, independientemente de la relación que hay entre a y b. Tomemos, por tanto, $z \in \mathbb{N} \cap P_F(c,d)$ y un subconjunto abierto y no vacío U de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $z \in U$. Luego existe $q \in \mathbb{N}$ con $\Theta(q) \subset \Theta(z)$ tal que $P(q,z) \subset U$. Notemos que $c|(z-d)$, $\langle q,a\rangle|a$ y $a|c$. En consecuencia, $\langle q,a\rangle|(z-d)$. También $a|(d-b)$ y $\langle q,a\rangle|a$, así que $\langle q,a\rangle|(d-b)$. Por tanto $\langle q,a\rangle|[(z-d)+(d-b)]$, es decir, $\langle q,a\rangle|(z-b)$. Esto implica, por (4.9), que

$$\emptyset \neq P(q,z) \cap P(a,b) \subset U \cap P(a,b).$$

De esta manera, $z \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b))$ y, así, (7.5) se cumple. La contención (7.6) se sigue de (7.5) y los hechos de que $b \equiv b \,(\mathrm{mód}\, a)$ y $a|a^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

El siguiente resultado generaliza [**36**, lema 3.2, p. 1009].

Teorema 7.20. *Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ son tales que $b \equiv c \,(\mathrm{mód}\, a)$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\mathbb{N} \cap P_F(a,c)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)). \tag{7.7}$$

En particular,

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,c))$$

y, si $b \in M(a)$, entonces $cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a))$.

Demostración: Como $a|a$ y $b \equiv c \,(\mathrm{mód}\, a)$, por el teorema 4.5,

$$P(a,b) \subset \mathbb{N} \cap P_F(a,c).$$

Tomando cerraduras en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, obtenemos que el lado derecho de (7.7) es un subconjunto de su lado izquierdo. Como también $a|a$ y $c \equiv b \,(\mathrm{mód}\, a)$, por (7.5) tenemos que

$$\mathbb{N} \cap P_F(a,c) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)).$$

Por tanto el lado izquierdo de (7.7) es un subconjunto de su lado derecho. Esto prueba (7.7). Ahora bien, como $b \equiv b\,(\text{mód}\,a)$ y $b \equiv c\,(\text{mód}\,a)$, aplicando (7.7) dos veces, resulta que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\mathbb{N} \cap P_F(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,c)).$$

Para terminar la prueba, consideremos que $b \in M(a)$. Luego $b \equiv a\,(\text{mód}\,a)$ y, por (7.7),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\mathbb{N} \cap P_F(a,a)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)).$$

$\square$

Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ son tales que $c \in P(a,b)$, entonces $b \equiv c\,(\text{mód}\,a)$ y $P(a,c) \subset P(a,b)$. La contención bien puede ser propia pero, por el teorema 7.20,

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,c)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)).$$

El siguiente resultado generaliza [**36**, teorema 3.4, p. 1010], pues no utilizamos la condición $c \leq p^n$ que aparece en las hipótesis de dicho teorema en [**36**].

Teorema 7.21. *Sean $p \in \mathbb{P}$ y $b, c \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \equiv c\,(\text{mód}\,p^n)$ tenemos que*

$$\mathit{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)) = [\mathbb{N} \cap P_F(p^n,c))] \cup [\mathbb{N} \setminus M(p)]. \tag{7.8}$$

En particular

1) *si $\langle p, b\rangle = 1$, entonces $\mathit{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)) = \mathbb{N} \setminus M(p)$;*
2) *si $p|b$, resulta que $\mathit{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p,b)) = \mathbb{N}$;*
3) *$P(2,1)$ es cerrado en $(\mathbb{N},\tau_S)$;*
4) *para cada $q \in \mathbb{P}$ tenemos que $\mathit{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(q)) = \mathbb{N}$ y, si $P(q,b) \in \mathcal{B}_S$, entonces $\mathit{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(q,b)) = \mathbb{N}$.*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$C = [\mathbb{N} \cap P_F(p^n,c)] \cup [\mathbb{N} \setminus M(p)].$$

Es claro que $\Theta(p^n) = \{p\}$ y $p^n|(c-b)$. Además, por (7.3) y (7.5) tenemos que

$$\mathbb{N} \setminus M(p) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)) \quad \text{ y } \quad \mathbb{N} \cap P_F(p^n,c) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)).$$

Por tanto el lado derecho de (7.8) es un subconjunto de su lado izquierdo. Para probar la contención inversa, dividimos la prueba en dos casos. Supongamos primero que $p|c$. Por el teorema 7.11, C es cerrado en $(\mathbb{N},\tau_S)$ y, por el teorema 4.5,

$$P(p^n,b) \subset \mathbb{N} \cap P_F(p^n,c) \subset C.$$

Luego, el lado izquierdo de (7.8) es un subconjunto de su lado derecho. Ahora supongamos que $p \nmid c$. Notemos que $\langle p, c\rangle = 1$ y, como $b \equiv c\,(\text{mód}\,p)$, por (4.6) tenemos que

$$P(p^n,b) \subset \mathbb{N} \setminus M(p).$$

Debido a que $\mathbb{N} \setminus M(p)$ es cerrado en $(\mathbb{N},\tau_S)$, resulta que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)) \subset \mathbb{N} \setminus M(p) \subset C.$$

De esta manera (7.8) se cumple.

Para probar 1) supongamos que $\langle p, b\rangle = 1$. Notemos que $\langle p^n, b\rangle = 1$ y, por (4.5),

$$\mathbb{N} \cap P_F(p^n,b) \subset \mathbb{N} \setminus M(p).$$

Utilizando esto y (7.8), obtenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p^n,b)) = [\mathbb{N}\cap P_F(p^n,b)]\cup[\mathbb{N}\setminus M(p)] = \mathbb{N}\setminus M(p).$$

Esto prueba 1).

Para ver 2) consideremos que $p|b$. Notemos que $b \equiv p \,(\mathrm{m\acute{o}d}\, p)$ y, por (7.8),

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p,b)) = [\mathbb{N}\cap P_F(p,p)]\cup[\mathbb{N}\setminus M(p)] = P(p,p)\cup[\mathbb{N}\setminus M(p)] = \\ = M(p)\cup[\mathbb{N}\setminus M(p)] = \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Esto prueba 2).

Como $\langle 2,1\rangle = 1$, por 1) tenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(2,1)) = \mathbb{N}\setminus M(2) = P(2,1)$$

y, así, 3) se cumple.

Para probar 4), sea $q\in\mathbb{P}$. Como $q|q$, por 2),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(q)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(q,q)) = \mathbb{N}.$$

Ahora supongamos que $P(q,b)$ es abierto en $(\mathbb{N},\tau_S)$. Luego $\{q\} = \Theta(q)\subset\Theta(b)$ así que $q|b$ y, por 2), $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(q,b)) = \mathbb{N}$. De esta manera 4) se satisface. □

Cuando la intersección de un número finito de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ es no vacía, la cerradura en $(\mathbb{N},\tau_S)$ de tal intersección, es la intersección de las cerraduras de las progresiones dadas. Por los teoremas 5.17 y 6.10, el mismo resultado se cumple en $(\mathbb{N},\tau_G)$ y en $(\mathbb{N},\tau_K)$ y con la misma demostración.

Teorema 7.22. *Si $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k\in\mathbb{N}$ son tales que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i,b_i)\neq\emptyset$, entones*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\bigcap_{i=1}^k P(a_i,b_i)) = \bigcap_{i=1}^k cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a_i,b_i)). \tag{7.9}$$

Escribimos ahora algunos resultados que se derivan del teorema 7.22. El siguiente aparece en [**36**, teorema 3.5, p. 1011] con una demostración muy diferente.

Teorema 7.23. *Si $a\in\mathbb{N}_2$ y $a=\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^k cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p_i^{\alpha_i},b)). \tag{7.10}$$

Demostración: El resultado se sigue de (4.23) y de (7.9). □

Como vimos en las respectivas pruebas de los teoremas 5.18 y 6.16, la igualdad (7.10) es válida en $(\mathbb{N},\tau_G)$ y en $(\mathbb{N},\tau_K)$.

El siguiente resultado se prueba de una manera diferente en la segunda parte de [**36**, teorema 3.6, p. 1012].

Teorema 7.24. *Si $a, b \in \mathbb{N}_2$ son tales que a es libre de cuadrados y $a|b$, entonces $P(a,b)$ y $M(a)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tales que*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathbb{N} = cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)).$$

Demostración: Es claro que $P(a,b)$ y $M(a)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Por la última parte del teorema 7.20,

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)).$$

Supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i$ es la descomposición canónica de a. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tenemos que $p_i|b$ así que, por la parte 2) del teorema 7.21,

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p_i,b)) = \mathbb{N}.$$

Entonces, por (4.23) y (7.9),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\bigcap_{i=1}^{k} P(p_i,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p_i,b)) = \mathbb{N}.$$

Alternativamente, podemos utilizar (4.23), (7.9) y la parte 4) del teorema 7.21, para deducir que $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)) = \mathbb{N}$. □

Ya hemos comentado que, contrario a lo que sucede en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tenemos que, para cada $a \in \mathbb{N}_2$ el conjunto $M(a)$ no es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. El teorema 7.24 dice que $M(a)$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, cuando a es libre de cuadrados (recordemos que en $(\mathbb{N}, \tau_G)$ y en $(\mathbb{N}, \tau_K)$, cuando a es libre de cuadrados, resulta que $M(a)$ es cerrado en dichos espacios). Por tanto, bajo dicha situación, $M(a)$ no es denso en ninguna parte de $\mathbb{N}$.

Supongamos que $a \in \mathbb{N}_2$ y que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, Por la segunda parte de (4.22) tenemos que $M(a) = \bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i})$. Luego, aplicando (7.8) y (7.9),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(\bigcap_{i=1}^{k} M(p_i^{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} [(\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, p_i^{\alpha_i})) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p))] = \bigcap_{i=1}^{k} [M(p_i^{\alpha_i}) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p_i))],$$

es decir

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(M(a)) = \bigcap_{i=1}^{k} [M(p_i^{\alpha_i}) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p_i))].$$

En el siguiente resultado, calculamos la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de una progresión aritmética $P(a,b)$ con $a \in \mathbb{N}_2$.

Teorema 7.25. *Sean $a \in \mathbb{N}_2$ y $b, c \in \mathbb{N}$ tales que $b \equiv c \,(\text{mód}\, a)$. Si $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} [(\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, c)) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p_i))]. \tag{7.11}$$

Demostración: Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tenemos que $p_i^{\alpha_i} | a$. Luego $b \equiv c \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$ y, por (7.8) y (7.10),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(p_i^{\alpha_i}, b)) = \bigcap_{i=1}^{k} [(\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, c)) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p_i))].$$

□

Supongamos, de nuevo, que $a \in \mathbb{N}_2$ y que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Dada $b \in \mathbb{N}$, como $b \equiv b \,(\text{mód}\, a)$, por (7.11) tenemos que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} [(\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, b)) \cup (\mathbb{N} \setminus M(p_i))]. \tag{7.12}$$

Para cada $b \in \mathbb{N}$ hagamos

$$A_b = \{c \in \mathbb{N} \colon c \leq a \text{ y, para cada } i \in \{1, 2, \dots, k\}, \langle p_i, c\rangle = 1 \text{ o bien } c \equiv b \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})\}.$$

Sean $b \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b))$. Tomemos $n \in \mathbb{N}_0$ y $c \in \mathbb{N}$ tales que $x = an + c$ y $c \leq a$. Dada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, por (7.12), tenemos que $x \in P_F(p_i^{\alpha_i}, b)$ o bien $x \in \mathbb{N} \setminus M(p_i)$. Supongamos que $x \in P_F(p_i^{\alpha_i}, b)$. Luego $x \equiv b \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$. También $x = an + c$ y $an \equiv 0 \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$, por lo que $c \equiv b \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$. Supongamos ahora que $x \in \mathbb{N} \setminus M(p_i)$. Como $p_i | a$ y $x = an + c$ no es un múltiplo de p_i, sucede que c no es un múltiplo de p_i. Luego $\langle p_i, c\rangle = 1$. Tenemos, con todo, que $c \in A_b$ y $x \in P(a,c)$. Esto prueba que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) \subset \bigcup_{c \in A_b} P(a,c).$$

Tomemos ahora $z \in \bigcup_{c \in A_b} P(a,c)$. Luego $z \in \mathbb{N}$ y existen $c \in A_b$ y $m \in \mathbb{N}_0$ tales que $z = am + c$. Dada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, como $c \in A_b$, resulta que $\langle p_i, c\rangle = 1$ o bien $c \equiv b \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$. En el primer caso $z \in \mathbb{N} \setminus M(p_i)$ y, en el segundo, usando que $am \equiv 0 \,(\text{mód}\, p_i^{\alpha_i})$ tenemos que $z \in P_F(p_i^{\alpha_i}, b)$. Luego, por (7.12), $z \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b))$. Esto prueba que

$$\bigcup_{c \in A_b} P(a,c) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)).$$

Tenemos así el siguiente resultado que se prueba de manera diferente en la primera parte de [**36**, teorema 3.6, p. 1012].

Teorema 7.26. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Para cada $b \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcup_{c \in A_b} P(a,c). \tag{7.13}$$

Por (7.13) el lado derecho de (7.12) es la unión de un número finito de progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$, todas con la misma diferencia común. Cuando $\langle a, b\rangle = 1$, podemos simplificar el lado derecho de (7.12).

Teorema 7.27. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Para cada $b \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b\rangle = 1$, tenemos que*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} [\mathbb{N} \setminus M(p_i)]. \tag{7.14}$$

Demostración: Como $\langle a, b\rangle = 1$ resulta que $\langle p_i^{\alpha_i}, b\rangle = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, por (4.5),

$$\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, b) \subset \mathbb{N} \setminus M(p_i).$$

Por tanto,

$$[\mathbb{N} \cap P_F(p_i^{\alpha_i}, b)] \cup [\mathbb{N} \setminus M(p_i)] = \mathbb{N} \setminus M(p_i). \tag{7.15}$$

De esta manera, la igualdad (7.14) se sigue de (7.12) y (7.15). □

Supongamos, de nuevo, que $a \in \mathbb{N}_2$ y que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Para cada $b \in \mathbb{N}$ definimos

$$C_b = \{c \in \mathbb{N} \colon c \leq a \text{ y, para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \langle p_i, c\rangle = 1\}.$$

Razonando como en la prueba del teorema 7.26, usando (7.14) en su lugar, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.28. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Para cada $b \in \mathbb{N}$ con $\langle a, b\rangle = 1$, tenemos que*

$$cl_{(\mathbb{N}, \tau_S)}(P(a, b)) = \bigcup_{c \in C_b} P(a, c).$$

7.6. Subconjuntos totalmente Brown del espacio de Szczuka. En esta subsección caracterizamos las progresiones aritméticas $P(a, b)$ que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. En el teorema 5.23 mostramos que, para una progresión aritmética, ser totalmente Brown, ser Brown y ser conexo son equivalentes en $(\mathbb{N}, \tau_G)$. En $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tenemos un resultado análogo. Antes de presentarlo, conviene indicar que en [**33**, teorema 3.4, p. 878] se prueba que $P(a, b)$ es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ si y solo si $\langle a, b\rangle = 1$. Utilizando los resultados que hemos presentado, la prueba de que 3) implica 4) en el siguiente resultado, es mas simple que la que aparece en [**33**, teorema 3.4, p. 878].

Teorema 7.29. *Para $a, b \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$;*
2) *$P(a, b)$ es Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$;*
3) *$P(a, b)$ es conexo $(\mathbb{N}, \tau_S)$;*
4) *$\langle a, b\rangle = 1$.*

En particular

5) *$P(a, b) \in \mathcal{B}_S$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ si y solo si $a = 1$;*
6) *$(\mathbb{N}, \tau_S)$ es totalmente Brown.*

Demostración: Ya sabemos que 1) implica 2) y que 2) implica 3). Supongamos ahora que 3) se cumple. Si $\langle a, b\rangle \neq 1$, por el corolario 7.14, $P(a, b)$ está totalmente separado en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Luego $P(a, b)$ no es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto prueba que 3) implica 4).

Ahora supongamos que 4) se cumple. Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de $P(a, b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea U_i un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ tal que $O_i = P(a, b) \cap U_i$ y tomemos $b_i \in O_i$. Luego existe $a_i \in \mathbb{N}$ tal que $\Theta(a_i) \subset \Theta(b_i)$ y $P(a_i, b_i) \subset U_i$. Para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por (7.4),

$$\mathbb{P} \setminus \Theta(a_i) \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a_i, b_i)) \quad \text{y} \quad P(a, b) \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset. \tag{7.16}$$

Como el conjunto $A = \bigcup_{i=1}^{n} \Theta(a_i)$ es finito y, por el teorema de Dirichlet (teorema 5.7) el conjunto $P(a, b) \cap \mathbb{P}$ es infinito, existe $p \in (P(a, b) \cap \mathbb{P}) \setminus A$. Luego, por (7.16),

$$p \in P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{P} \setminus \Theta(a_i)) \right) \subset P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a_i, b_i)) \right).$$

De esta manera, usando (5.7),

$$\begin{aligned} \emptyset \neq P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a_i, b_i)) \right) = \\ = P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, b)) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a_i, b_i))] \right) = \\ = P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(P(a, b) \cap P(a_i, b_i)) \right) \subset P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\mathbb{N}}(O_i) \right). \end{aligned}$$

Esto prueba que $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Por tanto, 4) implica 1). Tenemos así que las afirmaciones 1)–4) son equivalentes.

Para probar 5), supongamos que $P(a, b) \in \mathcal{B}_S$. Por tanto, $\Theta(a) \subset \Theta(b)$. Si $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, puesto que 1) implica 4), $\langle a, b \rangle = 1$. Luego, por la parte 2) de la Proposición 2.3,

$$\emptyset = \Theta(\langle a, b \rangle) = \Theta(a) \cap \Theta(b) = \Theta(a).$$

De esta manera, $a = 1$. A la inversa, si $a = 1$ entonces $\langle a, b \rangle = 1$ y, como 4) implica 1), el conjunto $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto prueba 5).

Como $\mathbb{N} = P(1, 1) \in \mathcal{B}_S$, 6) se sigue de esto y de 5). □

Corolario 7.30. *Para cada $a, b \in \mathbb{N}$ la progresión aritmética $P(a, b)$ está totalmente separada o bien es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$.*

Demostración: Si $\langle a, b \rangle = 1$, por el teorema 7.29, $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Si $\langle a, b \rangle \neq 1$, por el corolario 7.14, $P(a, b)$ está totalmente separada en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. □

Por el corolario 5.26, las mismas dos posibilidades mencionadas en el corolario 7.30 se cumplen en $(\mathbb{N}, \tau_G)$.

Recordemos que si $P(a, b)$ es aposindético en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, entonces $\langle a, b \rangle = 1$. Sería interesante poder caracterizar las progresiones aritméticas que son aposindéticas en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Debido a que 1 es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_S)$, es fácil ver que $\mathbb{N} = P(1, 1)$ no es aposindético en 1. En general, $P(a, 1)$ no es aposindético en 1. Por tanto, la condición $\langle a, b \rangle = 1$ no implica en general que $P(a, b)$ es aposindético en $(\mathbb{N}, \tau_S)$.

Consideramos interesante determinar si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\langle a, b\rangle = 1$ y $P(a,b)$ es aposindético. Notemos que si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $\langle a, b\rangle = 1$ y $P(a,b)$ es T_2, entonces por el teorema 7.29, $P(a,b)$ es totalmente Brown y T_2 así que, por el teorema 3.14, $P(a,b)$ es aposindético.

Conviene comparar el corolario 7.17 con el comentario que aparece previo a [**33**, corolario 3.5, p. 879], en el que se dice que, debido a la equivalencia entre las afirmaciones 3) y 4) del teorema 7.29, «podemos ver fácilmente que cada base para la topología τ_S contiene alguna progresión aritmética disconexa». Además, debido al comentario que hemos entrecomillado, en [**33**, corolario 3.5, p. 879] se afirma que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es localmente conexo.

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado.

Teorema 7.31. *El espacio* $(\mathbb{N}, \tau_S)$ *no es Dontchev-superconexo.*

Demostración: Por la parte 6) del teorema 7.29, $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es conexo. Ahora vamos a mostrar que posee un subconjunto con interior no vacío que no es abierto. Notemos que $P(4,2) \in \mathcal{B}_S$ y que, por (7.8),

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(4,2)) = [\mathbb{N} \cap P_F(2^2, 2)] \cup [\mathbb{N} \setminus M(2)] = P(4,2) \cup P(2,1).$$

Por tanto, $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(4,2))$ es un subconjunto no vacío cerrado y propio de $(\mathbb{N}, \tau_S)$ que contiene un conjunto abierto y no vacío. Como $(\mathbb{N}, \tau_S)$ es conexo, $\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(P(4,2))$ no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es Dontchev-superconexo. $\square$

8. El espacio de Rizza

Recordemos que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. En 1993, G. B. Rizza contruyó en [**30**] una topología $\mathcal{D}$ en $\mathbb{N}_0$ tal que el espacio topológico $(\mathbb{N}_0, \mathcal{D})$ es compacto, conexo y T_0. Para definirla consideró $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y, para cada $X \subset \mathbb{N}_0$ con $X \neq \emptyset$, definió

$$\overline{X} = \bigcup_{x \in X} D_0(x), \qquad \text{donde} \qquad D_0(x) = \{y \in \mathbb{N}_0 \colon y|x\}.$$

Posteriormente probó, en [**30**, proposición 1, p. 180], que la función que a cada subconjunto X de $\mathbb{N}_0$ le asocia $\overline{X}$, es un operador cerradura. De esta manera, G. B. Rizza obtuvo la topología $\mathcal{D}$ en $\mathbb{N}_0$ de modo que

$$X \subset \mathbb{N}_0 \text{ es cerrado en } (\mathbb{N}_0, \mathcal{D}) \text{ si y solo si } X = \overline{X}.$$

Notemos que $\overline{\{0\}} = \mathbb{N}_0$. Además $\overline{\{1\}} = 1 = D_0(1)$ y $\{x, 1\} \subset \overline{\{x\}} = D_0(x)$, para cada $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Esto implica que $1 \in \overline{X}$, para todo subconjunto no vacío X de $\mathbb{N}_0$. También $X \subset \overline{X}$, para cada $X \subseteq \mathbb{N}_0$.

En la presente sección vamos a utilizar la topología relativa de $(\mathbb{N}_0, \mathcal{D})$ al subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}_0$, pero definida procediendo de un modo distinto. Consideramos, para cada $b \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$D(b) = \{a \in \mathbb{N} \colon a|b\}$$

de los divisores de b en $\mathbb{N}$. Notemos que $\Theta(b) = D(b) \cap \mathbb{P}$ y que $D_0(b)$ restringido a $\mathbb{N}$ es $D(b)$, es decir, $D(b) = D_0(b) \cap \mathbb{N}$.

La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ definida, para $a, b \in \mathbb{N}$, como

$$a \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a|b$$

es un orden parcial en $\mathbb{N}$ tal que

$$\uparrow a = \{b \in \mathbb{N} \colon a \leq b\} = \{b \in \mathbb{N} \colon a|b\} = M(a), \text{ para cada } a \in \mathbb{N}.$$

Como $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, por lo que comentamos en la subsección 2.1, la familia

$$\mathcal{B}_R = \{\uparrow a \colon a \in \mathbb{N}\} = \{M(a) \colon a \in \mathbb{N}\}$$

es base para una topología $\tau_{\leq}$ en $\mathbb{N}$ tal que el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_{\leq})$ es de Alexandroff y T_0.

A partir de este momento, escribimos τ_R en lugar de $\tau_{\leq}$, y utilizamos el nombre que G. B. Rizza le dió.

Definición 8.1. *La topología τ_R se llama* ***topología de la división*** *de $\mathbb{N}$. Al espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_R)$ se le conoce como el* ***espacio de Rizza****.*

Solo para completar la discusión, vamos a probar que, en efecto, τ_R es la topología relativa de $\mathcal{D}$ a $\mathbb{N}$. Supongamos primero que $X \subset \mathbb{N}$ es tal que $X = \overline{X}$. Si $X = \mathbb{N}$, entonces X es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Consideremos, por tanto, que $X \neq \mathbb{N}$ y tomemos $y \in \mathbb{N} \setminus X$. Si existe $x \in M(y) \cap X$, entonces

$$y \in D(x) \subset \overline{X} = X,$$

lo cual contradice el hecho de que $y \notin X$. Esto prueba que $M(y)$ es un elemento de $\mathcal{B}_R$ tal que $y \in M(y) \subset \mathbb{N} \setminus X$. Luego $\mathbb{N} \setminus X$ es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ y, así, X es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Supongamos ahora que $X \subset \mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Si $y \in \overline{X}$, entonces existe $x \in X$ tal que $y \in D(x) \subset X$. Luego $y|x$. Si $y \notin X$, entonces y es un elemento del conjunto abierto $\mathbb{N} \setminus X$ de $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Por tanto, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $y \in M(a) \subset \mathbb{N} \setminus X$. Esto implica que $a|y$ y, como también $y|x$, deducimos que $a|x$. Luego $a \in D(x) \subset X$ y $a \in M(a) \subset \mathbb{N} \setminus X$. Tenemos una contradicción, por lo que $y \in X$. Esto prueba que $\overline{X} \subset X$ y, como la otra contención también es cierta, deducimos que $X = \overline{X}$.

De lo probado en los párrafos anteriores, se infiere que $X \subset \mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ si y solo si

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(X) = X = \overline{X}.$$

Por tanto, la topología relativa de $(\mathbb{N}_0, \mathcal{D})$ al subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}_0$, es τ_R y, además, la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ del subconjunto X de $\mathbb{N}$ es $\overline{X}$.

8.1. Propiedades del espacio de Rizza. A partir de este momento, vamos a mostrar propiedades del espacio $(\mathbb{N}, \tau_R)$, considerando que es un espacio de Alexandroff y T_0, cuya topología tiene por base a la familia

$$\mathcal{B}_R = \{M(a) \colon a \in \mathbb{N}\}.$$

Por tanto, no vamos a utilizar la topología $\mathcal{D}$ de $\mathbb{N}_0$ ni los conjuntos de la forma $\overline{X}$. Notemos que si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $b \in M(a)$, entonces $M(b) \subset M(a)$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\tau_R &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N}\colon \text{para cada } b \in U, \text{ existe } a \in \mathbb{N} \text{ tal que } b \in M(a) \subset U\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{N}\colon \text{para cada } b \in U, \text{ tenemos que } M(b) \subset U\}.\end{aligned}$$

Como la base $\mathcal{B}_R$ es numerable, el espacio $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es segundo numerable. Por la parte 2) del teorema 4.4, cada miembro de $\mathcal{B}_R$ es infinito. Por tanto, todo abierto no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es infinito.

Para cada $a \in \mathbb{N}$ tenemos que $M(a) \in \mathcal{B}_S$. Por tanto $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{B}_S$ y, en consecuencia, $\tau_R \subset \tau_S$. Notemos que $P(4,2) \in \mathcal{B}_S$ y que $2 \in P(4,2)$. Si $P(4,2) \in \tau_R$, entonces $M(2) \subset P(4,2)$. Esto es absurdo, pues $8 \in M(2) \setminus P(4,2)$. Por tanto $P(4,2) \notin \tau_R$ y, así,

$$\tau_R \subsetneq \tau_S.$$

La contención propia anterior, aparece en [**33**, proposición 5.1, p. 881] .

Como $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es un espacio de Alexandroff y no discreto, por el teorema 2.1, $(\mathbb{N}, \tau_R)$ no es T_1. Entonces $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es un espacio T_0 que no es T_1. Además, como $M(a) = \uparrow a$ y los conjuntos altos son conexos, tenemos que los miembros de $\mathcal{B}_R$ son abiertos y conexos. Por tanto $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es localmente conexo. Recordemos que $(\mathbb{N}, \tau_S)$ no es localmente conexo.

Los espacios $(\mathbb{N}, \tau_S)$ y $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tienen varias propiedades en común. Por ejemplo, el teorema 7.5 es válido en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Teorema 8.2. *Todo subconjunto cerrado y no vacío de* $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *tiene a* 1.

Demostración: Sean F un subconjunto cerrado y no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ y $U = \mathbb{N} \setminus F$. Si $1 \in U$, entonces $\mathbb{N} = M(1) \subset U$. Luego $U = \mathbb{N}$ y $F = \emptyset$. De esta contradicción se sigue que $1 \notin U$, por lo que $1 \in F$. □

Del teorema 8.2 se sigue que, con las mismas demostraciones, el teorema 7.6 y los corolarios 7.7 y 7.8 son válidos en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Escribimos esto en el siguiente resultado.

Teorema 8.3. 1 *es el único punto indiscreto de* $(\mathbb{N}, \tau_R)$. *Además* $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *es totalmente Brown, compacto y no homogéneo. En particular,* $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *es conexo.*

En cuanto a axiomas de separación, ya indicamos que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es T_0 y no T_1. En realidad tenemos el siguiente resultado, el cual es la versión en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ del teorema 7.12.

Teorema 8.4. $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *es* T_D *pero no* $T_{\frac{1}{2}}$.

Demostración: La misma demostración que dimos en el teorema 7.12, muestra que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ no es $T_{\frac{1}{2}}$. Para ver que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es T_D, sea $a \in \mathbb{N}$. Dividimos la demostración en dos casos. Supongamos primero que $a \in \mathbb{N}_2$. Vamos a demostrar que

$$\{a\}' = D(a) \setminus \{a\}.$$

Sea $c \in \{a\}'$. Notemos que $c \neq a$. Si $c \notin D(a)$, entonces $M(c)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ que contiene a c y $a \notin M(c) \setminus \{c\}$. De esta contradicción se sigue que

$$\{a\}' \subset D(a) \setminus \{a\}.$$

Para probar la otra contención, supongamos ahora que $d \in D(a) \setminus \{a\}$ y que U es un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tal que $d \in U$. Luego $a \in M(d) \subset U \setminus \{d\}$, por lo que $b \in \{d\}'$. Esto muestra que

$$D(a) \setminus \{a\} \subset \{a\}'$$

y, así $\{a\}' = D(a) \setminus \{a\}$. Ahora probamos que $\{a\}'$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Supongamos que $b \notin \{a\}'$. Notemos que $b \notin D(a) \setminus \{a\}$, por lo que $M(b)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tal que $b \in M(b)$ y $M(b) \cap (D(a) \setminus \{a\}) = \emptyset$. Esto muestra que $\{a\}'$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, y termina la prueba del caso $a \in \mathbb{N}_2$.

Ahora supongamos que $a = 1$. La misma demostración que hicimos en el teorema 7.12, muestra que $\{a\}' = \emptyset$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, y termina la prueba del segundo caso. Tenemos, en ambos casos, que $\{a\}'$ es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es T_D. $\square$

De la demostración del teorema 8.4, se sigue que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(\{a\}) = \{a\} \cup \{a\}' = D(a), \qquad \text{para cada } a \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{1\}$ es el único subconjunto degenerado de $\mathbb{N}$ que es cerrado en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Además, como 1 es un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$, tenemos que 1 está en la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ de cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$.

Terminamos la presente subsección con el siguiente resultado.

Teorema 8.5. $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *es Nanda-Panda superconexo pero no Dontchev-superconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $a, b \in \mathbb{N}$, los abiertos básicos $M(a)$ y $M(b)$ de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ satisfacen que $M(a) \cap M(b) \neq \emptyset$. Por tanto, $(\mathbb{N}, \tau_R)$ no contiene dos subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es Nanda-Panda superconexo.

Ya indicamos que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es conexo. Notemos que $A = \{1\} \cup M(2)$ es un subconjunto no vacío y propio de $\mathbb{N}$, que contiene al subconjunto abierto $M(2)$ y al punto indiscreto 1 de $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Por tanto, A tiene interior no vacío y no es abierto en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Esto prueba que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ no es Dontchev-superconexo. $\square$

8.2. La cerradura en el espacio de Rizza. En esta subsección, presentamos resultados que involucran la cerradura de una progresión aritmética con respecto a $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Empezamos con el siguiente, que afirma que los miembros de la base $\mathcal{B}_S$ son densos en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Teorema 8.6. *Para cada* $a \in \mathbb{N}$ *tenemos que* $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(M(a)) = \mathbb{N}$. *Además*

1) *cada subconjunto abierto y no vacío de* $\mathbb{N}$ *es denso en* $(\mathbb{N}, \tau_R)$;
2) *cada subconjunto cerrado, no vacío y propio de* $\mathbb{N}$ *tiene interior vacío en* $(\mathbb{N}, \tau_R)$ (*es decir, es denso en ninguna parte de* $\mathbb{N}$).

Demostración: Sean $a, z \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto y no vacío de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tal que $z \in U$. Luego $M(z) \subset U$ y

$$za \in M(z) \cap M(a) \subset U \cap M(a).$$

Por tanto, $z \in \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(M(a))$. Esto prueba que $M(a)$ es denso en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. La parte 1) se sigue de la densidad de cada miembro de $\mathcal{B}_R$. Finalmente, si $C \subset \mathbb{N}$ es cerrado, no vacío y propio y U es un abierto no vacío tal que $U \subset C$, entonces

$$\mathbb{N} = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(U) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(C) = C.$$

Por tanto, $C = \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción. De esta manera, C tiene interior vacío y, así, 2) se cumple. □

La contención $\tau_R \subset \tau_S$ implica, por la parte 1) del teorema 3.11, que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_S)}(A) \subset \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(A), \qquad \text{para cada } A \subset \mathbb{N}.$$

Varios resultados que presentamos en la subsección 7.5 para $(\mathbb{N}, \tau_S)$, permanecen válidos en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, como los teoremas 7.18 y 7.19, así como el de que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(1,b)) = \mathbb{N}, \qquad \text{para cada } b \in \mathbb{N}.$$

La misma demostración del teorema 7.20 puede aplicarse en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, y esto generaliza [**38**, lema 3.1, p. 777]. También el lado derecho de (7.8) está contenido en su lado izquierdo. Enlistamos a continuación los resultados que hemos enunciado.

Teorema 8.7. *Para $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(1,b)) = \mathbb{N}$;
2) *si* $a \in \mathbb{N}_2$, *entonces* $\bigcap_{p\in\Theta(a)}(\mathbb{N} \setminus M(p)) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$;
3) $\mathbb{P} \setminus \Theta(a) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$;
4) *si* $a|c$ *y* $d \equiv b\,(\text{mód}\, a)$, *sucede que* $\mathbb{N} \cap P_F(c,d) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$;
5) $\mathbb{N} \cap P_F(a^n, b) \subset cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$;
6) *si* $b \equiv c\,(\text{mód}\, a)$, *tenemos que* $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(\mathbb{N} \cap P_F(a,c)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$;
7) *si* $b \equiv c\,(\text{mód}\, a)$, *resulta que* $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,c))$;
8) *si* $b \in M(a)$, *entonces* $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(M(a)) = \mathbb{N}$;
9) *si* $c \in P(a,b)$, *sucede que* $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,c)) = cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b))$.

Ahora mostramos que los teoremas 7.22 y 7.23 también son válidos en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Teorema 8.8. *Si $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ son tales que $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}\left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i,b_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a_i,b_i)). \tag{8.1}$$

Demostración: Es claro que el lado izquierdo de (8.1) está contenido en su lado derecho. Para probar la otra contención, supongamos que b está en el lado derecho de (8.1). Sea U un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tal que $b \in U$. Luego $M(b) \subset U$ y

$$M(b) \cap P(a_i, b_i) \neq \emptyset, \qquad \text{para toda } i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{8.2}$$

Como $\bigcap_{i=1}^k P(a_i, b_i) \neq \emptyset$, por el teorema 4.9, tenemos que

$$P(a_i, b_i) \cap P(a_j, b_j) \neq \emptyset, \qquad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ con } i \neq j. \tag{8.3}$$

Combinando (8.2) y (8.3) tenemos, de nuevo por el teorema 4.9, que

$$M(b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \right) \neq \emptyset.$$

Así $U \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} P(a_i, b_i) \right) \neq \emptyset$ y entonces b está en el lado izquierdo de (8.1). $\square$

Teorema 8.9. *Si $a \in \mathbb{N}_2$ y $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a, entonces*

$$cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(a,b)) = \bigcap_{i=1}^{k} cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(p_i^{\alpha_i}, b)). \tag{8.4}$$

Demostración: El resultado se sigue de (4.23) y (8.1). $\square$

El teorema 8.9 aparece con una prueba muy diferente en [**38**, teorema 6.4, p. 780]. La que presentamos aquí es mucho más simple. De acuerdo con (8.4), para determinar la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ de cada progresión aritmética, debemos calcular primero la cerradura en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ de cada progresión de la forma $P(p^n, b)$, donde $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \mathbb{N}$. Esto se realiza en [**38**, teoremas 6.2 y 6.3, p. 779–780], aunque la que presentamos a continuación tiene algunas variantes que comentaremos.

Teorema 8.10. *Sean $p \in \mathbb{P}, b \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $d = \langle p^n, b\rangle p$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *si $p^n | b$, entonces $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(p^n, b)) = \mathbb{N}$;*
2) *si $p^n \nmid b$, tenemos que $cl_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(p^n, b)) = \mathbb{N} \setminus M(d)$.*

Demostración: La prueba de 1) es prácticamente la misma que aparece en [**38**, teorema 6.2, p. 779]. Si $p^n | b$, entonces $b \in M(p^n)$ así que por el teorema 8.6 y la parte 8) del teorema 8.7, sucede que

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(p^n, b)) = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(M(p^n)) = \mathbb{N}.$$

Supongamos ahora que $p^n \nmid b$. Solo la prueba de la contención

$$\mathrm{cl}_{(\mathbb{N},\tau_R)}(P(p^n, b)) \subset \mathbb{N} \setminus M(d) \tag{8.5}$$

es como aparece en [**38**, teorema 6.3, p. 780]. Como $p^n \nmid b$, existe $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $\langle p^n, b\rangle = p^m$. Luego $m + 1 \leq n$, $d = p^{m+1}$ y $d \nmid b$, así que

$$P(p^n, b) \subset P(d, b) \subset \mathbb{N} \setminus M(d).$$

Al ser $M(d)$ abierto en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, al tomar cerraduras en las contenciones de arriba, obtenemos (8.5). Para probar la otra contención, sean $x \in \mathbb{N} \setminus M(d)$ y U un abierto en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tales que $x \in U$. Luego $M(x) \subset U$. Tomemos $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $\langle p^n, x\rangle = p^r$. Como $x \notin M(d)$ sucede que $r \leq m$. Por tanto, $p^r | x$, $p^r | p^m$ y $p^m | b$, así que $p^r | (x - b)$ y, por (4.9),

$$\emptyset \neq M(x) \cap P(p^n, b) \subset U \cap P(p^n, b).$$

Esto termina la prueba de 2). $\square$

Combinando los teoremas 8.9 y 8.10 obtenemos el siguiente resultado, que aparece en [**38**, corolario 6.5, p. 782].

Teorema 8.11. *Sea $a \in \mathbb{N}_2$ y supongamos que $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ es la descomposición canónica de a. Si $b \in \mathbb{N}$,*

$$A_b = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \colon p_i^{\alpha_i} \nmid b\}$$

y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ definimos $d_i = \langle p^{\alpha_i}, b \rangle p_i$, entonces

$$cl_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(P(a, b)) = \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{i \in A_b} M(d_i) \right).$$

Si $A_b = \emptyset$, entonces $cl_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(P(a, b)) = \mathbb{N}$.

En $(\mathbb{N}, \tau_R)$ cada conjunto $M(a)$ es denso, mientras que en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ cuando a es libre de cuadrados, se tiene que $M(a)$ es denso. Por otro lado, tanto en $(\mathbb{N}, \tau_S)$ como en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, el conjunto $M(a)$ es abierto.

8.3. Subconjuntos totalmente Brown del espacio de Rizza. En esta subsección presentamos algunos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. La contención $\tau_R \subset \tau_S$ implica, por las partes 2) y 3) del teorema 3.11, que si $C \subset \mathbb{N}$ es totalmente Brown (respectivamente, Brown, conexo) en $(\mathbb{N}, \tau_S)$, entonces C es totalmente Brown (respectivamente, Brown, conexo) en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

En el teorema 6.20 mostramos que toda progresión aritmética es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_K)$. En $(\mathbb{N}, \tau_R)$ sucede lo mismo, como probamos a continuación.

Teorema 8.12. *Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $P(a, b)$ es totalmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. En particular $P(a, b)$ es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}_2$ así como n subconjuntos abiertos y no vacíos $O_1, O_2, \ldots, O_n$ de $P(a, b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sean U_i un subconjunto abierto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ tal que $O_i = P(a, b) \cap U_i$ y $b_i \in O_i$. Luego $M(b_i) \subset U_i$ y, por el teorema 8.6,

$$P(a, b) \subset \mathbb{N} = \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(M(b_i)).$$

De esta manera, usando (8.1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\emptyset \neq P(a, b) = P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(M(b_i)) \right) = \\
= P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(P(a, b)) \cap \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(M(b_i))] \right) = \\
= P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(P(a, b) \cap M(b_i)) \right) \subset P(a, b) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{(\mathbb{N}, \tau_R)}(O_i) \right).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $P(a, b)$ es totallmente Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. □

En [**33**, teorema 4.1, p. 880] aparece una prueba larga del hecho de que cada progresión aritmética en $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es conexa. Posteriormente, utilizando el hecho de que τ_R es la topología inducida por el orden parcial de la divisibilidad, en [**38**, corolario 7.6, p. 783], se ofrece una demostración más corta del mismo resultado. El teorema 8.12 generaliza [**33**, teorema 4.1, p. 880] y [**38**, corolario 7.6, p. 783].

Como toda progresión aritmética es conexa en $(\mathbb{N}, \tau_R)$, en particular todo miembro de la base $\mathcal{B}_R$ es conexo. Esto ofrece una prueba topológica de la conexidad local de $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Recordemos que la prueba que inicialmente escribimos, utiliza el hecho de que τ_R es la topología inducida por el orden parcial de la divisibilidad, al indicar que todo conjunto alto es conexo en la topología inducida por un orden parcial.

Utilizando, de nuevo, que τ_R es la topología inducida por el orden parcial de la divisibilidad, en [**38**, corolario 7.5, p. 783] se prueba que todo subconjunto abierto es conexo en $(\mathbb{N}, \tau_R)$. Al combinar los teoremas 3.6 y 8.6 generalizamos [**38**, corolario 7.5, p. 783].

Teorema 8.13. *Cada subconjunto abierto y no vacío de* $\mathbb{N}$ *es totalmente Brown en* $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

De manera alternativa, podemos utilizar el teorema 3.12 para probar que los subconjuntos abiertos y no vacíos de $(\mathbb{N}, \tau_R)$ son Brown en $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Con respecto a los subconjuntos cerrados de $(\mathbb{N}, \tau_R)$, al ser 1 un punto indiscreto de $(\mathbb{N}, \tau_R)$, por el teorema 3.5 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.14. *Cada subconjunto cerrado y no vacío de* $\mathbb{N}$ *es totalmente Brown en* $(\mathbb{N}, \tau_R)$.

Corolario 8.15. $(\mathbb{N}, \tau_R)$ *no es aposindético en ninguno de sus puntos.*

Demostración: La aposindesis en un punto, implica la existencia de subconjuntos no vacíos que son cerrados, conexos, propios y con interior no vacío. Por la parte 2) del teorema 8.6 y el teorema 8.14, cada subconjunto no vacío, cerrado y propio es conexo y tiene interior vacío. □

Ya mencionamos que $(\mathbb{N}, \tau_G)$ es aposindético en cada uno de sus puntos y conexo en pequeño en ninguno de sus puntos. Notemos que $(\mathbb{N}, \tau_R)$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos y aposindético en ninguno de sus puntos.

Existen otros aspectos ligados con los cuatro espacios topológicos $(\mathbb{N}, \tau_G)$, $(\mathbb{N}, \tau_K)$, $(\mathbb{N}, \tau_S)$ y $(\mathbb{N}, \tau_R)$ que hemos visto. Recomendamos al lector interesado los artículos que aparecen en la bibliografía.

Agradecemos al árbitro por las correcciones y cambios sugeridos, los cuales en definitiva ayudaron a mejorar la versión que presentamos de este trabajo.

Bibliografía

[1] J. C. Alberto-Domínguez, *Espacios Conexos y Numerables*, Tesis de Maestría, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2017.

[2] J. C. Alberto-Domínguez, G. Acosta, G. Delgadillo-Piñón, *Totally Brown subsets of the Golomb space and the Kirch space*, Comment. Mat. Univ. Carolin. 63 (2022), No. 2, 189–219.

[3] J. C. Alberto-Domínguez, G. Acosta, G. Delgadillo-Piñón, M. Madriz-Mendoza, *El espacio de Golomb y su no conexidad en pequeño*, Revista Integración, Temas de Matemáticas, Vol. 35, No. 2 (2017), 189–213.

[4] J. C. Alberto-Domínguez, G. Acosta, M. Madriz-Mendoza, *The common division topology on* ℕ, aceptado para su publicación en Comment. Math. Univ. Carolin.

[5] P. S. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Mat. Sbornuk 2 (1937), No. 44, 501–518.

[6] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[7] C. E. Aull, W. J. Thron, *Separation axioms between* T_0 *and* T_1, Indag. Math. 24 (1962), 26–37.

[8] T. Banakh, J. Mioduszewski, S. Turek, *On continuous self-maps and homeomorphisms of the Golomb space*, Comment. Math. Univ. Carolin. 59 (2018), No. 4, 423–442.

[9] T. Banakh, Y. Stelmakh, S. Turek, *The Kirch space is topologically rigid*, Topology Appl. 304 (2021), Paper No. 107782.

[10] R.H. Bing, *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 474.

[11] M. Brown, *A countable connected Hausdorff space*, The April Meeting in New York, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 367.

[12] P. L. Clark, N. Lebowitz-Lockard, P. Pollack, *A note on Golomb topologies*, Quaest. Math. 42 (2019), No. 1, 73–86.

[13] J. Dontchev, *On superconnected spaces*, Serdica 20 (1994), No. 3–4, 345–350.

[14] W. Dunham, $T_{1/2}$*-spaces*, Kyungpook Math. J. 17 (1977) 161–169.

[15] R. Engelking, *General Topology*, Revised and Completed Edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[16] B. Fine, G. Rosenberger, *Number Theory. An Introduction via the Density of Primes.* Second Edition, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.

[17] H. Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 353.

[18] S. W. Golomb, *A connected topology for the integers*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 663–665.

[19] S. W. Golomb, *Arithmetica topologica*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, (Proc. Sympos., Prague, 1961). Academic Press, New York, Prague, 1962, 179–186.

[20] M. N. Jha, *Separation axioms between* T_0 *and* T_1, Progr. Math. (Allahabad) 11 (1977), No. 1–2, 1–4.

[21] F. B. Jones, *Aposyndetic continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., 63 (1941), 545–553.

[22] G. A. Jones, J. M. Jones, *Elementary Number Theory*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London, 1998.

[23] A. M. Kirch, *A countable, connected, locally connected Hausdorff space*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 169–171.

[24] M. Kwela, A. Nowik, *Ideals of nowhere dense sets in some topologies on positive integers*, Topology Appl. 248 (2018), 149–163.

[25] N. Levine, *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 19 (1970), 89–96.

[26] F. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimum neighborhoods*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), No. 6, 616–627.

[27] S. Nanda, H. K. Panda, *The fundamental group of principal superconnected spaces*, Rend. Mat. (6) 9 (1976), No. 4, 657–664.

[28] J. C. Quintanar, *Aritmética Topológica y Funciones de Darboux*, Tesina de Maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2021.

[29] T. Richmond, *General Topology An Introduction*, De Gruyter Textbook, Berlin/Boston, 2020.

[30] G. B. Rizza, *A topology for the set of nonnegative integers*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1993, No. 2, 179–185.

[31] L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Reprint of the Second (1978) Edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995.

[32] P. Szczuka, *The connectedness of arithmetic progressions in Furstenberg's, Golomb's, and Kirch's topologies*, Demonstratio Math. 43 (2010), No. 4, 899–909.

[33] P. Szczuka, *Connections between connected topological spaces on the set of positive integers*, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), No. 5, 876–881.

[34] P. Szczuka, *The Darboux property for polynomials in Golomb's and Kirch's topologies*, Demonstratio Math., 46 (2013), No. 2, 429–435.

[35] P. Szczuka, *Regular open arithmetic progressions in connected topological spaces on the set of positive integers*, Glas. Mat. Ser. III 49(69)(2014), No. 1, 13–23.

[36] P. Szczuka, *The closures of arithmetic progressions in the common division topology on the set of positive integers*, Cent, Eur. J. Math. 12 (2014), No. 7, 1008–1014.

[37] P. Szczuka, *The closures of arithmetic progressions in Kirch's topology on the set of positive integers*, Int. J. Number Theory 11 (2015), No. 3, 6673–682.

[38] P. Szczuka, *Properties of the division topology on the set of positive integers*, Int. J. Number Theory 12 (2016), No. 3, 775–785.

[39] P. Szyszkowska, M. Szyszkowski, *Properties of the common division topology on the set of positive integers*, J. Ramanujan Math. Soc. 33 (2018), No. 1, 91–98.

Correos electrónicos:

gacosta@matem.unam.mx (Gerardo Acosta),
jcad040688@gmail.com (José del Carmen Alberto-Domínguez),
maira.madriz@itam.mx (Maira Madriz-Mendoza).

Capítulo 3

Sobre la dinámica individual de algunas funciones del tipo mezclante

Víctor M. Muñoz-López
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P., México
Alicia Santiago-Santos, Jesús F. Tenorio
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México

1. Introducción

El presente escrito se desarrolla en el área de la matemática denominada Dinámica topológica. A grandes rasgos, podemos decir que un sistema dinámico es un fenómeno que evoluciona a través del tiempo; si el tiempo es considerado en lapsos, decimos que es un sistema dinámico discreto. Cabe mencionar que los sistemas dinámicos discretos tienen una gran utilidad dentro de la modelación matemática en diversas áreas de conocimiento, por ejemplo en biología, ecología, física, química, medicina, finanzas y economía (vea [**1, 2, 4, 5, 18, 19**]). Los sistemas dinámicos discretos que estudiamos en este artículo se construyen a partir de un espacio métrico X, llamado espacio base, y una función continua $f\colon X \to X$, y los denotamos por (X, f). Dado algún $k \in \mathbb{N}$, escribimos f^k para indicar la composición de f consigo misma k veces. Además, f^0 denota la función identidad en X. Para cualquier $x \in X$, la órbita de x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x), \ldots\}$. Uno de los objetivos principales de los sistemas dinámicos discretos es estudiar, entre otros problemas, el comportamiento de la órbita de los puntos del espacio X. Es sabido que en ocasiones resulta necesario analizar las propiedades cualitativas o de forma de un sistema dinámico, y de esto se encarga la Dinámica topológica.

En la actualidad encontramos una gran variedad de sistemas dinámicos discretos definidos y clasificados dependiendo de las propiedades que posea el espacio base o bien la función. Por mencionar algunos, tenemos los sistemas transitivos, mezclantes, caóticos, exactos o minimales. En el presente trabajo estudiamos algunos sistemas dinámicos que comparten propiedades con los sistemas mezclantes, a saber: fuertemente mezclantes, suavemente mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, transitivos y aquellos con la Propiedad P. El objetivo principal del artículo es brindar las relaciones que existen entre estos sistemas, así como analizar algunos ejemplos. Realizamos un escrito hasta cierto punto lo más autocontenido posible de todo el material involucrado. Cabe señalar que si bien los resultados incluidos son conocidos en su mayoría, consideramos que la presentación del documento posee originalidad en cuanto a su exposición, que es detallada. Lo anterior con la finalidad de lograr su accesibilidad a un mayor número de lectores que se interesen en estos temas. Es importante indicar que el presente artículo está basado en [**16**], sin embargo, aquí indicamos todas las referencias requeridas para la lectura completa del manuscrito.

El artículo está dividido en cuatro secciones. Después de la Introducción, en la Sección 2, exponemos algunos conceptos y notaciones que se utilizan durante el escrito. La Sección 3 está dedicada al análisis de los sistemas dinámicos propuestos a estudiar, se describen sus propiedades básicas, ejemplos y las relaciones entre ellos. Finalmente, en la Sección 4 incluimos resultados concernientes a su conjugación topológica.

2. Conceptos básicos y notaciones

Como es usual, con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ denotamos el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente. Dados un espacio métrico X, $x \in X$ y $\epsilon > 0$, el símbolo $B(x, \epsilon)$ indica la *bola abierta* con centro en x y radio ϵ. El diámetro de un subconjunto A de un espacio métrico lo denotamos por $\text{diám}(A)$. Si $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ son funciones, con $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ expresamos la función producto de f y g. Más aún, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la función producto, para el producto de X consigo mismo m-veces, X^m, la indicamos con $f^{\times m}\colon X^m \to X^m$.

Dados un espacio métrico X y una función continua $f\colon X \to X$, al par (X, f) le denominamos *sistema dinámico*. Para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por f^k la *k-ésima iteración* de f y la definimos de forma recursiva como $f^0 = id_X$, $f^k = f \circ f^{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, donde $id_X\colon X \to X$ es la función identidad en X. Si A es cualquier subconjunto de X, indicamos por $f^{-k}(A)$, la imagen inversa del conjunto A bajo la función f^k.

Las siguientes son nociones importantes en la teoría de los sistemas dinámicos. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. La *órbita* de x bajo f se define como el conjunto $\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. A su vez, se dice que

(a) x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.
(b) x es un *punto periódico* de f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Al número natural k más pequeño que cumple que $f^k(x) = x$ se le llama *periodo* de x.

Claramente, es posible que la órbita de un punto sea un conjunto infinito, pero también puede suceder que sea finito. Si x es un punto periódico cuyo periodo es k, entonces $\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$. Por otra parte, la órbita de un punto fijo es $\mathcal{O}(x, f) = \{x\}$.

Al conjunto de puntos periódicos y puntos fijos de X los denotamos por $\text{Per}(f)$ y $\text{Fix}(f)$, respectivamente. Se puede observar de la definición de punto periódico que los puntos fijos son puntos periódicos de periodo uno. Luego, $\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f)$. El siguiente ejemplo muestra que la contención contraria no se cumple.

Ejemplo 2.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 2$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Consideremos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ con la métrica discreta y la* *función $f\colon X \to X$ definida como:*

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i+1}, & si\ 1 \leq i \leq m-1; \\ x_1, & si\ i = m. \end{cases}$$

Por construcción, se observa que f no posee puntos fijos. Así, Fix$(f) = \emptyset$. Además, todos los puntos de X son puntos periódicos de periodo m. Luego, Per$(f) = X$. Adicionalmente, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) = X$, para cada $x \in X$.

Dado un espacio métrico (X, d), se dice que una función $f\colon X \to X$ es una *isometría* si $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, para cada $x, y \in X$. Es sencillo demostrar que si $f\colon X \to X$ es una isometría, entonces $d(x, y) = d(f^k(x), f^k(y))$, para cada $x, y \in X$ y toda $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.2. *Consideremos la circunferencia unitaria $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\}$ con la métrica usual de los números complejos. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la función $R_\alpha : S^1 \to S^1$ por $R_\alpha\left(e^{2\pi i\theta}\right) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $e^{2\pi i\theta} \in S^1$. De manera equivalente, $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para cada $z \in S^1$. La función R_α se llama* rotación *de S^1. No es difícil demostrar que R_α es una isometría.*
Determinemos los puntos fijos y periódicos de la función R_α. Para esto, hay que encontrar los elementos $z \in S^1$ tales que $R_\alpha^k(z) = z$, para algún $k \in \mathbb{N}$, donde R_α^k es la k-ésima iteración de R_α. Tomemos $z \in S^1$ arbitrario. Observemos que $R_\alpha^k(z) = e^{2k\pi i\alpha}z$. La igualdad $R_\alpha^k(z) = z$ se cumple si y sólo si $e^{2k\pi i\alpha}z = z$, equivalentemente, $e^{2k\pi i\alpha} = 1$. Esta última igualdad se satisface si y sólo si $2k\pi\alpha = 2m\pi$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Lo que es equivalente a que $k\alpha \in \mathbb{Z}$. En suma, hemos demostrado que $R_\alpha^k(z) = z$ si y sólo si $k\alpha \in \mathbb{Z}$. Ahora, examinemos los siguientes casos:

Caso (i) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Caso (ii) $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Si ocurre el Caso (i), entonces la función R_α no tiene puntos fijos ni puntos periódicos, ya que $k\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, Fix$(R_\alpha) = \emptyset$ y Per$(R_\alpha) = \emptyset$.
Si sucede el Caso (ii), se tiene que cada $z \in S^1$ es un punto periódico con periodo $k = \min\{s \in \mathbb{N} : s\alpha \in \mathbb{Z}\}$. Más aún, si $\alpha = \frac{a}{b}$, donde a y b son primos relativos, entonces el periodo de z es b, para cada $z \in S^1$. Luego, Per$(R_\alpha) = S^1$. Además, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, se cumple que Fix$(R_\alpha) = S^1$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, se tiene que Fix$(R_\alpha) = \emptyset$.

3. Funciones del tipo mezclante

Recordemos que un sistema dinámico (X, f) es nombrado conforme a las propiedades que cumple la función que lo define. En vista de esto, si estudiamos un cierta propiedad de la función f, en realidad la estamos estudiando en el sistema dinámico (X, f). A continuación, definimos las funciones (o bien los sistemas dinámicos) que empleamos en el resto de nuestro trabajo.

Definición 3.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico. Decimos que:*

(1) f es transitiva *si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*
(2) f es totalmente transitiva *si f^k es transitiva para cualquier $k \in \mathbb{N}$.*
(3) f es débilmente mezclante *si la función $f \times f : X \times X \to X \times X$ es transitiva.*

(4) *f es* suavemente mezclante *si para cualquier espacio métrico Y y cualquier función transitiva $g : Y \to Y$, se cumple que la función $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ es transitiva.*

(5) *f es* fuertemente mezclante[1] *si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq m$.*

(6) *f tiene la* Propiedad P*, si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U_0 y U_1 de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier función $s : \{0, 1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$, existe un punto $x \in X$ que satisface $x \in U_{s(0)}, f^N(x) \in U_{s(1)}, \ldots, f^{kN}(x) \in U_{s(k)}$.*

Como consecuencia inmediata de las definiciones correspondientes, se desprende lo siguiente.

Observación 3.2. *Toda función totalmente transitiva es transitiva.*

Los siguientes dos ejemplos se obtienen de forma sencilla sin mayores preliminares.

Ejemplo 3.3. *Sea X un espacio métrico con al menos dos puntos. Se tiene que la función identidad de X no es transitiva. En efecto, dado que X tiene al menos dos puntos, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ obtenemos que $(id_X)^k(U) \cap V = U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, id_X no es transitiva.*

Ejemplo 3.4. *Existe una función transitiva que no es totalmente transitiva. En efecto, la función del Ejemplo 2.1 cumple estas propiedades. Para verlo, tomemos U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Sea $x \in X$ tal que $x \in U$. Hemos visto en el Ejemplo 2.1 que $\mathcal{O}(x, f) = X$. Luego, $\mathcal{O}(x, f) \cap V \neq \emptyset$. Esto implica que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(x) \in V$. Así, $f^k(x) \in f^k(U) \cap V$. En consecuencia, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. Por otro lado, vimos también en el Ejemplo 2.1 que todos los puntos de X son periódicos de periodo m. Así, $f^m = id_X$. Luego, por el Ejemplo 3.3, tenemos que f^m no es transitiva. Por lo tanto, f no es totalmente transitiva.*

Estamos interesados en brindar más ejemplos de las funciones dadas en la Definición 3.1, así como algunas de sus propiedades y las posibles relaciones que satisfacen. Veamos el siguiente resultado, el cual es una propiedad que cumplen las funciones transitivas.

Lema 3.5. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función transitiva. Para cada subconjunto abierto no vacío U de X y cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{-k}(U)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Notemos que para $k = 0$, se tiene que $f^{-0}(U) = (f^0)^{-1}(U) = id_X^{-1}(U) = U$. Así, $f^{-0}(U)$ es abierto y no vacío. Resta probar el resultado para $k \in \mathbb{N}$. Para esto utilizamos inducción matemática sobre k. Para $k = 1$, observemos que si $U = X$, se tiene que $f^{-1}(U) = f^{-1}(X) \neq \emptyset$. Así, supongamos que $U \neq X$. Luego, existe $y \in X$ tal que $y \notin U$. Sea $x \in U$. Como $x \neq y$, existen dos subconjuntos abiertos no vacíos V y

[1]En algunos textos es conocida como *mezclante*.

W de X tales que $x \in V$, $y \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Observemos que $U \cap V$ es abierto y $x \in U \cap V$. Además, como $W \cap V = \emptyset$, se obtiene que:

$$W \cap (U \cap V) = \emptyset. \tag{3.1}$$

Por otro lado, como f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^m(W) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Así, por (3.1), $m \neq 0$. Luego, $W \cap f^{-m}(U \cap V) \neq \emptyset$. En consecuencia, $f^{-m}(U \cap V) \neq \emptyset$. Como $f^{-m}(U \cap V) \subseteq f^{-m}(U)$, se deduce que $f^{-m}(U) \neq \emptyset$. Por otro lado, dado que $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $m-1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, lo cual implica que f^{m-1} es una función. Además, $f^{-(m-1)}(f^{-1}(U)) = f^{-m}(U) \neq \emptyset$. De donde, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Dado que f es continua se concluye que $f^{-1}(U)$ es abierto y no vacío.
Ahora supongamos que el resultado es verdadero para k, es decir, $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío. Probemos que tambien se cumple para $k+1$. Es claro que $f^{-(k+1)}(U) = f^{-1}(f^{-k}(U))$. Por hipótesis de inducción, se tiene que $f^{-k}(U)$ es abierto y no vacío. Por lo tanto, por el caso $k = 1$ y dado que f es una función continua, entonces $f^{-1}(f^{-k}(U))$ es abierto y no vacío. $\square$

Con ayuda del Lema 3.5 obtenemos una equivalencia del concepto de función transitiva, la cual se considera la forma más usual de la definición.

Proposición 3.6. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua Se cumple que f es transitiva si y sólo si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que f es transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Lema 3.5, se tiene que el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto y no vacío en X. Nuevamente, dado que f es transitiva, para los conjuntos U y $f^{-1}(V)$, existe $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^l(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego, $f(f^l(U)) \cap V \neq \emptyset$. Así, para $k = l+1$, obtenemos que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. El recíproco se cumple directamente de la definición de función transitiva que hemos dado. $\square$

Otra equivalencia de la noción de función transitiva es la siguiente.

Proposición 3.7. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Se tiene que f es transitiva si y sólo si para cualquier subconjunto abierto y no vacío V en X, el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X.*

Demostración: Supongamos que f es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Luego, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto es, $U \cap f^{-k_0}(V) \neq \emptyset$. Así, $U \cap \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)\right] \neq \emptyset$. En consecuencia, $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$ es denso en X.
Recíprocamente, ahora veamos que f es transitiva. Para esto, sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en X. Por hipótesis, obtenemos que $U \cap \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)\right] \neq \emptyset$. Luego, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $U \cap f^{-k_0}(V) \neq \emptyset$. Esto es, $f^{k_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. $\square$

En las Proposiciones 3.9 y 3.10, se relaciona la existencia de órbitas densas en X y la transitividad de la función f. Para presentar estos resultados requerimos recordar que en un espacio métrico X, un punto $x \in X$ es un *punto aislado de X* si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X. Incluimos la demostración del siguiente hecho general en los espacios métricos que no poseen puntos aislados.

Proposición 3.8. *Sean X un espacio métrico sin puntos aislados, $D \subseteq X$ un conjunto denso en X y $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$. El conjunto $D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un subconjunto denso en X.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. En vista de que X no tiene puntos aislados, no es difícil mostrar que $U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es abierto y no vacío en X. Así, como D es denso en X, obtenemos que $(U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \cap D \neq \emptyset$. Esto es, $U \cap (D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $D \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un subconjunto denso en X. □

Proposición 3.9. *Sean X un espacio métrico sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X, entonces f es transitiva.*

Demostración: Sea U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en X. Por hipótesis, se tiene que $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$, para algún $x \in X$. Luego, existe $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_1}(x) \in U$. Como X no tiene puntos aislados, entonces por la Proposición 3.8, se tiene que $\mathcal{O}(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{k_1}(x)\}$ es denso en X. Además, dado que V es abierto y no vacío en X, obtenemos que $V \cap [\mathcal{O}(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{k_1}(x)\}] \neq \emptyset$. Luego, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_2}(x) \in V$. Observe que $k_1 < k_2$, Así, $f^{k_2}(x) = f^{k_2 - k_1}(f^{k_1}(x))$. Hemos obtenido que $f^{k_1}(x) \in U$ y $f^{k_2 - k_1}(f^{k_1}(x)) \in V$. De aquí, $f^{k_2 - k_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. □

Para el siguiente resultado debemos recordar la siguiente noción. Un subconjunto A de un espacio métrico X es un *conjunto G_δ* si A es una intersección numerable de subconjuntos abiertos de X.

Proposición 3.10. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función transitiva. Sea $D(f) = \{x \in X : \mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto denso en $X\}$. Se cumple que $D(f)$ es un subconjunto denso en X y G_δ.*

Demostración: Afirmamos que $A = D(f)$. En efecto, sea $x \in A$. Demostremos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un subconjunto denso en X. Sea U un subconjunto abierto y no vacío en X. Dado que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq U$. Por otro lado, como $x \in A$, entonces $x \in U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in U_m$. Luego, $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(B_m)$. De donde, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_0}(x) \in B_m \subseteq U$. Así, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$, lo que muestra que el conjunto $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Se sigue que $A \subseteq D(f)$.
Por otra parte, sea $x \in D(f)$. Luego, el conjunto $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Por la densidad de $\mathcal{O}(x, f)$ y como B_n es abierto y no vacío, obtenemos que $B_n \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{k_n}(x) \in B_n$. Así, $x \in f^{-k_n}(B_n)$. Se sigue que $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(B_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto es, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Hemos demostrado que $D(f) \subseteq A$. Con todo, $D(f)$ es denso y G_δ. □

Como consecuencia de las Proposiciones 3.9 y 3.10, obtenemos otra equivalencia bien conocida de transitividad de una función dentro de la clase de espacios métricos compactos sin puntos aislados. De hecho, en algunos contextos, esta forma equivalente también suele considerarse como la definición de función transitiva.

Proposición 3.11. *Sean X un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Se tiene que f es transitiva si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X.*

Con ayuda de la Proposición 3.11 podemos garantizar la transitividad o no transitividad de una función.

Ejemplo 3.12. *Tomemos la función rotación, $R_\alpha\colon S^1 \to S^1$, definida en el Ejemplo 2.2. Consideremos los siguientes casos:*

Caso (i) $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Caso (ii) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Si ocurre el Caso (i), entonces R_α no es transitiva. En efecto, por el Ejemplo 2.2, se tiene que $Per(R_\alpha) = S^1$. Luego, no existe $z \in S^1$ tal que $\mathcal{O}(z, R_\alpha)$ es densa en S^1. Así, por la Proposición 3.11, obtenemos que R_α no es transitiva.
Por otro lado, si sucede el Caso (ii), entonces R_α es transitiva. En efecto, en [**6**, Teorema 3.13] *se muestra que $\mathcal{O}(z, R_\alpha)$ es densa en S^1, para cada $z \in S^1$. Así, por la Proposición 3.11, R_α es transitiva.*

A partir del Ejemplo 3.12 se obtiene el siguiente otro ejemplo.

Ejemplo 3.13. *Consideremos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y la función rotación $R_\alpha\colon S^1 \to S^1$. Se tiene que R_α es totalmente transitiva. En efecto, observemos que:*

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^2(z) &= R_\alpha(R_\alpha(z)) = e^{2\pi i\alpha} R_\alpha(z) = e^{2\pi i(2\alpha)} z = R_{2\alpha}(z) \\
R_\alpha^3(z) &= R_\alpha(R_\alpha^2(z)) = e^{2\pi i\alpha} R_\alpha^2(z) = e^{2\pi i(3\alpha)} z = R_{3\alpha}(z) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

En general, se cumple que $R_\alpha^k = R_{k\alpha}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que $k\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue del Ejemplo 3.12 que $R_{k\alpha}$ es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, R_α^k es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, R_α es totalmente transitiva.

Las funciones transitivas satisfacen la siguiente propiedad.

Lema 3.14. *Sean X y Y espacios métricos, $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ funciones continuas. Si $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva, entonces f y g son transitivas.*

Demostración: Supongamos que $f \times g$ es transitiva. Veamos que f es transitiva. Para esto, sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en X. Notemos que los conjuntos $U \times Y$ y $V \times Y$ son abiertos y no vacíos en $X \times Y$. Así, por la transitividad de $f \times g$, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $(f \times g)^k(U \times Y) \cap (V \times Y) \neq \emptyset$. De donde, $[f^k(U) \cap V] \times [g^k(Y) \cap Y] \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Así, f es transitiva. De manera similar se demuestra que g es transitiva. □

En particular, se sigue inmediatamente lo siguiente.

Corolario 3.15. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva.*

Otro resultado que se sigue del Lema 3.14 es el siguiente.

Corolario 3.16. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es suavemente mezclante, entonces f es transitiva y, en consecuencia, f es débilmente mezclante.*

Demostración: Supongamos que la función f es suavemente mezclante. Luego, para cualquier espacio métrico Y y cualquier función transitiva $g\colon Y \to Y$, se tiene que $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Así, por el Lema 3.14, concluimos que f es transitiva. Además, por hipótesis, se tiene en particular que $f \times f$ es transitiva. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. □

Al igual que la transitividad, la nocíon de función débilmente mezclante también admite varias equivalencias. Algunas de éstas las enunciamos a continuación.

Teorema 3.17. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f es débilmente mezclante,
(2) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es transitiva,
(3) para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es débilmente mezclante,
1. para cualesquiera subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demostración: Las equivalencias (1), (2) y (4) forman parte de [**8**, Teorema 1.11]. Por tal razón, solamente demostramos que (2) y (3) son equivalentes.

Supongamos que se cumple (2). Sea $m \in \mathbb{N}$. Para probar que $f^{\times m}$ es débilmente mezclante, debemos verificar que $f^{\times m} \times f^{\times m}\colon X^m \times X^m \to X^m \times X^m$ es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en $X^m \times X^m$. Existen U', U'', V' y V'' subconjuntos abierto no vacíos de X^m tales que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$. Además, para los conjuntos U', U'', V' y V'', existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_m,\ U_1', \ldots, U_m',\ V_1, \ldots, V_m,\ V_1', \ldots, V_m'$ de X tales que:

$$U_1 \times \cdots \times U_m \subseteq U', U_1' \times \cdots \times U_m' \subseteq U'', V_1 \times \cdots \times V_m \subseteq V' \quad \text{y} \quad V_1' \times \cdots \times V_m' \subseteq V''.$$

Observemos que tanto el conjunto $U_1 \times \cdots \times U_m \times U_1' \times \cdots \times U_m'$ como el conjunto $V_1 \times \cdots \times V_m \times V_1' \times \cdots \times V_m'$, son abiertos y no vacíos en X^{2m}. Por hipótesis, la función $f^{\times 2m}$ es transitiva. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\left(f^{\times 2m}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m \times U_1' \times \cdots \times U_m') \cap [V_1 \times \cdots \times V_m \times V_1' \times \cdots \times V_m'] \neq \emptyset.$$

Esto es, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ y $f^k(U_i') \cap V_i' \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. De donde,

$$\left(f^{\times m}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m] \neq \emptyset$$

y además,

$$\left(f^{\times m}\right)^k (U_1' \times \cdots \times U_m') \cap [V_1' \times \cdots \times V_m] \neq \emptyset.$$

Luego, $(f^{\times m})^k(U') \cap V' \neq \emptyset$ y $(f^{\times m})^k(U'') \cap V'' \neq \emptyset$. Esto implica que

$$\left(f^{\times m} \times f^{\times m}\right)^k (U' \times U'') \cap [V' \times V''] \neq \emptyset.$$

Así, $\left(f^{\times m} \times f^{\times m}\right)^k (U) \cap V \neq \emptyset$. Con esto probamos que $f^{\times m} \times f^{\times m}$ es transitiva. Por lo tanto, $f^{\times m}$ es débilmente mezclante.

Por otro lado, (3) implica (2) se sigue del Corolario 3.15. □

Como una aplicación del Teorema 3.17, en el resultado que mostramos en seguida, encontramos una forma útil para obtener ejemplos de funciones que no son débilmente mezclantes.

Proposición 3.18. *Sean (X, d) un espacio métrico tal que $|X| \geq 2$ y $f : X \to X$ una función continua. Si f es una isometría, entonces f no es débilmente mezclante.*

Demostración: Supongamos que f es una isometría. Demostramos que f no es débilmente mezclante utilizando el inciso (4) del Teorema 3.17. Probemos que existen subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X tales que, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple $f^k(U) \cap U = \emptyset$ o bien $f^k(U) \cap V = \emptyset$.
Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que $|X| \geq 2$, existen $x_0, y_0 \in X$ tales que $x_0 \neq y_0$. Ponemos $r = d(x_0, y_0)$, $U = B(x_0, \frac{r}{4})$ y $V = B(y_0, \frac{r}{4})$. Se tienen los siguientes casos:

Caso (i) $f^k(U) \cap U = \emptyset$.

Caso (ii) $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$.

Si ocurre el Caso (i), terminamos. Supongamos que ocurre el Caso (ii) y veamos que $f^k(U) \cap V = \emptyset$. Para esto, sean $x \in f^k(U)$ y $y \in V$ y probemos que $x \neq y$. Dado que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$, existe $x_1 \in f^k(U)$ tal que $x_1 \in U$. Observe que:

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x) + d(x, y). \tag{3.2}$$

Por otro lado, usando la desigualdad del triángulo y el hecho de que $x_1 \in U$ y que $y \in V$, tenemos que:

$$r = d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y) + d(y, y_0) < 2(\tfrac{r}{4}) + d(x_1, y).$$

Así, $\frac{r}{2} < d(x_1, y)$. Además, dado que f es una isometría, se obtiene que $d(x_1, x) \leq \operatorname{diám}(f^k(U)) = \operatorname{diám}(U) \leq \frac{r}{2}$. Luego, de (3.2), obtenemos que $\frac{r}{2} < \frac{r}{2} + d(x, y)$. En consecuencia, $d(x, y) > 0$, esto es, $x \neq y$. Así, hemos probado que $f^k(U) \cap V = \emptyset$. Con todo, concluimos que f no es débilmente mezclante. □

Proposición 3.19. *Sean X y Y espacios métricos, $f\colon X \to X$ y $g\colon Y \to Y$ funciones continuas. Si f es fuertemente mezclante y g es transitiva, entonces $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de $X \times Y$. Existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, V_1 \subseteq X$ y $U_2, V_2 \subseteq Y$ tales que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Por otro lado, dado que f es fuertemente mezclante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, \quad \text{para cada } k \geq m. \tag{3.3}$$

Además, puesto que la función g es transitiva, por el Lema 3.5, se obtiene que $g^{-m}(V_2)$ es un subconjunto abierto y no vacío. Ahora bien, aplicando la definición de transitividad a la función g y a los subconjuntos abiertos U_2 y $g^{-m}(V_2)$, existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $g^{k_0}(U_2) \cap g^{-m}(V_2) \neq \emptyset$. Así, $g^m(g^{k_0}(U_2)) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego,

$$g^{m+k_0}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset. \tag{3.4}$$

Dado que $m + k_0 \geq m$, por (3.3) obtenemos:

$$f^{m+k_0}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset. \tag{3.5}$$

Si hacemos $k = m + k_0$, de (3.4), (3.5), tenemos que $[f^k(U_1) \cap V_1] \times [g^k(U_2) \cap V_2] \neq \emptyset$. De donde, $(f \times g)^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. En vista de que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$, obtenemos que $(f \times g)^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f \times g$ es transitiva. □

Corolario 3.20. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es fuertemente mezclante, entonces f es suavemente mezclante.*

Demostración: Sean Y un espacio métrico y $g\colon Y \to Y$ una función transitiva. Por la Proposición 3.19, la función $f \times g\colon X \times Y \to X \times Y$ es transitiva. Por lo tanto, f es suavemente mezclante. □

Se obtiene de la Proposición 3.18 y de los Corolarios 3.16 y 3.20 lo siguiente.

Corolario 3.21. *Sean X un espacio métrico tal que $|X| \geq 2$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es una isometría, entonces f no es suavemente mezclante ni fuertemente mezclante.*

Previo a analizar algunos ejemplos y contraejemplos, demostremos el siguiente resultado, cuyo recíproco no es verdadero.

Teorema 3.22. *Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $k \in \mathbb{N}$ y mostremos que f^k es transitiva. Por hipótesis y la parte (2) del Teorema 3.17, tenemos que $f^{\times k}$ es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por el Lema 3.5, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, el conjunto $V_i = f^{-i}(V)$ es abierto y no vacío. Observemos que los conjuntos $U \times U \times \cdots \times U$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ son abiertos y no vacíos en X^k. Como $f^{\times k}$ es transitiva, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal forma que

$$\left(f^{\times k}\right)^m (U \times U \times \cdots \times U) \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k] \neq \emptyset.$$

Así, $f^m(U) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Esto es, $f^m(U) \cap f^{-i}(V) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. De donde:

$$f^{m+i}(U) \cap V \neq \emptyset, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{3.6}$$

Por otro lado, por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que $m = kq + r$, $0 \leq r < k$. Notemos que $0 < k - r \leq k$. Así, sustituyendo el valor de m en (3.6) y haciendo $i = k - r$, obtenemos:

$$f^{kq+r+(k-r)}(U) \cap V = f^{k(q+1)}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Esto es $(f^k)^{q+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Así, queda probado que f^k es transitiva. Por lo tanto, f es totalmente transitiva. □

Ejemplo 3.23. *Existe una función totalmente transitiva que no es débilmente mezclante, ni suavemente mezclante ni fuertemente mezclante. En efecto, la función rotación $R_\alpha : S^1 \to S^1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es una de estas funciones. Para convencernos, notemos que la transitividad total de R_α queda garantizada por el Ejemplo 3.13. Además, en vista del Ejemplo 2.2, R_α es una isometría. Así, por la Proposición 3.18, obtenemos que R_α no es débilmente mezclante. Finalmente, por el Corolario 3.21, se deduce que R_α no es suavemente mezclante ni fuertemente mezclante.*

Se sabe que la *teoría ergódica* y la *dinámica topológica* poseen grandes similitudes. Por ejemplo, la noción de ergodicidad encuentra su concepto paralelo en la transitividad topológica y ambos conceptos comparten propiedades interesantes. Algo similar sucede con las nociones suavemente mezclante [**7**] y Propiedad P [**3**], que siendo conceptos planteados originalmente en teoría ergódica, en la actualidad también son estudiados en dinámica topológica (vea [**11, 12**]).

A continuación analizamos algunas propiedades de las funciones suavemente mezclantes así como sus relaciones con otras de las funciones que estamos estudiando. Comenzamos con el siguiente teorema, donde encontramos una caracterización de la noción de función suavemente mezclante.

Teorema 3.24. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se cumple que f es suavemente mezclante si y sólo si, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $f^{\times m}$ es suavemente mezclante.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es suavemente mezclante. Hacemos uso de inducción matemática sobre m para demostrar que $f^{\times m}$ es suavemente mezclante. Para $m = 1$, por hipótesis $f^{\times 1} = f$ es suavemente mezclante. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para m y probemos para $m + 1$. Sean Y un espacio métrico y $g\colon Y \to Y$ una función transitiva, veamos que $\left(f^{\times(m+1)}\right)\times g\colon X^{m+1}\times Y \to X^{m+1}\times Y$ es transitiva. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos en $X^{m+1}\times Y$. Existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U', V' \subseteq X^{m+1}$ y $U'', V'' \subseteq Y$ tales que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$. A su vez, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, \ldots, U_m, U_{m+1}, V_1, \ldots, V_m, V_{m+1} \subseteq X$ tales que:

$$U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1} \subseteq U' \quad \text{y} \quad V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1} \subseteq V'. \tag{3.7}$$

Dado que f es suavemente mezclante y g es transitiva, obtenemos por definición que $f\times g\colon X\times Y \to X\times Y$ es una función transitiva. Por hipótesis de inducción, tenemos que $f^{\times m} \times [f \times g] : X^m \times [X \times Y] \to X^m \times [X \times Y]$ es transitiva. Observemos que los conjuntos $[U_1 \times \cdots \times U_m] \times [U_{m+1} \times U'']$ y $[V_1 \times \cdots \times V_m] \times [U_{m+1} \times V'']$ son abiertos y no vacíos en $X^m \times [X \times Y]$. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$\left(f^{\times m}\times[f \times g]\right)^k\left([U_1\times\cdots\times U_m]\times[U_{m+1}\times U'']\right)\cap\left([V_1\times\cdots\times V_m]\times[V_{m+1}\times V'']\right) \neq \emptyset.$$

Así, obtenemos que:

$$\left(f^{\times m}\right)^k (U_1 \times \cdots \times U_m) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m] \neq \emptyset \quad \text{y}$$
$$(f \times g)^k(U_{m+1} \times U'') \cap [V_{m+1} \times V''] \neq \emptyset.$$

De donde, $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$ y $g^k(U'') \cap V'' \neq \emptyset$. De lo anterior, $(f^{\times(m+1)})^k(U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1}) \cap [V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1}] \neq \emptyset$ y $g^k(U'') \cap V'' \neq \emptyset$. Por lo que:

$$\left(f^{\times(m+1)} \times g\right)^k\left([U_1 \times \cdots \times U_m \times U_{m+1}] \times U''\right) \cap \left([V_1 \times \cdots \times V_m \times V_{m+1}] \times V''\right) \neq \emptyset.$$

Por (3.7) y dado que $U' \times U'' \subseteq U$ y $V' \times V'' \subseteq V$, se tiene que $(f^{\times(m+1)} \times g)^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Con esto probamos que $f^{\times(m+1)} \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $f^{\times(m+1)}$ es suavemente mezclante.
El recíproco se tiene de manera inmediata. □

Observación 3.25. *Existen sistemas débilmente mezclantes que no son suavemente mezclantes. Además, existen sistemas suavemente mezclantes que no son fuertemente mezclantes. La demostración de dichas afirmaciones escapa de los objetivos de nuestro trabajo, le recomendamos al lector interesado en estos temas la revisión de* [**10**, Sección 4] *o bien* [**9**, Sección 10].

Ahora mostramos la relación que existe entre las funciones con la Propiedad P y las funciones débilmente mezclantes.

Teorema 3.26. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si f tiene la Propiedad P, entonces f es débilmente mezclante.*

Demostración: Demostramos que f es débilmente mezclante utilizando el inciso (4) del Teorema 3.17. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Hagamos $U_0 = U$ y $U_1 = V$. Sea $N \in \mathbb{N}$ que satisface la definición de Propiedad P. Así, para $k = 2$ y $s : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$, donde $s(0) = s(1) = 0$ y $s(2) = 1$, existe $x \in X$ tal que:

$$x \in U_{s(0)}, f^N(x) \in U_{s(1)}, f^{2N}(x) \in U_{s(2)}.$$

Luego, $x, f^N(x) \in U$ y $f^{2N}(x) \in V$. Así, $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ y $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es débilmente mezclante. □

Observación 3.27. *Un* flujo *es un sistema dinámico* (X, f)*, donde* X *es un espacio métrico compacto y* $f\colon X \to X$ *es un homeomorfismo. La demostración de los siguientes hechos queda fuera de los objetivos del artículo. En* [**3**, Ejemplo 5] *queda garantizada la existencia de flujos con la Propiedad* P*. Además, en* [**3**, Consequences]*, se establece la existencia de flujos débilmente mezclantes que no tienen la Propiedad* P*.*

En el Diagrama 1 resumimos las relaciones que hay entre las funciones dadas en la Definición 3.1. Las implicaciones que se cumplen quedan justificadas por Observación 3.2, Teorema 3.22, Corolario 3.16, Corolario 3.20 y Teorema 3.26, mientras que las que no se cumplen, por el Ejemplo 3.4, Ejemplo 3.23, Observación 3.25 y la Observación 3.27.

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Fuertemente mezclante} \arrow[d] \\
& \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \arrow[u, bend right, "\times"'] \\
\text{Propiedad } P \arrow[r] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[d] \arrow[u, bend right, "\times"'] \arrow[l, bend left, "\times"] \\
& \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] \arrow[u, bend right, "\times"'] \\
& \text{Transitiva} \arrow[u, bend right, "\times"']
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 1: Relaciones entre las funciones estudiadas.

Con ayuda del Diagrama 1 y del Ejemplo 3.28 obtenemos más ejemplos de las funciones en la Definición 3.1.

Ejemplo 3.28. *Sea* $T\colon [0,1] \to [0,1]$*, definida por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La función T *es conocida como* función tienda*, la cual ha resultado ser bastante útil y estudiada en aspectos referentes a su dinámica. Por ejemplo, en* [**14**, Lema 3.2] *se muestra que la función tienda es fuertemente mezclante. Así, por el Diagrama 1, esta función es suavemente mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva.*

4. Conjugación topológica

Analizamos la propiedad de conjugación para las funciones de la Definición 3.1. Sean X y Y espacios métricos. Recordemos que dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ se dice que son *conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$. Es fácil ver que la relación de conjugación es una relación de equivalencia. Además, se satisface:

Proposición 4.1. *Sean* X *y* Y *espacios métricos y* $f : X \to X$ *y* $g : Y \to Y$ *dos funciones conjugadas bajo el homeomorfismo* $h\colon X \to Y$*. Se cumple lo siguiente:*

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$*,* $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$*, para cada* $x \in X$*.*
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$*,* $h^{-1}(g^n(y)) = f^n(h^{-1}(y))$*, para cualquier* $y \in Y$*.*

Teorema 4.2. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Se tiene que f es transitiva si y sólo si g es transitiva.*

Demostración: Sea $h : X \to Y$ el homeomorfismo de conjugación entre f y g. Supongamos que f es transitiva. Sean U y V abiertos no vacíos en Y. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos y no vacíos en X. Dado que f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. De aquí, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in h^{-1}(U)$ tales que $f^n(x_0) \in h^{-1}(V)$. Así, se sigue del inciso (a) de la Proposición 4.1 que $g^n(h(x_0)) \in V$. Puesto que $g^n(h(x_0)) \in g^n(U)$, obtenemos $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, g es transitiva.

Ahora supongamos que la función g es transitiva. Sean U y V abiertos no vacíos en X. Es claro que $h(U)$ y $h(V)$ son abiertos y no vacíos en Y. Dado que g es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. De donde, existe $y_0 \in h(U)$ tal que $g^n(y_0) \in h(V)$. Luego, se sigue del inciso (b) de la Proposición 4.1 que $f^n(h^{-1}(y_0)) \in V$. En vista de que $h^{-1}(y_0) \in U$, obtenemos $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. $\square$

Teorema 4.3. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Se tiene que f es totalmente transitiva si y sólo si g es totalmente transitiva.*

Demostración: Supongamos que f es totalmente transitiva. Veamos que g es totalmente transitiva. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis se tiene que f^k es transitiva. Además, dado que f y g son conjugadas, se sigue del inciso (a) de la Proposición 4.1 que f^k y g^k son conjugadas. De donde, por el Teorema 4.2, g^k es transitiva. Por lo tanto, g es totalmente transitiva.

De manera similar se demuestra que si g es totalmente transitiva, entonces f es totalmente transitiva. $\square$

No es difícil demostrar lo siguiente.

Lema 4.4. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Sean X_i y Y_i espacios métricos y $f_i : X_i \to X_i$ y $g_i : Y_i \to Y_i$ funciones conjugadas para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Si f_i y g_i son conjugadas bajo el homeomorfismo $h_i \colon X_i \to Y_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces las funciones producto $\prod_{i=1}^k f_i$ y $\prod_{i=1}^k g_i$ son conjugadas bajo el homeomorfismo producto $\prod_{i=1}^k h_i$.*

Teorema 4.5. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Se tiene que f es débilmente mezclante si y sólo si g es débilmente mezclante.*

Demostración: Supongamos que f es débilmente mezclante. Luego, $f \times f$ es transitiva. Además, como f y g son conjugadas, se sigue del Lema 4.4 que $f \times f$ y $g \times g$ son conjugadas. Así, por el Teorema 4.2 obtenemos que $g \times g$ es transitiva. Por lo tanto, g es débilmente mezclante. De manera similar se demuestra que si g es débilmente mezclante, entonces f es débilmente mezclante. $\square$

Teorema 4.6. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Se tiene que f es suavemente mezclante si y sólo si g es suavemente mezclante.*

Demostración: Supongamos que f es suavemente mezclante. Sean Z un espacio métrico y $l \colon Z \to Z$ transitiva. Dado que f suavemente mezclante, se tiene que $f \times l \colon X \times Z \to X \times Z$ es transitiva. Además, puesto que f y g son conjugadas y l

es conjugada consigo misma, se sigue del Lema 4.4 que $f \times l$ y $g \times l$ son conjugadas. Luego, por el Teorema 4.2, obtenemos que $g \times l \colon Y \times Z \to Y \times Z$ es transitiva. Por lo tanto, g es suavemente mezclante. Similarmente se demuestra que si g es suavemente mezclante, entonces f es suavemente mezclante. □

Con argumentos similares a los realizados en la demostración del Teorema 4.2 se demuestra lo siguiente.

Teorema 4.7. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Se tiene que f es fuertemente mezclante si y sólo si g es fuertemente mezclante.*

Teorema 4.8. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones conjugadas. Entonces f tiene la Propiedad P si y sólo si g tiene la Propiedad P.*

Demostración: Supongamos que f tiene la Propiedad P. Sean V_0 y V_1 dos subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Notemos que $h^{-1}(V_0)$ y $h^{-1}(V_1)$ son abiertos no vacíos de X. En vista de nuestro supuesto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada función $s \colon \{0, 1, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$, existe $x \in X$ tal que

$$x \in h^{-1}(V_{s(0)}), \quad f^N(x) \in h^{-1}(V_{s(1)}), \ldots, f^{kN}(x) \in h^{-1}(V_{s(k)})$$

Luego, tomando $y = h(x)$ y utiliando el inciso (a) de la Proposición 4.1, obtenemos que

$$y \in V_{s(0)}, \quad g^N(y) \in V_{s(1)}, \ldots, g^{kN}(y) \in V_{s(k)}.$$

Por lo tanto, g tiene la Propiedad P.

Ahora supongamos que g tiene la Propiedad P. Sean U_0 y U_1 dos subconjuntos abiertos no vacíos de X. Luego, $h(U_0)$ y $h(U_1)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada función $s \colon \{0, 1, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$, existe $y \in Y$ tal que

$$y \in h(U_{s(0)}), \quad g^N(y) \in h(U_{s(1)}), \ldots, g^{kN}(y) \in h(U_{s(k)})$$

Luego, tomando $x = h^{-1}(y)$ y en vista del inciso (b) de la Proposición 4.1, obtenemos que

$$x \in U_{s(0)}, \quad f^N(x) \in U_{s(1)}, \ldots, f^{kN}(x) \in U_{s(k)}.$$

Por lo tanto, f tiene la Propiedad P. □

Bibliografía

[1] Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Second Edition, Morgan Kaufmann, 2000, DOI `10.1016/C2013-0-10335-2`

[2] Walter Bauer, Karl Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. **79** (1975), 81–92, DOI `10.1007/bf01585664`

[3] F. Blanchard, *Fully positive topological entropy and topological mixing*, in Symbolic Dynamics and its Applications, Contemporary Mathematics 135, 1992, 92–105, DOI `10.1090/conm/135.`

[4] J.M. Cushing, R.F. Constantino, Brian Dennis, Robert A. Desharnais, Shandelle M. Henson, *Chaos in Ecology. Experimental Nonlinear Dynamics*, Vol.1, Academic Press, 2005, DOI `10.1016/B978-0-12-198876-0.X5000-3`

[5] Jefferson Edwin King Dávalos, Héctor Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Colección: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[6] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Westview Press, 2003, DOI `10.4324/9780429502309`

[7] H. Furstenberg, B. Weiss, *The finite multipliers of infinite transformation*, in The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, N. G. MarkleyJohn, C. Martin, W. Perrizo, eds., Spriger-Verlag, 1978, 127–132, DOI 10.1007/BFb0101785

[8] Eli Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 101, AMS, 2003, DOI 10.1090/surv/101. MR1958753

[9] Eli Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrence properties*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **24** (2004), no. 1, 21–40, DOI 10.12775/TMNA.2004.018

[10] E. Glasner, B. Weiss, *On the interplay between measurable and topological dynamics*, Capítulo 10 in: Handbook of Dynamical Systems, Vol. 1B, B. Hasselblatt y A. Katok, eds., Elsevier B.V., 2006, 597–648.

[11] Wen Huang, Xiangdong Ye, *Topological complexity, return times and weak disjointness*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), 825–846, DOI 10.1017/S0143385703000543

[12] Wen Huang, Xiangdong Ye, *A local variational relations and applications*, Israel J. Math. **151** (2006), 237–279, DOI 10.1007/BF02777364

[13] Ignacio L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

[14] Gongfu Liao, Lidong Wang, Yucheng Zhang, *Transitivity, mixing and chaos for a class of set-valued mappings*, Sci. China Ser. A, **49**, no. 1 (2006), 1–8, DOI 10.1007/s11425-004-5234-5

[15] Elon Lages Lima, *Espacos Métricos*, 4.ed. Instituto de Matemáticas Pura e Aplicada, 2011.

[16] Víctor Martín Muñoz López, *Funciones del tipo mezclante en hiperespacios*, Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México, 2018.

[17] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, 3ra edición, McGraw-Hill, 1987.

[18] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Studies in Nonlinearity Series. 2nd Edition, Boca Raton CRC Press, 2018. DOI 10.1201/9780429492563

[19] Peter Turchin, *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*, Princeton University Press. Princeton, NJ, EEUU, 2003. DOI 10.1515/9781400847280

Correos electrónicos:
vmmunozlopez@gmail.com (Víctor M. Muñoz-López),
alicia@mixteco.utm.mx (Alicia Santiago-Santos),
jtenorio@mixteco.utm.mx (Jesús F. Tenorio).

Capítulo 4

Una introducción a los sistemas dinámicos compacto transitivos

Irma León-Torres
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P., México
Alicia Santiago-Santos
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México

1. Introducción

En este trabajo, un sistema dinámico discreto será una pareja (X, f), donde X es un continuo (un espacio métrico compacto, conexo con más de un elemento) y $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. En los últimos años los sistemas dinámicos discretos han obtenido un gran desarrollo, generando de esta manera un gran número de publicaciones, vea por ejemplo [**1**], [**2**], [**3**], [**6**], [**7**] y [**17**]. Al estudiar la dinámica discreta de los objetos han observado que no basta analizar sus propiedades numéricas, es necesario conocer sus propiedades cualitativas o de forma, tales como: estabilidad, el comportamiento respecto a la cercanía o acumulación entre éstos o respecto a ciertos conjuntos, etc. interviniendo de esta manera la topología [**14**]. La parte de la topología que estudia las propiedades cualitativas o de forma de los sistemas dinámicos se llama Dinaámica Topológica.

Dependiendo de las propiedades del continuo X y de cómo esté definida la función f, se han definido y clasificado varios sistemas dinámicos discretos, entre los más conocidos tenemos: exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos y minimales. Varios de estos sistemas han sido ampliamente estudiados (ver [**8**] y [**6**]). Referente a los sistemas caóticos, en 1963 el meteorólogo Edward Lorenz considerando algunas ecuaciones que le permitieran predecir el tiempo en la atmósfera [**16**] (las que hoy se conocen como ecuaciones de Lorenz) y usando ordenadores estudió las gráficas de estas ecuaciones. Al analizar la gráfica que resultaba de hacer pruebas con diferentes parámetros en sus ecuaciones, observó que las simulaciones eran muy diferentes para condiciones iniciales muy próximas y además no seguían algún orden o patrón. A los sistemas que presentaban este tipo de comportamiento les llamó sistemas caóticos. En este sentido, años después, en la década de 1970, empezaron a surgir muchos sistemas caóticos en el estudio de turbulencia de fluidos, crecimiento poblacional, etc. Apartir de ahí, el estudio de sistemas dinámicos caóticos ha ido en aumento en los últimos años (vea [**12**] y [**10**]).

En la actualidad, la teoría del caos es muy importante en todas las ciencias, debido a su capacidad única para modelar aquellos sistemas naturales, que se comportan caóticamente (en desorden), esta teoría proporciona modelos que pueden ser usados para dar solución a problemas que se presentan en la actualidad [**11**]. Cabe señalar que actualmente aún no hay una definición matemática que se acepte universalmente para el caos, sin embargo se sabe que dos de las nociones para entender un sistema caótico es la transitividad y la sensitividad [**13**]. Por tal motivo, a través del tiempo, han surgido nociones relacionadas con la transitividad y nociones relacionadas con la sensitividad [**8**].

Dada la importancia y utilidad de los sistemas transitivos y sensitivos para tratar de entender el caos, se buscan nociones relacionadas con este tipo de sistemas. Recientemente, en 2016, W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada y G. Zhang en [**12**], estudian un tipo de sistemas dinámicos transitivos, a saber, los sistemas dinámicos compacto transitivos; analizan la relación de estos nuevos sistemas con los sistemas del tipo transitivos y con los sistemas del tipo sensitivos.

El objetivo de este artículo de divulgación es brindar un estudio detallado de los sistemas dinámicos compacto transitivos, cabe mencionar que este escrito está basado en el artículo [**12**]. Por esta razón, el escrito está dividido en cinco secciones, en la Sección 2 recordamos algunos hechos referente a funciones, a espacios métricos y definiendo algunos conjuntos necesarios para introducir los sistemas compacto transitivo. En la Sección 3 introducimos los sistemas compacto transitivos y mostramos las principales propiedades de estos sistemas. La Sección 4 está dedicada a analizar su relación con los sistemas dinámicos transitivos. Finalmente, en la Sección 5, incluimos resultados concernientes a la conjugación topológica y mostramos que ser compacto transitivo es una propiedad que se preserva bajo conjugación topológica.

2. Preliminares

Comezaremos esta sección introduciendo las notaciones básicas, así como los conceptos básicos que se emplean durante el desarrollo de este trabajo. Como es usual $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, denotan al conjunto de los números reales, los números enteros, los números enteros no negativos y los números naturales, respectivamente. Ahora, si X es un espacio métrico y $f\colon X \to X$ es una función, establecemos la siguiente notación, f^0 denotará la función identidad sobre X, id_X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f^n es f compuesta con f^{n-1}, es decir:

$$f^n = f \circ f^{n-1}.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq X$, la preimagen de A bajo f^n se indica por $f^{-n}(A)$. Si $x \in X$, la preimagen de $\{x\}$ bajo f la representamos por $f^{-1}(x)$. La cerradura y el interior del conjunto A, se denotan por $cl(A)$ e $\operatorname{int}(A)$, respectivamente.

Definición 2.1. *Dados un espacio métrico X y una función continua y suprayectiva $f\colon X \to X$, al par (X, f) le denominamos* sistema dinámico*.*

En lo que sigue, dado un sistema dinámico (X, f) denotaremos por d a la métrica de X, a menos que se especifique lo contrario. Además, recordemos que el sistema dinámico es nombrado conforme a las propiedades que cumple la función que lo define. La clase de sistemas dinámicos que abordaremos en este escrito son conocidos como sistemas dinámicos compacto transitivos. Para poder definir y estudiar propiedades esta clase de sistemas dinámicos, es necesario definir algunos conjuntos.

Definición 2.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Se dice que el conjunto A es:*

1. *Cofinito si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{k, k+1, k+2 \ldots\} \subseteq A$.*
2. *Thick si para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subseteq A$.*
3. *Sindético si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$ se cumple que $\{l, l+1, \ldots, l+m\} \cap A \neq \emptyset$.*
4. *Thickly sindético si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, i+n\} \subseteq A\}$ es sindético.*

La Observación 2.3, se obtiene inmediatamente de la Definición 2.2.

Observación 2.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Las siguientes condiciones son verdaderas.*

1. *Si A es thick, entonces $A \neq \emptyset$.*
2. *Si A es cofinito, entonces $A \neq \emptyset$.*
3. *Si A es sindético, entonces $A \neq \emptyset$.*
4. *Si A es thickly sindético, entonces $A \neq \emptyset$.*

Proposición 2.4. *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ tales que $A \subseteq B$. Si A es thick, entonces B es thick.*

Demostración: Supongamos que A es thick y sea $p \in \mathbb{N}$. Como A es thick, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subseteq A.$$

Puesto que $A \subseteq B$, se concluye que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subseteq B$. Por lo tanto, B es thick. □

Proposición 2.5. *Sea $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Si A es cofinito, entonces A es thick.*

Demostración: Supongamos que A es cofinito. Demostremos que A es thick. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, n+2, \ldots\} \subseteq A$. Luego, $\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subseteq A$. Por lo tanto, A es thick. □

Proposición 2.6. *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$. Si A es sindético y B es thick, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que A es sindético y B es thick. Como A es sindético, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\{m, m+1, \ldots, m+l_0\} \cap A \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Por otro lado, como B es thick y $l_0 \in \mathbb{N}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \subseteq B. \tag{2.2}$$

De (2.1), aplicado a m_0 se cumple que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \cap A \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

Así, de (2.2), se obtiene que:

$$\{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l_0\} \cap A \subseteq B \cap A.$$

Por lo tanto, de (2.3) se concluye que $B \cap A \neq \emptyset$. □

Definición 2.7. *Sean (X,f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define la órbita de x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x,f)$, como el conjunto:*

$$\mathcal{O}(x,f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

La iteración, en matemática, se refiere al proceso de aplicar la función repetidamente, usando la salida de una iteración como la entrada a la siguiente. Dado un sistema dinámico (X,f), La colección de las iteraciones de f es el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$. El objeto principal de estudio de los sistemas dinámicos son las órbitas de los puntos, ya que son éstas las que nos dan la información referente a las iteraciones de una función a través del tiempo.

A continuación damos algunos de los conceptos más importantes en sistemas dinámicos. Mismos que nos ayudarán a determinar cuándo la órbita de un punto es finita o no, entre otras propiedades y características de la órbita.

Definición 2.8. *Sean (X,f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un:*

1. *Punto fijo si $f(x) = x$.*
2. *Punto periódico si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, al $\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$ se le llama periodo de x. Denotamos como $Per(f)$, al conjunto de los puntos periódicos de f.*

Algunas clases de sistemas dinámicos son los siguientes.

Definición 2.9. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:*

1. *transitiva si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*
2. *caótica si el conjunto $\mathrm{Per}(f)$ es un conjunto denso en X y la función f es transitiva.*
3. *totalmente transitiva si f^k es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$.*
4. *débilmente mezclante si la función producto $f^{\times 2} : X^2 \to X^2$ es transitiva.*
5. *minimal si para cualquier subconjunto cerrado no vacío A de X tal que $f(A) \subseteq A$, se cumple que $A = X$.*

Proposición 2.10. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si X es compacto, entonces f es una función cerrada.*

Proposición 2.11. *Sean X un espacio métrico y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $cl(U) \cap V = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $U \cap V = \emptyset$. Luego, $U \subseteq X \setminus V$. De donde,

$$\mathrm{cl}(U) \subseteq \mathrm{cl}(X \setminus V). \tag{2.4}$$

Por otro lado, como V es abierto en X, se tiene que $X \setminus V$ es un subconjunto cerrado en X. Así, se obtiene que $\mathrm{cl}(X \setminus V) = X \setminus V$. En consecuencia, de (2.4), se tiene que $\mathrm{cl}(U) \subseteq X \setminus V$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(U) \cap V = \emptyset$. □

Para poder establecer la Proposición 2.13 es necesario recordar los siguientes conceptos.

Definición 2.12. *Sean X un conjunto, $f : X \to X$ una función y $A \subset X$. Se dice que A es:*

1. *$+$ Invariante bajo f si $f(A) \subset A$.*
2. *$-$ Invariante bajo f si $f^{-1}(A) \subset A$.*

3. Invariante bajo f si $f(A) = A$.

Proposición 2.13. *Sean (X, f) un sistema dinámico transitivo y $E \subseteq X$. Si el subconjunto E es cerrado y + invariante bajo f, entonces $E = X$ o E es denso en ninguna parte en X.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que E es cerrado y + invariante bajo f. Si $E = X$, se tiene el resultado. Supongamos que $E \neq X$. Veamos que E es denso en ninguna parte en X, e.i, $\text{int}(\text{cl}(E)) = \emptyset$. Se tiene que $\text{cl}(E) = E$. Luego, basta verificar que $\text{int}(E) = \emptyset$. Supongamos que $\text{int}(E) \neq \emptyset$. Notemos que $\text{int}(E)$ y $X \setminus E$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X, f) es transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(\text{int}(E)) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $y \in X$ tal que $y \in f^n(\text{int}(E))$ y $y \in (X \setminus E)$. Por otro lado, sabemos que se tiene que $\text{int}(E) \subseteq E$. Luego, $f^n(\text{int}(E)) \subseteq f^n(E)$. Como E es + invariante bajo f, se obtiene que $f^n(E) \subseteq E$. Así, $f^n(\text{int}(E)) \subseteq E$. Esto implica que $y \in E$ y $y \in X \setminus E$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\text{int}(E) = \emptyset$. Por lo tanto, E es denso en ninguna parte. □

Definición 2.14. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$, U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$. Se definen los siguientes conjuntos:*

1. $N_f(x, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(x) \in V\}$.
2. $N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}$.
3. $N_f(U, \delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ :$ *existen* $x, y \in U$ *tales que* $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\}$.

En seguida enunciamos algunas observaciones que se obtienen inmediatamente de la Definición 2.14.

Observación 2.15. *Sean (X, f) un sistema dinámico, U, U_1, V y V_1, subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$.*

1. *Si $U \subseteq V$, entonces $N_f(U, \delta) \subseteq N_f(V, \delta)$.*
2. *Si $U \subseteq U_1$ y $V \subseteq V_1$, entonces $N_f(U, V) \subseteq N_f(U_1, V_1)$.*

La Proposición 2.16 es útil en la prueba del Lema 3.11.

Proposición 2.16. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $n, m \in \mathbb{N}$ y U y V subconjuntos de X. Se cumple que:*

1. $f^{-(n+m)}(U) = f^{-n}(f^{-m}(U))$.
2. *Si $U \subseteq f^{-n}(V)$, entonces $f^n(U) \subseteq V$.*

Proposición 2.17. *Sean (X, f) un sistema dinámico, U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X y $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Si $n \in N_f(f^{-m}(U), f^{-m}(V))$, entonces $n \in N_f(U, V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $n \in N_f(f^{-k}(U), f^{-k}(V))$. Luego,

$$f^{-k}(U) \cap f^{-n}(f^{-k}(V)) \neq \emptyset.$$

De donde, por el inciso (1) de la Proposición 2.16, se obtiene que $f^{-k}(U) \cap f^{-(n+k)}(V) \neq \emptyset$. Además, $f^{-k}(U) \cap f^{-(n+k)}(V) = f^{-k}(U \cap f^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $n \in N_f(U, V)$. □

Proposición 2.18. *Sean (X, f) un sistema dinámico, U subconjunto abierto no vacío en X, $n, m \in \mathbb{Z}_+$ y $\delta > 0$. Si $m + n \in N_f(f^{-n}(U), \delta)$, entonces $m \in N_f(U, \delta)$.*

Demostración: Supongamos que $n+m \in N_f(f^{-n}(U), \delta)$. Esto implica que existen $x, y \in f^{-n}(U)$ tales que:

$$d(f^{m+n}(x), f^{m+n}(y)) > \delta,$$

equivalentemente,

$$d(f^m(f^n(x)), f^m(f^n(y))) > \delta. \tag{2.5}$$

Por otro lado, como $x, y \in f^{-n}(U)$ se tiene que $f^n(x), f^n(y) \in U$. Por lo tanto, de (2.5), se concluye que $m \in N_f(U, \delta)$. □

3. Compacto transitividad

En esta sección introducimos la noción del conjunto omega-límite de un punto con respecto a una familia de Furstenberg. Dicho conjunto nos ayudará a definir los sistemas dinámicos compacto transitivo. Antes de definir estos conceptos damos definiciones que nos ayudan a definir este tipo de sistemas. De ahora en adelante, $\mathcal{P}(X)$ denotará al conjunto potencia de un conjunto X.

Definición 3.1. *Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ es una familia de Furstenberg, si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ implica que $F_2 \in \mathcal{F}$.*

Definición 3.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se define la familia $\mathcal{N}_f$ como sigue:*

$$\mathcal{N}_f = \{A \subseteq \mathbb{Z}_+ : \text{ existen } U, V \subseteq X \text{ abiertos no vacíos, tales que } N_f(U, V) \subseteq A\}.$$

Observación 3.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X, se tiene que $N_f(U, V) \in \mathcal{N}_f$. De donde, $\mathcal{N}_f \neq \emptyset$.*

Proposición 3.4. *Sea $F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Se cumple que $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F' \in \mathcal{N}_f$ si y sólo si $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para todo U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X.*

Demostración: Supongamos que $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F' \in \mathcal{N}_f$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacío de X. Por la Observación 3.3, se tiene que $N_f(U, V) \in \mathcal{N}_f$. Así, por el supuesto, se tiene que $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $F \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para todo U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Sea $F' \in \mathcal{N}_f$. Por la Definición 3.2, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que $N_f(U, V) \subseteq F'$. Luego $N_f(U, V) \cap F \subseteq F' \cap F$. Por hipótesis $N_f(U, V) \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F' \cap F \neq \emptyset$. □

Definición 3.5. *Sean $\mathcal{F}$ una familia Furstenberg. Definimos la familia dual de $\mathcal{F}$, denotada por $k\mathcal{F}$, como:*

$$k\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathcal{F}\}.$$

Definición 3.6. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ una familia de Furstenberg y $x \in X$. El conjunto ω-límite de x con respecto a la familia $\mathcal{F}$, denotado por $\omega_{\mathcal{F}}(x)$, se define como:*

$$\omega_{\mathcal{F}}(x) = \{z \in X : N_f(x, G) \in k\mathcal{F}, \text{ para cada vecindad } G \text{ de } z\}.$$

La Observación 3.7 es indispensable en la prueba del Lema 3.11.

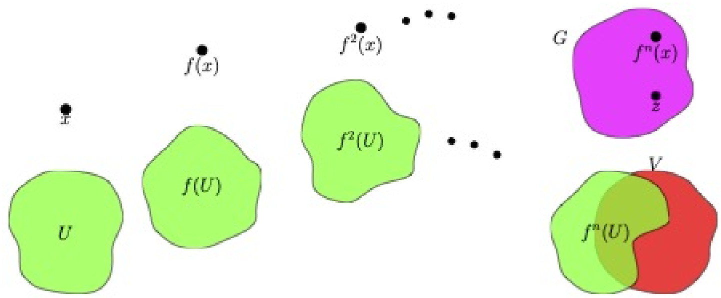


FIGURA 1. Representación gráfica de un sistema dinámico compacto transitivo.

Observación 3.7. *El conjunto ω-límite de x, respecto a la familia $\mathcal{N}_f$ se puede escribir de la siguiente forma:*

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \{z \in X : N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \text{ para cada vecindad } G \text{ de } z \\ \text{y para cualesquiera } U, V \subseteq X \text{ abiertos no vacíos}\}.$$

Terminamos esta sección dando el concepto de sistema dinámico compacto transitivo y mostrando una equivalencia del mismo.

Definición 3.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es compacto transitivo si para cada $x \in X$, existe $z \in X$ tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera abiertos no vacíos U y V de X.*

En la Figura 1, se muestra de manera geométrica el concepto dado en la Definición 3.8. Básicamente nos dice que, dado un punto $x \in X$, existe un punto $z \in X$, tal que para cualquier vecindad de z, digamos G como se muestra en la Figura 1, y cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos en X, digamos U y V, existe un momento en el cual, al mismo tiempo que $f^n(U)$ intersecta al conjunto V, se cumple que $f^n(x) \in G$.

De la Observación 3.7 y la Definición 3.8, se obtiene el siguiente resultado. Dicha proposición es útil en la prueba del Teorema 3.22.

Proposición 3.9. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que (X, f) es compacto transitivo si y sólo si $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Sea $x \in X$. Luego, existe $z \in X$ tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Así, por la Observación 3.7, se tiene que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$.
Recíprocamente, supongamos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por la Observación 3.7, existe $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. Por Definición 3.8, se concluye que (X, f) es compacto transitivo. $\square$

3.1. Propiedades principales de los sistemas dinámicos compacto transitivos. En este apartado verificaremos propiedades que cumplen los sistemas dinámicos compacto transitivos. Algunas son relacionadas con el conjunto omega límite de un punto. Iniciaremos este apartado con el siguiente resultado cuya prueba puede consultarla en [**15**].

Proposición 3.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Si $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subseteq N_f(U, V)$, entonces existe un subconjunto abierto no vacío U_1 en X tal que $U_1 \subseteq U$ y $V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(cl(U_1))$ es un subconjunto abierto no vacío en X.*

A continuación se muestra un resultado que indica propiedades principales del conjunto omega límite de un punto con respecto a la familia $\mathcal{N}_f$.

Lema 3.11. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. El conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es un subconjunto cerrado en X y $+$ invariante bajo f.*

Demostración: Primero probaremos que el conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es $+$ invariante bajo f, es decir $f(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) \subseteq \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Para esto, sea $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ y veamos que $f(y) \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.7, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de $f(y)$ y para cualesquiera subconjuntos abiertos U y V no vacíos en X. Sean $G_{f(y)}$ una vecindad de $f(y)$ y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Como $G_{f(y)}$ es una vecindad de $f(y)$, existe $W \subseteq X$ abierto tal que:

$$f(y) \in W \subseteq G_{f(y)}.$$

En consecuencia,

$$y \in f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(G_{f(y)}).$$

Dado que f es continua, $f^{-1}(W)$ es un conjunto abierto. Luego, $f^{-1}(G_{f(y)})$ es una vecindad de y. Puesto que $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, por la Observación 3.7, aplicada a los conjuntos $U, f^{-1}(V)$ y a la vecindad $f^{-1}(G_{f(y)})$ se obtiene que:

$$N_f(x, f^{-1}(G_{f(y)})) \cap N_f(U, f^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$n \in N_f(x, f^{-1}(G_{f(y)})) \quad \text{y} \quad n \in N_f(U, f^{-1}(V)). \tag{3.1}$$

De (3.1), se obtiene que $f^n(x) \in f^{-1}(G_{f(y)})$. Así, se tiene que $f^{n+1}(x) \in G_{f(y)}$. En consecuencia

$$n + 1 \in N_f(x, G_{f(y)}) \tag{3.2}$$

Por otro lado, aplicando nuevamente (3.1), se obtiene que $U \cap f^{-n}(f^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.16, se tiene que $U \cap f^{-(n+1)}(V) \neq \emptyset$. Esto implica que:

$$n + 1 \in N_f(U, V). \tag{3.3}$$

Así, por (3.2) y (3.3), se deduce que:

$$n + 1 \in N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V).$$

Luego, $N_f(x, G_{f(y)}) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(y) \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$.
En el resto de la prueba veremos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es un conjunto cerrado en X. Basta verificar que $\mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) = \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Como $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subseteq \mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$, sólo falta probar la otra contención para obtener lo deseado. Sea $z \in \mathrm{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$ y veamos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.7, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de z y para cualesquiera U y V subconjuntos abiertos no

vacíos en X. Para esto, sean G_z una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Como $z \in \operatorname{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x))$ y G_z es una vecindad de z, se satisface que:

$$\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap G_z \neq \emptyset.$$

Luego, existe $y \in X$ tal que:

$$y \in G_z \text{ y } y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x). \tag{3.4}$$

Así, por (3.4), se tiene que G_z es una vecindad de y. Por (3.4) $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Y por la Observación 3.7, aplicado a los conjuntos G_z, U y V se cumple que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(\omega_{\mathcal{N}_f}(x)) \subseteq \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por ambas contenciones se tiene la igualdad. □

El Lema 3.12 nos servirá en la prueba del Corolario 3.14.

Lema 3.12. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces el conjunto $N_f(x, G_y) \cap N_f(U, V)$ es infinito para cualquier $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, para cada vecindad G_y de y, y cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X.*

Demostración: Supongamos que (X, f) es compacto transitivo y que existen $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, una vecindad G_z de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V)$ es finito. Sin perder generalidad supongamos que,

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}. \tag{3.5}$$

Luego, $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subseteq N_f(U, V)$. Así, por la Proposición 3.10, existe un subconjunto U_1 abierto no vacío de X tal que $U_1 \subseteq U$ y $V_1 = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f^{n_i}(\operatorname{cl}(U_1))$ es abierto y no vacío en X. Notemos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} f^{n_i}(U_1) \cap V_1 &= f^{n_i}(U_1) \cap \left[V \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{k} f^{n_j}(\operatorname{cl}(U_1))\right] \\ &= f^{n_i}(U_1) \cap \left[\textstyle\bigcap_{j=1}^{k} V \setminus f^{n_j}(\operatorname{cl}(U_1))\right] \\ &\subseteq f^{n_i}(U_1) \cap [V \setminus f^{n_i}(\operatorname{cl}(U_1))] = \emptyset. \end{aligned}$$

Esto implica que $f^{n_i}(U_1) \cap V_1 = \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Esto implica que $U_1 \cap f^{-n_i}(V_1) = \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego, $N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset$. Así,

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset. \tag{3.6}$$

Por otro lado, notemos que $U_1 \subseteq U$ y $V_1 \subseteq V$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se satisface que $N_f(U_1, V_1) \subseteq N_f(U, V)$. Esto implica que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \subseteq N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V). \tag{3.7}$$

Luego, de (3.5) y (3.7), se concluye que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \subseteq \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}. \tag{3.8}$$

Por otra parte, por (3.6) y (3.8), se concluye que $N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) = N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \emptyset$. Así, $N_f(x, G_z) \cap N_f(U_1, V_1) = \emptyset$. Lo cual es una contradicción al hecho de que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por lo tanto, $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V)$ es infinito. □

Recordemos que un sistema dinámico es *Minimal* si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado y $f(A) \subseteq A$.

Definición 3.13. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un subconjunto Minimal de X si A es no vacío, A es cerrado en X, A es invariante y $(A, f|_A)$ es minimal. Un punto $x \in X$ es un punto minimal si existe un subconjunto minimal A de X tal que $x \in A$.*

Corolario 3.14. *Sean (X, f) un sistema dinámico compacto transitivo y $x \in X$. Si x es un punto minimal y M es un conjunto minimal tal que $x \in M$, entonces $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x, f) = M$.*

Demostración: Supongamos que x es un punto minimal y M un subconjunto minimal tal que $x \in M$. Demostramos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x, f)$. Primero verifiquemos que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subseteq \omega(x, f)$. Para esto, sea $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ y veamos que $y \in \omega(f, x)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y B una vecindad de y. Como $y \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$, por la Observación 3.7, se tiene que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{3.9}$$

para cualquier vecindad G de y y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X. De (3.9), aplicado a la vecindad B se deduce que:

$$N_f(x, B) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

Luego, por el Lema 3.12, se obtiene que $N_f(x, B) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$ es infinito. Así, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in N_f(x, B) \cap N_f(U, V)$ y $n \geq k$. Esto implica que, $f^n(x) \in B$. En consecuencia, $y \in \omega(x, f)$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subseteq \omega(x, f)$.
Ahora, veamos que $\omega(x, f) \subseteq M$. Sea $y \in \omega(x, f)$ y B una vecindad de y. Por hipótesis se cumple que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y:

$$f^n(x) \in B. \tag{3.10}$$

Por otro lado, como M es minimal, se tiene que M es $+$ invariante. Además, puesto que $x \in M$ se cumple que:

$$f^n(x) \in M. \tag{3.11}$$

Luego, por (3.10) y (3.11), se deduce que $B \cap M \neq \emptyset$. Esto implica que $y \in \mathrm{cl}(M) = M$. Por lo tanto $\omega(x, f) \subseteq M$. Así, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \subseteq \omega(x, f) \subseteq M$. Por el Lema 3.11, se sabe que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es cerrado y $+$ invariante, dado que M es minimal resulta que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = M$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = \omega(x, f) = M$. $\square$

Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es *Mezclante* si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos, no vacíos U, V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq N$.

Lema 3.15. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *(X, f) es mezclante.*
2. *Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que $N_f(U, V)$ es cofinito.*

Demostración: Supongamos que (X, f) es mezclante y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Demostraremos que $N_f(U, V)$ es cofinito. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq n$. Así,

$$\{n, n+1, \ldots\} \subseteq N_f(U, V).$$

Por lo tanto, $N_f(U,V)$ es cofinito.
Recíprocamente, supongamos (2) y veamos que (X,f) es mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{m, m+1, \ldots\} \subseteq N_f(U,V)$. Luego $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq m$. Por lo tanto, (X,f) es mezclante. $\square$

Observación 3.16. *Si (X,f) es un sistema dinámico débilmente mezclante, entonces por el Lema 3.15 y la Observación 2.3, se obtiene que $N_f(U,V) \neq \emptyset$, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X.*

A continuación mostramos un resultado el cual relaciona a los sistemas dinámicos débilmente mezclante con los conjuntos thick, dándonos una alternativa para verificar cuando un sistema dinámico es de este tipo, además de ayudarnos a probar otros resultados.

Teorema 3.17. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *(X,f) es débilmente mezclante.*
2. *Para cada U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V, en X tales que:*
$$N_f(U,V) \subseteq N_f(U_1,V_1) \cap N_f(U_2,V_2) \ \text{ y } \ N_f(U,V) \neq \emptyset.$$
3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$.*
4. *Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que el conjunto $N_f(U,V)$ es thick.*
5. *Para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*
$$U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset \text{ y } U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Demostración: Veamos que (1) implica (2). Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X,f) es débilmente mezclante, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-k}(U_1) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V_1 \cap f^{-k}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.12}$$

Sean

$$U = U_1 \cap f^{-k}(U_2) \quad \text{y} \quad V = V_1 \cap f^{-k}(V_2). \tag{3.13}$$

Observemos que U_1 es abierto en X, y por la continuidad de f, $f^{-k}(U_2)$ es también abierto en X. Luego, $U = U_1 \cap f^{-k}(U_2)$ es un subconjunto abierto en X. Análogamente, se verifica que $V = V_1 \cap f^{-k}(V_2)$ es un subconjunto abierto en X. Además, de (3.12), se deduce que U y V son no vacíos. Como (X,f) es débilmente mezclante, por la Observación 3.16, se satisface que $N_f(U,V) \neq \emptyset$. Por lo cual solo resta probar que $N_f(U,V) \subseteq N_f(U_1,V_1) \cap N_f(U_2,V_2)$. Para esto, sea

$$n \in N_f(U,V). \tag{3.14}$$

Veamos que $n \in N_f(U_1,V_1) \cap N_f(U_2,V_2)$. Notemos que, de (3.13), se obtiene que $U \subseteq U_1$ y que $V \subset V_1$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 2.15, resulta que:

$$N_f(U,V) \subseteq N_f(U_1,V_1) \tag{3.15}$$

Así, de (3.14) y (3.15), se sigue que:

$$n \in N_f(U_1, V_1). \tag{3.16}$$

Aplicando (3.13), se tiene que $U \subseteq f^{-k}(U_2)$ y $V \subseteq f^{-k}(V_2)$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se obtiene que:

$$N_f(U, V) \subseteq N_f(f^{-k}(U_2), f^{-k}(V_2)). \tag{3.17}$$

Así, por (3.14) y (3.17), $n \in N_f(f^{-k}(U_2), f^{-k}(V_2))$. Luego, por la Proposición 2.17, se sigue que

$$n \in N_f(U_2, V_2). \tag{3.18}$$

En consecuencia, de (3.16) y (3.18) resulta que:

$$n \in N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2). \tag{3.19}$$

Por lo tanto, de (3.14) y (3.19) se concluye que $N_f(U, V) \subseteq N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$.

Ahora veamos que (2) implica (3). Hagamos la prueba por inducción sobre k. Para el caso base tomemos $k = 2$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que:

$$N_f(U, V) \subseteq N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2) \quad \text{y} \quad N_f(U, V) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $n \in N_f(U, V)$ y $n \in N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Supongamos ahora que se cumple para k y probemos que se cumple para $k + 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k + 1\}$, sean U_i y V_i subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por el caso base, para los subconjuntos U_1, U_2, V_1 y V_2, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-n_0}(U_2) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V_1 \cap f^{-n_0}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.20}$$

Definamos

$$U = U_1 \cap f^{-n_0}(U_2) \quad \text{y} \quad V = V_1 \cap f^{-n_0}(V_2). \tag{3.21}$$

Observemos que U_1 es un abierto en X, y por la continuidad de f, resulta que $f^{-n_0}(U_2)$ es también abierto en X. Esto implica que U es un subconjunto abierto en X. De forma similar, se prueba que V es abierto en X. Además, por (3.20) y (3.21), se obtiene que U y V son no vacíos. Aplicando la hipótesis de inducción a los conjuntos U, V, U_i y V_i, con $i \in \{3, \ldots, k + 1\}$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset \ \text{ y } \ U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset, \ \text{para } i \in \{3, \ldots, k + 1\}. \tag{3.22}$$

De (3.22), se sigue que

$$n \in N_f(U, V). \tag{3.23}$$

Por otro lado, de (3.21), se satisface que $U \subseteq U_1$ y $V \subseteq V_1$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se deduce que:

$$N_f(U, V) \subseteq N_f(U_1, V_1). \tag{3.24}$$

Así, de (3.23) y (3.24), obtenemos que $n \in N_f(U_1, V_1)$. De donde,

$$U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset. \tag{3.25}$$

Por otra parte, de (3.21), resulta que $U \subseteq f^{-n_0}(U_2)$ y $V \subseteq f^{-n_0}(V_2)$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se obtiene que:

$$N_f(U, V) \subseteq N_f(f^{-n_0}(U_2), f^{-n_0}(V_2)). \tag{3.26}$$

De (3.23) y (3.26), se obtiene que:

$$n \in N_f(f^{-n_0}(U_2), f^{-n_0}(V_2)).$$

Por la Proposición 2.17, se concluye que $n \in N_f(U_2, V_2)$. En consecuencia

$$U_2 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.27}$$

Por lo tanto, de (3.22), (3.25) y (3.27) se concluye que $U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.

Ahora veamos que (3) implica (4). Para esto sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que $N_f(U, V)$ es thick. Sea $p \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, definamos $U_i = U$ y $V_i = f^{-i}(V)$. Por la continuidad de f, se tiene que $f^{-i}(V)$ es abierto en X, para todo $i \in \{1, \ldots, p+1\}$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $U_i \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, p+1\}$. Luego, por el inciso (1) de la Proposición 2.16, se obtiene que:

$$U \cap f^{-n}(f^{-i}(V)) = U \cap f^{-(n+i)}(V) \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, p+1\}.$$

Así, $n + i \in N_f(U, V)$, para cada $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, es decir, $\{n+1, n+2, \ldots, n+p+1\} \subseteq N_f(U, V)$. Por lo tanto $N_f(U, V)$ es thick.

Probemos que (4) implica (5). Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, $N_f(U, V)$ es thick. Así, por el inciso (1) de la Observación 2.3, se deduce que $N_f(U, V) \neq \emptyset$. Luego, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset. \tag{3.28}$$

Sea

$$W = U \cap f^{-k}(V). \tag{3.29}$$

Note que U es un abierto en X. Además, por la continuidad de f resulta que $f^{-k}(V)$ es un abierto en X. En consecuencia, W es un subconjunto abierto en X. Por (3.28), W es no vacío. Por hipótesis, aplicado al conjunto W, se deduce que $N_f(W, W)$ es thick. Luego, para k, existe $n \in N$ tal que:

$$\{n, n+1, \ldots, n+k\} \subseteq N_f(W, W). \tag{3.30}$$

Por otro lado, de (3.29), se verifica que $W \subseteq U$ y $W \subseteq f^{-k}(V)$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, obtenemos que:

$$N_f(W, W) \subseteq N_f(U, f^{-k}(V)). \tag{3.31}$$

De (3.30) y de (3.31), se deduce que $n \in N_f(U, f^{-k}(V))$. Luego, $U \cap f^{-n}(f^{-k}(V)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por el inciso (1) de la Proposición 2.16, resulta que:

$$U \cap f^{-(n+k)}(V) \neq \emptyset. \tag{3.32}$$

Por otro lado, de (3.29), se deduce que $W \subseteq U$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, resulta que

$$N_f(W, W) \subseteq N_f(U, U). \tag{3.33}$$

Luego, por (3.30) y (3.33), se satisface que $n + k \in N_f(U, U)$. Así,

$$U \cap f^{-(n+k)}(U) \neq \emptyset. \tag{3.34}$$

Por lo tanto, de (3.32) y (3.34), se concluye lo deseado.

Finalmente, probemos que (5) implica (1). Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos de X abiertos y no vacíos. Por hipótesis, existe $k_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$U_1 \cap f^{-k_1}(U_2) \neq \emptyset. \tag{3.35}$$

Definamos

$$A = U_1 \cap f^{-k_1}(U_2). \tag{3.36}$$

Observe que U_1 es abierto en X. Además, por la continuidad de f, resulta que $f^{-k_1}(U_2)$ es también abierto en X. Esto implica que A es un abierto en X. Además, por (3.35), A es no vacío. Por otro lado, notemos que A y $f^{-k_1}(V_2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Nuevamente, por hipótesis, aplicado a los conjuntos A y $f^{-k_1}(V_2)$, existe $k_2 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $A \cap f^{-k_2}(f^{-k_1}(V_2)) \neq \emptyset$, así por el inciso (1) de la Proposición 2.16, se tiene que:

$$A \cap f^{-(k_1+k_2)}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.37}$$

Sea

$$B = A \cap f^{-(k_1+k_2)}(V_2). \tag{3.38}$$

Note que por la continuidad de f, resulta que $f^{-(k_1+k_2)}(V_2)$ es abierto en X. Dado que A es abierto se deduce que B es un subconjunto abierto en X. Además, de (3.37), se tiene que B es no vacío. Observe que B y $f^{-k_2}(V_1)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Nuevamente, aplicando la hipótesis a los conjuntos B y $f^{-k_2}(V)$, existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$B \cap f^{-k_3}(B) \neq \emptyset \text{ y } B \cap f^{-k_3}(f^{-k_2}(V_1)) \neq \emptyset.$$

De donde:

$$k_3 \in N_f(B, B) \tag{3.39}$$

y por el inciso (1) de la Proposición 2.16, obtenemos que $B \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_1) \neq \emptyset$. Así,

$$k_2 + k_3 \in N_f(B, V_1). \tag{3.40}$$

Por otro lado, por (3.38) y (3.36), se satisface que $B \subseteq A \subseteq f^{-k_1}(U_2)$. De (3.38), se deduce que $B \subseteq f^{-(k_1+k_2)}(V_2)$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se cumple que

$$N_f(B, B) \subseteq N_f(f^{-k_1}(U_2), f^{-(k_1+k_2)}(V_2). \tag{3.41}$$

Luego, de (3.39) y (3.41), se satisface que $k_3 \in N_f(f^{-k_1}(U_2), f^{-(k_1+k_2)}(V_2))$. Así,

$$f^{-k_1}(U_2) \cap f^{-k_3}(f^{-(k_1+k_2)}(V_2)) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $f^{-k_1}(U_2 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_2)) \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$U_2 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_2) \neq \emptyset. \tag{3.42}$$

Por otro lado, de (3.38) y (3.36), resulta que $B \subseteq A \subseteq U_1$. Luego, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se cumple que

$$N_f(B, V_1) \subseteq N_f(U_1, V_1). \tag{3.43}$$

Así, de (3.40) y (3.43), se deduce que $k_2 + k_3 \in N_f(U_1, V_1)$. De donde,

$$U_1 \cap f^{-(k_2+k_3)}(V_1) \neq \emptyset. \tag{3.44}$$

Por lo tanto, de (3.42) y (3.44), se concluye que (X, f) es débilmente mezclante. □

Es importante mencionar que el Teorema 3.17 fue tomado de [**5**] y adaptado para nuestros fines.

Lema 3.18. *Sean (X, f) un sistema dinámico débilmente mezclante y $k \in \mathbb{N}$. Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X tales que $N_f(U, V) \neq \emptyset$ y $N_f(U, V) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$.*

DEMOSTRACIÓN: Hagamos la prueba utilizando inducción matemática sobre k. Para $k = 2$. Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Como (X, f) es débilmente mezclante, por el inciso (2) del Teorema 3.17, existen subconjuntos abiertos no vacíos U' y V' de X tales que $N_f(U', V') \neq \emptyset$ y $N_f(U', V') \subseteq N_f(U_1, V_1) \cap N_f(U_2, V_2)$. Supongamos que el resultado es verdadero para k y probemos que se cumple para $k + 1$. Sean $U_1, \ldots, U_{k+1}$ y $V_1, \ldots, V_{k+1}$ subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por hipótesis de inducción, para los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k$ y $V_1, \ldots, V_k$ de X, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_0 y V_0 de X, tales que $N_f(U_0, V_0) \neq \emptyset$ y además

$$N_f(U_0, V_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i).$$

De donde, se obtiene que:
(3.45)

$$N_f(U_0, V_0) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}) = \bigcap_{i=1}^{k+1} N_f(U_i, V_i).$$

Luego, por el caso base, para los subconjuntos $N_f(U_0, V_0)$ y $N_f(U_{k+1}, V_{k+1})$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que $N_f(U, V) \neq \emptyset$ y

$$N_f(U, V) \subseteq N_f(U_0, V_0) \cap N_f(U_{k+1}, V_{k+1}). \tag{3.46}$$

Por lo tanto, por (3.45) y (3.46), se concluye que $N_f(U, V) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} N_f(U_i, V_i)$. □

Proposición 3.19. *Sean (X, f) un sistema dinámico débilmente mezclante y $k \in \mathbb{N}$. Si $N_f(U_i, V_i)$ es thick, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i)$ es thick.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $N_f(U_i, V_i)$ es thick, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por el Lema 3.18, existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, tales que:

$$N_f(U, V) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i, V_i). \tag{3.47}$$

Además, como (X,f) es débilmente mezclante, por el inciso (4) del Teorema 3.17, se tiene que $N_f(U,V)$ es thick. Finalmente, por la Proposición 2.4, se concluye que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_i,V_i)$ es thick. $\square$

Teorema 3.20. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si (X,f) es mezclante, entonces (X,f) es débilmente mezclante.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que (X,f) es mezclante. Probemos que (X,f) es débilmente mezclante. Por el inciso (4) del Teorema 3.17, basta verificar que para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se cumple que $N_f(U,V)$ es thick. Para eso, sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Puesto que (X,f) es mezclante, por el Lema 3.15, se tiene que $N_f(U,V)$ es cofinito. Luego, de la Proposición 2.5, se tiene que $N_f(U,V)$ es thick. Por lo tanto, (X,f) es débilmente mezclante. $\square$

Lema 3.21. *Sean (X,f) un sistema dinámico débilmente mezclante, W un subconjunto cerrado y no vacío en X y $x \in X$. Si $N_f(x,W)$ es sindético, entonces $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $N_f(x,W)$ es sindético y que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W = \emptyset$, es decir, para todo $y \in W$ se tiene que $y \notin \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.7, se tiene que para cada $y \in W$, existe una vecindad G_y de y y subconjuntos abiertos no vacíos U_y y V_y de X, tales que:

$$N_f(x,G_y) \cap N_f(U_y,V_y) = \emptyset. \tag{3.48}$$

Sea $\mathcal{C} = \{\mathrm{int}(G_y) \subseteq X : y \in W\}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta para W. Como X es compacto y W es cerrado en X, se tiene que W es compacto. Así, existen $y_1,\ldots,y_k$ en W tales que $\mathcal{C}' = \{\mathrm{int}(G_{y_1}), \mathrm{int}(G_{y_2}), \ldots, \mathrm{int}(G_{y_k})\}$ es una subcubierta para W. Por otro lado, como (X,f) es débilmente mezclante, por el Teorema 3.17, 4., se tiene que $N_f(U_{y_i},V_{y_i})$ es thick, para cada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Luego, por la Proposición 3.19, se obtiene que $\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i},V_{y_i})$ es thick. Además, por hipótesis, se tiene que $N_f(x,W)$ es sindético. Así, por la Proposición 2.6, se sigue que:

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i},V_{y_i}) \cap N_f(x,W) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i},V_{y_i})$ y $n \in N_f(x,W)$. En consecuencia, $f^n(x) \in W$. Dado que $\mathcal{C}'$ es una subcubierta para W, existe $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ tal que $f^n(x) \in \mathrm{int}(G_{y_j})$, lo cual implica que $f^n(x) \in G_{y_j}$. De donde:

$$n \in N_f(x,G_{y_j}) \tag{3.49}$$

Por otra parte, como $n \in \bigcap_{i=1}^{k} N_f(U_{y_i},V_{y_i})$, resulta que:

$$n \in N_f(U_{y_j},V_{y_j}) \tag{3.50}$$

En consecuencia, de (3.49) y (3.50), se concluye que $n \in N_f(x, G_{y_j}) \cap N_f(U_{y_j}, V_{y_j})$, lo cual es una contradicción a (3.48). Esta surgió de suponer que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W = \emptyset$. Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap W \neq \emptyset$. □

Del Lema 3.21 se obtiene el siguiente resultado, el cual muestra la relación que existe entre la clase de sistemas dinámicos débilmente mezclantes y los sistemas compacto transitivos.

Teorema 3.22. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es compacto transitivo.*

Demostración: Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Para verificar que (X, f) es compacto transitivo, por la Proposicin 3.9, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in X$. Para esto, sea $x \in X$. Notemos que $X \subseteq X$ y es cerrado en sí mismo, además $N_f(x, X)$ es sindético. Por el Lema 3.21, se tiene que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \cap X = \omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. □

4. Compacto transitividad y su relación con tipos de transitividad

En esta sección se muestra una equivalencia más de sistema dinámico compacto transitivo.

Lema 4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *(X, f) es compacto transitivo.*
2. *(X, f) es transitivo y para todo $x \in X$ existe un punto $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de z, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ y para cualquier subconjunto W abierto no vacío en X.*

Demostración: Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Veamos que se cumple (2). Para esto, primero probemos que (X, f) es transitivo. Sean $x \in X$ y U_1 y V_1 abiertos no vacíos en X. Por hipótesis, existe $z \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{4.1}$$

para cada vecindad G de z y para cualesquiera U y V abiertos no vacíos en X. Aplicando (4.1) a los conjuntos U_1 y V_1 se tiene que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U_1, V_1) \neq \emptyset.$$

Así, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n \in N_f(x, G)$ y $n \in N_f(U_1, V_1)$. Luego, $f^n(x) \in G$ y $U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es transitivo.

Ahora probemos la segunda parte de (2), es decir, que para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $z \in X$, tal que $N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z, para cualquier W subconjunto abierto no vacío en X y para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Para esto, sea $x \in X$. Como (X, f) es compacto transitivo, para x, existe $z_1 \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset, \tag{4.2}$$

para cada vecindad G de z_1 y para cualesquiera abiertos no vacíos U y V en X. Definamos $z = z_1$. Sean Z una vecindad de z, W un subconjunto abierto no vacío en X y $k \in \mathbb{Z}_+$. Notemos que W es abierto en X. Además, por la continuidad de f, $f^{-k}(W)$, también es abierto en X. Aplicando (4.2) a los conjuntos Z, W y $f^{-k}(W)$, se tiene que:

$$N_f(x, Z) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset.$$

Dado que Z, W y k son arbitrarios se prueba lo deseado.
Ahora probemos que (2) implica (1), es decir, veamos que (X, f) es compacto transitivo. Para esto, sea $x \in X$. Por el supuesto, existe $z_1 \in X$ tal que:

$$N_f(x, G) \cap N_f(W, f^{-k}(W)) \neq \emptyset, \tag{4.3}$$

para cualquier vecindad G de z_1, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ y para cualquier subconjunto W abierto no vacío en X. Definamos $z = z_1$. Sean G_z una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos en x. Note que V es abierto en X. Además, por la continuidad de f, $f^{-m}(U)$ también es abierto en X. Así, como (X, f) es transitivo, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$V \cap f^{-m}(U) \neq \emptyset. \tag{4.4}$$

Definamos

$$W = V \cap f^{-m}(U). \tag{4.5}$$

Se obtiene que W es un subconjunto abierto. Además, por (4.4), W es no vacío en X. Así, aplicando (4.3) a W y a m se cumple que:

$$N_f(x, G_z) \cap N_f(W, f^{-m}(W)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$s \in N_f(x, G_z) \quad \text{y} \quad s \in N_f(W, f^{-m}(W)). \tag{4.6}$$

Por otro lado, de (4.5), se tiene que $W \subseteq V$, luego $f^{-m}(W) \subseteq f^{-m}(V)$. Nuevamente de (4.5), se deduce que $W \subseteq f^{-m}(U)$. Así, por el inciso (2) de la Observación 2.15, se obtiene que :

$$N_f(W, f^{-m}(W)) \subseteq N_f(f^{-m}(U), f^{-m}(V)). \tag{4.7}$$

Luego, de (4.6) y de (4.7), se satisface que $s \in N_f(f^{-m}(U), f^{-m}(V))$. De donde, por la Proposición 2.17, se concluye que:

$$s \in N_f(U, V). \tag{4.8}$$

Luego, de (4.6) y (4.8), $N_f(x, G_z) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. □

Del Lema 4.1 se obtiene el Corolario 4.2.

Corolario 4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces (X, f) es transitivo.*

Una consecuencia del Corolario 4.2, es el Corolario 4.3.

Corolario 4.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico compacto transitivo. Para cada $x \in X$, se cumple que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = X$ o $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es denso en ninguna parte en X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$. Por el Corolario 4.2, se obtiene que (X, f) es transitivo. Además por el Lema 3.11, se tiene que el conjunto $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es cerrado y $+$ invariante bajo f. Por lo tanto, por la Proposición 2.13, se concluye que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) = X$ o $\omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ es denso en ninguna parte en X. □

5. Conjugación topológica

Debido a que hay una gran cantidad de sistemas dinámicos y muchas propiedades que estudiar en ellos, debemos tener a la mano un criterio que permita establecer cuándo dos sistemas dinámicos son equivalentes, es decir, cuando dichos sistemas tienen un comportamiento similar. Una herramienta que nos ayuda a determinar ésto es la conjugación topológica cuya definición presentamos a continuación.

Definición 5.1. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se dice que el sistema (X, f) es topológicamente conjugado al sistema (Y, g), si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que, para cada $x \in X$, se cumple:*

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

En tal caso se dice que h conjuga a f con g. Al homeomorfismo h se le llama una conjugación entre f y g. Cuando el sistema (X, f) es topológicamente conjugado al sistema (Y, g), decimos que los sistemas son dinámicamente equivalentes. Cualquier propiedad de los sistemas que sea preservada por conjugación topológica se le llama propiedad dinámica.

A continuación presentamos un resultado.

Proposición 5.2. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados mediante la conjugación $h : X \to Y$ y $U \subseteq X$. Las afirmaciones siguientes son verdaderas:*

1. $h(f(U)) = g(h(U))$.
2. $f^{-1}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-1}(U))$.

Demostración: (1) Hagamos la prueba por contenciones. Veamos primero que $h(f(U)) \subseteq g(h(U))$. Para esto, sea $y \in h(f(U))$. Luego, existe

$$z \in f(U) \quad \text{tal que} \quad h(z) = y. \tag{5.1}$$

De donde, existe $x \in U$ tal que $f(x) = z$. Puesto que h es una conjugación para f y g, se tiene que:

$$y = h(z) = h(f(x)) = g(h(x)).$$

Por otro lado, como $x \in U$, se obtiene que $h(x) \in h(U)$. Luego, $y = g(h(x)) \in g(h(U))$, es decir, $y \in g(h(U))$. Así, $h(f(U)) \subseteq g(h(U))$. De manera similar se verifica que $g(h(U)) \subseteq h(f(U))$. Por ambas contenciones se obtiene la igualdad.

(2) Para verificar la igualdad, primero veamos que $f^{-1}(h^{-1}(U)) \subseteq h^{-1}(g^{-1}(U))$. Sea $y \in f^{-1}(h^{-1}(U))$. Luego $f(y) \in h^{-1}(U)$. De donde,

$$h(f(y)) \in U. \tag{5.2}$$

Como h es una conjugación de f y g, de (5.2), se tiene que $g(h(y)) \in U$. Luego, $h(y) \in g^{-1}(U)$. Así, $y \in h^{-1}(g^{-1}(U))$. Por lo tanto, $f^{-1}(h^{-1}(U)) \subseteq h^{-1}(g^{-1}(U))$. De manera similar, se verifica la otra contención. $\square$

Corolario 5.3. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados mediante la conjugación $h : X \to Y$ y $U \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$h(f^n(U)) = g^n(h(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: (1) La prueba se realizará por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, por el inciso (1) de la Proposición 5.2, se cumple que

$$h(f(U)) = g(h(U)). \tag{5.3}$$

Supongamos que se cumple para n, es decir:

$$h(f^n(U)) = g^n(h(U)). \tag{5.4}$$

Verifiquemos que se cumple para $n + 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned} h(f^{n+1}(U)) &= h(f^n(f(U))) \\ &= g^n(h(f(U))) && \text{Por (5.3).} \\ &= g^n(g(h(U))) && \text{Por (5.4).} \\ &= g^{n+1}(h(U)). \end{aligned}$$

Luego, $h(f^{n+1}(U)) = g^{n+1}(h(U))$. Por lo tanto, se cumple $h(f^n(U)) = g^n(h(U))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) La prueba se realizará por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, por el inciso (2) de la Proposición 5.2, se cumple que:

$$f^{-1}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-1}(U)). \tag{5.5}$$

Supongamos que se cumple para n, es decir:

$$f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U)). \tag{5.6}$$

Probemos que se cumple para $n + 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned} f^{-(n+1)}(h^{-1}(U)) &= f^{-n}(f^{-1}(h^{-1}(U))) && \text{Por Proposición 2.16, inciso (1).} \\ &= f^{-n}(h^{-1}(g^{-1}(U))) && \text{Por (5.5).} \\ &= h^{-1}(g^{-n}(g^{-1}(U))) && \text{Por (5.6).} \\ &= h^{-1}(g^{-(n+1)}(U)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-n}(h^{-1}(U)) = h^{-1}(g^{-n}(U))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A continuación veamos que ser débilmente mezclante es una propiedad diámica.

Teorema 5.4. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$. El sistema dinámico (X, f) es débilmente mezclante si y sólo si el sistema dinámico (Y, g) es débilmente mezclante.*

Demostración: Supongamos que (X,f) es débilmente mezclante. Probemos que (Y,g) es débilmente mezclante. Para esto, sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en Y. Por el inciso (5) del Teorema 3.17, basta verificar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap g^{-n}(U) \neq \emptyset$ y $U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset$. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Puesto que (X,f) es débilmente mezclante, por el inciso (5) del Teorema 3.17, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

De donde, por el inciso (2) del Corolario 5.2, se obtiene que:

$$h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, $h^{-1}(U \cap g^{-n}(U)) \neq \emptyset$ y $h^{-1}(U \cap g^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Así,

$$U \cap g^{-n}(U) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, (Y,g) es débilmente mezclante.
Recíprocamente, supongamos que (Y,g) es débilmente mezclante. Probemos que (X,f) es débilmente mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Por el inciso (5) del Teorema 3.17, basta verificar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$ y $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Se tiene que $h(U)$ y $h(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$h(U) \cap g^{-n}(h(U)) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad h(U) \cap g^{-n}(h(V)) \neq \emptyset. \tag{5.7}$$

De (5.7) se obtiene que $g^n(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. Luego, por el inciso (1) del Corolario 5.3, se tiene que $h(f^n(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. Como h es inyectiva, $h(f^n(U) \cap U) = h(f^n(U)) \cap h(U)$. Esto implica que, $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Así, se obtiene que $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$. Análogamente se verifica que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X,f) es débilmente mezclante. □

Teorema 5.5. *Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos topológicamente conjugados, mediante conjugación $h : X \to Y$ y $x, z \in X$. Se tiene que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$ si y sólo si $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$.*

Demostración: Supongamos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Probemos que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Por la Observación 3.7, basta verificar que $N_g(h(x), G) \cap N_g(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de $h(z)$ y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V en Y. Para esto, sean G una vecindad de $h(z)$ y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Notemos que $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X y $h^{-1}(G)$ es una vecindad de z. Por hipótesis, se tiene que:

$$N_f(x, h^{-1}(G)) \cap N_f(h^{-1}(U), h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(x) \in h^{-1}(G). \tag{5.8}$$

y

$$h^{-1}(U) \cap f^{-n}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset. \tag{5.9}$$

De (5.8), se tiene que $h(f^n(x)) \in G$. Puesto que h es una conjugación entre f y g, y por el inciso (1) del Corolario 5.3, se deduce que $g^n(h(x)) \in G$. Así,

$$n \in N_g(h(x), G) \tag{5.10}$$

Por otro lado, por el inciso (2) del Corolario 5.3 y por (5.9) resulta que $h^{-1}(U) \cap h^{-1}(g^{-n}(V)) \neq \emptyset$. Esto implica que, $U \cap g^{-n}(V) \neq \emptyset$. En consecuencia,

$$n \in N_g(U, V). \tag{5.11}$$

Así, por (5.10) y (5.11), se satisface que:

$$N_g(h(x), G) \cap N_g(U, V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$.
Recíprocamente, supongamos que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Probemos que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por la Observación 3.7, basta verificar que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos U y V abiertos no vacíos en X. Para esto, sean G una vecindad de z y U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Resulta que $h(U)$ y $h(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de Y. Además, $h(G)$ es una vecindad de $h(z)$. Por hipótesis, obtenemos que:

$$N_g(h(x), h(G)) \cap N_g(h(U), h(V)) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$g^n(h(x)) \in h(G). \tag{5.12}$$

y

$$h(U) \cap g^{-n}(h(V)) \neq \emptyset. \tag{5.13}$$

Luego, por el inciso (1) de la Proposición 5.2 y por (5.12), se satisface que $h(f^n(x)) \in h(G)$. Luego, $f^n(x) \in G$. Esto implica que,

$$n \in N_f(x, G). \tag{5.14}$$

Por otro lado, por la Proposición 5.3 y de (5.13), resulta que $g^n(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Así, por el inciso (1) del Corolario 5.3, se cumple que $h(f^n(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$. Luego, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Se obtiene que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego,

$$n \in N_f(U, V). \tag{5.15}$$

Así, de (5.14) y (5.15), se concluye que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. $\square$

Finalizamos este trabajo mostrando que ser compacto transitivo es una propiedad dinámica.

Corolario 5.6. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, topológicamente conjugados, mediante la conjugación $h : X \to Y$. El sistema dinámico (X, f) es compacto transitivo si y sólo si el sistema dinámico (Y, g) es compacto transitivo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que (X, f) es compacto transitivo. Probemos que (Y, g) es compacto transitivo. Por la Proposición 3.9, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_g}(y) \neq \emptyset$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$. Como h es sobreyectiva, existe $x \in X$, tal que $h(x) = y$. Puesto que (X, f) es compacto transitivo, existe $z \in X$ tal que $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Por el Teorema 5.5, se tiene que $h(z) \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$, es decir $\omega_{\mathcal{N}_g}(y) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (Y, g) es compacto transitivo.
Recíprocamente, supongamos que (Y, g) es compacto transitivo y veamos que (X, f) es compacto transitivo. Por la Proposició n 3.9, basta verificar que $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Sea $x \in X$. Note que, $h(x) \in Y$. Puesto que (Y, g) es compacto transitivo, existe $y \in Y$, tal que $y \in \omega_{\mathcal{N}_g}(h(x))$. Por el Teorema 5.5, existe $z \in X$,

tal que $z = h^{-1}(y)$ y $z \in \omega_{\mathcal{N}_f}(x)$. Luego, $\omega_{\mathcal{N}_f}(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto, (X, f) es compacto transitivo. $\square$

Bibliografía

[1] F. Barragán, A. Santiago-Santos and J. F. Tenorio, *Dynamic properties for the induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Glas. Mat. Ser. III 51(71), no. 2 (2016), 453–474.

[2] F. Barragán, Santiago-Santos A, Tenorio J.F., *Dynamic properties of the dynamical system* $SF_m^n(X), SF_m^n(f))$, Applied General Topology 2020; 21, n. 1: 17-34.

[3] F. Barragán, A. Santiago-Santos and J. F. Tenorio, *Dynamic properties for the induced maps on n-fold symmetric product suspensions II*, Topology Appl. 288, (2021), 107484

[4] G. D. Birkhoff, *Dinamical Systems*, American Math. Soc. 1927.

[5] E. Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrence properties*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 2004, 21-40.

[6] J. E. King Dávalos, H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, (2014).

[7] E. A. Lacomba, *Los sistemas dinámicos, ¿Qué son y para que sirven?*, Miscelánea matemática, (2000), 39-50.

[8] T. K. Subrahmonian Moothathu, *Stronger forms of sensitivity for dynamicals systems*, Nonlinearity 20, 2007, 2115-2126.

[9] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1989.

[10] D. Gulick, *Encounter with chaos*, McGraw-Hill, New York, 1992.

[11] R. H. Abraham, L. Gardini, C. Mira, *Chaos in Discrete Dynamical Systems: a visual introduction in 2 dimensions*, (1997).

[12] W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada, G. Zhang, *Dynamical compactness and sensitivity*, Journal of Differential Equations, Vol. 260, (2016), pp. 6800-6827

[13] C. Knudsen, *Chaos without nonperiodicity*, American Mathematical Monthly 101, (1994), 563–565.

[14] S. Kolyada, M. Misiurewicz, L. Snoha, *Spaces of transitive interval maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems 35 (2015), 2151–2170.

[15] I. León Torres, *Compacidad Dinámica y Sensitividad*, tesis de licenciatura, UTM, 2018.

[16] E. Norton Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. 20 p. 130–141.

[17] A. Rojas, F. Barragán, S. Macías, *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products*, Turkish Journal of Mathematics 2020; 44(2): 491-523.

Correos electrónicos:
`yooirma@gmail.com` (Irma León Torres),
`alicia@mixteco.utm.mx` (Alicia Santiago Santos).

Capítulo 5

Entropía topológica

Franco Barragán, Daniela I. Flores
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México

1. Introducción

El concepto de entropía surgió en el área de la física, en particular en el campo de la termodinámica. En 1864, Rudolph Clausius, definió el cambio de entropía de un cuerpo como la transferencia de calor dividido por la temperatura, y postuló la segunda ley de la termodinámica. Aunque la entropía en esta forma resultó bastante útil, no adquirió un significado intuitivo hasta que James Maxwell y Ludwig Boltzmann en 1877, elaboraron una teoría del calor basada en la probabilidad, la mecánica estadística, y formalizaron el concepto de entropía de forma matemática. La entropía en este sentido mide la razón de un incremento entre energía interna frente a un incremento de temperatura del sistema termodinámico. En busca de generalizar este concepto y darle formalismo matemático, en 1958, el matemático ruso Andrei Kolmogorov fue el primero en definir a la entropía para sistemas dinámicos. Introdujo el concepto de entropía métrica de una función $f : X \to X$ medible, respecto a una medida μ, f-invariante. Por su parte, la entropía topológica, que es la abstracción de la entropía métrica pero considerando la topología de un sistema dinámico, fue introducida en 1963, por R. Adler, et. al. [**1**]. Para conocer más a detalle la historia de la entropía, puede consultar [**7**].

Actualmente la entropía se estudia desde distintos campos. En sistemas dinámicos desde el punto de vista ergódico y topológico, en física en el campo de la termodinámica y también en otros campos como en economía y teoría de la información.

En este capítulo nos dedicamos al estudio de la entropía topológica de un sistema dinámico que, de manera intuitiva, es una cantidad numérica que mide en cierta forma la complejidad del sistema. En términos generales, la entropía topológica mide la tasa de crecimiento exponencial del número de órbitas "distinguibles" de un sistema a través del tiempo, mostrando de este modo, qué tan compleja es la estructura de las órbitas del sistema.

El presente capítulo está organizado de la siguiente forma. En la segunda sección introducimos notación, los conceptos básicos de sistemás dinámicos y algunas propiedades útiles de las cubiertas abiertas de un espacio. En la tercera sección introducimos de manera detallada el concepto de entropía topológica. En la cuarta sección revisamos algunos teoremas importantes que se tienen sobre la entropía y también algunas equivalencias que nos ayudan a interpretar mejor este concepto haciendo uso de la métrica del sistema. Finalmente, en la quinta sección se introducen ejemplos del cálculo explícito de la entropía en algunos sistemas dinámicos. Los artículos consultados para este capítulo son principalmente [**1, 9**].

2. Preliminares

Para nuestros objetivos en este trabajo un sistema dinámico (discreto) es un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua. En esta sección presentamos los conceptos básicos y necesarios para un buen desarrollo de este capítulo. Considerando un espacio métrico compacto X y un subconjunto A de X, la cerradura o clausura de A en X lo detonamos por $\text{cl}_X(A)$, si no existe riesgo de confusión se escribe $\text{cl}(A)$. Denotamos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{I}$ al conjunto de los números naturales, números enteros no negativos y números irracionales, respectivamente. Además, con I denotamos al intervalo cerrado $[0, 1]$, considerado con la métrica usual.

Por otra parte, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, la k-ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). Para un subconjunto A de X y $k \in \mathbb{Z}$, denotamos con $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$.

Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un conjunto $+$*invariante* si $f(A) \subseteq A$, $-$*invariante* si $f^{-1}(A) \subseteq A$ e *invariante* si $f(A) = A$.

Presentamos ahora una forma de hacer operaciones con cubiertas de un espacio métrico X.

Definición 2.1. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos familias de subconjuntos de X. Se define la siguiente operación entra $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$:*

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap B : \ U \in \mathcal{U} \text{ y } B \in \mathcal{V}\}.$$

Considerando que la intersección de conjuntos es asociativa y conmutativa, se tiene que la operación $\vee$ es asociativa y conmutativa. Además, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas abiertas de X, $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$, también es una cubierta abierta para X, conocida como *cubierta unión*.

Regularmente, para un espacio métrico existen varias cubiertas abiertas. Es por ello que es necesario definir una forma de comparar las cubiertas y decidir, en algún sentido, cuándo una cubierta es mejor que otra. Para ello presentamos el siguiente concepto.

Definición 2.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X. La cubierta $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y se denota por $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, si para cada $B \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq U$.*

Se cumple que $\prec$ es un orden parcial sobre la familia de cubiertas abiertas de un espacio métrico. Además, cumple con las siguientes propiedades.

Proposición 2.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par de cubiertas abiertas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ para X, se cumple lo siguiente:*

(1) $\mathcal{U} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$ *y* $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.

(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ *y* $\mathcal{U}' \prec \mathcal{V}'$, *entonces* $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}' \prec \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$.

(3) Si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, *entonces* $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

Demostración: Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Sea $U \cap V \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$. Luego $U \cap V \subseteq U$ y $U \in \mathcal{U}$, lo que prueba que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$. Análogamente $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.

(2) Sean $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{V}'$ cubiertas abiertas para X. Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}'$ y $\mathcal{V} \prec \mathcal{V}'$. Sea $W \in \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$, luego $W = V \cap V'$ con $V \in \mathcal{V}$ y $V' \in \mathcal{V}'$. Por lo supuesto, existen $U \in \mathcal{U}$ y $U' \in \mathcal{U}'$ tales que $V \subseteq U$ y $V' \subseteq U'$, así, $V \cap V' \subseteq U \cap U'$. Lo que implica que $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}' \prec \mathcal{V} \vee \mathcal{V}'$.

(3) Supongamos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{V}$, luego $V \in \mathcal{U}$ y $V \subseteq V$. Lo que prueba que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$.

De (1), (2) y (3) queda demostrada la proposición. □

El tipo de sistemas dinámicos que estamos tratando están regidos por funciones continuas. Por lo cual, podemos generar cubiertas abiertas para el espacio, mediante la función, a partir de una cubierta abierta dada. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Se define

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : \ U \in \mathcal{U}\}.$$

Como f es una función continua, la preimagen de cualquier abierto en X es de nuevo un abierto en X, por lo cual $f^{-1}(\mathcal{U})$ es una cubierta abierta para X. Además, cumple con las propiedades mostradas a continuación:

Proposición 2.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de cubiertas abiertas para X, se cumple lo siguiente:*

(1) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, *entonces* $f^{-1}(\mathcal{U}) \prec f^{-1}(\mathcal{V})$.

(2) $f^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{V})$.

Demostración: Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Sea $W \in f^{-1}(\mathcal{V})$, luego $W = f^{-1}(V)$ con $V \in \mathcal{V}$. Por lo supuesto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$, así $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Así, de la Proposición 2.3, parte (3), tenemos que $f^{-1}(\mathcal{U}) \prec f^{-1}(\mathcal{V})$.

(2) Se tiene que:
$f^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = \{f^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}\} = \{f^{-1}(U \cap V) \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } V \in \mathcal{V}\} = \{f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } V \in \mathcal{V}\} = f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{V})$.

De (1) y (2) completamos la prueba. □

Del mismo modo podemos ver que para cada $k \in \mathbb{N}$, la familia:

$$f^{-k}(\mathcal{U}) = \{f^{-k}(U) : \ U \in \mathcal{U}\},$$

es una cubierta abierta para X que cumple propiedades similares a las mostradas en la Proposición 2.4.

3. Entropía topológica

Puesto que estamos considerando espacios métricos compactos, para cualquier cubierta abierta existe una subcubierta finita, así tiene sentido la siguiente definición:

Definición 3.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Definimos:*

$$N(\mathcal{U}) = \text{mín}\{|\mathcal{W}| : \mathcal{W} \text{ es subcubierta de } \mathcal{U}\},$$

es decir, la mínima cardinalidad de las subcubiertas de $\mathcal{U}$.

Es importante notar que $N(\mathcal{U})$ es un número positivo, para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$, pues al considerar espacios no vacíos, cualquier cubierta abierta debe tener al menos un elemento. Así, podemos hablar del logaritmo del número $N(\mathcal{U})$. Dicho esto, definimos la entropía de una cubierta abierta en un sistema dinámico.

Definición 3.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Se define la entropía de $\mathcal{U}$ como:*

$$H(\mathcal{U}) = \log(N(\mathcal{U})),$$

donde el logaritmo considerado es con base e.

En la Definición 3.2, el logaritmo es considerado con base e, únicamente por uniformizar los cálculos, pues lo que realmente es relevante es si la entropía es o no positiva y el cambio de base sólo la hace variar por un factor constante. En efecto, para cualquier otra base $a > 1$:

$$\log_e(a)\log_a(x) = \log_e(x).$$

Por otro lado, ya que $N(\mathcal{U}) \geq 1$, por propiedades del logaritmo, la entropía de una cubierta resulta ser un número no negativo, es decir, ya que $N(\mathcal{U}) \geq 1$, se tiene que $\log(N(\mathcal{U})) \geq 0$. La entropía de una cubierta cumple principalmente las propiedades mostradas en el resultado siguiente.

Teorema 3.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada par de cubiertas abiertas $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ para X, se cumple lo siguiente:*

(1) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V})$.
(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $H(\mathcal{V}) = H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$.
(3) $H(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq H(\mathcal{U})$. Si f es sobreyectiva, entonces $H(f^{-1}(\mathcal{U})) = H(\mathcal{U})$.
(4) $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V})$.

Demostración: Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X.

(1) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{V}$, con lo que $N(\mathcal{V}) = m$. Así, existe $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ subcubierta de $\mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo que $N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{V})$. Dado que la función log, es una función creciente, $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V})$.
(2) De nuevo supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Por la Proposición 2.3, parte (1), se tiene que $\mathcal{V} \prec (\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$. Así, del punto (1) previo, $H(\mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$. Sea $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{V}$, luego $N(\mathcal{V}) = m$. Por lo supuesto, existe una subcubierta $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ de $\mathcal{U}$ tal que $V_i \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. De aquí que el conjunto $\{U_1 \cap V_1, U_2 \cap V_2, \ldots, U_m \cap V_m\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ con exactamente m elementos. Con lo que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq m$. Por lo tanto, $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{V})$ y así $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{V})$. Por lo tanto $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = H(\mathcal{V})$.
(3) Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ una subcubierta minimal de $\mathcal{U}$, por lo cual $N(\mathcal{U}) = m$ y la familia $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_m)\}$ es una subcubierta de $f^{-1}(\mathcal{U})$ con a lo más m elementos, por lo que $N(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$. Así, $H(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq H(\mathcal{U})$.

Para completar la prueba de la parte (3), supongamos además, que f es una función sobreyectiva. Sea $\{f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \ldots, f^{-1}(V_{N(f^{-1}(\mathcal{U}))})\}$ una subcubierta minimal de $f^{-1}(\mathcal{U})$. Pongamos $p = N(f^{-1}(\mathcal{U}))$. Luego $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} f^{-1}(V_k)$. Como f es sobreyectiva $X = f(X)$. Así:

$$X = f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^{p} f^{-1}(V_k)\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{p} V_k\right)\right).$$

Además, también de la sobreyectividad se tiene que:

$$f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{p} V_k\right)\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} V_k.$$

De aquí $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ y con esto $m \leq p$. Por lo que $N(\mathcal{U}) \leq N(f^{-1}(\mathcal{U}))$ y por lo tanto $H(\mathcal{U}) \leq H(f^{-1}(\mathcal{U}))$. En consecuencia $H(\mathcal{U}) = H(f^{-1}(\mathcal{U}))$.

(4) Sean $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ subcubiertas minimales de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, con lo que $N(\mathcal{U}) = n$ y $N(\mathcal{V}) = m$. Así:

$$\{U_i \cap V_j |\ i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

es una subcubierta de $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$, y ya que:

$$|\{U_i \cap B_j |\ i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}| = N(\mathcal{U})N(\mathcal{V}),$$

se tiene que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U})N(\mathcal{V})$, lo que a su vez, por propiedades del logaritmo, implica que $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V})$.

Así, de (1), (2), (3) y (4) se concluye la prueba. □

Recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{-k}(\mathcal{U})$ también es una cubierta abierta para X. Esto indica que podemos construir cubiertas distintas para el espacio X, con una sola cubierta abierta $\mathcal{U}$, utilizando la función f y la operación $\vee$. A continuación definimos una cubierta especial que nos sirve para definir la entropía topológica de un sistema.

Definición 3.4. *Dados (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$\mathcal{U}_f^n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U}) = f^0(\mathcal{U}) \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U}),$$

donde $f^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Cuando no haya confusión con la función, escribimos únicamente $\mathcal{U}^n$ para referirnos a $\mathcal{U}_f^n$.

Antes de definir la entropía del sistema con respecto a una cubierta, la cual se define mediante un límite, necesitamos asegurarnos que tal límite existe. Para ello, requerimos verificar el siguiente resultado, que es crucial para probar la existencia del límite.

Lema 3.5. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Si para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ existe y además:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demostración: Como $a_n \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, 0 es una cota inferior de $\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\alpha = \text{ínf}\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Sea $\epsilon > 0$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq \frac{a_m}{m} < \alpha + \epsilon$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el algoritmo de la división, existen $q, r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n = qm+r$, donde $r < m$. Así, $a_n = a_{qm+r} \leq a_{qm} + a_r \leq qa_m + a_r$, con lo que:

$$\begin{aligned}\alpha < \frac{a_n}{n} &\leq \frac{qa_m}{n} + \frac{a_r}{n}\\ &= \frac{a_m}{m}\frac{qm}{n} + \frac{a_r}{n}\\ &\leq (\alpha+\epsilon)\frac{qm}{n} + \frac{a_r}{n}.\end{aligned}$$

Dado que $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{qm}{n} = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{qm+r-r}{n} = \text{lím}_{n\to\infty} 1 - \frac{r}{n} = 1$ y $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} = 0$, tenemos que:

$$\alpha \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \alpha + \epsilon.$$

Por lo tanto, $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$. □

Teorema 3.6. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. El $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}$ existe y además:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n} = \text{ínf}\left\{\frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $H_n = H(\mathcal{U}_f^n)$. Así $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Luego, de la Proposición 2.4, parte (2):

$$\begin{aligned}H(\mathcal{U}_f^{m+n}) &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\mathcal{U}))\\ &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\mathcal{U}))\\ &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))).\end{aligned}$$

Además del Teorema 3.3, parte (4) y (3) respectivamente tenemos que:

$$\begin{aligned}H(\mathcal{U}_f^{m+n}) &= H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})))\\ &\leq H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(f^{-m}(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})))\\ &\leq H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})).\end{aligned}$$

Y dado que:

$$H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})) + H(\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})) = H(U_f^m) + H(U_f^n),$$

hemos probado que $H_{n+m} \leq H_n + H_m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Así por el Lema 3.5, tenemos que $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = \text{ínf}\{\frac{H_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, lo que concluye la prueba. □

Sabiendo que para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}^n)}{n}$ siempre existe, podemos con toda firmeza definir la entropía del sistema con respecto a una cubierta.

Definición 3.7. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. La entropía del sistema con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$, se define como:*

$$h(f, \mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}.$$

Nuevamente, la entropía del sistema con respecto a una cubierta es un número no negativo, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $H(U_f^n)$ es un número no negativo, con lo cual, la sucesión $\left\{\frac{H(\mathcal{U}_f^n)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos y por lo tanto, converge a un número no negativo. A continuación revisamos algunas de las propiedades más útiles que cumple dicho concepto.

Proposición 3.8. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas para X. Se cumplen las siguientes proposiciones:*
(1) $h(f,\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$.
(2) Si $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, entonces $h(f,\mathcal{U}) \leq h(f,\mathcal{V})$
(3) Si f es un homeomorfismo, entonces $h(f,\mathcal{U}) = h(f^{-1},\mathcal{U})$.

Demostración:

(1) Por definición, $h(f,\mathcal{U}) = \text{ínf}\left\{\dfrac{H(\mathcal{U}^n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tomando $n = 1$, $H(\mathcal{U}) \in \left\{\dfrac{H(\mathcal{U}^n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, por lo que $h(f,\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$.

(2) Supongamos que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Por las Proposiciones 2.3, parte (2), y 2.4, parte (1), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{U}^n \prec \mathcal{V}^n$. Luego del Teorema 3.3, parte (1), $H(\mathcal{U}^n) \leq H(\mathcal{V}^n)$. Por tanto, $h(f,\mathcal{U}) \leq h(f,\mathcal{V})$.

(3) Supongamos que f es homeomorfismo, del Teorema 3.3, parte (3), tenemos que $H(f^{-1}(\mathcal{U})) = H(\mathcal{U})$, de aquí, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{U}_f^n) &= H(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})) \\
&= H(f^{n-1}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) \\
&= H(f^{n-1}(\mathcal{U}) \vee f^{n-2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \mathcal{U}) \\
&= H((f^{-1})^{-n+1}(\mathcal{U}) \vee (f^{-1})^{-n+2}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \mathcal{U}) \\
&= H(\mathcal{U}_{f^{-1}}^n).
\end{aligned}$$

Así, $h(f,\mathcal{U}) = h(f^{-1},\mathcal{U})$.

De (1), (2) y (3) se concluye la prueba. □

Con toda esta información finalmente podemos definir la entropía topológica de un sistema dinámico.

Definición 3.9. *La entropía topológica del sistema dinámico (X, f) está dada por:*

$$h_{top}(f) = \sup\left\{h(f,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \textit{ es una cubierta abierta para } X\right\}.$$

De acuerdo a la Definición 3.9, en su forma extendida la entropía queda definida del siguiente modo:

$$h_{top}(f) = \sup\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(N(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})))}{n} : \mathcal{U} \text{ es una cubierta abierta para } X\right\}.$$

En algunos textos como [**9**], es así como presentan la definición de entropía, omitiendo la definición de entropía con respecto a una cubierta. La razón de que aquí se presente a la entropía por niveles[1], es la de facilitar la manipulación de sus propiedades y hacer más legibles las demostraciones.

[1]Al decir por niveles, nos referimos a que primero se presenta la entropía de una cubierta, luego la entropía con respecto a una cubierta y finalmente la entropía de todo el sistema.

Recordemos que $h(f, \mathcal{U}) \geq 0$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X. Así, la entropía del sistema, al ser el supremo de un conjunto de números no negativos, resulta ser un número no negativo. Es decir, $h_{top}(f) \geq 0$. Es aquí donde la entropía divide a los sistemas dinámicos en dos clases:

(1) Sistemas que tienen entropía topológica igual a cero.
(2) Sistemas que tienen entropía topológica positiva.

Esta separación es de suma importancia, puesto que algunos autores como L.S. Block y W. A. Coppel [**2**], definen un sistema caótico como aquel que tiene entropía topológica positiva.

4. Algunos teoremas sobre entropía topológica

La conjugación topológica es una herramienta que sirve para analizar sistemas dinámicos a partir de otros, cuyas propiedades conocemos.

Definición 4.1. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se dice que dichos sistemas son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $\phi : X \to Y$ tal que:*

$$\phi(f(x)) = g(\phi(x)), \text{ para cada } x \in X,$$

es decir, que $\phi \circ f = g \circ \phi$, o equivalentemente que el diagrama de la Figura 1, es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

FIGURA 1. Diagrama de conjugación topológica

De aquí en adelante será equivalente decir que los sistemas (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados, a decir que las funciones f y g son topológicamente conjugadas. También es importante mencionar que cuando dos funciones f y g son topológicamente conjugadas, decimos que son dinámicamente equivalentes.

El siguiente resultado es sumamente útil, pues el cálculo de la entropía de un sistema no es una tarea sencilla.

Teorema 4.2. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados. Se cumple que $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como (X, f) y (Y, g) son sistemas topológicamente congujados, existe un homeomorfismo $\phi : X \to Y$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$, o bien, $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Ya que ϕ es un homeomorfismo, $\phi(\mathcal{U})$ es una cubierta abierta para X y $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Además, se puede probar por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\phi \circ f \circ \phi^{-1})^n = \phi \circ f^n \circ \phi^{-1}$, por lo cual:

$$\begin{aligned}
h(g, \phi(\mathcal{U})) &= h(\phi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(\mathcal{U})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1} \circ \phi^{-1})(\phi(\mathcal{U})) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n} \circ \phi^{-1})(\phi(\mathcal{U})))}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1})(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n})(\mathcal{U}))}{n}.
\end{aligned}$$

Luego, de la Proposición 2.4, parte (2), y del Teorema 3.3, parte (3) , tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(g, \phi(\mathcal{U})) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U}) \vee (\phi \circ f^{-1})(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee (\phi \circ f^{-n})(\mathcal{U}))}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n}(\mathcal{U}))}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-n}(\mathcal{U}))}{n} \\
&= h(f, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Hemos probado que $h(g, \phi(\mathcal{U})) = h(f, \mathcal{U})$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$. Por lo tanto $h_{top}(g) = h_{top}(f)$. □

Es importante mencionar que el Teorema 4.2, no nos dice que la entropía sea una propiedad dinámica, pues la entropía no es una propiedad como tal de un sistema, a lo que nos referimos con decir que es una propiedad dinámica es que la entropía de sistemas topológicamente conjugados es la misma. Lo que sí resulta una propiedad dinámica es si la entropía es o no positiva. Considerando que lo que nos interesa es este hecho, lo presentamos como corolario del Teorema 4.2, en el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados. Se cumple que $h_{top}(f) > 0$ si y sólo si $h_{top}(g) > 0$.*

Si (X, f) es un sistema dinámico, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, (X, f^n) es también un sistema dinámico, por lo cual, podemos pensar en calcular su entropía y ya que este último depende del sistema original (X, f), podemos esperar lo mismo de su entropía. El siguiente resultado muestra en qué forma la entropía del sistema (X, f^n), depende de la entropía del sistema (X, f).

Teorema 4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $h_{top}(f^k) = k h_{top}(f)$.*

Demostración: Sea $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_f^k)_{f^k}^n &= \mathcal{U}_f^k \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{U}_f^k) \vee (f^k)^{-2}(\mathcal{U}_f^k) \vee \cdots \vee (f^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}_f^k) \\
&= \mathcal{U}_f^k \vee (f^{-k})(\mathcal{U}_f^k) \vee (f^{-2k})(\mathcal{U}_f^k) \vee \cdots \vee (f^{-(n-1)k})(\mathcal{U}_f^k) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee (f^{-k}) \left(\bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \right) \vee \cdots \vee (f^{-(n-1)k}) \left(\bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \right) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-(k+j)}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-((n-1)k+j)}(\mathcal{U}) \\
&= \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{j=k}^{2k-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \bigvee_{j=(n-1)k}^{nk-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \\
&= \bigvee_{j=0}^{nk-1} f^{-j}(\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{U}_f^{nk}.
\end{aligned}$$

Así, por definición de entropía, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
h_{top}(f^k) &\geq h(f^k, \mathcal{U}_f^k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H((\mathcal{U}_f^k)_{f^k}^n)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{n} \\
&= k \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{nk} \\
&= kh(f, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Por lo que $h_{top}(f^k) \geq kh(f,\mathcal{U})$. Luego $h_{top}(f^k) \geq kh_{top}(f)$. Por otro lado, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$, se cumple $\mathcal{U}_{f^k}^n \prec \mathcal{U}_f^{nk}$, pues:

$$\{(f^k)^{-j}(\mathcal{U}) : \ j \in \{1, \ldots, n-1\}\} \subseteq \{f^{-i}(\mathcal{U}) : \ i \in \{1, \ldots, nk-1\}\}.$$

Así, de la Proposición 3.3, $H(\mathcal{U}_{f^k}^n) \leq H(\mathcal{U}_f^{nk})$. Luego:

$$\begin{aligned}
h(f^k, \mathcal{U}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_{f^k}^n)}{n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{n} \\
&= k \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{U}_f^{nk})}{nk} \\
&= kh(f, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Por lo que, $h(f^k, \mathcal{U}) \leq kh(f, \mathcal{U})$, para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Por lo tanto $h_{top}(f^k) \leq kh_{top}(f)$. $\square$

El Teorema 4.4, nos permite calcular la entropía de (X, f^n), para cada n, si se conoce la entropía de (X, f) y viceversa. Si se conoce la entropía de (X, f^n) para algún n, con ello podremos obtener la entropía de (X, f).

Ahora probamos un resultado más de sucesiones, que es útil para demostrar otro teorema interesante sobre la entropía.

Lema 4.5. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales que cumplen que $a_n, b_n \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si ocurre que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{n} = a \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{\log(b_n)}{n} = b,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n + b_n)}{n} = \max\{a, b\}.$$

Demostración: Sea $c > a, b$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\frac{\log(a_n)}{n} < c$ y $\frac{\log(b_n)}{n} < c$. Sea $n \geq N$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b_n \leq a_n$. Así, dado que el logaritmo es una función creciente:

$$\log(a_n + b_n) \leq \log(a_n + a_n) = \log(2a_n) = \log(a_n) + \log(2) \leq cn + \log(2).$$

Luego $\frac{\log(a_n+b_n)}{n} \leq c + \frac{\log(2)}{n}$, por lo que existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n+b_n)}{n} = l$ y $l < c$. Supongamos que $l < a$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\frac{\log(a_n+b_n)}{n} < a$, pero $\frac{\log(a_n)}{n} \leq \frac{\log(a_n+b_n)}{n}$, lo cual implica que $a = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{n} < a$. Esto último es una contradicción. Esto prueba que $a \leq l$ y similarmente $b \leq l$. Hemos probado que $a, b \leq l < c$. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n+b_n)}{n} = \max\{a, b\}$. □

El siguiente resultado muestra que la entropía calculada con respecto a subconjuntos +invariantes del espacio es siempre menor que la entropía en el espacio completo.

Teorema 4.6. *Sean (X, f) un sistema dinámico, X_1, X_2 subconjuntos cerrados de X +invariantes bajo f tales que $X = X_1 \cup X_2$. Se cumple que:*

$$h_{top}(f) = \max\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\}$$

donde $f_1 = f|_{X_1}$ y $f_2 = f|_{X_2}$.

Demostración: Sea $i \in \{1, 2\}$. Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, definimos:

$$\mathcal{U}_i = \{U \cap X_i : \ U \in \mathcal{U}\},$$

la cual es una cubierta abierta para X_i que además cumple que $f_i^{-1}(\mathcal{U}_i) = (f^{-1}(\mathcal{U}))_i$. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X, para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $U \cap X_i \subseteq U$, por lo cual $N(\mathcal{U}_i) \leq N(\mathcal{U})$. Si además consideramos otra cubierta abierta $\mathcal{V}$ para X, también tenemos que $(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})_i = \mathcal{U}_i \vee \mathcal{V}_i$.

Sea $\mathcal{V}$ cubierta abierta para X_i. Pongamos:

$$\mathcal{U} = \{V \cup (X \setminus X_i) : \ V \in \mathcal{V}\},$$

luego $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X y $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}$.

Así, por todo lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k}(\mathcal{V})\right) &= N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k}(\mathcal{U}_i)\right) = N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_i\right) \\ &= N\left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right)_i\right) \leq N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right). \end{aligned}$$

Así, $H((\mathcal{U}_i)^n_{f_i}) \leq H(\mathcal{U}^n_f)$ y en consecuencia $h(f_i, \mathcal{U}_i) \leq h(f, \mathcal{U})$. Y ya que esto es para una cubierta arbitraria, se deduce que $h_{top}(f_i) \leq h_{top}(f)$. Por lo tanto:

$$\text{máx}\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\} \leq h_{top}(f).$$

Por otro lado, dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para X:

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U}) = \bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_1 \cup \bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_2.$$

Se tiene que:

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right) \leq N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_1\right) + N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U}))_2\right);$$

luego:

$$\log\left(N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathcal{U})\right)\right) \leq \log\left(N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U})_1\right) + N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k}(\mathcal{U})_2\right)\right);$$

Con esto, aplicando el Lema 4.5, obtenemos que

$$h(f, \mathcal{U}) \leq \text{máx}\{h(f_1, \mathcal{U}_1), h(f_2, \mathcal{U}_2)\},$$

y por lo tanto $h_{top}(f) = \text{máx}\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\}$. □

Hasta aquí, hemos visto resultados que nos ayudan a calcular la entropía de sistemas derivados de (X, f), siempre y cuando conozcamos la entropía de (X, f). Para poder calcular la entropía de manera explícita, necesitamos primero de algunas herramientas que faciliten el cálculo.

Definición 4.7. *Sea X un espacio métrico. La sucesión $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas para X es un refinamiento de cubiertas si:*
(1) $\mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_{n+1}$.
(2) Para cada $\mathcal{V}$ cubierta abierta para X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}_n$.

Proposición 4.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si la sucesión $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas para X es un refinamiento de cubiertas, entonces:*

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} h(f, \mathcal{U}_n).$$

Demostración: Por definición de entropía:

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f, \mathcal{U}) : \ \mathcal{U} \text{ es cubierta abierta para } X\}.$$

Pongamos $\alpha = \sup\{h(f, \mathcal{U}_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Como $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_n$. De la Proposición 3.8, parte (2), $h(f, \mathcal{U}) \leq h(f, \mathcal{U}_n)$, por lo que $h(f, \mathcal{U}) \leq \alpha$. Así, $h_{top}(f) \leq \alpha$.

Por otro lado,

$$\{h(f, \mathcal{U}_n) : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{h(f, \mathcal{U}) : \ \mathcal{U} \text{ es cubierta abierta para } X\}.$$

Con lo que, $\alpha \leq h_{top}(f)$. Por lo tanto, $h_{top}(f) = \alpha$. □

Definición 4.9. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. El diámetro de la cubierta $\mathcal{U}$, se define y denota como sigue:*

$$d(\mathcal{U}) = \sup\{d(U) | \ U \in \mathcal{U}\}.$$

Corolario 4.10. *Dado (X, f) un sistema dinámico, si $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cubiertas abiertas para X que cumple que:*

(1) $\mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} d(\mathcal{U}_n) = 0$;

entonces $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas para X.

Demostración: De acuerdo a la Definición 4.7, solo resta probar la segunda propiedad de los refinamientos. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Por [**12**, Lema 27.5], existe $l_{\mathcal{U}} > 0$ tal que, si $A \subseteq X$ cumple que $d(A) < l_{\mathcal{U}}$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ de tal forma que $A \subseteq U$. Como $\lim_{n\to\infty} d(\mathcal{U}_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathcal{U}_N) l_{\mathcal{U}}$. Así, dado $U' \in \mathcal{U}_N$, $d(U') l_{\mathcal{U}}$. Esto implica que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U' \subseteq U$. Por lo tanto $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_N$. ☐

Como hemos visto, pese a que la entropía topológica está definida en espacios métricos, la métrica del espacio, no aparece de manera explícita en ninguna de las definiciones que hemos dado hasta este punto. De esta manera, la entropía topológica se puede definir en espacios más generales. En realidad es suficiente con considerar un espacio topológico Hausdorff [2] y compacto. Sin embargo, para propósitos de nuestro trabajo, es suficiente considerar espacios métricos.

Trabajar en espacios métricos tiene sus ventajas, pues podemos definir la entropía topológica en términos de la métrica, lo que facilita algunos cálculos. Pero sobre todo, involucrar la métrica, es útil para comprender mejor qué es lo que en realidad mide la entropía topológica en un sistema. Para lograrlo, requerimos definir una familia de métricas para el espacio (X, d) a partir de la métrica d.

Definición 4.11. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$:*

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

La función d_n es una métrica para X, la prueba se puede hallar en [**4**].

Dados un sistema diámico (X, f), $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{B}(n, \epsilon)$ como la cubierta abierta formada por las bolas abiertas de radio menor que ϵ bajo la métrica d_n. Definimos $cov(n, \epsilon, f) = N(\mathcal{B}(n, \epsilon))$.

Proposición 4.12. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que:*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Demostración: Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_k$ la cubierta abierta formada por las bolas abiertas de radio menor que $\frac{1}{n}$. Por el Corolario 4.10, se tiene que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas. Por lo cual:

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} h(f, \mathcal{U}_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{\log(cov(k, \frac{1}{n}, f))}{k}.$$

Lo cual implica que:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Lo cual concluye la prueba. ☐

[2] La definición de espacio de Hausdorff se puede hallar en el Capítulo 2 de [**12**].

Definición 4.13. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es un conjunto:*

(1) (n, ϵ)-abarcador bajo f si, para cada $x \in X$, existe $y \in A$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$.

(2) (n, ϵ)-separado bajo f si, para cada $x, y \in A$ tales que $x \neq y$, se tiene que $d_n(x, y) \geq \epsilon$.

Además, span(n, ϵ, f) denota la mínima cardinalidad de un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f y sep(n, ϵ, f) la máxima cardinalidad de un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f.

Veamos un ejemplo. Consideremos el intervalo I con la métrica:

$$d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|).$$

Sea $f : I \to I$ la función definida, para cada $x \in I$, como:

$$f(x) = (2x) \mod 1 = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 2x < 1, \\ \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 2x \geq 1. \end{cases}$$

Esta función f se le conoce como *función duplicadora.*

Lema 4.14. *Sea f la función duplicadora. Se cumple que:*

$$\textit{Si } d(x, y) \leq \frac{1}{4}, \textit{ entonces } d(f(x), f(y)) = 2d(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $d(x, y) = |x - y|$ si $|x - y| \leq \frac{1}{2}$. Sean $x, y \in I$ tales que $d(x, y) \leq \frac{1}{4}$, esto es que $|x - y| \leq \frac{1}{4}$. Luego, por definición de f:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d((2x) \mod 1, (2y) \mod 1) \\ &= \min(|(2x - 2y) \mod 1|, 1 - |(2x - 2y) \mod 1|). \end{aligned}$$

Sin embargo, $|2x - 2y| \leq \frac{1}{2}$, por lo que $(2x - 2y) \mod 1 = 2x - 2y$. Así:

$$d(f(x), f(y)) = 2|x - y| = 2d(x, y).$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto:

$$S_k = \left\{ \frac{i}{2k} \; |i \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq i < 2^k - 1 \right\}.$$

Ejemplo 4.15. *Sea f la función duplicadora. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$. Sea $k \geq 2$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} \leq \epsilon < \frac{1}{2^k}$. Note que para cada $x \in I$, existe $i \in \{0, \ldots, 2^{n+k} - 1\}$ tal que:

$$x \in \left[\frac{i}{2^{n+k}}, \frac{i+1}{2^{n+k}} \right).$$

Sea $y = \frac{i}{2^{n+k}}$. Así, $y \in S_{n+k}$ y:

$$d(x, y) \leq d\left(\frac{i+1}{2^{n+k}}, y \right) = d\left(\frac{i+1}{2^{n+k}}, \frac{i}{2^{n+k}} \right) = \frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Por lo cual, del Lema 4.14:

$$d(f(x), f(y)) = 2d(x, y) = \frac{2}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Aplicando nuevamente el Lema 4.14, obtenemos:

$$d(f^2(x), f^2(y)) = 2d(f(x), f(y)) = \frac{2^2}{2^{n+k}}.$$

De este modo si aplicamos el Lema 4.14, j veces, para $0 \leq j < n$, tenemos:

$$d(f^j(x), f^j(y)) = 2^j d(x, y) = \frac{2^j}{2^{n+k}} \leq \frac{2^n - 1}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^{k+1}} \leq \epsilon.$$

Hemos probado que para cada $x \in I$, existe $y \in S_{n+k}$ tal que:

$$\text{máx}\{d(f^j(x), f^j(y)) | \ 0 \leq j < n\} = d_n(x, y) < \epsilon,$$

esto es, el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f. □

De manera similar al Ejemplo 4.15, se puede verificar el siguiente.

Ejemplo 4.16. *Sea f la función duplicadora. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto S_{n-1+k} es un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f.*

Proposición 4.17. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$cov(n, 2\epsilon, f) \leq span(n, \epsilon, f) \leq sep(n, \epsilon, f) \leq cov(n, \epsilon, f).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$. Sea $A \subseteq X$ un conjunto (n, ϵ)-abarcador de mínima cardinalidad. Luego:

$$X \subseteq \bigcup_{y \in A} B_n(y, \epsilon),$$

donde $B_n(y, \epsilon)$ denota la bola abierta con centro en y y radio ϵ considerando la métrica d_n. Además, se cumple que $d(B_n(y, \epsilon)) \leq 2\epsilon$, por lo cual:

$$cov(n, 2\epsilon, f) \leq |A| = span(n, \epsilon, f),$$

lo que prueba la primera desigualdad. Ahora sea B un conjunto (n, ϵ)-separado de máxima cardinalidad, esto es, que no podemos agregar más puntos a B de tal modo que siga siendo un conjunto (n, ϵ)-separado. Luego, para cada $x \in X \setminus B$ y cada $y \in B$, no puede ocurrir que $d_n(x, y) \geq \epsilon$. Por lo tanto, para cada $x \in X$, existe $y \in B$ tal que $d_n(x, y) < \epsilon$. Lo que nos lleva a que B es un conjunto (n, ϵ)-abarcador. Luego:

$$span(n, \epsilon, f) \leq |B| = sep(n, \epsilon, f),$$

lo que prueba la segunda desigualdad. Finalmente supongamos que $N(\mathcal{B}(n, \epsilon)) < |B|$. Luego existe $x \in X$, tal que $B_n(x, \epsilon)$ contiene más de un punto de B. Así, existen al menos dos puntos en B a distancia menor que ϵ, lo cual es una contradicción pues B es un conjunto (n, ϵ)-separado. Por lo tanto, debe ocurrir que $|B| \leq N(\mathcal{B}(n, \epsilon))$, lo que prueba la última desigualdad. □

El siguiente resultado muestra una equivalencia de la definición entropía topológica, en términos de los conjuntos (n, ϵ)-abarcador y (n, ϵ)-separado. Los autores Bowen y Dinaburg en 1973 [**3**], introdujeron esta caracterización como una forma de definir la entropía topológica.

Teorema 4.18. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que:*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\log(sep(n, \epsilon, f))}{n} = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\log(span(n, \epsilon, f))}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN: De la Proposición 4.12, tenemos que:

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(cov(n,\epsilon,f))}{n}.$$

Así, al considerar las desigualdades de la Proposición 4.17, podemos acotar los límites, con lo que queda demostrado el resultado. □

La interpretación que nos brinda esta nueva forma de analizar la entropía es la siguiente. Como X es compacto, $span(n,\epsilon,f)$ es un número finito, el cual representa el número de órbitas de longitud n, distinguibles a una distancia ϵ. Esto es, suponiendo que no podemos distinguir puntos que están a una distancia menor a ϵ. Así, la entropía representa el crecimiento exponencial (al utilizar el logaritmo) del número de órbitas distinguibles conforme pasa el tiempo.

5. Calculando la entropía topológica

Ahora vemos los primeros ejemplos de cálculo explícito de la entropía topológica.

Ejemplo 5.1. *En un espacio métrico compacto X, la identidad tiene entropía cero.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $I_d : X \to X$ la función identidad en X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}^n_{I_d} = \mathcal{U}$. Luego:

$$h(I_d,\mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(U^n_{I_d})}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{H(\mathcal{U})}{n} = H(\mathcal{U})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $h_{top}(I_d) = 0$. □

Teorema 5.2. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces $h_{top}(f) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U}_m$ la cubierta formada por todos los subconjuntos abiertos de X con diámetro menor que $\frac{1}{m}$. Como f es una isometría, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(\mathcal{U}_m) \subseteq \mathcal{U}_m$, por lo cual, de la Proposición 2.3, se tiene que $\mathcal{U}^n_m \prec \mathcal{U}_m$. Con todo lo anterior, por el Corolario 4.10, obtenemos que $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas. Luego de la Proposición 4.8, se tiene que $h_{top}(f) = \lim_{m\to\infty} h(f,\mathcal{U}_m)$. Sin embargo, para cada $m,n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}^n_m \prec \mathcal{U}_m$, por lo cual, del Teorema 3.3, $H(\mathcal{U}^n_m) \leq H(\mathcal{U}_m)$. Así:

$$h(f,U_m) = \lim_{n\to\infty}\frac{H(\mathcal{U}^n_m)}{n} \leq H(\mathcal{U}_m)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $h_{top}(f) = 0$. □

El Teorema 5.2, nos proporciona una gran cantidad de ejemplos de funciones con entropía topológica igual a cero. A continuación describimos uno de estos ejemplos, el cual es un sistema que está definido en un subconjunto de los números complejos. Sea $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in I\}$, el círculo unitario en los complejos. Consideramos a S^1 con la métrica usual de $\mathbb{C}$ restringida a S^1. Con esta métrica S^1 es un conjunto compacto. Para más detalles sobre la dinámica existente en S^1 consulte [**10, 6**].

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional. La función *rotación irracional* se denota por $R_\theta : S^1 \to S^1$ y se define como:

$$R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Se puede considerar la función rotación en general partiendo de cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Sin embargo, cuando se consideran números irracionales, la función resultante tiene propiedades dinámicas muy interesantes.

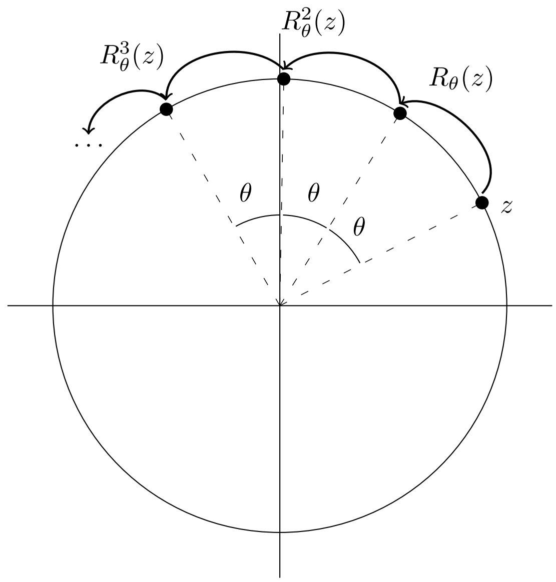


FIGURA 2. Función rotación irracional

Hay que notar que la Figura 2, no muestra la gráfica de R_θ pues se requiere para ello un espacio homeomorfo a $\mathbb{C}^2$. Sin embargo, la Figura 2, muestra el resultado de aplicar la función R_θ al punto z. En este sentido, $R(z)$ resulta de la rotación de z según el ángulo θ sobre S^1. Para ser más precisos, consideremos $z \in S^1$, luego existe $\alpha \in I$ tal que $z = e^{2\pi i\alpha}$. Así:

$$R_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}.$$

Más aún, utilizando la fórmula de Moivre[3], podemos deducir la forma general de las iteraciones de R_θ. Para cada $z \in S^1$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$R_\theta^n(z) = \left(e^{2\pi i\theta}\right)^n z = e^{2\pi in\theta}z.$$

Es decir, aplicar n veces la función R_θ al punto z, es el resultado de la rotación de z según el ángulo $n\theta$ sobre S^1.

Una de las primeras caraterísticas que resalta de esta función es que la distancia entre cualquier punto en S^1 y su imagen bajo la función R_θ es constante.

Proposición 5.3. *La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ cumple que para cada $z \in S^1$, $d(z, R_\theta(z))$ es constante.*

[3]La fórmula de Moivre (nombraba así en honor a Abraham de Moivre), nos dice cómo se comporta la potencia de los números complejos. De manera formal: $\left(re^{2\pi i\theta}\right)^n = r^n e^{2\pi in\theta}$.

Demostración: En efecto. Sea $z \in S^1$. Luego:

$$\begin{aligned} d(z, R_\theta(z)) &= ||z - e^{2\pi i\theta} z|| \\ &= ||z(1 - e^{2\pi i\theta})|| \\ &= ||z||||1 - e^{2\pi i\theta}|| \\ &= ||1 - e^{2\pi i\theta}||. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(z, R_\theta(z))$ es constante. □

De forma muy similar, haciendo uso de propiedades de la norma en $\mathbb{C}$, se prueba el siguiente resultado, que muestra una de las propiedades más importantes que cumple la rotación irracional.

Proposición 5.4. *La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ es una isometría.*

Demostración: Sean $z, w \in S^1$. Luego:

$$\begin{aligned} d(R_\theta(z), R_\theta(w)) &= ||R_\theta(z) - R_\theta(w)|| \\ &= ||e^{2\pi i\theta} z - e^{2\pi i\theta} w|| \\ &= ||e^{2\pi i\theta}||||z - w|| \\ &= ||z - w||. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $d(R_\theta(z), R_\theta(w)) = d(z, w)$. Lo que prueba que R_θ es una isometría. □

Recordemos que las isometrías juegan un papel especial en varios de los conceptos que hemos visto. Por ejemplo que todas las isometrías son equicontinuas y tienen entropía igual a cero.

Proposición 5.5. *La función rotación irracional $R_\theta : S^1 \to S^1$ cumple que $h_{top}(R_\theta) = 0$.*

Demostración: La Proposición 5.4, nos dice que la función R_θ es una isometría. Luego, de la Proposición 5.2, se tiene que $h_{top}(R_\theta) = 0$. □

Ahora mostramos algunos ejemplos de sistemas dinámicos cuya entropía topológica es positiva [**1**].

Proposición 5.6. *Consideremos el intervalo I con la métrica $d(x, y) = \text{mín}(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Sea $f : I \to I$ la función duplicadora. Esto es, $f(x) = (2x) \mod 1$. Se tiene que*

$$h_{top}(f) = \log(2).$$

Demostración: Dado $n \in \mathbb{N}$, por el Ejemplo 4.15, sabemos que el conjunto S_{n+k} es un conjunto (n, ϵ)-abarcador bajo f. Además $|S_{n+k}| = 2^{n+k}$, por lo cual $span(n, \epsilon) \leq 2^{n+k}$. Luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(span(n, \epsilon, f)) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n + k)\log(2)}{n} = \log(2).$$

Similarmente, considerando ahora el Ejemplo 4.16, el conjunto S_{n-1+k} es un conjunto (n, ϵ)-separado bajo f. Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(sep(n, \epsilon, f)) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{(n - 1 + k)\log(2)}{n} = \log(2).$$

Finalmente, acotando los límites y en virtud de Teorema 4.18, se tiene que $h_{top}(f) = \log(2)$. $\square$

Sea Σ_2 el conjunto de las sucesiones $a_0a_1a_2\ldots$ tales que $a_n \in \{0,1\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Sea $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in \Sigma_2$:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Con la métrica d, Σ_2 es un espacio métrico compacto. La prueba se puede hallar en [**5**]. La función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, definida por:

$$\sigma(a_0a_1a_2\ldots) = a_1a_2a_3\ldots$$

se le conoce como *función shift*.

Proposición 5.7. *La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ cumple que $h_{top}(\sigma) = \log(2)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{\{x \in \Sigma_2 | x_0 = 0\}, \{x \in \Sigma_2 | x_0 = 1\}\}$. Se tiene que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Σ_2. Consideremos la sucesión $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\mathcal{U}_p = \bigvee_{k=-p}^{p} \sigma^k(\mathcal{U}), \text{ para cada } p \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas. Como la función σ es un homemorfismo, es claro que $\mathcal{U}_p$ es una cubierta abierta para cada $p \in \mathbb{N}$. También es evidente de la definición que $\mathcal{U}_p \prec \mathcal{U}_{p+1}$. Sean $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Σ_2 y $l_{\mathcal{V}}$ el número de Lebesgue de $\mathcal{V}$ ([**12**, Lema 27.5]). Si tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < l_{\mathcal{V}}$, se tiene que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}_p$. Con esto se prueba que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas abiertas.

Sea $p \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}_p$, de la Proposición 3.8, se sigue que $h(\sigma, \mathcal{U}) \leq h(\sigma, \mathcal{U}_p)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
h(\sigma, \mathcal{U}_p) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k}(\mathcal{U}_p)\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p}^{p} \sigma^k(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{k=-p-1}^{p-1} \sigma^k(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee \bigvee_{k=-p-n+1}^{p-n+1} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{p} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n},
\end{aligned}$$

donde la primera y segunda igualdad se dan por definición y la tercera igualdad proviene del Teorema 3.3 parte (2).

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{p} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{-p} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=-n+1}^{0} \sigma^k(\mathcal{U})\right)}{n} \\
&= h(\sigma, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(\sigma, \mathcal{U}) = h(\sigma, \mathcal{U}_p)$. Además, se tiene que $N(\bigvee_{k=0}^{-n+1} \sigma^{-k}(\mathcal{U})) = 2^n$, con lo que $h(\sigma, \mathcal{U}) = \log(2)$. Luego $h(\sigma, \mathcal{U}_p) = \log(2)$, para cada $p \in \mathbb{N}$ y dado que $\{\mathcal{U}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de cubiertas, de la Proposición 4.8 se tiene que $h_{top}(\sigma) = \log(2)$. $\square$

Por lo tanto, la función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tiene entropía positiva.

Ahora presentamos la función *shift complemento* que es otra función definida en Σ_2. La función denotada por $\sigma' : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es la *función shift complemento* y se define como:

$$\sigma'(a_0 a_1 a_2 \ldots) = a'_1 a'_2 a'_3 \ldots,$$

donde a'_n es el complemento de a_n en $\{0, 1\}$.

En primer lugar, veamos que σ' es topológicamente conjugada a σ. Con este objetivo, consideremos la función $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definida por:

$$\phi(a_0 a_1 a_2 \ldots) = (a'_0 a'_1 a'_2 \ldots),$$

donde a'_n es el complemento de a_n en $\{0, 1\}$.

Según la definición de la función ϕ, es sencillo convencerse de que $\phi^{-1} = \phi$, es decir, que ϕ es su propia inversa. Por lo cual, para probar que ϕ es un homeomorfismo, basta con verificar que ϕ es continua.

Proposición 5.8. *La función $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in \Sigma_2$. Veamos que ϕ es continua en a. Sea $\epsilon > 0$. Veamos primero que para cada $b \in \Sigma_2$, $|a_n - b_n| = |a'_n - b'_n|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos dos casos:

Caso (1): $a_n = b_n$. En este caso $a'_n = b'_n$, por lo cual $|a_n - b_n| = 0 = |a'_n - b'_n|$.
Caso (2): $a_n \neq b_n$. En este caso $a'_n \neq b'_n$, por lo cual $|a_n - b_n| = 1 = |a'_n - b'_n|$.

De los Casos (1) y (2) tenemos que $|a_n - b_n| = |a'_n - b'_n|$ para cada $b \in \Sigma_2$. Pongamos $\delta = \epsilon$. Sea $b \in \Sigma_2$ tal que $d(a, b) < \delta$, luego:

$$\begin{aligned}
d(\phi(a), \phi(b)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a'_n - b'_n|}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{n+1}} \\
&= d(a, b).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función ϕ es una isometría. Lo que prueba que ϕ es continua. $\square$

Resta verificar que efectivamente σ y σ' son topológicamente conjugadas mediante el homeomorfismo ϕ.

Proposición 5.9. *Las funciones σ y σ' son topológicamente conjugadas mediante el homeomorfismo $\phi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in \Sigma_2$. Luego:

$$\begin{aligned}(\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1})(a) &= (\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1})(a_0a_1a_2\ldots)\\ &= (\phi \circ \sigma')(a'_0a'_1a'_2\ldots)\\ &= \phi(a'_1a'_2a'_3\ldots)\\ &= (a_1a_2a_3\ldots)\\ &= \sigma(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \circ \sigma' \circ \phi^{-1} = \sigma$. Dado que ϕ es un homeomorfismo, esto prueba que σ y σ' son topológicamente conjugadas. ☐

La Proposición 5.9, nos dice que σ y σ' son topológicamente conjugadas. Por lo cual, por Teorema 4.2, se tiene que $h_{top}(\sigma') = log(2)$. Por lo tanto, tenemos la siguiente:

Proposición 5.10. *La función shift complemento $\sigma' : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ cumple que $h_{top}(\sigma') = log(2)$.*

Así, la función shift complemento $\sigma' : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tiene entropía positiva.

La demostración del siguiente ejemplo la omitimos. La prueba se puede hallar en [**1**].

Ejemplo 5.11. *Sea $GL_2(\mathbb{Z})$ es el grupo general lineal con entradas en los enteros y $A \in GL_2(\mathbb{Z})$, con valores propios λ y λ^{-1} tales que $|\lambda| > 1$. Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por $f_A([x]) = [Ax]$, el automorfismo del toro correspondiente a la matriz A. Se tiene que:*

$$h_{top}(f_A) = \log(|\lambda|).$$

Ahora nos dedicamos a estudiar a la función tienda y analizamos algunas de sus propiedades. El análisis detallado de la función tienda lo podemos hallar en [**8**]. Comencemos con la definición formal de esta función.

Sea $T : I \to I$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2}, \\ \\ 2 - 2x & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La función T es conocida como *función tienda* y es una de las funciones más estudiada en el campo de los sistemas dinámicos discretos. El nombre de "tienda" se debe a la forma que tiene la gráfica de la función T. Como podemos observar en la Figura 3, tiene la forma de una tienda de acampar.

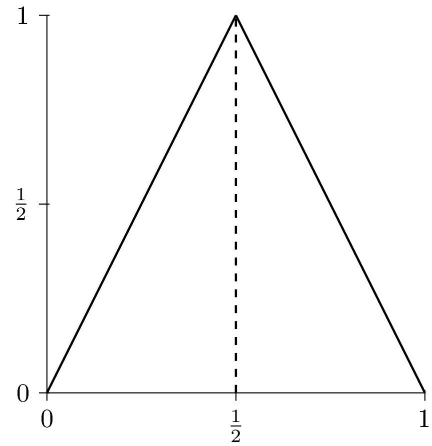


FIGURA 3. Gráfica de la función tienda

Ahora analizamos la entropía de T. El siguiente resultado se puede hallar en la Proposición 17.6 de [**8**].

Proposición 5.12. *La función tienda $T : I \to I$ cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_{top}(T^n) \geq \log(2^{n-1})$.*

Ahora probamos que la entropía topológica de la función tienda es positiva.

Proposición 5.13. *La función tienda $T : I \to I$ tiene entropía topológica positiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $n \in \mathbb{N}$. La Proposición 5.12, nos dice que:

$$h_{top}(T^n) \geq \log(2^{n-1}).$$

Por otro lado, del Teorema 4.4, se tiene que $h_{top}(T^n) = nh_{top}(T)$. Además, considerando que $\log(2^{n-1}) = (n-1)\log(2)$ obtenemos:

$$h_{top}(T) \geq \frac{n-1}{n}\log(2).$$

Esto último se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual, al tomar el límite cuando n tiende a infinito obtenemos que:

$$h_{top}(T) \geq \log(2).$$

Por lo tanto, la entropía topológica de T es positiva. □

Como podemos observar, en la Proposición 5.13, sólo se prueba que la entropía de T es positiva, pero no se calcula de manera explícita. Lo último no es necesario pues nuestro interés está en si la entropía es o no positiva. Sin embargo, en el Ejemplo 2.7 de [**11**], se calcula de manera explicita que $h_{top}(T) = \log(2)$. Más aún, en [**11**], se presenta una forma de calcular en general la entropía de funciones lineales a trozos.

Bibliografía

[1] R. Adler, A. Konheim y M. McAndrew, Topological entropy, *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2): 309-319, 1965.

[2] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Springer, 2006.

[3] R. Bowen, Topological entropy for noncompact sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 184: 125-136, 1973.

[4] K. Butt, An Introduction to Topological Entropy, 2014.

[5] R. B. Hena, Chaotic features of the generalized shift map and the complemented shift map, *Barisal University*, 2017.

[6] G. Contreras, *Ejemplos de Sistemas Dinámicos: un curso introductorio*, CIMAT, P. O. Box 402, 36.000 Guanajuato Gto, México, 2006.

[7] A. Katok, Fifty years of entropy in dynamics: 1958–2007, *Journal of Modern Dynamics*, 1(4): 545, 2007.

[8] J. King y H. Méndez, Sistemas dinámicos discretos, *Publicaciones de la Facultad de Ciencias*, UNAM, 2014.

[9] J. Li y X. D. Ye, Recent development of chaos theory in topological dynamics, *Acta Mathematica Sinica, English Series,* Vol. 32, (2016), 83–114, Springer.

[10] A. Luque, *Introducción a la dinámica de aplicaciones del círculo y problemas relacionados*, Departament de Matemaática Aplicada I, Universitat Politécnica de Catalunya, 2009.

[11] D. Martínez-González y G. González-Blé, Entropía topológica de funciones multimodales, *Journal of Basic Sciences*, 2(4), 2016.

[12] J.R. Munkres, *Topología*, España Prentice Hall. 2000.

[13] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer Science & Business Media, 2000.

Correos electrónicos:

`franco@mixteco.utm.mx` (Franco Barragán),
`isis@mixteco.utm.mx` (Daniela I. Flores).

Capítulo 6

Más nociones relacionadas con la transitividad topológica

Anahí Rojas, Aura L. Kantún-Montiel, José N. Méndez-Alcocer
Víctor M. Méndez-Salinas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción

Este capítulo expositorio se encuentra ubicado dentro de dos ramas de la Matemática: Topología y Sistemas Dinámicos. Un sistema dinámico es una pareja formada por un espacio topológico X (espacio fase) y una función $f : X \to X$, y es denotado por (X, f). Dependiendo de las propiedades del espacio fase o de la función, se han definido y clasificado tipos de sistemas dinámicos (clases de funciones dinámicas). Dentro de los sistemas dinámicos más conocidos y estudiados hoy en día se encuentran los siguientes: exactos, mezclantes, transitivos, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos, minimales e irreducibles [**8, 12, 14**]. El estudio de estos sistemas ha cobrado tanta popularidad que ha sido llevado a otras áreas de la matemática, como por ejemplo a la teoría de hiperespacios [**4, 10, 15**]. Además, estas clases de funciones han dado pie a la definición de otras: órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, TT_{++}, suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticas, totalmente minimales, dispersoras, Touhey y los F-sistemas [**2, 21, 9, 17**]. Dentro de la teoría de los sistemas dinámicos discretos resulta importante e interesante conocer las relaciones que existen entre los distintos tipos de sistemas.

En [**6**], F. Barragán y A. Rojas realizan un estudio detallado de las siguientes clases de funciones: exactas, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas, minimales, irreducibles, semiabiertas, turbulentas, órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, IN, TT y TT_{++}. En dicho artículo estudian relaciones que existen entre estas clases de funciones para un caso general (X espacio topológico y f cualquier función). Además, mediante la construcción de contraejemplos se verifica que estas contenciones entre clases de funciones son propias en su mayoría. Finalmente, se dan condiciones al espacio fase o a la función para obtener contenciones que no son posibles para el caso general. Siguiendo estas ideas, en el presente capítulo se introducen y se analizan más clases de funciones del tipo dinámicas: exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exactas, fuertemente transitivas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas. El trabajo está basado en algunas partes del artículo de E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, *Variations on the concept of topological transitivity* [**1**], del cuál hemos extraído algunos resultados y detallado sus demostraciones.

Para un mejor desarrollo de este capítulo, se ha distribuido su contenido en cinco secciones. En la Sección 2 se presentan los conceptos básicos necesarios para una completa comprensión del capítulo. En la Sección 3 se revisan algunos resultados preliminares que facilitarán el desarrollo de la Sección 5. En la Sección 4 se presentan las definiciones de las funciones exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exactas, fuertemente transitivas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas, se muestran relaciones entre ellas y relaciones de éstas con las clases de funciones estudiadas en [**6**]. Además, en esta sección también se analizan contraejemplos que demuestran que estas contenciones entre clases son propias. Finalmente, en la Sección 5 se revisan algunos resultados que se obtienen al pedir condiciones adicionales al espacio fase o a la función.

2. Preliminares

En esta sección presentamos la notación y conceptos básicos necesarios para un buen desarrollo de este capítulo.

Considerando un espacio topológico X y un subconjunto A de X, el interior y cerradura de A en X los denotamos por $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{cl}_X(A)$, respectivamente. Si no existe riesgo de confusión escribiremos simplemente $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{cl}(A)$. Como es usual, denotamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_+$ al conjunto de los números naturales, números enteros y números enteros no negativos, respectivamente.

Definición 2.1. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su* ***producto cartesiano*** *como el conjunto:*

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$ al conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ se le denota por X_1^m.

Definición 2.2. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, τ_i) un espacio topológico. La* ***topología producto*** *$\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \mathcal{X})$ se llama* ***espacio producto*** *de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{m}$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^{m} X_i$.*

Definición 2.3. *Sean m un entero mayor o igual que dos y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la* ***función producto*** *$\prod_{i=1}^{m} f_i : \prod_{i=1}^{m} X_i \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ como:*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1, \dots, x_m)) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \cdots = f_m$ *a la función* $\prod_{i=1}^m f_i$ *se le denota por* $f_1^{\times m}$.

Definición 2.4. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$. *La* ***bola abierta*** *con centro en* x *y radio* ϵ*, se define y denota por:*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Definición 2.5. *Sean* X *un espacio topológico y* E *un subconjunto de* X. *Se dice que* E *es* ***denso*** *en* X *si* $\mathrm{cl}(E) = X$.

A continuación se presenta una caracterización de conjunto denso que será fundamental para este capítulo, la prueba de este resultado se puede consultar en [**13**, pág. 173].

Teorema 2.6. *Sean* X *un espacio topológico y* $E \subseteq X$. *El conjunto* E *es denso si y sólo si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X*, se cumple que* $U \cap E \neq \emptyset$.

Definición 2.7. *Un* ***sistema dinámico*** *es una pareja formada por un espacio topológico* X *y una función* $f : X \to X$ *y lo denotamos por* (X, f).

Para referirse al sistema dinámico (X, f) generalmente se hace referencia únicamente a la función f.

Por otro lado, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k***-ésima iteración de*** f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). No es difícil ver que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$. Para un subconjunto A de X y k un entero, denotamos por $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geq 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, donde $k > 0$.

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de los sistemas dinámicos discretos es el de órbita de un punto, el cual presentamos a continuación.

Definición 2.8. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. La* ***órbita de un punto*** $\boldsymbol{x \in X}$ ***bajo*** $\boldsymbol{f}$*, denotada por* $\mathcal{O}(x, f)$*, es el conjunto* $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. *Esto es:*

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

La órbita de un punto puede llegar a ser un conjunto finito, denso o tener alguna otra propiedad. Estas propiedades van a depender fuertemente del punto x que se tome. Esto da pie a la definición de clases de puntos.

Definición 2.9. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* $x, y \in X$. *Se dice que* x *es:*

(1) ***punto fijo*** *de* f *si* $f(x) = x$.
(2) ***Punto periódico*** *de* f *si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(x) = x$. *El conjunto de puntos periódicos de* f *es denotado por* $Per(f)$.
(3) ***Punto transitivo*** *de* f *si* $\mathcal{O}(x, f)$ *es denso en* X. *El conjunto de todos los puntos transitivos de* f *es denotado por* $trans(f)$.
(4) ***Punto recurrente*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(x) \in U$.
(5) ***Punto casi-periódico*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{kl}(x) \in U$ *para todo* $k \geq 0$.
(6) ***Punto no errante*** *de* f *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$.

(7) ***Punto ω-límite de** y **bajo** f si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un entero positivo $l \geq k$ tal que $f^l(y) \in U$. El conjunto de puntos ω-límite de y bajo f, es denotado por $\omega(y, f)$ y es llamado **conjunto ω-límite de** y.*

Proposición 2.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Si x es un punto fijo de f, entonces x es un punto periódico de f.
(2) Si x es un punto periódico de f, entonces x es un punto casi-periódico de f.
(3) Si x es un punto casi-periódico de f, entonces x es un punto recurrente de f.
(4) Si x es un punto transitivo de f y f es continua, entonces x es un punto recurrente de f.
(5) Si x es un punto recurrente de f, entonces x es un punto no errante de f.

Demostración: La prueba de *(1)* se sigue directamente de la definición.
(2) Supongamos que x un punto periódico de f. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Sean U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $k \geq 0$. Puesto que $f^{kn}(x) = (f^n)^k(x) = x$, para cada $k \geq 0$, se tiene que x es un punto casi-periódico de f.
(3) Supongamos que x es un punto casi-periódico de f y sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kl}(x) \in U$ para todo $k \geq 0$. En particular, para $k = 1$, $f^l(x) \in U$. Por lo tanto, x es un punto recurrente de f.
(4) Supongamos que x es un punto transitivo de f y sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Puesto que f es continua, $\mathcal{O}(x, f) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. En consecuencia, existe $l_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{l_1}(x) \in f^{-1}(U)$. De aquí, $f^{l_1+1}(x) \in f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Por lo tanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x) \in U$ y así, x es un punto recurrente de f.
(5) Supongamos que x es un punto recurrente de f y sea U un subconjunto abierto no vacío de X tal que $x \in U$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(x) \in U$. En consecuencia, $f^l(x) \in f^l(U) \cap U$ y así, $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, x es un punto no errante de f. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{Transitivo} \arrow[d] & \\
\text{Fijo} \arrow[r] & \text{Periódico} \arrow[r] & \text{Casi-periódico} \arrow[r] & \text{Recurrente} \arrow[r] & \text{No errante}
\end{tikzcd}$$

Figura 1. Relaciones entre clases de puntos.

Sin embargo, los recíprocos no se cumplen en general.

Ejemplo 2.11. *Sean $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con la topología cofinita y $f : X \to X$ dada por*

$$f(0) = 0 \text{ y } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sean U un subconjunto abierto de X y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} \in U$. De aquí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq n$ tal que $U = \left\{\dfrac{1}{n_0 + l} : l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \cup V$, con V un *subconjunto finito de X. Notemos que $f^{(n_0-n)k}\left(\frac{1}{n}\right) \in U$, para cada $k \geq 0$. Por lo tanto, $\frac{1}{n}$ es un punto casi-periódico pero no es periódico.*

Ejemplo 2.12. *Sean $X = [0,1]$ con la topología usual y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x - \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

No es difícil verificar que $x = 1$ es un punto periódico pero no es fijo.

Ejemplo 2.13. *Sean $X = [0,1]$ con la topología usual y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si\ 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ x - \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que si U es un abierto en $[0,1]$ tal que $1 \in U$, entonces se cumple que $f^2(U) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, $x = 1$ es un punto no errante. Sin embargo, $x = 1$ no es recurrente ya que para el abierto $U = \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ se cumple que $f^n(1) \notin U$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.14. *Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.12. Claramente $x = 1$ es un punto recurrente pero no es transitivo.*

Ejemplo 2.15. *Sean $X = \{1,2,3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, X\}$ y $f : X \to X$ dada por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 3$. Se cumple que $x = 1$ es un punto recurrente pero no es casi-periódico.*

Definición 2.16. *Sean (X, f) un sistema dinámico y A y B subconjuntos de X. Se define el siguiente conjunto:*

$$n_f(A,B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}.$$

Definición 2.17. *Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $f : X \to X$ una función. Se dice que A es* ***+invariante*** *bajo f si $f(A) \subseteq A$, A es* ***−invariante*** *bajo f si $f^{-1}(A) \subseteq A$, A es* ***débilmente −invariante*** *bajo f si $A \subseteq f(A)$ y A es* ***invariante*** *bajo f si $f(A) = A$.*

Observación 2.18. *Sea (X, f) un sistema dinámico. El conjunto $\mathcal{O}(x, f)$ es +invariante bajo f.*

Retomando el concepto de sistema dinámico, estos objetos matemáticos quedan completamente determinados por las propiedades del espacio fase y de la función. De esta manera, se han clasificado varios tipos de sistemas dinámicos o clases de funciones dinámicas. Dentro de las funciones más conocidas y estudiadas en el área de los sistemas dinámicos (y también en otras áreas), se encuentran los siguientes.

Definición 2.19. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:*

(1) ***exacta*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.*
(2) ***Mezclante*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geq N$.*
(3) ***Transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*
(4) ***Débilmente mezclante*** *si $f^{\times 2}$ es transitiva.*

(5) ***Totalmente transitiva*** *si f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$.*
(6) ***Fuertemente transitiva*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.*
(7) ***Caótica*** *si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X (esta definición corresponde al caos en el sentido de Devaney* [**5**, pág. 332]*).*
(8) ***Minimal*** *si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado e invariante.*
(9) ***Irreducible*** *si el único subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ es $A = X$.*
(10) ***Órbita-transitiva*** *si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$.*
(11) ***Estrictamente órbita-transitiva*** *si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.*
(12) ***ω-transitiva*** *si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*
(13) ***TT_{++}*** *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $n_f(U, V)$ es infinito.*
(14) ***Suavemente mezclante*** *si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función transitiva, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.*
(15) ***Exactamente Devaney caótica*** *si f es exacta y $Per(f)$ es denso en X.*
(16) ***Totalmente minimal*** *si para cada $s \in \mathbb{N}$, f^s es minimal.*
(17) ***Dispersora*** *si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función minimal, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.*
(18) ***Touhey*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existen un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$.*
(19) ***Un F-sistema*** *si f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X.*

En el diagrama de la Figura 2 presentamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones dadas en la Definición 2.19. Es decir, considerando a X como cualquier espacio topológico y a $f : X \to X$ cualquier función. La prueba de estas inclusiones se pueden consultar en [**3, 6, 7**] y [**17**]. Por conveniencia, denotamos con T. transitiva, F. transitiva, E. Devaney caótica y E. órbita-transitiva a las funciones totalmente transitivas, fuertemente transitivas, exactamente Devaney caóticas y estrictamente órbita-transitivas, respectivamente.

Lema 2.20. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces f es exacta si y sólo si, para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para cada $k \geq N$.*

Demostración: Supongamos que f es exacta y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. De aquí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = X$. Si $k \geq N$, entonces existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = l + N$. Así, $f^k(U) = f^l(f^N(U)) = f^l(X)$. Por otro lado, por el diagrama de la Figura 2, ya que f es exacta, f es sobreyectiva. En consecuencia, $f^l(X) = X$. Por lo tanto, $f^k(U) = X$. □

Una pregunta que surge de manera natural, es si estas contenciones entre clases son propias. En [**6**], F. Barragán y A. Rojas, mediante la construcción de contraejemplos muestran que la mayoría de estas contenciones son propias. En el mismo trabajo se dan condiciones bajo las cuales algunos de estos sistemas son equivalentes.

En la Sección 4 introduciremos más funciones dinámicas y veremos qué relaciones existen entre éstas y las funciones definidas en la presente sección.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Sobreyectiva} & \text{Exacta} \arrow[l] \arrow[dr] & & \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Irreducible} \arrow[u] & & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[dl] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[ddl] \\
\text{Un } F\text{-sistema} \arrow[r] & \text{T. transitiva} \arrow[d] & \text{F. transitiva} \arrow[d] & \\
\text{Touhey} \arrow[r] & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \omega\text{-transitiva} \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{E. Devaney caótica} \arrow[ur] & \text{TT}_{++} \arrow[ur] & \text{Dispersora} \arrow[u] & \text{E. órbita-transitiva} \arrow[d] \\
& & & \text{Órbita-transitiva}
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 2. Resumen de relaciones que se dan de manera general.

3. Resultados preliminares

Dedicamos esta sección al análisis de resultados que necesitaremos para un mejor desarrollo de la Sección 5.

Una prueba detallada del Teorema de Baire se puede consultar en [**20**, Teorema 15, pág. 139].

Teorema 3.1 (Teorema de Baire)**.** *Sean X un espacio métrico completo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos no vacíos, abiertos y densos en X. Entonces se cumple que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Teorema 3.2. *Sean X un espacio topológico compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Luego, $X = X \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n)$. De aquí, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \backslash X_n) = X$. Puesto que X es compacto y $X \backslash X_n$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $n_1, \ldots, n_k$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{k}(X \backslash X_{n_j})$. Sea $m = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Luego, $X = X \backslash X_m$. De aquí, $X_m = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. $\square$

Lema 3.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:*

$$\bigcup_{m=0}^{2^k-1}\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] = [0,1].$$

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces

$$\bigcup_{m=0}^{1}\left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right] = [0,1].$$

Supongamos que el resultado se cumple para k y veamos que se cumple para $k+1$. Sea $\mathcal{U} = \displaystyle\bigcup_{m=0}^{2^{k+1}-1}\left[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}}\right]$ y pongamos $s = 2^{k+1}$. De aquí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \left[\frac{0}{s}, \frac{1}{s}\right] \cup \left[\frac{1}{s}, \frac{2}{s}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{s-2}{s}, \frac{s-1}{s}\right] \cup \left[\frac{s-1}{s}, \frac{s}{s}\right] \\
&= \left[\frac{0}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}}\right] \cup \left[\frac{2}{2^{k+1}}, \frac{4}{2^{k+1}}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right] \\
&= \left[\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right] \cup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^k}{2^k}\right] \\
&= \bigcup_{m=0}^{2^k-1}\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \\
&= [0,1].
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. $\square$

Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como ***la función tienda*** y a continuación presentamos una de sus tantas propiedades.

Teorema 3.4. *La función tienda es exacta en el intervalo* $[0,1]$.

Demostración: Sea U un subconjunto abierto no vacío de $[0,1]$. De aquí, existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $(a,b) \subseteq U$. Se tiene que $b - a > 0$. Luego, por la propiedad Arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2N < b - a$. Por otro lado, ya que $2N > \frac{2N}{2^N}$, se cumple que $\frac{2N}{2^N} < b - a$. En consecuencia, $\frac{N}{2^N} < \frac{b-a}{2}$ y así, $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Ahora bien, por el Lema 3.3,

$$\bigcup_{m=0}^{2^N-1}\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] = [0,1].$$

Puesto que $a \in [0,1]$, existe $l \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que $\frac{l}{2^N} \leq a < \frac{l+1}{2^N}$. Veamos que $\frac{l+2}{2^N} < b$. Supongamos que $b \leq \frac{l+2}{2^N}$. De aquí, $\frac{l+2}{2^N} - \frac{l}{2^N} \geq b - \frac{l}{2^N} \geq b - a$. En consecuencia, $\frac{2}{2^N} \geq b - a$ y así, $\frac{1}{2^N} \geq \frac{b-a}{2}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{l+2}{2^N} < b$ y así, $a < \frac{l+1}{2^N} < \frac{l+2}{2^N} < b$. Lo cual implica que $\left[\frac{l+1}{2^N}, \frac{l+2}{2^N}\right] \subseteq (a,b)$. Pongamos $m = l+1$, de [**16**, Proposición 1.6.2], $T^N : \left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right] \to [0,1]$ es un homeomorfismo, Consecuentemente, T^N es sobreyectiva y así, $T^N\left(\left[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right]\right) = [0,1]$. De aquí, $[0,1] \subseteq T^N((a,b)) \subseteq T^N(U)$. Por lo tanto, f es exacta. $\square$

Como podemos observar en el Ejemplo 3.5, si un conjunto es $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, no siempre ocurre que su clausura tenga la misma propiedad.

Ejemplo 3.5. *Sean $X = [0,1]$ con la topología usual y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4}, & si\ x = \frac{1}{2}; \\ 2(x - \frac{1}{2}), & si\ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que $f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Esto es, el conjunto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ es $+$invariante e invariante. Sin embargo, $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\} \not\subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y en consecuencia, $\operatorname{cl}\left(\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$ no es ni $+$invariante ni invariante. Por otro lado, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \subseteq f\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)$, es decir, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ es débilmente $-$invariante, pero $\operatorname{cl}\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) \not\subseteq f\left(\operatorname{cl}\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$. También, $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pero $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\} \not\subseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. De lo anterior se concluye que en general un conjunto $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, no hereda la respectiva propiedades a su clausura.

Ahora nos interesa saber bajo qué condiciones la cerradura de un conjunto $+$invariante, $-$invariante, débilmente $-$invariante o invariante se hereda la respectiva propiedad.

Teorema 3.6. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función continua y $A \subseteq X$. Si A es $+$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, entonces $\operatorname{cl}(A)$ es $+$invariante, débilmente $-$invariante o invariante, respectivamente.*

Demostración: Dado que f es continua, $f(\operatorname{cl}(A)) \subseteq \operatorname{cl}(f(A))$. Por otro lado, ya que X es compacto, $\operatorname{cl}(A)$ es compacto y además, como f es continua $f(\operatorname{cl}(A))$ es compacto. Finalmente, puesto que X es de Hausdorff, $f(\operatorname{cl}(A))$ es cerrado. Es decir, $f(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(A)))$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(f(A)) \subseteq \operatorname{cl}(f(\operatorname{cl}(A))) = f(\operatorname{cl}(A))$.

Ahora bien, si A es $+$invariante, entonces $f(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(f(A)) \subseteq \operatorname{cl}(A)$ y así, $\operatorname{cl}(A)$ es $+$invariante. Si A es débilmente $-$invariante, entonces $\operatorname{cl}(A) \subseteq \operatorname{cl}(f(A)) = f(\operatorname{cl}(A))$. De aquí, $\operatorname{cl}(A)$ es débilmente $-$invariante. Finalmente, si A es invariante, entonces $f(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(f(A)) = \operatorname{cl}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(A)$ es invariante. $\square$

Teorema 3.7. *Sean X un espacio topológico, $f : X \to X$ una función abierta y $A \subseteq X$. Si A es $-$invariante, entonces $\operatorname{cl}(A)$ es $-$invariante.*

Demostración: Supongamos que A es $-$invariante y sean $x \in f^{-1}(\operatorname{cl}(A))$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Esto es, $f(x) \in \operatorname{cl}(A)$ y $f(x) \in f(U)$. Como f es abierta, $f(U)$ es un subconjunto abierto y así, $f(U) \cap A \neq \emptyset$. De aquí, existe $a \in U$ tal que $f(a) \in A$. Esto implica que $a \in f^{-1}(A) \cap U$. Finalmente, $x \in \operatorname{cl}(f^{-1}(A))$ y así, $f^{-1}(\operatorname{cl}(A)) \subseteq \operatorname{cl}(f^{-1}(A))$. Más aún, ya que A es $-$invariante, $f^{-1}(\operatorname{cl}(A)) \subseteq \operatorname{cl}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}(A)$ es $-$invariante. $\square$

De la Definición 2.17 se deduce fácilmente que todo conjunto invariante es también $+$invariante. Sin embargo, existen conjuntos $+$invariantes que no son invariantes. En el Teorema 3.8 se dan condiciones bajo las cuales es posible construir un conjunto invariante a partir de uno $+$invariante.

Teorema 3.8. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff, $f : X \to X$ una función continua y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Si A es +invariante, entonces A contiene a un subconjunto no vacío, cerrado e invariante.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A_0 = A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $A_n = f^n(A)$. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, A_n es un subconjunto cerrado y no vacío, pues X es compacto y de Hausdorff y f es continua, además $A_{n+1} = f^{n+1}(A) = f^n(f(A)) \subseteq f^n(A) = A_n$. Es decir, $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X. Pongamos $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, claramente B es cerrado y, por el Teorema 3.2, es no vacío. Ahora veamos que B es +invariante bajo f. Primero observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(A_n) = f(f^n(A)) = f^{n+1}(A) = A_{n+1}$. De aquí,

$$f(B) = f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = B.$$

Así, B es +invariante. Finalmente, veamos que B es débilmente −invariante. Sea $x \in B$. De aquí, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in A_{n+1} = f(A_n)$ y, en consecuencia, existe $z \in A_n$ tal que $f(z) = x$. Así, $f^{-1}(x) \cap A_n \neq \emptyset$. Como X es de Hausdorff y f es continua, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $f^{-1}(x) \cap A_n$ es un subconjunto cerrado y no vacío y además $f^{-1}(x) \cap A_{n+1} \subseteq f^{-1}(x) \cap A_n$. De lo anterior se tiene que $\{f^{-1}(x) \cap A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y no vacíos. Nuevamente, por el Teorema 3.2, $\bigcap_{n=0}^{\infty}(f^{-1}(x) \cap A_n) \neq \emptyset$. Por otro lado, $\bigcap_{n=0}^{\infty}(f^{-1}(x) \cap A_n) = f^{-1}(x) \cap B$ por lo cual, $f^{-1}(x) \cap B \neq \emptyset$ y así, existe $z \in B$ tal que $f(z) = x$, esto prueba que B es débilmente −invariante. Por lo tanto, B es un subconjunto invariante de X contenido en A. □

Recordemos que una función es minimal si no existe un subconjunto propio cerrado no vacío e invariante en el espacio fase. Por otro lado, existen subconjuntos +invariantes que no son invariantes. Así que podría darse el caso en el que, en un sistema minimal exista un subconjunto propio cerrado, no vacío y +invariante. Sin embargo, si el espacio fase es compacto y de Hausdorff y la función es continua, también podemos descartar la existencia de subconjuntos propios cerrados no vacíos y +invariantes en un sistema minimal.

Teorema 3.9. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces no existen subconjuntos propios de X que sean no vacíos, cerrados y +invariantes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un subconjunto propio de X el cual es cerrado no vacío y +invariante. De aquí, por el Teorema 3.8, existe un subconjunto E de A cerrado no vacío e invariante. Puesto que f es minimal, se tiene que $E = X$ y así, $A = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen subconjuntos propios de X que sean cerrados no vacíos y +invariantes. □

Teorema 3.10. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si X no tiene subconjuntos propios no vacíos cerrados y +invariantes, entonces para cada $x \in X$, $x \in trans(f)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$. Por la Observación 2.18 y el Teorema 3.6, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto cerrado no vacío y +invariante. Así, por hipótesis, $\text{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Esto es $x \in trans(f)$. □

Teorema 3.11. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es transitiva.*

Demostración: Si f es minimal, por el Teorema 3.9, X no tiene subconjuntos propios no vacíos, cerrados y +invariantes. De aquí, por el Teorema 3.10, $trans(f) = X$. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $x \in U$. Por hipótesis, $V \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. De aquí, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^n(x) \in V$. Luego, $f^n(x) \in f^n(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva. $\square$

Teorema 3.12. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un subconjunto abierto y denso en X.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que f es continua, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es abierto. Por otro lado, puesto que f es transitiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, $V \cap f^{-n_0}(U) \neq \emptyset$ y así, $V \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un subconjunto denso en X. $\square$

Teorema 3.13. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función. Si $trans(f) = X$, entonces para cada subconjunto abierto no vacío U de X se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$.*

Demostración: Sean U un subconjunto abierto no vacío de X y $x \in X$. Por hipótesis, $\mathcal{O}(f(x), f) \cap U \neq \emptyset$. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$. Esto es, $x \in f^{-n}(U)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ y así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$. $\square$

Finalizamos esta sección con un resultado que muestra una relación entre una función transitiva y una función órbita-transitiva. Observe que en el caso general no hay relación entre estas dos clases de funciones.

Teorema 3.14. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces f es órbita-transitiva.*

Demostración: Puesto que X es métrico y compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen puntos $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{l_k k} \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{l_k} B(x_{jk}, \frac{1}{k})$. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ la colección formada por todas estas bolas abiertas. Esto es:

$$U_1 = B(x_{11}, 1), U_2 = B(x_{21}, 1), \ldots, U_{l_1} = B(x_{l_1 1}, 1)$$

$$U_{l_1+1} = B\left(x_{12}, \frac{1}{2}\right), U_{l_1+2} = B\left(x_{22}, \frac{1}{2}\right), \ldots, U_{l_1+l_2} = B\left(x_{l_2 2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$U_{l_1+l_2+1} = B\left(x_{13}, \frac{1}{3}\right) \cdots$$

$$\vdots$$

Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, pongamos $A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i)$. Claramente, para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es un subconjunto abierto de X y por el Teorema 3.12, A_i es denso en X. Luego, por el Teorema de Baire, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$. Veamos que para cada $x \in A$, x es un punto transitivo. Sean $x_0 \in A$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Así, podemos tomar $y_0 \in U$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U$. Ahora sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon_0}{2}$. Ya que $y_0 \in U \subseteq X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B(x_{jk}, \frac{1}{k})$, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n_k\}$ tal que $y_0 \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k})$. Notemos que si $z \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k})$, entonces:

$$d(z, y_0) \leq d(z, x_{j_0k}) + d(x_{j_0k}, y_0) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0.$$

En consecuencia, $z \in B(y_0, \epsilon_0)$ y así, $B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}) \subseteq B(y_0, \epsilon_0)$. De lo anterior se tiene que $y_0 \in B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}) \subseteq B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U$. Por otro lado, ya que $x \in A$, $x \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y así, $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}))$. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-n}(B(x_{j_0k}, \frac{1}{k}))$, lo cual implica que:

$$f^n(x) \in f^n\left(f^{-n}\left(B\left(x_{j_0k}, \frac{1}{k}\right)\right)\right) \subseteq B\left(x_{j_0k}, \frac{1}{k}\right) \subseteq B(y_0, \epsilon_0) \subseteq U.$$

Finalmente, $\mathcal{O}(x, f) \cap U \neq \emptyset$ luego, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Por lo tanto, x es un punto transitivo de f y así, f es órbita-transitiva. $\square$

4. Más clases de funciones dinámicas

Dedicamos esta sección a la introducción de más clases de funciones dinámicas y veremos cómo éstas se relacionan con las clases de funciones proporcionadas en la Definición 2.19, para el caso general.

Definición 4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:*

(1) ***exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$.*
(2) ***Completamente exacta*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$.*
(3) ***Fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$.*
(4) ***Muy fuertemente transitiva*** *si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$.*
(5) ***Exacta transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X.*
(6) ***Fuertemente exacta transitiva*** *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) = X$.*
(7) ***Fuertemente producto transitiva*** *si para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar.*

Por conveniencia, de aquí en adelante nos referiremos a las funciones exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar y fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar con exacta en el sentido de Akin y fuertemente transitiva en el sentido de Akin, respectivamente.

Proposición 4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(1) Si f es completamente exacta, entonces f es exacta en el sentido de Akin.
(2) Si f es exacta, entonces f es exacta en el sentido de Akin.
(3) Si f es muy fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.
(4) Si f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, entonces f es transitiva.

(5) Si f es fuertemente exacta transitiva, entonces f es exacta transitiva.
(6) Si f es exacta transitiva, entonces f es transitiva.
(7) Si f es fuertemente producto transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

Demostración: *(1)* Supongamos que f es completamente exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$. Puesto que $\operatorname{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \subseteq f^k(U) \cap f^k(V)$, se tiene que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.
(2) Supongamos que f es exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por el Lema 2.20, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}(U) = X$ y $f^{k_2}(V) = X$, para cada $k_1 \geq N_1$ y $k_2 \geq N_2$. De aquí, $f^{k_1+k_2}(U) = X$ y $f^{k_1+k_2}(V) = X$. Por lo tanto, $f^{k_1+k_2}(U) \cap f^{k_1+k_2}(V) \neq \emptyset$ y así, f es exacta en el sentido de Akin.
(3) Supongamos que f es muy fuertemente transitiva y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. De aquí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$. Dado que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.
(4) Supongamos que f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$ y en consecuencia, para cada $v \in V$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $v \in f^{k_1}(U)$. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y así, f es transitiva.
(5) Supongamos que f es fuertemente exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) = X$. En consecuencia, para cualquier abierto no vacío W de X, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))\right) \cap W \neq \emptyset$ y así, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es un subconjunto denso en X. Por lo tanto, f es exacta transitiva.
(6) Supongamos que f es exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(U)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ es denso en X. En consecuencia, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)\right) \cap V \neq \emptyset$ y así, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva.

La prueba de *(7)* se sigue directamente de las definiciones. □

En el diagrama de la Figura 3 se resumen los resultados obtenidos en la Proposición 4.2.

Otras relaciones entre las funciones de la Definición 4.1 que no aparecen en el diagrama de la Figura 3 son las que se muestran a continuación.

Teorema 4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Si f es exacta, entonces f es muy fuertemente transitiva.
(2) Si f es exacta, entonces f es fuertemente producto transitiva.
(3) Si f es exacta, entonces f es exacta transitiva.
(4) Si f es fuertemente producto transitiva, entonces f es fuertemente exacta transitiva.
(5) Si f es exacta transitiva, entonces f es exacta en el sentido de Akin.

Demostración: La prueba de *(1)* se sigue directamente de las definiciones.
(2) Supongamos que f es exacta y sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Por [**18**, Teorema 4.3], $f^{\times k}$ es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $X^{\times k}$. De aquí, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$(f^{\times k})^l(\mathcal{U}) = X^{\times k}$. Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty}(f^{\times k})^i(\mathcal{U}) = X^{\times k}$ y así, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.
(3) Supongamos que f es exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, existen $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{l_1}(U) = X$ y $f^{l_2}(V) = X$. Además, por el Lema 2.20, $f^{l_1+l_2}(U) \cap f^{l_1+l_2}(V) = X$. De aquí, para cualquier subconjunto abierto no vacío W de X, se cumple que $(f^{l_1+l_2}(U) \cap f^{l_1+l_2}(V)) \cap W \neq \emptyset$. En consecuencia, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right) \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ es denso en X y así, f es exacta transitiva.
(4) Supongamos que f es fuertemente producto transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que $f^{\times 2}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^{\times 2})^k(U \times V) = X^{\times 2}$. Si $x \in X$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(x, x) \in (f^{\times 2})^{k_1}(U \times V)$. Esto es, $(x, x) \in f^{k_1}(U) \times f^{k_1}(V)$, lo cual implica que $x \in f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ y así, f es fuertemente exacta transitiva.
(5) Supongamos que f es exacta transitiva y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)$ es denso en X. Consecuentemente, $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right) \cap U \neq \emptyset$, lo cual implica que existen $k_1 \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $x \in f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V) \cap U$. Finalmente, $f^{k_1}(U) \cap f^{k_1}(V) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin. $\square$

Los siguientes son ejemplos de funciones con las propiedades presentadas en la Definición 4.1.

Ejemplo 4.4. *Sean $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2+2x), & si\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2-2x, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es exacta en el sentido de Akin.

En efecto, por el Teorema 3.4, $f\big|_{[0,1]}$ y $f\big|_{[-1,0]}$ son funciones exactas, por lo que cualquier intervalo abierto contenido en $[0, 1]$ o $[-1, 0]$, eventualmente cubrirá a $[0, 1]$ o a $[-1, 0]$, respectivamente, cuya intersección es $\{0\}$, y puesto que 0 es un punto fijo de f, para cada par de intervalos abiertos U y V de $[-1, 1]$, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in f^n(U) \cap f^n(V)$. Por lo tanto, f es exacta en el sentido de Akin.

Ejemplo 4.5. *Sean $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2+2x), & si\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 3-4x, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es completamente exacta.

En efecto, observemos que f es una función abierta y que cualquier intervalo abierto $\mathcal{O} \subset [-1, 0] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ cumplirá que $f(\mathcal{O}) \subset [-1, 0]$ y, por tanto, $f^k(\mathcal{O}) \subset [-1, 0]$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Además, la imagen de $\mathcal{O}$ va "creciendo" después de cada iteración, de manera que existe una $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{O}) = (-1, 0)$ para toda $n \geq n_0$.

Ahora bien, si $\mathcal{O} \subset \left[0, \frac{3}{4}\right]$, existe alguna $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\mathcal{O}) \cap [\frac{3}{4}, 1] \neq \emptyset$, lo que significa que $f^{m+1}(\mathcal{O}) \cap (-1, 0) \neq \emptyset$.

De esta forma, para cada par de abiertos no vacíos U y V de X, siempre existirá alguna $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V) \cap (-1, 0) \neq \emptyset$. Por lo tanto f es completamente exacta.

Ejemplo 4.6. *Dado que la función tienda T es exacta, por el Teorema 4.3, T es muy fuertemente transitiva, fuertemente producto transitiva, exacta transitiva y fuertemente exacta transitiva. Además, por la Proposición 4.2, (3), T es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

Como era de esperarse, las contenciones entre clases de funciones que se muestran en el diagrama de la Figura 3 son propias. Los contraejemplos para las funciones de la Definición 2.19 se pueden consultar en [**6**]. Para las funciones de la Definición 4.1, se tienen los siguientes.

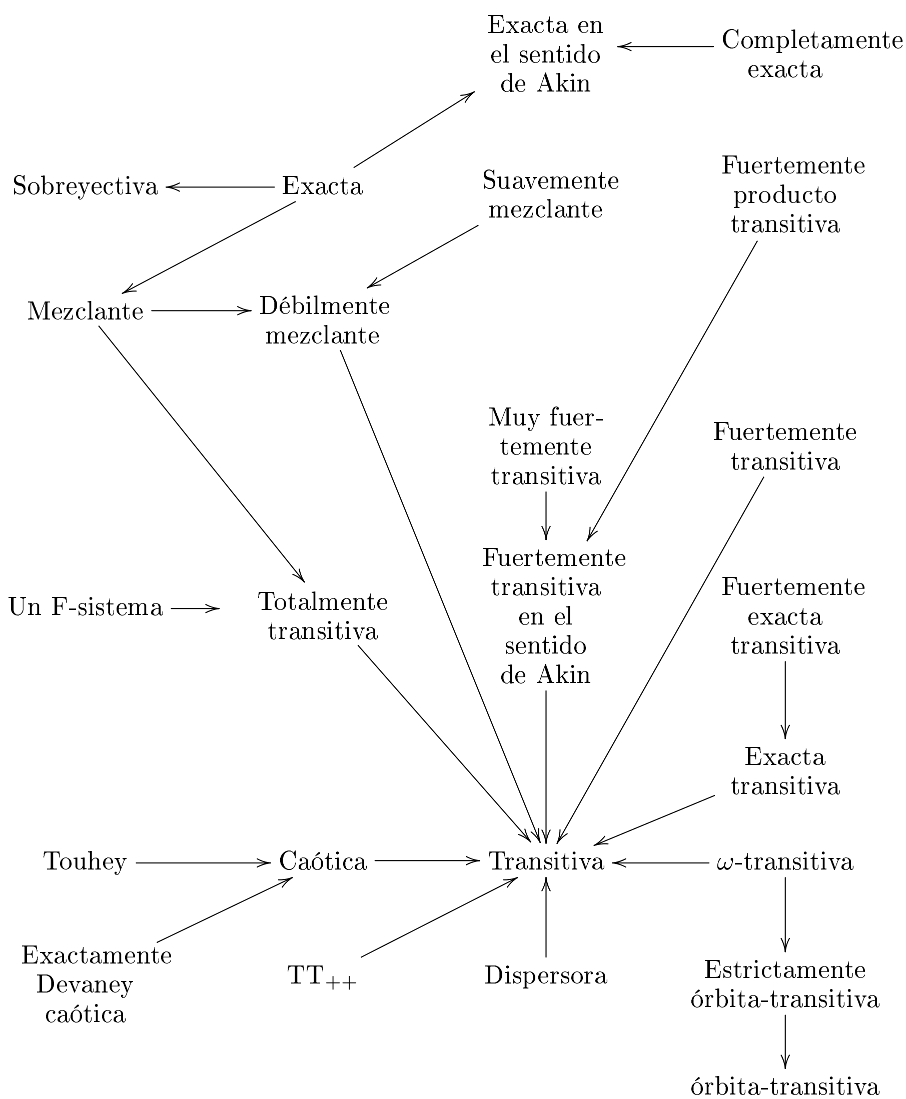


FIGURA 3. Inclusiones entre clases de funciones, caso general.

Ejemplo 4.7. *Sean $X = [-1, 1]$ y $f : X \to X$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -(2 + 2x), & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ 2x, & si \ -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & si \ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que f es exacta en el sentido de Akin y f no es completamente exacta.

En efecto, sean (a, b) y (c, d) en $[-1, 1]$. Se tienen los siguientes casos:
Caso (1): $(a, b), (c, d) \subseteq [0, 1]$ o $(a, b), (c, d) \subseteq [-1, 0]$. Puesto que en el intervalo $[0, 1]$ la función f coincide con la función tienda y además la función tienda es exacta, por el Lema 2.20, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}((a, b)) = [0, 1]$ y $f^{k_2}((c, d)) = [0, 1]$, para cada $k_1 \geq N_1$ y $k_2 \geq N_2$. De aquí, para $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ se cumple que $f^k((a, b)) \cap f^k((c, d)) \neq \emptyset$. Si $(a, b), (c, d) \subseteq [-1, 0]$, con un argumento análogo al anterior se tiene que $f^k((a, b)) \cap f^k((c, d)) \neq \emptyset$ para un $k \in \mathbb{N}$.
Caso (2): $0 \in (a, b)$ o $0 \in (c, d)$. Si $0 \in (a, b)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k((a, b)) = [-1, 1]$ y así, $f^k((a, b)) \cap f^k((c, d)) = f^k((c, d)) \neq \emptyset$. Análogamente, si $0 \in (c, d)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k((a, b)) \subseteq f^k((c, d)) = [-1, 1]$ y por lo tanto $f^k((a, b)) \cap f^k((c, d)) \neq \emptyset$.
Caso (3): $(a, b) \subseteq [-1, 0]$ y $(c, d) \subseteq [0, 1]$. En este caso, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{k_1}((a, b)) = [0, 1]$ y $f^{k_2}((c, d)) = [-1, 0]$. De aquí, para $N = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ se cumple que $f^k((a, b)) \cap f^k((c, d)) = \{0\}$, para cada $k \geq N$.

De los casos (1), (2) y (3) se concluye que f es una función exacta en el sentido de Akin. Además, por el caso (3), se tiene que f no es completamente exacta.

Ejemplo 4.8. *Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0, 1]$ con la topología $\tau = \{A \subseteq X : X \backslash A \text{ es finito}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces f es exacta transitiva pero no es fuertemente exacta transitiva.*

En efecto, para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ y así, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X. Sin embargo, para los abiertos $U = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3, 4\}\} \cup \{0\}$ y $V = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3\}\} \cup \{0\}$, se cumple que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq X$.

Ejemplo 4.9. *Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 4.8. Entonces f es exacta en el sentido de Akin pero no es exacta.*

En efecto, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X se cumple que $0 \in f(U) \cap f(V)$ y así, $f(U) \cap f(V) \neq \emptyset$. En consecuencia, f es exacta en el sentido de Akin. Sin embargo, para el conjunto abierto $U = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\right\} \cup \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $1 \notin f^k(U)$. Por lo tanto, f no es exacta.

Ejemplo 4.10. *Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 4.8. Se cumple que f es transitiva pero no es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

En efecto, si U y V son subconjuntos abiertos no vacíos de X, entonces $U = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup W_1$ y $V = \left[0, \frac{1}{m}\right] \cup W_2$ con $n, m \in \mathbb{N}$ y $W_1, W_2 \subseteq X$ finitos. Se cumple que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(U) = \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \cup f^n(W_1)$. Así, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, f es transitiva. Por otro lado, para el abierto $U = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3\}\right\} \cup \{0\}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \neq X$. Por lo tanto, f no es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.

Ejemplo 4.11. *Sea $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [0, 1]\}$ y $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\theta) = \theta + k$ donde $\frac{k}{\pi}$ es irracional. De aquí, f es transitiva pero no es exacta en el sentido de*

Akin [**11**, Ejemplo 1]*. Por otro lado, por el Teorema 4.3, se sabe que toda función exacta transitiva es exacta en el sentido de Akin. Por lo tanto, f no puede ser una función exacta transitiva.*

5. Condiciones al espacio fase o a la función

En esta sección analizamos otras relaciones que se pueden establecer entre las funciones presentadas en las definiciones 2.19 y 4.1 cuando se piden condiciones adicionales al espacio fase o a la función.

Para el caso general no es posible establecer una relación entre las funciones completamente exactas y transitivas. Sin embargo, para funciones continuas cuyo conjunto de puntos periódicos es denso, se puede establecer el siguiente:

Teorema 5.1. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua tal que $Per(f)$ es denso en X. Si f es completamente exacta, entonces f es transitiva.*

Demostración: Supongamos que f es completamente exacta y sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(f^l(U) \cap f^l(V)) \neq \emptyset$. Esto es, existe un subconjunto abierto no vacío W de X tal que $W \subseteq f^l(U) \cap f^l(V)$. Sea $a \in W$. De aquí, existe $x \in V$ tal que $f^l(x) = a$, lo cual implica que $f^{-l}(\{a\}) = f^{-l}\left(f^l(\{x\})\right)$. Ya que $\{x\} \subseteq f^{-l}\left(f^l(\{x\})\right)$, entonces $\{x\} \subseteq f^{-l}(\{a\}) \subseteq f^{-l}(W)$. En consecuencia, $x \in f^{-l}(W) \cap V$. Además, ya que f es continua, $T = f^{-l}(W) \cap V$ es un subconjunto abierto no vacío de X y dado que $Per(f)$ es un subconjunto denso, existen $s \in T$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(s) = s$. Notemos que para cada $p \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^{pm}(s) = s$, lo cual implica que podemos tomar $i > l$ tal que $f^i(s) = s$. Por otra parte, ya que $s \in f^{-l}(W) \cap V$, se tiene que $f^l(s) \in f^l\left(f^{-l}(W)\right) \subseteq W$. Además, como $W \subseteq f^l(U) \cap f^l(V)$, existe $u \in U$ tal que $f^l(u) = f^l(s)$. De aquí:

$$f^i(u) = f^{i-l}\left(f^l(u)\right) = f^{i-l}\left(f^l(s)\right) = f^i(s) = s.$$

Finalmente, $s \in f^i(U) \cap V$. Por lo tanto, $f^i(U) \cap V \neq \emptyset$ y así, f es transitiva. □

Teorema 5.2. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es exacta en el sentido de Akin, entonces f es completamente exacta.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Como f es exacta en el sentido de Akin, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$. Por otro lado, ya que f es abierta, $f^n(U) \cap f^n(V)$ es un subconjunto abierto de X, de aquí, $\operatorname{int}(f^n(U) \cap f^n(V)) = f^n(U) \cap f^n(V)$. Por lo tanto, $\operatorname{int}(f^n(U) \cap f^n(V)) \neq \emptyset$ y así, f es completamente exacta. □

Teorema 5.3. *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, entonces f es muy fuertemente transitiva.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Dado que f es abierta, para cada $l \in \mathbb{N}$, $f^l(U)$ es un subconjunto abierto. Además, ya que f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$. Así, $\left\{f^l(U) : l \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de X, $\left\{f^{l_1}(U), f^{l_2}, \ldots, f^{l_s}(U)\right\}$ con $s \in \mathbb{N}$. Sea $N = \max\{l_1, \ldots, l_s\}$. De aquí, $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$. Por lo tanto, f es muy fuertemente transitiva. □

Teorema 5.4. *Sean X un espacio métrico compacto y perfecto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva y completamente exacta, entonces f es exacta transitiva.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Ya que f es completamente exacta, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}\left(f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V)\right) \neq \emptyset$. Más aún, como

$$f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f^k(U) \cap f^k(V)\right),$$

se tiene que

$$\operatorname{int}\left(f^{k_0}(U) \cap f^{k_0}(V)\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)\right).$$

Así, $\operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$. Por otro lado, por el Teorema 3.14, f es órbita-transitiva. Esto es, existe $x \in X$ tal que $\operatorname{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$. De aquí, $\operatorname{int}(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \cap f^k(V)) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Consecuentemente, existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^l(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$. Luego, para cada $s \in \mathbb{N}$, $f^s(f^l(x)) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ y así,

$$\mathcal{O}(f^l(x), f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)).$$

Por otro lado, ya que x es un punto transitivo, de [**19**, Lema 1.3.16], se tiene que $f^l(x)$ también es un punto transitivo, esto es, $\mathcal{O}(f^l(x), f)$ es denso en X. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es un subconjunto denso de X y así, f es exacta transitiva. □

Teorema 5.5. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es muy fuertemente transitiva.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es abierta, $f(U)$ es un subconjunto abierto y como f es fuertemente transitiva, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(f(U)) = \bigcup_{i=1}^{s+1} f^i(U)$. Por lo tanto, f es muy fuertemente transitiva. □

Teorema 5.6. *Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función abierta. Si f es fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

Demostración: Si f es fuertemente transitiva, por el Teorema 5.5, f es muy fuertemente transitiva. Además, por el Diagrama de la Figura 3, si f es muy fuertemente transitiva, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin. □

Teorema 5.7. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es fuertemente transitiva en el sentido de Akin.*

Demostración: Supongamos que f es minimal y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por el Teorema 3.9, X no tiene subconjuntos propios no vacíos cerrados y +invariantes. Además, por el Teorema 3.10, $trans(f) = X$ y así, por el Teorema 3.13, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) = X$. Dado que f es una función continua, se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(U)$ es un subconjunto abierto de X. Esto es, $\{f^{-n}(U) :$

$n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para X y como X es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{N} f^{-n}(U) = X$. Por otro lado, como f es minimal, por el Teorema 3.11, f es transitiva. Veamos que además f es sobreyectiva. Notemos que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n}(U)$ es un subconjunto denso, pues f es transitiva. Además, ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n}(U) \subseteq f(X)$, se cumple que $f(X)$ también es un subconjunto denso. Esto es $\mathrm{cl}(f(X)) = X$. Ya que X es compacto y f continua, $f(X)$ es compacto y como X es de Hausdorff, $f(X)$ es cerrado. En consecuencia, $f(X) = X$, esto es, f es sobreyectiva. Esto implica que f^{N+1} también es sobreyectiva. Así:

$$
\begin{aligned}
f^{N+1}(X) &= f^{N+1}\left(\bigcup_{n=1}^{N} f^{-n}(U)\right) \\
&= f^{N+1}\left(f^{-1}(U) \cup f^{-2}(U) \cup \cdots \cup f^{-N}(U)\right) \\
&= f^{N+1}\left(f^{-1}(U)\right) \cup f^{N+1}\left(f^{-2}(U)\right) \cup \cdots \cup f^{N+1}\left(f^{-N}(U)\right) \\
&= f^{N}\left(f\left(f^{-1}(U)\right)\right) \cup f^{N-1}\left(f^{2}\left(f^{-2}(U)\right)\right) \cup \cdots \cup f\left(f^{N}\left(f^{-N}(U)\right)\right) \\
&= f^{N}(U) \cup f^{N-1}(U) \cup \cdots \cup f(U) \\
&= \bigcup_{n=1}^{N} f^{n}(U).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $X = \bigcup_{n=1}^{N} f(U)$ y así, f es muy fuertemente transitiva. □

Para finalizar este capítulo, invitamos al lector a seguir recopilando más clases de funciones dinámicas y, de ser posible, seguir expandiendo el diagrama de la Figura 3.

Agradecimientos: Los autores agradecemos al revisor o a la revisora el tiempo dedicado a la lectura de este escrito y sus valiosas recomendaciones que sin duda alguna, mejoraron la presentación de este capítulo.

Bibliografía

[1] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, Variations on the concept of topological transitivity, *Studia Mathematica*, 235(3): 225-249, 2016.

[2] E. Akin, J. Auslander y A. Nagar, Dynamics of induced systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(7): 2034-2059, 2017.

[3] E. Akin y J. D. Carlson, Conceptions of topological transitivity, *Topology and its Applications*, 159(12): 2815-2830, 2012.

[4] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, The transitivity of induced maps, *Topology and its Applications*, 156(5): 1013-1033, 2009.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stace, On Devaney's definition of chaos, *The American Mathematical Monthly*, 99(4): 332-334, 1992.

[6] F. Barragán y A. Rojas-Carrasco, *Nociones relacionadas con la transitividad topológica*. Capítulo 9 en Topología y sus aplicaciones 7. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2019.

[7] E. Bilokopytov y S. F. Kolyada, Transitive Maps on Topological Spaces, *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(9): 1163-1185, 2013.

[8] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 9. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1927.

[9] F. Blanchard, B. Host y A. Maass, Topological complexity, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 20(3): 641-662, 2000.

[10] J. Camargo, C. García y A. Ramírez, Transitivity of the Induced Map $C_n(f)$, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 48(2): 235-245, 2014.
[11] A. Crannell, The Role of Transitivity in Devaney's Definition of Chaos, *The American Mathematical Montly*, 102(9): 788-793, 1995.
[12] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.
[13] H. Diederich, J. L. Fernández, A. Fraguela y A. Álvarez, *Topología General*, Serie Textos No. 22, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
[14] H. Furstenberg, Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation, *Mathematical Systems Theory*, 1(1): 1-49, 1967.
[15] J. Gómez-Rueda, A. Illanes y H. Méndez, Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products, *Chaos Solitons & Fractals*, 45(9/10): 1180-1187, 2012.
[16] J. King y H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México: Prensa de Ciencias, 2014.
[17] J. H. Mai y W. H. Sun, Transitivities of maps of general topological spaces, *Topology and its Applications*, 157(5): 946-953, 2010.
[18] A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(2): 491-523, 2020.
[19] A. Rojas, *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados*, Tesis de Maestría en Modelación Matemática, Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.
[20] H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan Publishing, 1968.
[21] P. Touhey, Yet Another Definition of Chaos, *The American Mathematical Montly*, 104(5): 411-414, 1997.

Correos electrónicos:
arojas@unpa.edu.mx (Anahí Rojas),
alkantun@unpa.edu.mx (Aura L. Kantún-Montiel),
jmendez@unpa.edu.mx (José N. Méndez-Alcocer),
vmendez@unpa.edu.mx (Víctor M. Méndez-Salinas),

Capítulo 7

La función $\mathcal{T}_a$

Leobardo Fernández Román
Instituto Tecnólogico Autónomo de México, CDMX, México
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México

1. Introducción

Inspirada en la muy conocida función $\mathcal{T}$ de Jones definida en [**8**], en estas notas presentamos a la función $\mathcal{T}_a$ que se define para subconjuntos de un continuo arcoconexo X de la siguiente forma; para cada $A \in X$,

$$\mathcal{T}_a(A) = X \backslash \{x \in X \mid \text{existe } W \in C(X) \text{ arcoconexo tal que } x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \backslash A\}.$$

Recordemos que la función $\mathcal{T}$ de Jones se definió de forma similar excepto que no pedimos que el continuo W sea arcoconexom así que $\mathcal{T}_a$ y $\mathcal{T}$ son funciones diferentes por lo que resulta de interés realizar un estudio para la función $\mathcal{T}_a$ similar al que se ha escrito a lo largo de los años sobre la función $\mathcal{T}$, como por ejemplo, caracterizar propiedades de los espacios en relación con la función $\mathcal{T}_a$ tales como conexidad en pequeño, conexidad local, aposindesis, irreducibilidad e indescomponibilidad. Y ya que $\mathcal{T}_a$ se define en el conjunto potencia de un espacio, también estudiaremos los conceptos de aditividad y simetría, y, restringiendo el dominio de $\mathcal{T}_a$ al hiperespacio de cerrados no vacíos, podemos también estudiar la semicontinuidad superior y la continuidad de $\mathcal{T}_a$.

En estas notas, después de algunos preliminares en la sección 2, en la sección 3 veremos algunos ejemplos del comportamiento de la función $\mathcal{T}_a$ y algunas de sus propiedades. En la sección 4 estudiaremos algunas propiedades de la función $\mathcal{T}_a$ en continuos únicamente arcoconexos y en particular en dendroides. En la sección 5 mostramos un par de resultados de la función $\mathcal{T}_a$ en continuos cíclicamente arcoconexos. Resultados sobre la continuidad de la función $\mathcal{T}_a$ se estudian en la sección 6 y resultados que relacionan a la función $\mathcal{T}_a$ con continuos homogéneos se encuentran en la sección 7. Finalmente, en la sección 8 estudiamos composiciones de la función $\mathcal{T}_a$ con funciones suprayectivas y con funciones abiertas.

Inicié el estudio de la función $\mathcal{T}_a$ por sugerencia del Dr. Sergio Macías, como resultado escribí el artículo [**6**]. En el presente trabajo presento material contenido en ese artículo.

2. Preliminares

A lo largo de esta sección escribiremos definiciones y resultados que se necesitaran en estas notas, incluyendo las demostraciones o las citas donde se pueden consultar las pruebas.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un espacio métrico compacto X, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al *conjunto potencia* de X y decimos que un subconjunto A de X es un *subcontinuo* de X si A es un continuo. Un continuo es *localmente conexo* si cada punto tiene un base de vecindades abiertas y conexas. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos de sus puntos, existe un arco en X que los une. Una *métrica convexa* en un espacio X es una métrica d para X que induce la topología del espacio y para la cual los puntos medios siempre existen, esto es: para cualesquiera x y $y \in X$, existe $z \in X$ tal que: $d(x,z) = \frac{1}{2}d(x,y) = d(z,y)$.

Teorema 2.1. [**13**, Teorema 27.9] *Un continuo es localmente conexo si y sólo si las componentes de conjuntos abiertos son abiertas.*

Teorema 2.2. [**10**, Teorema 8.23] *Cualquier continuo localmente conexo es arcoconexo.*

Teorema 2.3. [**7**, Teorema 10.3] *Cualquier continuo localmente conexo admite una métrica convexa.*

Proposición 2.4. [**7**, Proposición 10.4] *Sea X un continuo con métrica convexa d. Entonces para cualesquiera dos puntos x y y de X, se pueden unir por un arco γ en X tal que γ es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x,y)]$.*

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.4 y la utilizaremos más adelante.

Proposición 2.5. *Sea X un continuo con una métrica convexa d. Entonces para cualquier subcontinuo A de X y cualquier $r > 0$, $C_d(r,A) = \{x \in X \mid d(x,A) \leq r\}$ es un subcontinuo arcoconexo de X.*

Una demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [**9**].

Teorema 2.6. [**9**, Teorema 1.7.12]. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

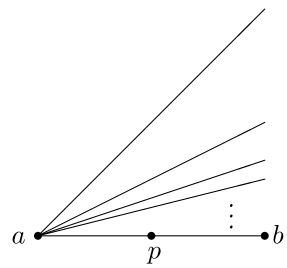
Terminamos esta sección con la definición de la función $\mathcal{T}$ en continuos.

Definición 2.7. *Sea X un un continuo. Definimos la* función $\mathcal{T}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *como sigue: para cada $A \in \mathcal{P}(X)$,*

$$\mathcal{T}(A) = X \backslash \{x \in X \mid \textit{existe } W \in C(X) \textit{ tal que } x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A\}.$$

En el siguiente ejemplo vemos cómo se comporta la función $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.8. *El* abanico armónico *es el continuo, en* $\mathbb{R}^2$*, que se obtiene de unir con segmentos de recta el punto* $(0,0)$ *con cada elemento de la cerradura del conjunto* $E = \left\{(1, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.



Vemos que en el abanico armónico, $\mathcal{T}(\{p\})$ *es el segmento que une a* p *con* b*, que denotaremos como* $\overline{pb}$.

3. La función $\mathcal{T}_a$, ejemplos y algunas propiedades

Comenzamos esta sección con la definición de la función $\mathcal{T}_a$ y veamos que, en general, las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$ son distintas.

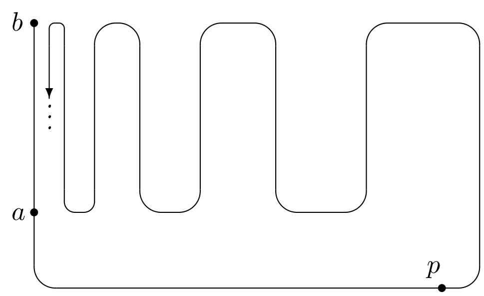
Definición 3.1. *Sea* X *un continuo arcoconexo. Definimos la* función $\mathcal{T}_a \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *como sigue: para cada* $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{T}_a(A) = X \backslash \{x \in X \mid \textit{existe } W \in C(X) \textit{ arcoconexo tal que } x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \backslash A\}.$$

Observación 3.2. *De la definición es fácil ver que, como* $\mathcal{T}_a$ *se define en un continuo arcoconexo* X*, entonces* $\mathcal{T}_a(\emptyset) = \emptyset$*. También se puede ver que para cada* $A \in 2^X$*,* $A \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ *y* $\mathcal{T}_a(A) \in 2^X$*. Una observación más es que si* A *y* $B \in 2^X$ *son tales que* $A \subseteq B$*, entonces* $\mathcal{T}_a(A) \subseteq \mathcal{T}_a(B)$.

El siguiente ejemplo muestra que, en general, $\mathcal{T}(A) \neq \mathcal{T}_a(A)$.

Ejemplo 3.3. *Sea* X *el* Círculo de Varsovia *con barra límite el segmento* ab*. Podemos ver que, si* p *es un punto de* X *que no está en la barra límite,* $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$*, mientras que* $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\} \cup \overline{ab}$.



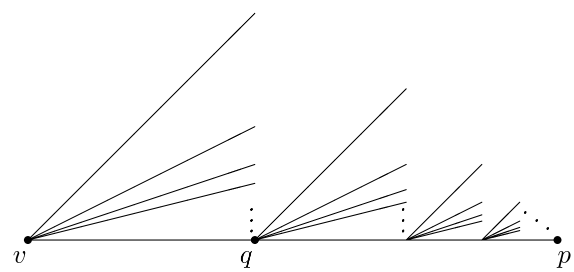
Recordemos que una caracterización que se da para los continuos indescomponibles por medio de la función $\mathcal{T}$ es el siguiente: un continuo X es indescomponible si y sólo si $\mathcal{T}(A) = X$ para todo $A \in 2^X$ [**9**, Teorema 3.1.34]. Pensando en esto uno se podría preguntar qué pasa en el caso de la función $\mathcal{T}_a$, es decir, ¿existe un continuo arcoconexo X tal que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para todo $A \in 2^X$? En [**1**] se construye un continuo arcoconexo tal que todos sus subcontinuos arcoconexos propios tienen interior vacío. Esto nos muestra que existen continuos arcoconexos para los cuales $\mathcal{T}_a(A) = X$ para todo $A \in 2^X$.

Estudiaremos ahora versiones arcoconexas de algunos conceptos.

Definición 3.4. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es* arcoconexo en pequeño en p *si para cualquier conjunto abierto U de X que contiene a p, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Decimos que X es* arcoconexo en pequeño *si lo es en todos sus puntos.*

Un ejemplo de un continuo que es arcoconexo en pequeño en un punto p pero que no es localmente conexo en ese punto es el siguiente:

Ejemplo 3.5. *Sea X el continuo en $\mathbb{R}^2$ que se obtiene como una concatenación de abanicos armónicos (ver el Ejemplo 2.8) donde identificamos el punto final de la barra límite con el vértice del siguiente abanico (ver la figura):*



Este continuo es arcoconexo en pequeño en p y no es localmente conexo en p.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es arcoconexo en pequeño si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración: Supongamos que X es arcoconexo en pequeño en todos sus puntos. Por definición, X es conexo en pequeño en todos sus puntos, así, por Teorema 2.6, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Por Teorema 2.3, podemos suponer que X tiene métrica convexa. Sean p un punto de X y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Sea $r > 0$ tal que $\mathcal{V}_r(p) \subseteq U$. Por la Proposición 2.5, $Cl(\mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p))$ es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $p \in \mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p) \subseteq Cl(\mathcal{V}_{\frac{r}{2}}(p)) \subseteq U$. Así, X es arcoconexo en pequeño en todos sus puntos. □

Las primeras caracterizaciones de espacios que presentamos utilizando la función $\mathcal{T}_a$ son los siguientes dos resultados.

Teorema 3.7. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es arcoconexo en pequeño si y sólo si $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración: Supongamos que X es arcoconexo en pequeño y sea $A \in 2^X$. Por la Observación 3.2, $A \subseteq \mathcal{T}_a(A)$. Sea $x \in X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es un abierto y X es regular, existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U \subseteq Cl(U) \subseteq X \setminus A$. Como X es arcoconexo en pequeño, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Como $Cl(U) \cap A \subseteq (X \setminus A) \cap A = \emptyset$, entonces $W \subseteq X \setminus A$. Lo que implica que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a(A) = A$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada $A \in 2^X$. Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto de X que contiene a p. Como $X \setminus U \in 2^X$, entonces $\mathcal{T}_a(X \setminus U) = X \setminus U$ y $p \notin \mathcal{T}_a(X \setminus U)$. Así, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus (X \setminus U)$. Esto implica que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq U$. Entonces, X es arcoconexo en pequeño en p. Como p fue arbitrario, X es arcoconexo en pequeño (Definición 3.4). $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 3.6 y 3.7 tenemos el siguiente corolario.

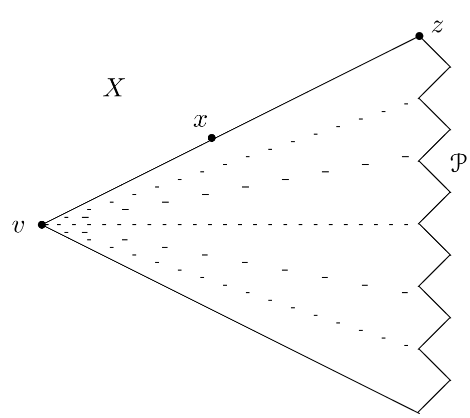
Corolario 3.8. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $\mathcal{T}_a(A) = A$ para todo $A \in 2^X$.*

Y ahora, haciendo una analogía con la relación que existe entre la función $\mathcal{T}$ y los continuos aposindéticos, veamos la relación que hay entre la función $\mathcal{T}_a$ y los continuos *aposindéticos por arcoconexos*. Para esto, veamos primero la definición de éstos.

Definición 3.9. *Sean X un continuo arcoconexo y p y $q \in X$. Decimos que X es* aposindético por arcoconexos en p con respecto a q *si existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{q\}$. Decimos que X es* aposindético por arcoconexos en p *si X es aposindético por arcoconexos en p con respecto a cualquier punto de $X \setminus \{p\}$. Finalmente, decimos que X es* aposindético por acrcoconexos *si X es aposindético por arcoconexos en cada uno de sus puntos.*

El cono sobre el pseudoarco es un ejemplo de un continuo arcoconexo que es aposindético pero que no es aposindético por arcoconexos. Recordemos que un *pseudoarco* es un continuo no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible [**5**].

Ejemplo 3.10. *Sea X el* cono sobre el pseudoarco $\mathcal{P}$. *Entonces X es aposindético pero no es aposindético por arcoconexos. Para $x \in X \setminus \mathcal{P}$ sea z el punto extremo del arco que une v con $\mathcal{P}$ y contiene a x. Entonces $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$, mientras que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \overline{xz}$, donde $\overline{xz}$ denota el segmento de recta de x a z.*



Teorema 3.11. *Sean X un continuo arcoconexo y A un subconjunto cerrado de X. Si $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$, entonces X es aposindético por arcoconexos en x con respecto a cada punto de A.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$ y $a \in A$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Como $X \setminus A \subseteq X \setminus \{a\}$, entonces W es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{a\}$. Por lo tanto, X es aposindético por arcoconexos en x con respecto a a. $\square$

Teorema 3.12. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es aposindético por arcoconexos si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$ para cada $p \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es aposindético por arcoconexos. Por la Observación 3.2 tenemos que $\{p\} \subseteq \mathcal{T}_a(\{p\})$. Sea $q \in X \setminus \{p\}$. Como X es aposindético por arcoconexos, existe un continuo arcoconexo W tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$. Esto implica que $q \in X \setminus \mathcal{T}_a(\{p\})$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$ para cada $p \in X$. Sean p y q puntos distintos de X. Como $\mathcal{T}_a(\{p\}) = \{p\}$, existe un continuo arcoconexo W tal que $q \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p\}$, lo que implica que X es aposindético por arcoconexos en q con respecto a p. Como p y q fueron arbitrarios, X es aposindético por arcoconexos. $\square$

Observación 3.13. *Podemos ver, de la definición de las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$, que si X es un continuo arcoconexo entonces $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

También, como consecuencia de las definiciones de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.14. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es hereditariamente arcoconexo, entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}_a(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.*

Definición 3.15. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es* fuertemente semilocalmente arcoconexo en *p si para cualquier subconjunto abierto U de X que contiene a p, hay un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de continuos arcoconexos ajenos dos a dos. Decimos que X es* fuertemente semilocalmente arcoconexo *si X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en p para cada $p \in X$.*

Teorema 3.16. *Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Entonces X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Supongamos que X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x y sea $y \in X \setminus \{x\}$. Sea U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $y \notin Cl(U)$. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en x, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de un número finito de continuos arcoconexos. Como $y \in X \setminus V$, entonces la comoponente de y en $X \setminus V$ es un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $y \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus \{x\}$. Lo que implica que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto que contiene a p. Para cada $y \in X \setminus \{p\}$ existe un subcontinuo arcoconexo W_y de X tal que $y \in Int(W_y) \subseteq W_y \subseteq X \setminus \{p\}$. La familia $\{Int(W_y) \mid y \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es un compacto, existen $y_1, y_2, ..., y_n \in X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$. Sea $V = X \setminus \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$. Entonces $X \setminus V$ es la unión de un número finito de subcontinuos arcoconexos de X. Por lo tanto, X es fuertemente semilocalmente arcoconexo en p. $\square$

Definición 3.17. *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$. Decimos que X es* colocalmente arcoconexo en p *si para cualquier subconjunto abierto U de X que contiene a p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es arcoconexo. Decimos que X es* colocalmente arcoconexo *si X es colocalmente arcoconexo en p para cada $p \in X$.*

Para el siguiente resultado recordemos que un continuo X es *semilocalmente conexo en x* si para cada conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes. Decimos que X es *semilocalmente conexo* si lo es en todos sus puntos.

Teorema 3.18. *Si X es fuertemente semilocalmente arcoconexo sin puntos de corte, entonces X es colocalmente arcoconexo.*

Demostración: Sea X un continuo arcoconexo, fuertemente semilocalmente arcoconexo y sin puntos de corte. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo, entonces X es semilocalmente conexo y sin puntos de corte. Se sigue de [**11**, Corolario 6.22], que para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $X \setminus U$ es conexo. Como X es fuertemente semilocalmente arcoconexo, existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y $X \setminus V$ es la unión de una cantidad finita de subcontinuos arcoconexos de X. Sean $K_1, K_2, ..., K_n$ subcontinuos arcoconexos de X tales que $X \setminus V = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Entonces $X \setminus U \subseteq K_j$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$, ya que si tenemos que $(X \setminus U) \cap K_i \neq \emptyset$ y $(X \setminus U) \cap K_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$, entonces $X \setminus U$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo que $X \setminus U \subseteq K_j$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$. De aquí se sigue que $X \setminus K_j$ es un conjunto abierto de X tal que $x \in X \setminus K_j \subseteq U$ cuyo complemento, K_j, es arcoconexo. Por lo tanto, X es colocalmente arcoconexo. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 3.16 y 3.18 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.19. *Sean X un continuo arcoconexo sin puntos de corte y $x \in X$. Entonces X es colocalmente arcoconexo en x si y sólo si $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

Definición 3.20. *Sea X un continuo. Una* base de filtro $\mathcal{F}$ en X *es una familia $\mathcal{F} = \{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ de subconjuntos de X tal que para cada $\omega \in \Omega$, $A_\omega \neq \emptyset$ y para cada par ω_1 y $\omega_2 \in \Omega$, existe $\omega_3 \in \Omega$ tal que $A_{\omega_3} \subseteq A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2}$.*

Lema 3.21. *Sea X un continuo arcoconexo. Si $\mathcal{F}$ es una base de filtro de conjuntos cerrados de X, entonces $\mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\}) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración: Sabemos, por la Observación 3.2, que $\mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\}) \subseteq \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\})$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus (\bigcap\{G \mid G \in \mathcal{F}\})$. Como W es compacto, existen $G_1, G_2, ..., G_n$ en $\mathcal{F}$ tales que $W \subseteq X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} G_i)$. Entonces $W \cap (\bigcap_{i=1}^{n} G_i) = \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ es una base de filtro, existe un conjunto cerrado G en $\mathcal{F}$ tal que $G \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Esto implica que $W \cap G = \emptyset$. Así, $p \in X \setminus \mathcal{T}_a(G)$. Por lo tanto, $p \in X \setminus \bigcap\{\mathcal{T}_a(G) \mid G \in \mathcal{F}\}$. $\square$

Recordemos la definición de aditividad.

Definición 3.22. *Sea X un continuo arcoconexo. Decimos que X es* $\mathcal{T}_a$-aditivo *si para cada par de subconjuntos cerrados A y B de X se cumple que $\mathcal{T}_a(A \cup B) = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$.*

Teorema 3.23. *Sea X un continuo arcoconexo. Si para cada punto $x \in X$ y para cada par de subcontinuos arcoconexos W_1 y W_2 de X tales que $x \in Int(W_j)$, $j \in \{1,2\}$, existe un subcontinuo arcoconexo W_3 de X tal que $x \in Int(W_3)$ y $W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Demostración: Sean A_1 y A_2 dos subconjuntos cerrados de X. Como $\mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2) \subseteq \mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2)$, necesitamos probar que $\mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2)$. Para esto, sea x un punto en $X \setminus (\mathcal{T}_a(A_1) \cup \mathcal{T}_a(A_2))$. Entonces $x \in (X \setminus \mathcal{T}_a(A_1)) \cap (X \setminus \mathcal{T}_a(A_2))$. Se sigue que existen dos subcontinuos arcoconexos W_1 y W_2 de X tales que $x \in Int(W_j) \subseteq W_j \subseteq X \setminus A_j$, $j \in \{1,2\}$. Por hipótesis, existe un subcontinuo arcoconexo W_3 de X tal que $x \in Int(W_3) \subseteq W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$ y $W_1 \cap W_2 \subseteq X \setminus (A_1 \cup A_2)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_1 \cup A_2)$. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.23 es el siguiente resultado.

Corolario 3.24. *Si X es un dendroide, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Teorema 3.25. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo si y sólo si para cada familia Λ de subconjuntos cerrados de X, cuya unión es cerrada en X, se tiene que $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) = \bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\}$.*

Demostración: Supongamos que X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Por la Observación 3.2, sabemos que $\bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\})$. Sea x un punto de $X \setminus (\bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\})$. Para cada $L \in \Lambda$ sea $F(L) = \{A \subseteq X \mid A$ es cerrado y $L \subseteq Int(A)\}$.

Caso (1) Si $L = \emptyset$, entonces $\emptyset \in F(L)$. Como $\mathcal{T}_a(\emptyset) = \emptyset$, tenemos que $\emptyset = \mathcal{T}_a(L) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\}$.

Caso (2) Si $L \neq \emptyset$, entonces $F(L)$ es una base de filtro de subconjuntos cerrados de X. Como $\bigcap\{A \mid A \in F(L)\} = L$, entonces $\mathcal{T}_a(L) = \mathcal{T}_a(\bigcap\{A \mid A \in F(L)\})$. Por el Lema 3.21, $\mathcal{T}_a(L) = \bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\}$. Entonces para cada $L \in \Lambda$, $x \in X \setminus (\bigcap\{\mathcal{T}_a(A) \mid A \in F(L)\})$. Así, para cada $L \in \Lambda$, existe $A_L \in F(L)$ tal que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_L)$.

Ahora, $\{Int(A_L) \mid L \in \Lambda\}$ es una cubierta abierta de $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\}$. Como $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\}$ es compacto, existen $L_1, L_2, ..., L_m \in \Lambda$ tales que $\bigcap\{L \mid L \in \Lambda\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m Int(A_{L_j})$. Entonces, por hipótesis y utilizando inducción matemática, tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup_{j=1}^m A_{L_j}) = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{T}_a(A_{L_j})$. Entonces $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^m \mathcal{T}_a(A_{L_j})$. Como para cada $j \in \{1,2,...,m\}$, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(A_{L_j})$, se sigue que $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\})$. Así, tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup\{L \mid L \in \Lambda\}) \subseteq \bigcup\{\mathcal{T}_a(L) \mid L \in \Lambda\}$.

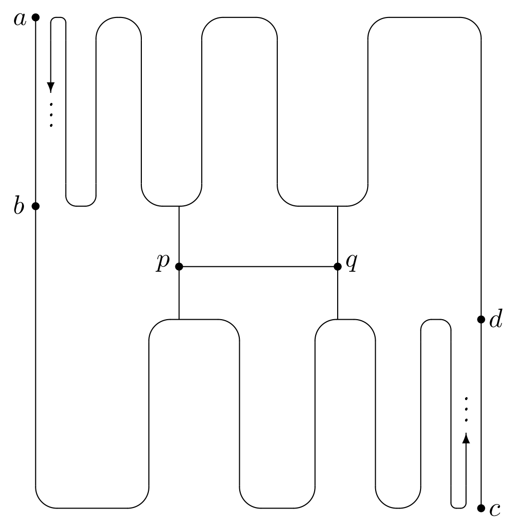
La otra implicación es clara. □

Corolario 3.26. *Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si K es un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\mathcal{T}_a(K)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración: Sean X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y K un subcontinuo de X tal que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$. Por hipótesis y por el Teorema 3.25, $\mathcal{T}_a(K) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in K}\{x\}) = \bigcup_{x \in K} \mathcal{T}_a(\{x\})$. Como $K \cup \mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\bigcup_{x\in K}(K \cup \mathcal{T}_a(\{x\}))$ es conexo. Como $K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mathcal{T}_a(\{x\})$, entonces tenemos que $\bigcup_{x\in K}(K \cup \mathcal{T}_a(\{x\})) = K \cup (\bigcup_{x\in K} \mathcal{T}_a(\{x\})) = \bigcup_{x\in K} \mathcal{T}_a(\{x\}) = \mathcal{T}_a(K)$, lo que prueba que $\mathcal{T}_a(K)$ es conexo. □

El siguiente ejemplo muestra que en el Corolario 3.26 no se puede quitar la hipóteis de que el continuo sea $\mathcal{T}_a$-aditivo.

Ejemplo 3.27. *Sea X el continuo de la siguiente figura. Si W es el segmento horizontal $\overline{pq}$, es fácil verificar que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in W$, es decir, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in W$, pero vemos que $\mathcal{T}_a(W) = W \cup \overline{ab} \cup \overline{cd}$ que no es conexo.*



Con respecto a la simetría veamos primero la definición.

Definición 3.28. *Sea X un continuo arcoconexo. Decimos que X es* $\mathcal{T}_a$-simétrico *si para cualquier par de subconjuntos cerrados no vacíos A y B de X, se cumple que: $A \cap \mathcal{T}_a(B) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{T}_a(A) \cap B = \emptyset$. Decimos que X es* puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico *si para cualquier par de puntos x y y de X se cumple que: $x \in \mathcal{T}_a(\{y\})$ si y sólo si $y \in \mathcal{T}_a(\{x\})$.*

Teorema 3.29. *Sea X un continuo arcoconexo. Si X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Demostración: Sean X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-simétrico y A y B subconjuntos cerrados de X. Como $\mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B) \subseteq \mathcal{T}_a(A \cup B)$, necesitamos probar que $\mathcal{T}_a(A\cup B) \subseteq \mathcal{T}_a(A)\cup\mathcal{T}_a(B)$. Sea $x \in \mathcal{T}_a(A\cup B)$. Entonces $\{x\}\cap\mathcal{T}_a(A\cup B) \neq \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\mathcal{T}_a(\{x\})\cap(A\cup B) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{T}_a(\{x\})\cap A \neq \emptyset$ o $\mathcal{T}_a(\{x\})\cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\})\cap A \neq \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_a$-simétrico, $\{x\} \cap \mathcal{T}_a(A) \neq \emptyset$, lo que implica que $x \in \mathcal{T}_a(A)$. Entonces, $x \in \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. □

Teorema 3.30. *Sea X un continuo arcoconexo tal que $\mathcal{T}_a(A) = A$ o que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para cada A en 2^X. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo y $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = A$ para cada subconjunto cerrado A de X. Entonces $\mathcal{T}_a(A \cup B) = A \cup B = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si $A \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$, entonces $A \cap B = \emptyset$ y $\mathcal{T}_a(A) \cap B = \emptyset$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-simétrico.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}_a(A) = X$ para cada subconjunto cerrado A de X. Entonces $\mathcal{T}_a(A \cup B) = X = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Así, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Por último, como $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}_a(A) \cap B \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_a(B) \cap A \neq \emptyset$, por lo que X es $\mathcal{T}_a$-simétrico. $\square$

Teorema 3.31. *Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-simétrico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un continuo arcoconexo, $\mathcal{T}_a$-aditivo y puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X tales que $A \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$. Entonces para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$, $x \notin \mathcal{T}_a(\{y\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{T}_a$-simétrico tenemos que $y \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$ para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$. Ahora, como X es $\mathcal{T}_a$-aditivo, entonces $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x \in A}\{x\}) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{T}_a(\{x\})$ (Teorema 3.25). Así, $y \notin \mathcal{T}_a(A)$ para ninguna $y \in B$. Lo que implica que $B \cap \mathcal{T}_a(A) = \emptyset$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-simétrico. $\square$

Recordemos que la función $\mathcal{T}_a$ es *idempotente* en el continuo arcoconexo X si $\mathcal{T}_a^2(A) = \mathcal{T}_a(A)$ para cada sbconjunto A de X, donde $\mathcal{T}_a^2(A) = \mathcal{T}_a(\mathcal{T}_a(A))$.

Teorema 3.32. *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X si y sólo si para cada subcontinuo arcoconexo W de X y para cada $x \in Int(W)$ existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X. Sean W un subcontinuo arcoconexo de X y $x \in Int(W)$. Entonces $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(X \setminus W)$. Como $\mathcal{T}_a$ es idempotente en X, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a^2(X \setminus W)$. Esto implica que existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq X \setminus \mathcal{T}_a(X \setminus W) \subseteq X \setminus (X \setminus W) = W$. Por lo tanto, $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$.

Ahora supongamos que para cada subcontinuo arcoconexo W de X y para cada $x \in Int(W)$, existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$. Sea $B \in \mathcal{P}(X)$. Por la Observación 3.2 tenemos que $\mathcal{T}_a(B) \subseteq \mathcal{T}_a^2(B)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(B)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B$. Por hipótesis, existe un subcontinuo arcoconexo M de X tal que $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq Int(W)$. Como $Int(W) \cap \mathcal{T}_a(B) = \emptyset$, entonces $x \in Int(M) \subseteq M \subseteq X \setminus \mathcal{T}_a(B)$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a^2(B)$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es idempotent en X. $\square$

4. Continuos únicamente arcoconexos

Recordemos que un continuo X es *únicamente arcoconexo* si para cualquier par de puntos p y q de X existe exactamente un arco en X cuyos puntos finales son p y q. En esta sección se presentan algunas propiedades de la función $\mathcal{T}_a$ en continuos únicamente arcoconexos.

Teorema 4.1. *Sean X un continuo únicamente arcoconexo y $x \in X$. Si M y N son subcontinuos arcoconexos de X tales que $x \in Int(M) \cap Int(N)$, entonces $M \cap N$ es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $x \in Int(M \cap N)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un continuo arcoconexo y $x \in X$. Sean M y N dos subcontinuos arcoconexos de X tales que $x \in Int(M) \cap Int(N)$. Claramente $x \in Int(M \cap N)$. Para ver que $M \cap N$ es arcoconexo, sean $x, y \in (M \cap N)$. Como M es arcoconexo existe un arco α de x a y en M. Como N es arcoconexo existe un arco β de x a y en N. Por hipótesis X es únicamente arcoconexo, lo que implica que $\alpha = \beta$. Así, $M \cap N$ es arcoconexo. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 3.23 y 4.1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *Si X es un continuo únicamente arcoconexo, entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*

Observación 4.3. *Por el Teorema 4.2, podemos ver que el recíproco del Teorema 3.29 no es cierto. Como el Círculo de Varsovia es únicamente arcoconexo entonces es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si x es un punto en la barra límite y y es un punto que no está en la barra límite, es fácil verificar que $x \in \mathcal{T}_a(\{y\})$, pero $y \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$.*

Como consecuencia del Corolario 3.26 y el Teorema 4.2 tenemos este otro resultado.

Corolario 4.4. *Sean X un continuo únicamente arcoconexo y K un subcontinuo de X. Si $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo para cada $x \in K$, entonces $\mathcal{T}_a(K)$ es un subcontinuo de X.*

Ahora veremos un resultado de la función $\mathcal{T}_a$ en dendroides.

Teorema 4.5. *Sea X un dendroide. Si X no es localmente conexo, entonces existe $p \in X$ tal que $\mathcal{T}_a(\{p\}) \neq \{p\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un dendroide que no es localmente conexo. Entonces hay un punto p de X tal que X no es conexo en pequeño en p. Así que existe $\delta > 0$ tal que si V es una vecindad de p y $V \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$, V no es conexo. Sean V una vecindad de p tal que $p \in V \subseteq Cl(V) \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$ y B la componente de $Cl(V)$ que contiene a p. Entonces, por [**12**, Teorema 12.1, pág. 18], tenemos:

(i) existen una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de componentes de $Cl(V)$ y un subcontinuo A de B que contiene a p tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, y si $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$,
(ii) $p \in A$,
(iii) si $x \in A$, entonces X no es conexo en pequeño en x,
(iv) $A \subseteq \mathcal{V}_\delta(p)$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{V}_\delta(p)$ tal que $x_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Sean $q \in A \setminus \{p\}$ y $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{V}_\delta(p)$ tal que $y_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = q$. Sea α_i el arco que une a x_i con p. Si existen una cantidad infinita de arcos α_i que contienen a q entonces $p \in \mathcal{T}_a(\{q\})$, ya que si $p \notin \mathcal{T}_a(\{q\})$ entonces existiría un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $p \in Int(W)$ y $q \notin W$. Como W es arcoconexo, X es un dendroide, y $p \in Int(W)$, existe un número natural N tal que el arco α_i está contenido en W para cada $i \geq N$. Pero, como $q \notin W$, esto implica que existe sólo una cantidad finita de arcos α_i que contienen a q, lo cual es una contradicción. En consecuencia $p \in \mathcal{T}_a(\{q\})$ y, así, $\mathcal{T}_a(\{q\}) \neq \{q\}$. Si sólo hay una cantidad finita de arcos α_i que contienen a q, entonces, como X es únicamente arcoconexo, hay una cantidad infinita de arcos β_i que unen y_i con q que contienen a p. Entonces $q \in \mathcal{T}_a(\{p\})$ y, así, $\mathcal{T}_a(\{p\}) \neq \{p\}$. $\square$

Observación 4.6. *Usando el hecho de que en los dendroides (en general, en los continuos hereditariamente arcoconexos) las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_a$ coinciden, el Teorema 4.5 implica también que, si X es un dendroide que no es localmente conexo, entonces existe un punto p en X tal que $\mathcal{T}(\{p\}) \neq \{p\}$.*

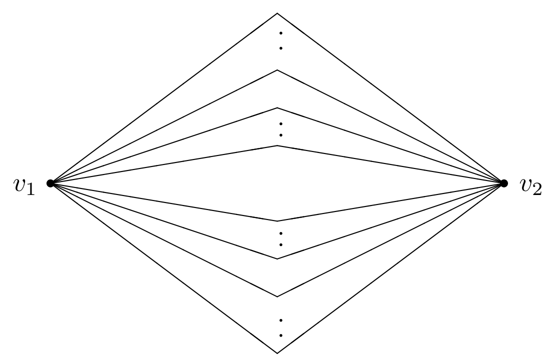
5. Continuos cíclicamente arcoconexos

Ahora estudiamos la función $\mathcal{T}_a$ en continuos cíclicamente arcoconexos, los cuales definimos a continuación.

Definición 5.1. *Sea X un continuo arcoconexo. Decimos que X es* cíclicamente arcoconexo *si cualquier par de puntos de X están contenidos en una curva cerrada simple.*

Una curva cerrada simple es el ejemplo más sencillo de un continuo cíclicamente arcoconexo. La suspensión sobre el conjunto de Cantor es otro ejemplo de un continuo cíclicamente arcoconexo.

Ejemplo 5.2. *La suspensión sobre el conjunto de Cantor con vértices v_1 y v_2.*



A diferencia de los continuos únicamente arcoconexos en donde la imagen bajo $\mathcal{T}_a$ de conjuntos con un punto podría no ser conexa (como es el caso del Círculo de Varsovia), en los continuos cíclicamente arcoconexos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Si X es un continuo cíclicamente arcoconexo, entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo.*

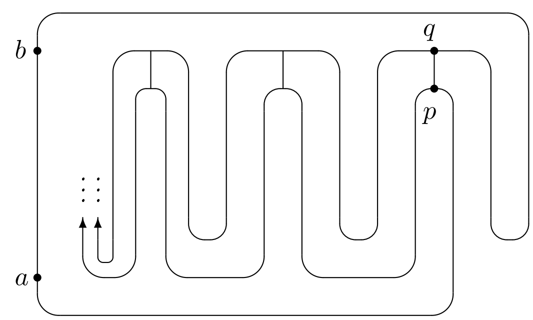
Demostración: Sean X un continuo cíclicamente arcoconexo y $x \in X$. Supongamos que $\mathcal{T}_a(\{x\})$ no es conexo para algún $x \in X$. Entonces existen dos subconjuntos cerrados ajenos A y B de X tales que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = A \cup B$. Supongamos que $x \in A$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq U$ y $Cl(U) \cap B = \emptyset$. Entonces $Fr(U) \cap \mathcal{T}_a(\{x\}) = \emptyset$ y, así, para cada $z \in Fr(U)$, existe un subcontinuo arcoconexo K_z de X tal que $z \in Int(K_z) \subseteq K_z \subseteq X \setminus \{x\}$. Como $Fr(U)$ es compacto, existen $z_1, z_2, ..., z_n \in Fr(U)$ tales que $Fr(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^n Int(K_{z_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_{z_i}$. Sean $V = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n K_{z_i})$ y $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup (\bigcup_{i=1}^n K_{z_i})$. Por [**10**, Teorema 5.4], Y tiene una cantidad finita de componentes. Notamos que $B \subseteq X \setminus Cl(U) \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus V = Y$, en otras palabras, $B \subseteq Int(Y)$. Sean $b \in B$ y C la componente de Y que contiene a b. Entonces C es un subcontinuo de X tal que $b \in Int(C) \subseteq C \subseteq X \setminus \{x\}$. Si C es arcoconexo, entonces $b \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$, lo cual es una contradicción. Supongamos que C no es arcoconexo. Podemos suponer que $K_{z_i} \cap C \neq \emptyset$ si $1 \leq i \leq l$ y $K_{z_i} \cap C = \emptyset$ si $i > l$. Sea $D = C \cup \bigcup_{i=1}^l K_{z_i}$. Entonces D es un subcontinuo de X tal que $b \in Int(D)$. Como X es cíclicamente arcoconexo, entonces $X \setminus \{x\}$ es arcoconexo. Para cada $i \in \{1, 2, ..., l\}$, sea α_i un arco en $X \setminus \{x\}$ de b a un punto en K_{z_i}. Sea $E = D \cup \bigcup_{i=1}^l \alpha_i$. Como $X \setminus \{x\}$ es arcoconexo, cada arcocomponente de

C intersecta a algún K_{z_i} para alguna $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Entonces E es un subcontinuo arcoconexo de X tal que $b \in Int(E) \subseteq E \subseteq X \setminus \{x\}$, lo que implica que $b \notin \mathcal{T}_a(\{x\})$ así obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a(\{x\})$ es conexo. $\square$

Corolario 5.4. *Sea X un continuo cíclicamente arcoconexo y $\mathcal{T}_a$-aditivo. Entonces $\mathcal{T}_a(W)$ es un subcontinuo de X para cada subcontinuo W de X.*

El siguiente ejemplo que aparece en [**4**, pág. 390] muestra que si X es cíclicamente arcoconexo y W es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{T}_a(W)$ no necesariamente es conexo.

Ejemplo 5.5. *Consideremos el continuo cíclicamente arcoconexo X como el continuo que aparece en la siguiente figura. Sean J la barra límite ab y W el segmento pq. Podemos ver que $\mathcal{T}_a(W) = W \cup J$ que no es conexo. Esto muestra, según el Corolario 5.4, que este continuo X no es $\mathcal{T}_a$-aditivo.*



6. Continuidad de la función $\mathcal{T}_a$

En esta sección estudiaremos la continuidad de la función $\mathcal{T}_a$, para esto recordemos que una función $\Theta\colon 2^X \to 2^X$ es *semicontinua superiormente* si el conjunto $\{A \in 2^X \mid \Theta(A) \subseteq U\}$ es abierto en 2^X para todo conjunto abierto U de X. Si el conjunto $\{A \in 2^X \mid \Theta(A) \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en 2^X, entonces decimos que Θ es *semicontinua inferiormente* y decimos que Θ es *continua* si Θ es semicontinua superiormente y semicontinua inferiormente.

Teorema 6.1. *La función $\mathcal{T}_a$ es semicontinua superiormente.*

Demostración: Sean U un conjunto abierto de X y $\mathcal{U} = \{A \in 2^X \mid \mathcal{T}_a(A) \subseteq U\}$. Por la definición de semicontinuidad superior, necesitamos probar que $\mathcal{U}$ es abierto. Sea $B \in Cl(2^X \setminus \mathcal{U})$. Entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X \setminus \mathcal{U}$ tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_a(B_n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Sea $x_n \in \mathcal{T}_a(B_n) \cap (X \setminus U)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$, de hecho para algún $x \in X \setminus U$. Afirmamos que $x \in \mathcal{T}_a(B)$. Supongamos que $x \notin \mathcal{T}_a(B)$, entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B$. Como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $B_n \subseteq X \setminus W$ y $x_n \in Int(W)$. Sea $n \geq N$, entonces $x_n \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus B_n$. Esto implica que $x_n \in X \setminus \mathcal{T}_a(B_n)$, lo cual es una contradicción. Entonces, $x \in \mathcal{T}_a(B) \cap (X \setminus U)$ y, así, $B \in 2^X \setminus \mathcal{U}$. Por lo tanto, $2^X \setminus \mathcal{U}$ es cerrado y $\mathcal{U}$ es abierto. $\square$

Teorema 6.2. *Sea X un continuo arcoconexo $\mathcal{T}_a$-aditivo. Si $\mathcal{T}_a$ es continua en $F_1(X)$, entonces $\mathcal{T}_a$ es continua en 2^X.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 6.1, es suficiente probar que $\mathcal{T}_a$ es semicontinua inferiormente. Sea U un conjunto abierto de X. Definimos $\mathcal{U} = \{A \in 2^X \mid \mathcal{T}_a(A) \cap U \neq \emptyset\}$. Por la definición de semicontinuidad inferior, necesitamos ver que $\mathcal{U}$ es un abierto en 2^X. Sean $B \in Cl(2^X \setminus \mathcal{U})$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X \setminus \mathcal{U}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Entonces $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $B \notin 2^X \setminus \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{T}_a(B) \cap U \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{T}_a(B) \cap U$. Por el Teorema 3.25, como X es $\mathcal{T}_a$-aditivo, entonces $\mathcal{T}_a(B) = \bigcup_{x\in B} \mathcal{T}_a(\{x\})$ y $y \in \mathcal{T}_a(\{x\})$ para alguna $x \in B$. Como $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, sea $x_n \in B_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por hipótesis, $\mathcal{T}_a$ es continua en $F_1(X)$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_a(\{x_n\}) = \mathcal{T}_a(\{x\})$. En consecuencia, existe $y_n \in \mathcal{T}_a(\{x_n\})$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $y \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ para cada $n \geq N$. Esto implica que $\mathcal{T}_a(\{x_n\}) \cap U \neq \emptyset$, para $x_n \in B_n$ y $n \geq N$. Entonces $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U \neq \emptyset$ para $n \geq N$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{T}_a(B_n) \cap U = \emptyset$. Así, $B \in 2^X \setminus \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X. Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es semicontinua inferiormente en X. □

Como consecuencia del Corolario 3.8, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.3. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces la función $\mathcal{T}_a$ es continua.*

Teorema 6.4. *La función $\mathcal{T}_a$ es continua en el Círculo de Varsovia.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X el círculo de Varsovia y J la barra límite de X. Sabemos que X es únicamente arcoconexo. Por el Corolario 4.2, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. Entonces para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a\big(\bigcup_{x\in A}\{x\}\big)$. Por el Teorema 3.25 se tiene que $\mathcal{T}_a\big(\bigcup_{x\in A}\{x\}\big) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\})$. Por otro lado, $\bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\}) = \bigcup_{x\in A}(J \cup \{x\}) = J \cup \bigcup_{x\in A}\{x\} = J \cup A$. De donde se tiene que $\mathcal{T}_a(A) = J \cup A$.

Ahora, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_a(A_n) = \lim_{n\to\infty} (J \cup A_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} J\Big) \cup \Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = J \cup A = \mathcal{T}_a(A).$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}_a$ es continua. □

7. Continuos homogéneos

Comenzamos con la definición de continuo homogéneo.

Definición 7.1. *Un continuo X es* homogéneo *si para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.*

Lema 7.2. *Sea X un continuo arcoconexo. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{T}_a(A)) = \mathcal{T}_a(h(A))$ para cada subconjunto A de X.*

DEMOSTRACIÓN: Sean A un subconjunto de X y $x \in X \setminus h(\mathcal{T}_a(A))$. Entonces $h^{-1}(x) \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. En consecuencia, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $h^{-1}(x) \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Esto implica que $x \in Int(h(W)) \subseteq h(W) \subseteq X \setminus h(A)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(h(A))$.

Ahora, sea $x \in X \setminus \mathcal{T}_a(h(A))$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus h(A)$. Entonces $h^{-1}(x) \in h^{-1}(Int(W)) \subseteq h^{-1}(W) \subseteq h^{-1}(X \setminus h(A))$. Por lo que $h^{-1}(x) \in Int(h^{-1}(W)) \subseteq h^{-1}(W) \subseteq X \setminus A$. Así, $h^{-1}(x) \in X \setminus \mathcal{T}_a(A)$. Por lo tanto $x \in h(X \setminus \mathcal{T}_a(A))$. □

Teorema 7.3. *Sea X un continuo arcoconexo homogéneo. Entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un continuo arcoconexo y homogéneo. Por el Teorema Principal de [**3**] tenemos que X es colocalmente arcoconexo. Como X es homogéneo, X no tiene puntos de corte [**10**, Teorema 6.6] y, por el Corolario 3.19, tenemos que $\mathcal{T}_a(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$. □

Como una consecuencia de los Teoremas 3.12 y 7.3 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 7.4. *Si X es un continuo arcoconexo y homogéneo, entonces X es aposindético por arcoconexos.*

Teorema 7.5. *Sea X un continuo arcoconexo homogéneo. Entonces X es $\mathcal{T}_a$-aditivo si y sólo si X es localmente conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es $\mathcal{T}_a$-aditivo y sea $A \in 2^X$. Entonces $\mathcal{T}_a(A) = \mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in A}\{x\})$. Por el Teorema 3.25 tenemos que $\mathcal{T}_a(\bigcup_{x\in A}\{x\}) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\})$. Por el Teorema 7.3, $\bigcup_{x\in A} \mathcal{T}_a(\{x\}) = \bigcup_{x\in A}\{x\} = A$. Así, $\mathcal{T}_a(A) = A$. Entonces, por el Corolario 3.8, X es localmente conexo.

Ahora, si X es localmente conexo y A y $B \in 2^X$, entonces $A \cup B$ es cerrado. Otra vez, por el Corolario 3.8, $\mathcal{T}_a(A \cup B) = A \cup B = \mathcal{T}_a(A) \cup \mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, X es $\mathcal{T}_a$-aditivo. □

8. La función $\mathcal{T}_a$ y funciones abiertas

En esta parte aplicaremos la función $\mathcal{T}_a$ a dos continuos, X y Y. Para distinguir cuando aplicamos la función a X la denotaremos como ${}_X\mathcal{T}_a$, mientras que cuando la apliquemos en el continuo Y la denotaremos como ${}_Y\mathcal{T}_a$.

Definición 8.1. *Dados dos continuos X y Y. Una función $f : X \to Y$ se dice que es* abierta *si la imagen de cualquier abierto de X bajo f es un abierto en Y, esto es, $f(U)$ es abierto en Y para cada abierto U de X.*

Teorema 8.2. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta entonces para cada subconjunto B de Y se cumple que ${}_Y\mathcal{T}_a(B) \subseteq f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $B \in 2^Y$ y $y \in Y \setminus f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X \setminus {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in X \setminus {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$, existe un subcontinuo arcoconexo W de X tal que $x \in Int(W) \subseteq W \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$. Como f es abierta, entonces $f(x) \in Int(f(W)) \subseteq f(W) \subseteq Y \setminus B$. Esto implica que $y \in Y \setminus {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. Por lo tanto, ${}_Y\mathcal{T}_a(B) \subseteq f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. □

Teorema 8.3. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $f^{-1}(W)$ es arcoconexo para cada subcontinuo arcoconexo W de Y, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $B \in 2^Y$ y $y \in Y \setminus {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. Entonces existe un subcontinuo arcoconexo W de Y tal que $y \in Int(W) \subseteq W \subseteq Y \setminus B$. Notemos que $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Como f es continua y $f^{-1}(y)$ es compacto, $f^{-1}(y) \subseteq Int(f^{-1}(W))$. Entonces para cada $x \in f^{-1}(y)$, $x \notin {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))$. Así, $f^{-1}(y) \cap {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)) = \emptyset$. Si $f(x) \in f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$, entonces $f^{-1}(y) \cap {}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $y \in Y \setminus f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$. Por lo tanto, $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$. $\square$

Como consecuencia de los teoremas 8.2 y 8.3 tenemos los siguientes resultados.

Corolario 8.4. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y abierta. Si $f^{-1}(W)$ es arcoconexo para cada subcontinuo arcoconexo W de Y, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) = {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Corolario 8.5. *Sean X y Y continuos arcoconexos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es hereditariamente arcoconexo, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Los siguientes dos corolarios se aplican a dendroides.

Corolario 8.6. *Sean X un dendroide y Y un continuo arcoconexo. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces $f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B))) \subseteq {}_Y\mathcal{T}_a(B)$ para cada subconjunto B de Y.*

Corolario 8.7. *Sean X un dendroide y Y un continuo arcoconexo. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta, entonces ${}_Y\mathcal{T}_a(B) = f({}_X\mathcal{T}_a(f^{-1}(B)))$ para cada subconjunto B de Y.*

Agradecimiento: Quiero expresar aquí mi agradecimiento al arbitro(a), quién se tomó el tiempo de leer cuidadosamente este escrito y cuyas observaciones mejoraron este trabajo.

Bibliografía

[1] G. Acosta, G. G. Andablo, P. Krupski, S. Macías y P. Pyrih, *An arcwise connected continuum without non-boundary proper arcwise connected subcontinua*, Mathematica Pannonica, 13/1 (2002), 85–89.
[2] D. P. Bellamy, *Continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 151, No. 2. (1970), 581–587.
[3] D. P. Bellamy, *Arcwise connected homogeneous metric continua are collocaly arcwise connected*, Houston J. Math., 11 (1985), 277–281.
[4] D. P. Bellamy y L. Lum, *The cyclic connectivity of homogeneous arcwise connected continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 266 (1981), 389–396.
[5] L. Fernández, *El pseudoarco y el círculo de pseudoarcos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.
[6] L. Fernández, *The set function $\mathcal{T}_a$*, Topology Proc., 46 (2015), 291–307.
[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.
[8] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70 (1948), 403–413.
[9] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
[10] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
[11] G.T. Whyburn, *Semi-locally connected sets*, Amer. J. Math., 61 (1939), 733-749. MR **1**, 31.
[12] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.
[13] S Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1998.

Correos electrónicos:
leobardo.fernandez@itam.mx, leobardof@ciencias.unam.mx (Leobardo Fernández Román).

Capítulo 8

Modelos geométricos de hiperespacios de arcos anclados

Mauricio E. Chacón Tirado, María de Jesús López Toriz y José Luis Suárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo es una familia de subconjuntos cerrados del continuo con una propiedad en común. El estudio de los modelos geométricos de hiperespacios de un continuo es un tema interesante en la teoría de continuos. Existe una gama amplia de estudios sobre el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo y del hiperespacio de subcontinuos de un continuo; dado un continuo X, estos hiperespacios son denotados por 2^X y $C(X)$, respectivamente. En 1978, Sam B. Nadler, Jr. [**11**, pág. 601] propone estudiar la familia de subconjuntos de un continuo X que son arcos, este hiperespacio se define y se denota por $\mathcal{A}(X) = \{A \subset X : A \text{ es un arco en } X\}$. En 1999, Adrián Soto [**15**] retoma este tema y considera el hiperespacio de arcos y singulares de un continuo X, el cual se define y se denota por $\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup \{\{x\} : x \in X\}$. En ese trabajo se obtienen propiedades de $\mathcal{M}(X)$ cuando el continuo X es un dendroide. En 2002, Alejandro Illanes [**2**] da una caracterización de las dendritas en términos del hiperespacio de arcos y singulares.

Recientemente, en 2016 Iván Serapio, en su tesis de maestría [**14**, Definición 2.68], aporta el concepto de punto medio para cada elemento del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$ y, con esto, se define la función *punto medio* [**14**, Definición 2.71], denotada por P_μ donde μ es una función de Whitney, que asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio $P_\mu(A) \in X$ con respecto de μ. En paralelo, también estudia la función de *puntos extremos* [**14**, Definición 2.19], la cual asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de puntos extremos de A. Entre 2016 y 2019 María de Jesús López, Patricia Pellicer Covarrubias e Iván Serapio [**6, 7, 8**] obtienen numerosos resultados que se desprenden de [**14**], entre los cuales se encuentran:

- una equivalencia para la continuidad de las funciones arriba mencionadas,

- condiciones para asegurar que estas funciones sean abiertas o cerradas,
- caracterizaciones de los continuos localmente conexos y de las dendritas en términos de la función de puntos extremos y del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$.

Como consecuencia de este último resultado se obtienen dos caracterizaciones más de las dendritas [**8**, Teorema 5.5] y [**8**, Teorema 5.8]. Siguiendo esta línea de investigación y en relación con las funciones especiales entre continuos, en 2018 José Luis Suárez López, presenta en su tesis de maestría [**17**] un estudio sobre cuándo la función punto medio y la función de puntos extremos en continuos son funciones casi monótonas, atómicas, fuertemente monótonas, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles. Como consecuencia, obtienen dos caracterizaciones: una para los continuos libres de arcos y otra para las dendritas (esta parte se encuentra publicada en [**9**]). Además, Suárez López demuestra que existe una función continua, suprayectiva y fuertemente localmente inyectiva entre $[0,1]$ y una gráfica finita X, la cual se utiliza para probar que existe una compactación métrica del intervalo $(0,1]$, digamos Y, cuyo residuo es homeomorfo a X tal que cualquier función punto medio es continua en el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(Y)$.

Inspirado naturalmente en la función punto medio, José Luis Suárez López, propone en su proyecto de tesis doctoral [**18**] estudiar las familias siguientes: Dados un continuo X y un punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, denotada por $Arcos(p, X)$, llamado *hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p*. Por otro lado, dada una función de Whitney μ, para cada punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ para los cuales $P_\mu(A) = p$, denotada por $Medio_\mu(p, X)$, llamado el *hiperespacio de arcos en X con punto medio p*. En este capítulo mostramos los modelos geométricos de $Arcos(p, X)$ y los modelos geométricos de $Medios_\mu$, cuando (i) X es un arco; (ii) X es una curva cerrada simple; (iii) X es un triodo simple.

Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 citamos los preliminares que usaremos en el resto del trabajo, por ejemplo, para cada continuo X, su hiperespacio de continuos $C(X)$ admite funciones de Whitney (Teorema 2.6). En la sección 3, definimos el hiperespacio de arcos y singulares de un continuo X, denotado por $\mathcal{M}(X)$, el concepto de punto medio de un arco con respecto a una función de Whitney μ y, con éste se define la función punto medio de X, P_μ. Por otro lado, se define la función de puntos extremos y citamos algunas propiedades de estas funciones que usaremos en nuestro trabajo. Por último, en las secciones 4 y 5, definimos $Arcos(p, X)$ y $Medio_\mu(p, X)$, y exponemos nuestros resultados acerca de los modelos para estos hiperespacios cuando X es un arco (Teoremas 4.3 y 5.4), cuando X es curva cerrada simple (Teoremas 4.4 y 5.8), cuando X es un triodo simple (Teoremas 4.5 y 5.9).

2. Preliminares

Nuestro trabajo se desarrolla en la teoría de continuos y sus hiperespacios. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Como primeros ejemplos de continuos tenemos: (1) un **arco** el cual es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. (2) Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 en el plano Euclidiano. (3) Un **triodo simple** es un espacio homeomorfo a $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,1]\}\cup\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1]\}$, al punto $(0,0)$ lo llamaremos **vértice** del triodo simple.

Sean X un espacio topológico, $A\subseteq X$ y β un número cardinal. Diremos que el punto p tiene **orden menor o igual** que β en X, lo cual se denotará por $ord(p,X)\leq\beta$, si para cada subconjunto abierto U de X con $p\in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p\in V\subseteq U$ y $|fr_X(V)|\leq\beta$, donde $fr_X(V)$ es la frontera de V en X. El punto p es de **orden** β en X, lo cual denotaremos por $ord(p,X)=\beta$, si $ord(p,X)\leq\beta$ y $ord(p,X)\not\leq\alpha$ para cualquier $\alpha<\beta$. Ahora, diremos que:

(i) El punto p es un **punto extremo** de X, si $ord(p,X)=1$. El conjunto de puntos extremos de X lo denotamos por $E(X)$.

(ii) El punto p es un **punto ordinario** de X, si $ord(p,X)=2$. El conjunto de puntos ordinarios de X lo denotamos por $O(X)$.

(iii) El punto p es un **punto de ramificación** de X, si $ord(p,X)\geq 3$. El conjunto de puntos de ramificación lo denotamos por $R(X)$.

Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $p\in X$, si para cada abierto U de X que contiene a p, existe un abierto y conexo de X, V, tal que $p\in V\subset U$. Diremos que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Un espacio topológico X es **arco conexo**, si para cualesquiera dos puntos $x,y\in X$, existe un arco en X que une a x con y.

Diremos que un espacio topológico X es **únicamente arco conexo** si para cada par de puntos distintos x y y en X, existe un único arco en X que tiene como puntos extremos x y y.

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

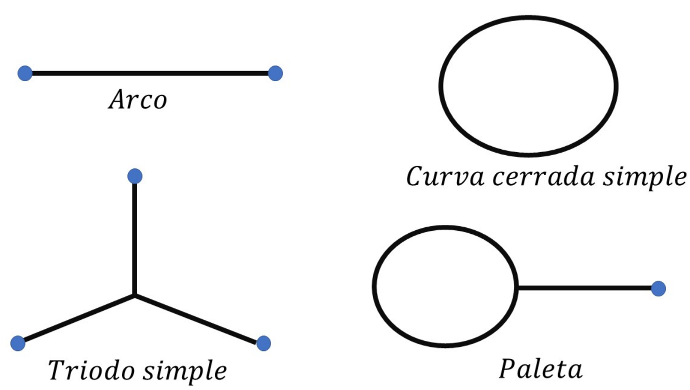


Figura 1. Ejemplos de continuos.

Observación 2.1. *En la Figura 1, tenemos que el arco y el triodo simple son dendritas, por otro lado la curva cerrada simple y la paleta no son dendritas.*

Algunos resultados importantes sobre el orden de los puntos en continuos, son los siguientes.

Proposición 2.2. [**12**, Corollary 9.6] *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si para cada $x \in X$ se tiene que $ord(x, X) = 2$.*

Proposición 2.3. *Un árbol X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos extremos.*

Demostración: Para la suficiencia, supongamos que X es un árbol con exactamente dos puntos extremos, digamos a y b. Por la [**12**, Proposition 9.27] a y b son los únicos puntos de no corte de X. Como X es un árbol, consideramos A el arco con puntos extremos a y b en X. Luego, por [**12**, Corollary 6.7] tenemos que $A = X$. Para la necesidad, supongamos que X es un arco, por el [**12**, Theorem 6.17] X tiene exactamente dos puntos que no son de corte, digamos c y d, luego por la [**12**, Proposition 9.27] c y d son los puntos extremos de X. □

Proposición 2.4. *Sea X un árbol. Si p es punto extremo de X, entonces p es punto extremo de cada subcontinuo que lo contenga.*

Demostración: Sea p un punto extremo de X. Sea Y un subcontinuo de X que contiene a p, por [**12**, Theorem 10.13], basta probar que $Y \setminus \{p\}$ contiene solo una componente. Supongamos lo contrario, es decir, existen B y C componentes de $Y \setminus \{p\}$. Por [**12**, Proposition 6.3] tenemos que $B \cup \{p\}$ y $C \cup \{p\}$ son subcontinuos de Y. Podemos considerar $b \in B$ y $c \in C$ tales que el arco $bp \subseteq B \cup \{p\}$ y el arco $cp \subseteq C \cup \{p\}$. Como p no es punto extremo del arco bc en Y, se sigue que $ord(p, bc) = 2$, lo cual es una contradicción ya que $ord(p, bc) \leq ord(p, X) = 1$. Se sigue que $Y \setminus \{p\}$ contiene una sola componente y así $ord(p, Y) = 1$. □

El siguiente resultado será de utilidad en nuestro trabajo.

Teorema 2.5. [**1**, Theorem 2.1] *Sea X un espacio topológico compacto y Y un espacio topológico Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Los hiperespacios de un continuo X son colecciones de subconjuntos de X que satisfacen una propiedad dada. Los más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

estos son conocidos como el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X y el hiperespacio de subcontinuos de X, respectivamente. A la colección 2^X se le dota de la **métrica de Hausdorff**, que a continuación definimos: sean d la métrica del continuo X, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, se define la **nube** de radio ε alrededor de A, la cual denotamos por $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}$. Ahora, se define la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como $H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$, para cada $A, B \in 2^X$. En [**3**, Teorema 2.2] se prueba que H es una métrica para 2^X. Luego, $C(X)$ es considerado como subespacio de 2^X. También se ha considerado el hiperespacio $F_n(X) = \{A \in 2^X :$

A tiene a lo más n elementos$\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, conocido como el n-ésimo producto simétrico del continuo X, así $F_n(X)$ también es considerado como subespacio de 2^X.

En [**3**] y [**11**] se cuenta con un amplio estudio de las propiedades básicas de los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y $F_n(X)$, de un continuo X. Por ejemplo, en [**11**, Teorema (1.13)] se demuestra que si X es un continuo, entonces 2^X también es un continuo.

Una de las herramientas más usadas en la teoría de los hiperespacios de continuos son las funciones de Whitney. Estas funciones son parte esencial para definir uno de nuestros hiperespacios, ente importante de nuestro trabajo: el hiperespacio de arcos contenidos en el continuo X que tienen como punto medio a p.

Dado un continuo X, una **función de Whitney** para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface dos condiciones:

(1) para cada $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$,

(2) si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

En [**3**, Teorema 13.4] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 2.6. *Si X es un continuo, entonces existe una función de Whitney para $C(X)$.*

Observación 2.7. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.*

Lema 2.8. [**5**, Lema 6.8] *Sea X un continuo. Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Otra de las construcciones importantes en la teoría de los hiperespacios de continuos son los arcos ordenados. Un **arco ordenado** en $C(X)$ es un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que para cualesquiera elementos $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Si H y K denotan los puntos extremos de un arco ordenado $\mathcal{A}$ y $H \subseteq K$, decimos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en $C(X)$ desde H hasta K.

Presentamos un resultado que nos proporciona la existencia de arcos ordenados, una demostración se obtiene de los resultados 14.2 hasta 14.6 en [**3**].

Teorema 2.9. *Sea X un continuo. Si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A hasta B.*

Recordamos la siguiente propiedad general de sucesiones en el hiperespacio de cerrados no vacíos. Una prueba se encuentra en [**16**, Lema 1.85].

Proposición 2.10. *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en 2^X que convergen a $A \in 2^X$ y $B \in 2^X$, respectivamente, entonces la sucesión $\{A_n \cup B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A \cup B$.*

El resultado que sigue nos proporciona una propiedad natural de convergencia en el segundo producto simétrico de un continuo. Una prueba la puede ver en [**14**, Proposición 1.33].

Proposición 2.11. *Sean X un continuo, $B \in F_2(X)$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $F_2(X)$. Si $B = \{p, q\}$ entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B si y sólo si existen sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenidas en X que convergen a p y a q, respectivamente, y $B_n = \{p_n, q_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En 2003, P. Pellicer Covarrubias introdujo en [**13**] los hiperespacios anclados en un conjunto. Dados un continuo X y un subcontinuo A de X, se define y se denota el hiperespacio de los subcontinuos de X anclados en un continuo A como el subespacio $C(A,X) = \{B \in C(X) : A \subseteq B\}$. En particular, cuando $A = \{p\}$, para un punto dado $p \in X$, lo denotamos por $C(p,X) = \{B \in C(X) : p \in B\}$. El siguiente resultado es útil para estudiar el hiperespacio de arcos contenidos en un continuo X que tienen a p.

Recordemos que una 2**-celda** es un espacio homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$.

Teorema 2.12. [**4**, Section 3] *Si X es una curva cerrada simple y $p \in X$, entonces $C(p,X)$ es una 2-celda que tiene a X como un punto de su frontera en $C(X)$.*

3. Hiperespacios de arcos y funciones punto medio y de puntos extremos

En esta parte definimos el hiperespacio de arcos y singulares de un continuo y citamos algunas de sus propiedades. Así como el concepto de punto medio, con el cual se define la función punto medio de un continuo. También se define la función de puntos extremos en continuos.

Siguiendo la propuesta de S. B. Nadler Jr. ([**11**, pág. 601]) de estudiar la familia de subconjuntos de un continuo X que son arcos, se define:

$$\mathcal{A}(X) = \{A \subset X : A \text{ es un arco en } X\}.$$

Este hiperespacio es conocido como el **hiperespacio de arcos** de X. En 1999 A. Soto retoma este tema en [**15**], y define y denota la colección

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X)$$

el cual es conocido como el **hiperespacio de arcos y singulares** de un continuo dado X. Los hiperespacios $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{M}(X)$ son considerados como subespacios de $C(X)$.

Observación 3.1. *Si X es un arco, entonces el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(X)$ coincide con el hiperespacio de continuos $C(X)$. Por otro lado, si X es una curva cerrada simple, entonces el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(X)$ es igual a $C(X) \setminus \{X\}$ (véase* [**6**, Proposición 3.2]*).*

Vamos a recordar otro concepto importante para desarrollar nuestro trabajo, el cual fue definido en [**6**, Definición 4.1]:

Definición 3.2. *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0, \mu(X)]$ una función de Whitney. Dados $L \in \mathcal{M}(X)$ y un punto $p \in X$ se dirá que p es* **punto medio de** L **respecto de** μ *si existen $L_1, L_2 \in C(X)$ tales que $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{p\}$ y $\mu(L_1) = \mu(L_2)$.*

Observación 3.3. *Dados un continuo X y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si L es un arco con puntos extremos a y b en X cuyo punto medio es p respecto de μ, L_1 es el arco en L con puntos extremos a y p y L_2 es el arco en L con puntos extremos p y b, entonces $\mu(L_1) = \mu(L_2)$ y $L_1 \cap L_2 = \{p\}$.*

Citamos un resultado importante, el cual asegura que los arcos tienen punto medio. Con este teorema se obtiene la Definición 3.5.

Teorema 3.4. [**6**, Teorema 4.7] *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si L es un arco en X, entonces L admite un único punto medio respecto de μ.*

Más aún, el punto medio de L respecto de μ no es punto extremo de L.

Definición 3.5. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Consideremos la función $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ que asigna a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio respecto de μ, tal y como lo asegura el Teorema 3.4. A esta función se le llama* **función punto medio** *de X respecto de μ.*

Más adelante vamos a utilizar la siguiente propiedad interesante sobre la función punto medio en continuos.

Teorema 3.6. [**9**, Teorema 3.15] *Sea X una curva cerrada simple. Para cada μ función de Whitney para $C(X)$ la función punto medio P_μ es continua.*

La función que se define a continuación permite obtener varias propiedades de los hiperespacios que se estudirarán en las secciones 4 y 5.

Definición 3.7. *Dados un continuo X y $M \in \mathcal{M}(X)$ se define el* **conjunto de puntos extremos** *de L como:*

$$E(M) = \begin{cases} \{p \in M : p \text{ es un punto extremo de } M\}, & \text{si } M \in \mathcal{A}(X), \\ \\ M, & \text{si } M \in F_1(X). \end{cases}$$

Ahora, consideramos la función $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ que a cada elemento del hiperespacio de arcos y singulares le asigna el conjunto de sus puntos extremos. A esta función se le llama **función de puntos extremos** *de X.*

En el siguiente resultado se caracterizan algunos continuos en términos de la función de puntos extremos, véase Proposición 2.21, Proposición 2.23 y Teorema 2.64 de [**14**]:

Teorema 3.8. *Sean X un continuo y $E : \mathcal{M} \to F_2(X)$ la función de puntos extremos de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*
(1) X es arco conexo si y sólo si E es una función suprayectiva.
(2) X es únicamente arco conexo si y sólo si E es una función biyectiva.
(3) X no contiene curvas cerradas simples si y sólo si E es una función inyectiva.

Finalizamos esta sección citando una propiedad útil que nos proporciona la función de puntos extremos.

Teorema 3.9. [**7**, Teorema 5.3] *Un continuo X es una dendrita si y sólo si la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ es un homeomorfismo.*

4. Modelos del hiperespacio de arcos anclados en un punto

En esta parte exponemos nuestros resultados sobre los modelos del hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p, cuando X es uno de los siguientes continuos: arco, curva cerrada simple y triodo simple. Primero vamos a definir este hiperespacio, ente principal de este capítulo.

Definición 4.1. *Sean X un continuo y un punto $p \in X$, definimos y denotamos el* **hiperespacio de arcos en X anclados en el punto** *p como el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, es decir,*

$$Arcos(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : p \in A\}.$$

Al hiperespacio $Arcos(p, X)$ lo consideramos como subespacio del hiperespacio de continuos del continuo X, $C(X)$, con la métrica de Hausdorff.

Dado que trabajaremos en continuos homeomorfos a continuos conocidos, el Teorema 4.2 es un resultado bastante útil.

Teorema 4.2. *Sean X, Y continuos y $p \in X$. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(h(p), Y)$.*

Demostración: Consideremos la función $C(h) : C(X) \to C(Y)$ definida por $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$. Como h es un homeomorfismo, por [**16**, Lema 2.3], la función $C(h)$ es un homeomorfismo.

Probaremos que $C(h)(Arcos(p, X)) = Arcos(h(p), Y)$. Sea $M \in Arcos(p, X)$, como h es un homeomorfismo, $h(M)$ es un arco en Y, además $h(p) \in h(M)$, así $h(M) \in Arcos(h(p), Y)$. Por otro lado, sea $N \in Arcos(h(p), Y)$, se sigue que $h^{-1}(N)$ es un arco en X. Como $h(p) \in N$, tenemos que $p \in h^{-1}(N)$, luego $h^{-1}(N) \in Arcos(p, X)$. Así, $N \in C(h)(Arcos(p, X))$. Por lo tanto, $C(h)|_{Arcos(p,X)}$ es un homeomorfismo entre $Arcos(p, X)$ y $Arcos(h(p), Y)$. □

El Teorema 4.3 permite conocer el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en un arco X anclados en el punto p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 4.3. *Sea X el arco $[0, 1]$. Consideremos un punto $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) si $p \in \{0, 1\}$, entonces el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p, $Arcos(p, X)$, es un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta X;
(2) si $p \in X \setminus \{0, 1\}$, entonces el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p, $Arcos(p, X)$, es una 2-celda.

Demostración: Por [**5**, Ejemplo 3.1] el hiperespacio de continuos del intervalo $[0, 1]$ puede ser representado por el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ que es el triángulo acotado por el eje de las ordenadas, la diagonal y la recta cuya segunda coordenada es igual a 1. Como se muestra en la siguiente figura:

Consideremos la función $f : D \to C(X)$ definida como $f((x, y)) = [x, y]$, para cada $(x, y) \in D$, el cual es un homeomorfismo por [**10**, Teorema 3.2].

Probaremos el inciso *(1)*. Sea $p \in \{0, 1\}$. Supongamos que $p = 0$. Sea $Z = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ subconjunto de D, note que Z es un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Observemos que, si A es un arco en X que contiene a 0, entonces $A = [0, y]$, para algún $y \in X$, así $f(Z) = Arcos(p, X)$. Note que $f((0, 0)) = \{p\}$ y $f((0, 1)) = X$. Como f es un homeomorfismo, se tiene que Z y el hiperespacio $Arcos(p, X)$ son homeomorfos, por lo tanto $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un arco con puntos extremos $\{p\}$ y X. Por otro lado, si $A, B \in Arcos(p, X)$, se tiene que A y B son comparables, así $Arcos(p, X)$ es un conjunto ordenado. Concluimos que $Arcos(p, X)$ es un arco ordenado de $\{p\}$ hasta X. De forma similar se prueba que $Arcos(p, X)$ es un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta X si $p = 1$.

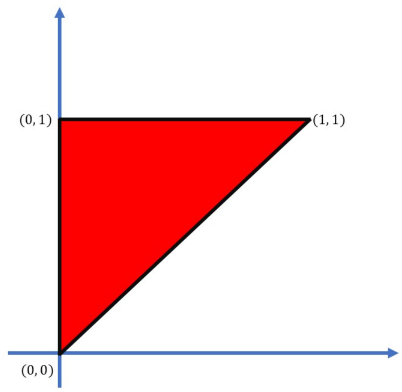


FIGURA 2. El conjunto D.

Ahora, probaremos el inciso *(2)*. Sea $p \in X \setminus \{0,1\}$. Consideramos la 2-celda $W = [0,p] \times [p,1]$ contenida en D. Observemos que si $A \in Arcos(p,X)$, entonces existen $x \in [0,p]$ y $y \in [p,1]$ tales que $A = [x,y]$, así $f(W) = Arcos(p,X)$. Como f es un homeomorfismo, tenemos que W y el hiperespacio $Arcos(p,X)$ son homeomorfos, por lo tanto $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda. $\square$

Veamos ahora el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en el circulo unitario X anclados en el punto p, para cualquier punto $p \in X$.

Teorema 4.4. *Sea X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p, $Arcos(p,X)$, es homeomorfo a una 2-celda sin un punto en la frontera.*

DEMOSTRACIÓN: Como los subcontinuos propios de X son arcos o singulares, se sigue que $Arcos(p,X) = C(p,X) \setminus \{X\}$. Por el Teorema 2.12 tenemos que $C(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Por la última línea de la página 3 y la primera línea de la página 4 de [**4**], X es un punto de la frontera de $C(p,X)$ en $C(X)$. Así, $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda sin un punto en la frontera. $\square$

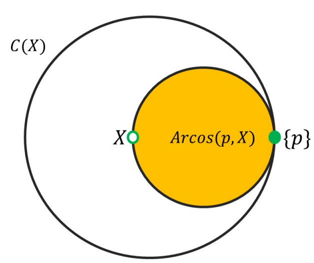


FIGURA 3. Hiperespacio $Arcos(p,X)$ visto en el hiperespacio $C(X)$.

Para finalizar esta sección, el Teorema 4.5 permite conocer el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en un triodo simple X anclados en un punto p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 4.5. *Considérese el triodo simple* $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$. *Dado un punto* $p \in X$, *se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) si p *es el vértice del triodo entonces* $Arcos(p, X)$ *es una* 2*-celda;*
(2) si p *es punto extremo del triodo entonces* $Arcos(p, X)$ *es un triodo simple;*
(3) si p *es un punto ordinario del triodo entonces* $Arcos(p, X)$ *es homeomorfo a* $X \times [0, 1]$.

Demostración: Sean $x, y \in X$, denotemos por xy el arco contenido en X con puntos extremos x y y. Sean $A_1 = \{(t, 0) : t \in [-1, 0]\}$, $A_2 = \{(0, t) : t \in [0, 1]\}$ y $A_3 = \{(t, 0) : t \in [0, 1]\}$. Consideremos los arcos $J_1 = A_2 \cup A_3$, $J_2 = A_1 \cup A_3$ y $J_3 = A_1 \cup A_2$.

Probaremos el inciso *(1)*. Supongamos que $p = (0, 0)$. Por el Teorema 4.2 y el Teorema 4.3 sabemos que $Arcos(p, J_i)$ es homeomorfo a una 2-celda, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Note que si $M \in Arcos(p, X)$ entonces $M \subseteq J_1$, $M \subseteq J_2$ ó $M \subseteq J_3$, así que $Arcos(p, X) = Arcos(p, J_1) \cup Arcos(p, J_2) \cup Arcos(p, J_3)$. Note que

- $Arcos(p, J_1) \cap Arcos(p, J_2) = Arcos(p, A_3)$,
- $Arcos(p, J_2) \cap Arcos(p, J_3) = Arcos(p, A_1)$ y
- $Arcos(p, J_3) \cap Arcos(p, J_1) = Arcos(p, A_2)$.

Por el Teorema 4.3 inciso *(1)*, tenemos que $Arcos(p, A_i)$ es homeomorfo a un arco con puntos extremos $\{p\}$ y A_i, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. De tal forma que existe un homeomorfismo $h_i : [0, 1] \to Arcos(p, A_i)$ tal que $h_i(0) = \{p\}$ y $h_i(1) = A_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Consideremos la función $f : [0, 1]^3 \to C(p, X)$ definida por $f((x, y, z)) = h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, para cada $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Veamos que f es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.5, basta probar que f es continua y biyectiva. Notemos que f es inyectiva, ya que si consideramos (a, b, c) y (x, y, z) puntos distintos en $[0, 1]^3$, podemos suponer que $a \neq x$, como h_1 es inyectiva se tiene que $h_1(a) \neq h_1(x)$, luego $h_1(a) \cup h_2(b) \cup h_3(c) \neq h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, así $f((a, b, c)) \neq f((x, y, z))$. Por otro lado, f es suprayectiva ya que si $T \in C(p, X)$, basta descomponer a T en tres subcontinuos digamos $B_1 = T \cap A_1$, $B_2 = T \cap A_2$ y $B_3 = T \cap A_3$ de esta manera $B_i \in Arcos(p, A_i)$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, como h_i es sobreyectiva, existen $x, y, z \in [0, 1]$ tales que $h_1(x) = B_1$, $h_2(y) = B_2$ y $h_3(z) = B_3$, de esta forma $f((x, y, z)) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = T$. Ahora probemos que f es una función continua, para ello consideremos $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (x, y, z) en $[0, 1]^3$. Tenemos que las sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen a x, y y z, respectivamente. Como h_i es continua para cada $i \in \{1,2,3\}$, se sigue que $\{h_1(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{h_2(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{h_3(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen a $h_1(x)$, $h_2(y)$ y $h_3(z)$, respectivamente. Luego, por la Proposición 2.10 $\{h_1(x_n) \cup h_2(y_n) \cup h_3(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, es decir, $\{f((x_n, y_n, z_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f((x, y, z))$ y así f es una función continua. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda, como la mostrada en la Figura 4.

Ahora probaremos el inciso *(2)*. Sea $p \in \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p = (1, 0)$. Consideremos la función de puntos extremos

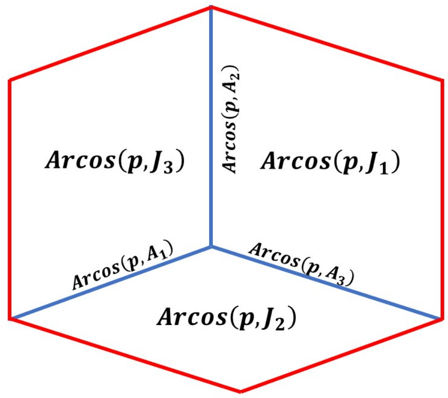


FIGURA 4. $Arcos(p, X)$ donde $p = (0, 0)$ y X es un triodo simple.

$E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$. Por el Teorema 3.9 tenemos que E es un homeomorfismo. Como p es punto extremo de X, por la Proposición 2.4 los arcos que tienen a p son de la forma px, para algún punto $x \in X$. Denotemos por $\mathcal{C}_p = \{\{p, x\} : x \in X\}$ subconjunto de $F_2(X)$. Se tiene que $E|_{Arcos(p,X)} : Arcos(p, X) \to \mathcal{C}_p$ es un homeomorfismo.

Ahora, consideremos la función $g : X \to \mathcal{C}_p$ definida por $g(x) = \{p, x\}$, para cada $x \in X$. Vamos a probar que g es un homeomorfismo. Es claro que g es biyectiva. Veamos que la función g es continua. En efecto: sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a algún punto $x \in X$. Por la Proposición 2.11 se tiene que la sucesión $\{\{p, x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $\{p, x\} \in \mathcal{C}_p$. Esto es, la sucesión $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $g(x)$. Concluimos que g es continua. Por otra parte, veamos que la función g^{-1} es continua. En efecto: sea $\{\{p, x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\mathcal{C}_p$ que converge a algún punto $\{p, x\} \in \mathcal{C}_p$. Se sigue de la Proposición 2.11 que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto x. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(\{p, x_n\}) = x_n$ y $g^{-1}(\{p, x\}) = x$. Esto prueba que la función g^{-1} es continua. Por lo tanto, g es un homeomorfismo.

Por otro lado, consideremos la función $h : X \to Arcos(p, X)$ definida por $h(x) = (E|_{Arcos(p,X)})^{-1}(g(x)) = px$, para cada $x \in X$. Es claro que h es un homeomorfismo. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un triodo simple.

Finalmente, probaremos el inciso *(3)*. Sea $p \in X \setminus \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$. Sabemos que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Sin perder generalidad supongamos que $p \in A_1$. Notemos que $e_1 = (-1, 0)$ y $v = (0, 0)$ son los puntos extremos del arco A_1. Consideremos el arco $A = e_1p$ y el triodo simple $T = pv \cup A_2 \cup A_3$ en X. Por el inciso *(1)* $Arcos(p, A)$ es un arco y por el inciso *(2)* $Arcos(p, T)$ es un triodo simple, tenemos que $Arcos(p, A)$ y $Arcos(p, T)$ son homeomorfos a $[0, 1]$ y T, respectivamente. Consideremos la función

$$F : Arcos(p, T) \times Arcos(p, A) \to Arcos(p, X) \text{ definida por } F((K, L)) = K \cup L,$$

para cada $(K, L) \in Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$.

Probaremos que F es un homeomorfismo. Como $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$ es compacto y $Arcos(p, X)$ es Hausdorff, por el Teorema 2.5, basta probar que F

es continua y biyectiva. Veamos que F es sobreyectiva, dado $M \in Arcos(p, X)$, consideremos $K = M \cap T \in Arcos(p, T)$ y $L = M \cap A \in Arcos(p, A)$. Note que $M = K \cup L$, luego $F((K, L)) = K \cup L = M$, es decir, F es sobreyectiva. Vemos que F es inyectiva, sean $(K, L), (R, S) \in Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$ puntos distintos, podemos considerar $q \in K \setminus R$, se sigue que $q \in K \cup L$ y $q \notin R \cup S$, luego $F((K, L)) \neq F((R, S))$, es decir, F es inyectiva. Ahora probemos que F es una función continua. Consideremos $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (K, L) en $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$, tenemos que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a K y L, respectivamente. Luego por la Proposición 2.10, se sigue que $\{K_n \cup L_n\}_{n\in\}_{k\in\mathbb{N}}}$ converge a $K \cup L$, es decir, $\{F((K_n, L_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $F((K, L))$, por lo tanto F es continua.

Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$, de donde $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $T \times A$, finalmente, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $X \times [0, 1]$. □

5. Modelos del hiperespacio de arcos con punto medio dado

En esta última sección exponemos nuestros resultados sobre los modelos del hiperespacio de arcos en X con punto medio p, cuando X es uno de los siguientes continuos: arco, curva cerrada simple y triodo simple. Primero vamos a definir este hiperespacio, ente principal de este capítulo.

Definición 5.1. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$. Para cada punto $p \in X$, definimos y denotamos el* **hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de** *μ, esto es,*

$$Medio_\mu(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : P_\mu(A) = p\},$$

donde $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es la función punto medio de X con respecto de μ.

Al hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ lo consideramos como subespacio del hiperespacio de continuos del continuo X, $C(X)$, con la métrica de Hausdorff.

En el resto del trabajo vamos a considerar μ una función de Whitney para $C(X)$. El siguiente Lema 5.2 no es difícil de probar.

Lema 5.2. *Sean X y Y continuos. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney, entonces $\mu \circ C(h)^{-1} : C(Y) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney.*

Dado que trabajaremos en continuos homeomorfos a continuos conocidos, el Teorema 5.3 es un resultado bastante útil.

Teorema 5.3. *Sean X, Y continuos y $p \in X$. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo a $Medio_{\mu\circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $C(h) : C(X) \to C(Y)$ tal que $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$. Como h es un homeomorfismo, por [**16**, Lema 2.3] la función $C(h)$ es un homeomorfismo y además $C(h)^{-1} = C(h^{-1})$.

Por el Lema 5.2 tenemos que $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función de Whitney para $C(Y)$. Probaremos que $C(h)(Medio_\mu(p, X)) = Medio_{\mu\circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$. Consideremos $B \in C(h)(Medio_\mu(p, X))$, así existe $A \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $C(h)(A) = B$ y existen K y L arcos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$.

Se sigue que, $B = h(A) = h(K) \cup h(L)$ y $h(K) \cap h(L) = \{h(p)\}$. Por otro lado, por el Lema 5.2 tenemos que $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función de Whitney para $C(Y)$, además $(\mu \circ C(h)^{-1})(h(K)) = \mu(K) = \mu(L) = (\mu \circ C(h)^{-1})(h(L))$. Por lo tanto $B \in Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$. Para la contención contraria, sea $B \in Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$, luego existen K y L arcos de B tales que $B = K \cup L$, $K \cap L = \{h(p)\}$ y $(\mu \circ C(h)^{-1})(K) = (\mu \circ C(h)^{-1})(L)$. Sea $A = h^{-1}(B)$, se sigue que $A = h^{-1}(K) \cup h^{-1}(L)$ y $h^{-1}(K) \cap h^{-1}(L) = \{p\}$. Además $\mu(h^{-1}(K)) = (\mu \circ C(h)^{-1})(K) = (\mu \circ C(h)^{-1})(L) = \mu(h^{-1}(L))$. Luego, $A \in Medio_\mu(p, X)$. Note que $B = h(A) \in C(h)(Medio_\mu(p, X))$.

Como $C(h)$ es un homeomorfismo, $Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$ y $Medio_\mu(p, X)$ son homeomorfos. □

El Teorema 5.4 muestra el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en un arco X con punto medio p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 5.4. *Sea X el arco $[0, 1]$. Consideremos un punto $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*
(1) si $p \in \{0, 1\}$ entonces $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$;
(2) si $p \in X \setminus \{0, 1\}$ entonces $Medio_\mu(p, X)$ es un arco.

Demostración: Sea $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ la función punto medio de X respecto de μ.

Probaremos el inciso *(1)*. Sea $p \in \{0, 1\}$. Como p es punto extremo de X, por la Proposición 2.4, si A es un arco en X que contiene a p, entonces p es punto extremo de A, así por el Teorema 3.4 tenemos que $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$.

Ahora probemos el inciso *(2)*. Sea $p \in X \setminus \{0, 1\}$. Sea $m = \text{mín}\{\mu([0, p]), \mu([p, 1])\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $m = \mu([0, p])$. Sea $g : Medio_\mu(p, X) \to [0, p]$ definida por $g(A) = \text{mín}(A)$, para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$. Probaremos que g es un homeomorfismo. Por [**6**, Lema 2.4] la función mín es continua en 2^X, así g es una función continua al ser una restricción de la función mín al $Medio_\mu(p, X)$. Probaremos que g es una función biyectiva y que $g^{-1} : [0, p] \to Medio_\mu(p, X)$ es continua.

(a) La función g es inyectiva: Sean A y B elementos de $Medio_\mu(p, X)$ tales que $g(A) = g(B)$. Como A y B son arcos en X, podemos hallar $y_1, y_2 \in [0, 1]$ tales que $A = [g(A), y_1]$ y $B = [g(B), y_2]$. Dado que $A, B \in Medio_\mu(p, X)$, se tiene que $p \in A$ y $p \in B$, así $p \leq y_1$ y $p \leq y_2$. Como $g(A) = g(B)$ tenemos que $[g(A), p] = [g(B), p]$, por tanto $\mu([g(A), p]) = \mu([g(B), p])$. Por la Observación 3.3, se sigue que $\mu([p, y_1]) = \mu([g(A), p]) = \mu([g(B), p]) = \mu([p, y_2])$. Por otro lado, $y_1 \leq y_2$ o $y_2 \leq y_1$ y así $[p, y_1]$ y $[p, y_2]$ son comparables respecto a la inclusión de conjuntos, por la Observación 2.7 tenemos que $[p, y_1] = [p, y_2]$. Por tanto, $y_1 = y_2$, luego $A = B$.

(b) La función g es suprayectiva: Sea $t \in [0, p]$, tenemos que $\mu([t, p]) \leq \mu([0, p])$. Como $\{p\} \subsetneq [p, 1]$ y $\mu([t, p]) \in [0, \mu([p, 1])]$, por el Lema 2.8 existe C un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq [p, 1]$ y $\mu(C) = \mu([t, p])$, así existe $r \in [p, 1]$ tal que $C = [p, r]$. Sea $A = [t, r]$, se sigue que $A \in Medio_\mu(p, X)$. Además $g(A) = \text{mín}(A) = t$.

(c) La función g^{-1} es continua: Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, p]$ convergente a t, para algún $t \in [0, p]$. Por el Teorema 3.9 la sucesión $\{[t_n, p]\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al arco $[t, p]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu([t_n, p]) \leq \mu([0, p])$. Como, para cada

$n \in \mathbb{N}$, $\{p\} \subsetneq [p,1]$ y $\mu([t_n,p]) \in [0,\mu([p,1])]$, por el Lema 2.8 existe C_n un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C_n \subseteq [p,1]$ y $\mu(C_n) = \mu([t_n,p])$, así existe $r_n \in [p,1]$ tal que $C = [p,r_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\{p\} \subsetneq [p,1]$ y $\mu([t,p]) \in [0,\mu([p,1])]$, por el Lema 2.8 existe C un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq [p,1]$ y $\mu(C) = \mu([t,p])$, luego existe $r \in [p,1]$ tal que $C = [p,r]$. Como $[p,1]$ es compacto, podemos suponer que existe $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al punto s, para algún $s \in [p,1]$. Por el Teorema 3.9, tenemos que la sucesión $\{[p,r_{n_k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[p,s]$, más aún, como μ es una función continua, se sigue que $\{\mu([p,r_{n_k}])\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu([p,s])$. Por otro lado, $\mu([t_{n_k},p]) = \mu([p,r_{n_k}])$, para cada $k \in \mathbb{N}$, pasando al límite tenemos que $\mu([t,p]) = \mu([p,s])$, por lo tanto $\mu([p,r]) = \mu([p,s])$, así $r = s$. Obsevemos que $\{t_n,r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{t,r\}$. Si definimos $A_n = [t_n,r_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.9 tenemos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco $A = [t,r]$. Como g es biyectiva, tenemos que g^{-1} es biyectiva, así $g^{-1}(t_n) = A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g^{-1}(t) = A$, por lo tanto g^{-1} es una función continua.

Concluimos que g es una función continua, biyectiva y con inversa continua, por lo tanto g es un homeomorfismo. □

Observación 5.5. *Sea X un arco con puntos extremos a y b. Si p no es punto extremo del arco X, entonces $Medio_\mu(p,X)$ es un arco ordenado donde $\{p\}$ es uno de sus puntos extremos y el otro punto extremo es un arco A en X que satisface que a es un punto extremo de A o b es un punto extremo de A.*

El Lema 5.6 así como el Lema 5.7 son resultados útiles para conocer el hiperespacio de arcos en una curva cerrada simple X con punto medio p, para cualquier $p \in X$.

Lema 5.6. *Sean X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$ y un punto $p \in X$. Para cualesquiera $A, B \in Medio_\mu(p,X)$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.*

Demostración: Por el Teorema 5.3, podemos suponer que $p = (1,0)$. Sean $A, B \in Medio_\mu(p,X)$. Sean $\alpha_1 \in [0,2\pi)$ y $\alpha_2 \in (-2\pi,0]$ tales que $A = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha_2,\alpha_1]\}$. Sean $\beta_1 \in [0,2\pi)$ y $\beta_2 \in (-2\pi,0]$ tales que $B = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\beta_2,\beta_1]\}$. Sean $a_1 = (cos\alpha_1, sen\alpha_1)$ y $a_2 = (cos\alpha_2, sen\alpha_2)$ los puntos extremos de A; $b_1 = (cos\beta_1, sen\beta_1)$ y $b_2 = (cos\beta_2, sen\beta_2)$ los puntos extremos de B. Sean $A_1 = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0,\alpha_1]\}$ y $A_2 = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha_2,0]\}$; además, sean $B_1 = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0,\beta_1]\}$ y $B_2 = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\beta_2,0]\}$. Observemos que A_1 y B_1 son comparables y también A_2 y B_2 son comparables. Note que $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \{p\}$, $B = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \{p\}$. Por la Definición 3.2, $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $\beta_1 < \alpha_1$. Se sigue que $B_1 \subsetneq A_1$ (véase la Figura 5), por tanto $\mu(B_1) < \mu(A_1)$, como $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, se tiene que $\mu(B_2) < \mu(A_2)$. Como A_2 y B_2 son comparables se tiene que $B_2 \subsetneq A_2$. Concluimos que $B \subseteq A$.

Caso 2. $\alpha_1 \leq \beta_1$. Se sigue que $A_1 \subseteq B_1$ (véase la Figura 6), por tanto $\mu(A_1) \leq \mu(B_1)$, como $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, se tiene que $\mu(A_2) \leq \mu(B_2)$. Como A_2 y B_2 son comparables se tiene que $A_2 \subseteq B_2$. Concluimos que $A \subseteq B$.

En ambos casos concluimos que A y B son comparables respecto a la contención de conjuntos. □

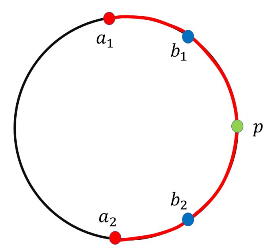


FIGURA 5. *Caso 1.*

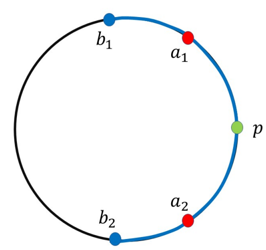


FIGURA 6. *Caso 2.*

Lema 5.7. *Sea X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$. Si $p \in X$ y $s \in [0, \mu(X))$, entonces existe $K \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $\mu(K) = s$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 5.3 podemos suponer que $p = (1, 0)$. Para $\alpha \in [-2\pi, 0]$ y $\beta \in [0, 2\pi]$, definimos $A_\alpha = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha, 0]\}$, $B_\beta = \{(cos\theta, sen\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \beta]\}$, que son subcontinuos de X, y note que siempre $A_\alpha \cap B_\beta = \{p\}$; además definimos $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [-2\pi, 0]\}$ y $\mathcal{B} = \{B_\beta : \beta \in [0, 2\pi]\}$, que son subconjuntos de 2^X. Sea $g : [0, 2\pi] \to X$ definida por $g(t) = (cost, sent)$, para cada $t \in [0, 2\pi]$. Como g es una función continua, entonces $C(g)$ es continua. Note que $C(g)|_{Arcos(0,[0,2\pi])} : Arcos(0, [0, 2\pi]) \to C(X)$ es una función inyectiva, por tanto es un homeomorfismo en su imagen. Como $C(g)([0, t]) = B_t$ para cada $t \in [0, 2\pi]$, entonces tal imagen es el conjunto $\mathcal{B}$. Por el Teorema 4.3, $Arcos(0, [0, 2\pi])$ es un arco ordenado, por tanto $\mathcal{B}$ es un arco, y observe que también es ordenado, cuyos puntos extremos son $\{p\}$ y X. Análogamente $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $\{p\}$ a X.

Por [**3**, Lemma 14.2], las funciones $\mu|_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to [0, \mu(X)]$ y $\mu|_\mathcal{B} : \mathcal{B} \to [0, \mu(X)]$ son homeomorfismos. Sea $f : [0, \mu(X)] \to [0, \mu(X)]$ definida por $f(t) = \mu(\mu|_\mathcal{A}^{-1}(t) \cup \mu|_\mathcal{B}^{-1}(t))$, para todo $t \in [0, \mu(X)]$. Observemos que f es una función continua pues $\mu|_\mathcal{A}$ y $\mu|_\mathcal{B}$ son homeomorfismos y tomar unión preserva continuidad. Además $f(0) = 0$ y $f(\mu(X)) = \mu(X)$. Sea $s \in [0, \mu(X))$, por el Teorema del valor intermedio existe $t \in [0, \mu(X)]$ tal que $f(t) = s$. Sea $K = \mu|_\mathcal{A}^{-1}(t) \cup \mu|_\mathcal{B}^{-1}(t)$, note que $\mu(K) = s < \mu(X)$, así K es un arco. Además, $\mu|_\mathcal{A}^{-1}(t) \cap \mu|_\mathcal{B}^{-1}(t) = \{p\}$ pues $\mu|_\mathcal{A}^{-1}(t) \in \mathcal{A}$ y $\mu|_\mathcal{B}^{-1}(t) \in \mathcal{B}$. Como $\mu(\mu|_\mathcal{A}^{-1}(t)) = t$ y $\mu(\mu|_\mathcal{B}^{-1}(t)) = t$, concluimos que p es el punto medio de K. La prueba está completa. $\square$

Ahora veamos el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en una curva cerrada simple X con punto medio p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 5.8. *Sean X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$ y $p \in X$. Entonces, el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo al intervalo $[0, \mu(X))$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sigma : Medio_\mu(p, X) \to [0, \mu(X))$ la función restricción de μ al conjunto $Medio_\mu(p, X)$. Por el Lema 5.6, σ es inyectiva, y por el Lema 5.7, σ es suprayectiva, y como μ es una función continua, entonces σ es continua.

Resta probar que $\sigma^{-1} : [0, \mu(X)) \to Medio_\mu(p, X)$ es continua. Para esto consideremos una sucesión, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $[0, \mu(X))$ que converge al punto $r \in [0, \mu(X))$. Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $A_n \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $\sigma(A_n) = r_n$, también existe un único $A \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $\sigma(A) = r$. Vamos a probar que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, es decir, la sucesión $\{\sigma^{-1}(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma^{-1}(r)$. Como $C(X)$ es compacto, consideremos una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B, para algún $B \in C(X)$. Como μ es una función continua, tenemos que $\{\mu(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(B)$ y como $\mu(A_{n_k}) = r_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a r, así $\mu(B) = r = \mu(A)$, como $r < \mu(X)$, así $B \in \mathcal{M}(X)$. Por el Teorema 3.6, la función P_μ es continua, luego la sucesión $\{P_\mu(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu(B)$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $P_\mu(A_{n_k}) = p$, con lo cual $P_\mu(B) = p$, así que $B \in Medio_\mu(p, X)$. Por el Lema 5.6 tenemos que $B \subset A$ o $A \subset B$. Finalmente, como $\mu(A) = \mu(B)$, por la Observación 2.7, tenemos que $A = B$. Por lo tanto, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y así la función σ^{-1} es continua.

Concluimos que σ es un homeomorfismo entre $[0, \mu(X))$ y $Medio_\mu(p, X)$. □

Finalmente, veamos el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en un triodo simple X con punto medio p, para cada $p \in X$.

Teorema 5.9. *Sean $A_1 = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1, 0]\}$, $A_2 = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1]\}$ y $A_3 = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1]\}$. Considérese el triodo simple $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, sean p_i el punto medio de A_i respecto de μ, S_i el arco en X con puntos extremos p_i y $(0, 0)$, L_i el arco en X con puntos extremos p_i y e_i, donde e_i es el punto extremo de A_i distinto de $(0, 0)$, sea $T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Dado un punto $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) si $p \in \{e_1, e_2, e_3\}$ entonces $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$;

(2) si $p \in (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ entonces $Medio_\mu(p, X)$ es un arco;

(3) si $p \in T \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ entonces $Medio_\mu(p, X)$ es un triodo simple.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos μ una función de Whitney para $C(X)$ y $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ la función de punto medio de X con respecto de μ.

Probaremos el inciso *(1)*. Sea $p \in \{e_1, e_2, e_3\}$. Note que $\{p\} \in Medio_\mu(p, X)$. Por otro lado, si A es un arco que contiene al punto p, entonces por la Proposición 2.4, $A = px$, para algún $x \in X$, además p es punto extremo de A. Por el Teorema 3.4, tenemos que p no es punto medio de A. Por lo tanto $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$.

Sean $J_1 = A_2 \cup A_3$, $J_2 = A_1 \cup A_3$ y $J_3 = A_1 \cup A_2$.

Ahora, probemos el inciso *(2)*. Sea $p \in (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_1$, se tiene que $p \in (A_1 \setminus S_1) \cup \{p_1\}$ y $p \neq e_1$. Si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$. Luego,

$$Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3).$$

Sea R el arco en A_1 con puntos extremos e_1 y p; sea S el arco en A_1 con puntos extremos p y $(0,0)$. Note que $R \subseteq L_1$ y $S_1 \subseteq S$, como μ es una función de Whitney tenemos que $\mu(R) \leq \mu(L_1) = \mu(S_1) \leq \mu(S)$, se sigue que $\mu(R) \leq \mu(S)$.

Veamos que $Medio_\mu(p, J_2) \subseteq Medio_\mu(p, A_1)$. Sea $M_0 \in Medio_\mu(p, J_2)$, existen $K \in Arcos(p, R)$ y $L \in Arcos(p, S \cup A_3)$ tales que $M_0 = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Probaremos que S no está contenido propiamente en L, para esto supongamos lo contrario, es decir, $S \subsetneq L$, así $\mu(S) < \mu(L)$. Por otro lado $\mu(K) \leq \mu(R) \leq \mu(S) < \mu(L)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto S no está contenido propiamente en L. Además, como L y S son arcos en el arco $S \cup A_3$ con punto extremo p, se sigue que L y S son comparables, así $L \subseteq S \subseteq A_1$. Además $K \subseteq R$ y así $K \subseteq A_1$. Luego $M_0 \in Medio_\mu(p, A_1)$.

De forma similar, se prueba que $Medio_\mu(p, J_3) \subseteq Medio_\mu(p, A_1)$.

Como $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3) \subseteq Medio_\mu(p, A_1) \subseteq Medio_\mu(p, X)$. Concluimos, $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, A_1)$; por la Observación 5.5, $Medio_\mu(p, A_1)$ es un arco, por lo tanto el $Medio_\mu(p, X)$ es un arco.

Finalmente, probaremos el inciso *(3)*. Sea $p \in T \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. Sea $p = (0,0)$. Observemos que, si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq J_1$ o bien $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$, luego $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_1) \cup Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3)$. Dado que p no es punto extremo del arco J_i, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, por el Teorema 5.4 y Observación 5.5, se tiene que $Medio_\mu(p, J_i)$ es homeomorfo a un arco ordenado donde $\{p\}$ es punto extremo de cada uno de ellos. Note que, si $M \in Medio_\mu(p, J_i) \cap Medio_\mu(p, J_l)$, para algunos $i, l \in \{1, 2, 3\}$ distintos, entonces $M \subseteq J_i \cap J_l$, por tanto $M \subseteq A_k$, para algún $k \in \{1, 2, 3\}$ donde $k \neq i$ y $k \neq l$. Como $P_\mu(M) = p$, se sigue que $M = \{p\}$, pues p es punto extremo de A_k. De esta manera, $Medio_\mu(p, J_i) \cap Medio_\mu(p, J_l) = \{\{p\}\}$, para cualesquiera $i, l \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Por lo tanto el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un triodo simple.

Caso 2. Sea $p \in T \setminus \{p_1, p_2, p_3, (0,0)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_1$. Si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$. Luego,

$$Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3).$$

Además,

$$Medio_\mu(p, J_2) \cap Medio_\mu(p, J_3) = Medio_\mu(p, A_1). \tag{5.1}$$

Por la Observación 5.5, tenemos que $Medio_\mu(p, J_2)$, $Medio_\mu(p, J_3)$ y $Medio_\mu(p, A_1)$ son arcos ordenados donde $\{p\}$ es punto extremo de cada uno de ellos.

Sea R el arco en A_1 con puntos extremos e_1 y p; sea S el arco en A_1 con puntos extremos p y $(0,0)$. Como $p \neq p_1$, tenemos que $S \subsetneq S_1$. Note que $L_1 \subsetneq R$. Luego, como μ es una función de Whitney se sigue que $\mu(S) < \mu(R)$. Por otro lado, como $\{p\} \subsetneq R$ y $\mu(S) \in [0, \mu(R)]$, por el Lema 2.8 existe $C \in C(X)$ tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq R$ y $\mu(C) = \mu(S)$. Observemos que $S \cup C \in Medio_\mu(p, A_1)$. Si $M \in Medio_\mu(p, A_1)$, entonces existen $K \in Arcos(p, R)$ y $L \in Arcos(p, S)$ tales que $M = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Probaremos que $M \subseteq S \cup C$. Supongamos lo contrario, es decir $M \not\subseteq S \cup C$. Note que si $\mu(C) < \mu(K)$, entonces $\mu(S) < \mu(L)$, por otro lado $L \in Arcos(p, S)$ y como μ es una función de Whitney se tiene que $\mu(L) \leq \mu(S)$, lo cual es una contradicción. Así $M \subseteq S \cup C$. Por lo tanto

$Medio_\mu(p, A_1)$ es un arco ordenado con puntos extremos $\{p\}$ y $S \cup C$. Sean

$$\mathcal{A} = (Medio_\mu(p, J_2) \setminus Medio_\mu(p, A_1)) \cup \{S \cup C\} \text{ y}$$
$$\mathcal{B} = (Medio_\mu(p, J_3) \setminus Medio_\mu(p, A_1)) \cup \{S \cup C\}.$$

Observemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos ordenados que tienen como un punto extremo a $S \cup C$. Además, $\mathcal{A} \cap Medio_\mu(p, A_1) = \{S \cup C\}$ y $\mathcal{B} \cap Medio_\mu(p, A_1) = \{S \cup C\}$. Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{S \cup C\}$. Tenemos que $\{S \cup C\} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por otro lado, sea $N \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ con $N \neq S \cup C$, así $N \in (Medio_\mu(p, J_2) \setminus Medio_\mu(p, A_1) \cap (Medio_\mu(p, J_3) \setminus Medio_\mu(p, A_1)$, de aquí se sigue que

$$N \in Medio_\mu(p, J_2) \cap Medio_\mu(p, J_3) \text{ y } N \notin Medio_\mu(p, A_1),$$

esto contradice la Ecuación (5.1). Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{S \cup C\}$.

Finalmente, observemos que:

$$Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, A_1) \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

donde $Medio_\mu(p, A_1)$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos que se intersectan dos a dos en el punto $S \cup C$. Concluimos que $Medio_\mu(p, X)$ es un triodo simple. □

Los resultados expuestos en este capítulo son respuestas particulares a las siguientes preguntas: dados un continuo X, un punto $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$,

PROBLEMA 5.10. *¿Qué propiedades topológicas tiene el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p, $Arcos(p, X)$?*

PROBLEMA 5.11. *¿Qué propiedades topológicas tiene el hiperespacio de arcos en X con punto medio p, $Medio_\mu(p, X)$?*

Agradecimientos: La labor del árbitro(a) es muy importante para la realización del libro. Los autores estamos agradecidos con sus comentarios y sugerencias a este trabajo, que de seguro hace que su lectura sea más sencilla a favor de los lectores jóvenes.

Bibliografía

[1] J. Dugundji. *Topology.* Series in Advanced Mathematics. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1996.

[2] A. Illanes. *Hyperspaces of arcs and two-point sets in dendroids.* Topology and its Applications, 117 (3) (2002), 307–317.

[3] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[4] A. Illanes. *Models of hyperspaces.* Topology Proc., Vol. 41 (2013), 1–26.

[5] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[6] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, I. Serapio Ramos. *Introducción a la función punto medio en continuos.* Rev. Integr. Temas Mat. 34, No. 1, (2016), 109–123.

[7] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, Iván Serapio. *A midpoint function and an end point function in continua.* Topology and its Applications, 235 (2018), 167–184.

[8] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, Iván Serapio. *Caracterización de la conexidad local en continuos, en términos de la función de puntos extremos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 7. Editores: J. Juan Angoa, Raúl Escobedo, Manuel Ibarra, A. Contreras. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2019.

[9] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, J. L. Suárez López. *Las funciones punto medio y de puntos extremos en relación con algunas funciones especiales entre continuos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 8. Editores: J. Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2021.

[10] M. del R. Macías Prado. *Sobre algunos modelos de hiperespacios de continuos.* Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, Agosto 2013.

[11] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[12] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[13] P. Pellicer Covarrubias. *The hyperspaces* $C(p, X)$. Topology Proc. 27 (1) (2003), 259–285.

[14] I. Serapio Ramos, *Funciones punto medio en continuos.* Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, Junio 2016.

[15] A. Soto, *El hiperespacio de arcos de un continuo.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1999. (http://132.248.9.195/pd2000/283734/Index.html).

[16] J. L. Suárez López, *Hiperespacios de continuos anclados en un punto.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, 2015.

[17] J. L. Suárez López, *Propiedades e interrelaciones de las funciones punto medio y de puntos extremos en continuos.* Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, diciembre 2018.

[18] J. L. Suárez López, *Hiperespacios anclados de continuos.* Tesis de Doctorado en Matemáticas, **en proceso**. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla.

Correos electrónicos:
`maeschacon@fcfm.buap.mx` (Mauricio E. Chacón Tirado),
`mjlopez@fcfm.buap.mx` (María de Jesús López Toriz),
`louis.suarez.lopez@gmail.com` (José Luis Suárez López).

Capítulo 9

El funtor Sub

Juan Angoa-Amador, Agustín Contreras-Carreto, Orlando Pérez-Ramírez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

La estructura matemática de los topos es muy vasta pero muy complicada para poder acercarse a ella sólo a través de su definición; por esta razón éste es el primero de una serie de trabajos en donde se irán desarrollando los elementos básicos que permitirán tener un acercamiento más sólido a los topos, para un conocimiento más profundo ver [**1**]. Aquí, sólo pedimos un conocimiento básico de teoría de categorías; lo que no se desarrolle aquí se puede encontrar en [**2**]

2. Preliminares

Observación 2.1. *En una categoría $\mathcal{A}$:*

1. Si f, g son monomorfismos y se pueden componer, entonces $f \circ g$ es monomorfismo.

2. Si f, g son isomorfismos y se pueden componer, entonces $f \circ g$ es isomorfismo.

3. En todo este trabajo, denotaremos $f \circ g$ simplemente con fg.

Definición 2.2. *1. Sea $T \in Ob(\mathcal{A})$, diremos que T es un objeto terminal si para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$, $|Hom_{\mathcal{A}}(X,T)| = 1$. Denotaremos por t_x al único morfismo de $Hom_{\mathcal{A}}(X,T)$.*

2. Sea $I \in Ob(\mathcal{A})$, diremos que I es un objeto inicial si para todo $X \in Ob(\mathcal{A})$, $|Hom_{\mathcal{A}}(I,X)| = 1$. Denotaremos por in_X al único morfismo de $Hom(I,X)$.

Definición 2.3. *Sean $m : A \to X$ y $n : B \to X$ monomorfismos en la categoría $\mathcal{C}$, diremos que $n \leq m$ si existe $f : B \to A$ tal que*
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "n"'] & & A \arrow[dl, "m"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
conmuta.

Y en tal caso escribimos $n \leq^f m$.

Proposición 2.4. *Si $n \leq^f m$, f es única. Y además si $m \leq^g n$ y $n \leq^f m$, entonces existe h isomorfismo tal que $mh = n$, en este caso diremos que $m \cong n$, la cual es una relación de equivalencia en la clase de monomorfismos con codominio común.*

DEMOSTRACIÓN: Si $n \leq^f m$ y $n \leq^{f'} m$, entonces $mf = n$ y $mf' = n$, o sea $mf = mf'$, por ser m monomorfismo tenemos que $f = f'$.

Ahora, si existen h, h' tales que $mh = n$ y $nh' = m$, entonces $mhh' = nh' = m$, entonces $hh' = Id$ y análogamente , como $nh'h = mh = n$, entonces $h'h = Id$, luego h es isomorfismo. □

Definición 2.5. *1. Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $\{C_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ donde I es un conjunto. Diremos que la $\mathcal{A}$-fuente $(C, (p_\alpha : C \to C_\alpha)_{\alpha\in I})$ es un producto para la familia $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$, si para toda $\mathcal{A}$-fuente $(D, (d_\alpha : D \to C_\alpha)_{\alpha\in I})$, existe un único morfismo $F : D \to C$, tal que para cada $\alpha \in I$, se cumple que $p_\alpha F = d_\alpha$. Es decir, para todo $\alpha \in I$ el diagrma siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "p_\alpha"'] & & D \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "d_\alpha"] \\ & C_\alpha & \end{tikzcd}$$

2. Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $\{C_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ donde I es un conjunto. Diremos que el $\mathcal{A}$-pozo $(M, i_\alpha : C_\alpha \to M)$ es un coproducto para la familia $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$, si para todo $\mathcal{A}$-pozo $(D, d_\alpha : C_\alpha \to D)_{\alpha\in I}$, existe un único morfismo $F : M \to D$ tal que para cada $\alpha \in I$, se cumple que $Fi_\alpha = d_\alpha$. Es decir, para cada $\alpha \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "F"'] & & D \\ & C_\alpha \arrow[ul, "i_\alpha"] \arrow[ur, "d_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 2.6. *1. Si la $\mathcal{A}$-fuente $(C, p_\alpha : C \to C - \alpha)_{\alpha\in I}$ es un producto de la familia $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces es monofuente, es decir, si $h_1, h_2 : W \to C$ son tales que para todo $\alpha \in I$, se cumple que $p_\alpha h_1 = p_\alpha h_2$, entonces $h_1 = h_2$.*

2. Si el $\mathcal{A}$-pozo $(M, i_\alpha : C_\alpha \to M)_{\alpha\in I}$ es un coporducto de la familia $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces es epipozo, es decir, si $s_1, s_2 : M \to W$, son tales que para todo $\alpha \in I$ se cumple que $s_1 i_\alpha = s_2 i_\alpha$, entonces $s_1 = s_2$

DEMOSTRACIÓN: 1. Tomamos la $\mathcal{A}$-fuente $(W, p_\alpha h_2 = p_\alpha h_1 : W \to C_\alpha)_{\alpha\in I}$, existe un único morfismo $T : W \to C$ tal que $p_\alpha T = p_\alpha h_2 = p_\alpha h_1$, pero h_1 y h_2 tienen la misma propiedad, por la unicidad, tenemos que $h_1 = T = H_2$.

2. Es de forma análoga. □

Definición 2.7. *1. Sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$, diremos que la pareja $(E, e : E \to X)$, donde $E \in Ob(\mathcal{A})$ y $e \in Mor(\mathcal{A})$, es un igualador de los morfismos f y g si* *i.* $fe = ge$ *y*

ii. si dada otra pareja $(C, l : C \to X)$ *con* $C \in Ob(\mathcal{A})$ *y* $l \in Mor(\mathcal{A})$ *tal que* $fl = gl$, *existe un único* $k : C \to E$ *tal que* $ek = l$. *Es decir, todos los posibles caminos del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dd, "Id_Y"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[rrr, "Id_X"'] & & & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[dd, "Id_Y"] \\
& & E \arrow[ul, "e"] \arrow[dl, "e"'] & C \arrow[l, dashed, "k"'] \arrow[ur, "l"'] \arrow[dr, "l"] & & \\
Y & X \arrow[l, "g"'] \arrow[rrr, "Id_X"'] & & & X \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

2. Sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$, *diremos que la pareja* $(E, e : X \to E)$, *donde* $E \in Ob(\mathcal{A})$ *y* $e \in Mor(\mathcal{A})$, *es un co- igualador de los morfismos* f *y* g *si*

i. $ef = eg$ *y*

ii. si dada otra pareja $(C, l : C \to X)$ *con* $C \in Ob(\mathcal{A})$ *y* $l \in Mor(\mathcal{A})$ *tal que* $lf = lg$, *existe un único* $k : C \to E$ *tal que* $ke = l$. *Es decir, todos los posibles caminos del diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"'] \arrow[dd, "Id_Y"'] & X \arrow[rrr, "Id_X"'] \arrow[dr, "e"'] & & & X \arrow[dl, "l"'] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "Id_Y"] \\
& & E \arrow[r, dashed, "k"'] & C & & \\
Y \arrow[r, "g"'] & X \arrow[rrr, "Id_X"'] \arrow[ur, "e"'] & & & X \arrow[ul, "l"] & Y \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Definición 2.8. *Para un* $\mathcal{A}$*-pozo* $(Z, f : X \to Z, g : Y \to Z)$, *diremos que la* $\mathcal{A}$*-fuente* $(W, f' : W \to Y, g' : W \to X)$, *es un jalador* [1] *de* f *y* g *si*

1. $gf' = fg'$ *y*

2. si la $\mathcal{A}$*-fuente* $(E, h : E \to Y, l : E \to X)$ *cumple que* $gh = fl$, *entonces existe un único* $\mathcal{A}$*-morfismo* $k : E \to W$, *tal que* $f'k = h$ *y* $g'k = l$.

En diagramas la anterior definiciónse presenta de la siguiente manera: dado el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

[1] Aún en la literatura matemática en español, suele usarse el término pullback

Si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "l"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo, existe un único morfismo $k : E \to W$ *tal que el diaframa:*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "h"'] \arrow[dr, dashed, "k"'] \arrow[dd, "l"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& W \arrow[ur, "f'"'] \arrow[dl, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Conmuta en todos los caminos posibles.

Veamos el concepto dual de jalador.

Definición 2.9. *Par una* $\mathcal{A}$*-fuente* $(Z, f : Z \to X, g : Z \to Y)$*, diremos que el* $\mathcal{A}$*-pozo* $(W, f' : Y \to W, g' : X \to W)$ *es un empujador* [2] *de* f *y* g *si*

1. $f'g = g'f$ *y*

2. si el $\mathcal{A}$*-pozo* $(E, h : Y \to E, l : X \to E)$ *cumple que* $hg = lf$*, entonces existe un único* $\mathcal{A}$*-morfismo* $t : W \to E$*, tal que* $tf' = h$ *y* $tg' = l$*.*

En diaframas, dado el diaframa:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "g'"] \\
Y \arrow[r, "f'"'] & W
\end{tikzcd}
$$

conmutativo, si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "l"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & E
\end{tikzcd}
$$

[2] Comúnmente llamado pushout

es conmutativo, entonces existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $t : W \to E$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dl, "l"'] \arrow[dd, "g'"] \\
& E & \\
Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[rr, "f'"'] & & W \arrow[ul, dashed, "t"']
\end{tikzcd}$$

Conmuta en todos los caminos posibles.

3. Límites y colímites

En general, todo funtor de un categoría pequeña a una categoría será llamado un diagrama. Veamos las siguientes defininciones:

Definición 3.1. *Sean $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, $\mathcal{A}$ una categoría y $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un funtor. Al funtor D s ele llamará diagrama.*

Sea D un diagrama, enronces:

1. Una D-fuente natural en $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{A}$-fuente de la forma $(M, (c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ tal que si $a \in Hom_{\mathcal{D}}(i, j)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(a)"'] \\
& D(j)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

2. Un D-pozo natural en $\mathcal{A}$ es un $\mathcal{A}$-pozo de la forma $(M, (c_i : D(i) \to M)_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ tal que si $a \in Hom_{\mathcal{D}}(i, j)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[r, "D(a)"'] \arrow[dr, "c_i"'] & D(j) \arrow[d, "c_j"'] \\
& M
\end{tikzcd}$$

conmuta

Definición 3.2. *Dado $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un digrama en $\mathcal{A}$.*

1. Un D-límite es una D-fuente natural en $\mathcal{A}$ de la forma$(L, (c_i : L \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{D})})$, tal que si $(M, (m_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ es otra D-fuente natural en $\mathcal{A}$, entonces existe un único morfismo $k : M \to L$, llamado el morfismo conector, tal que el *digrama:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "m_i"'] & & L \arrow[dl, "c_i"] \\ & D(i) & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in Ob(\mathcal{D})$.

2. Un D*-co-límite es un* D*-pozo natural en* $\mathcal{A}$ *de la forma*$(L, (c_i : D(i) \to L)_{i \in Ob(\mathcal{D})})$, *tal que si* $(M, (m_i : D(i) \to M)_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ *es otro* D*-pozo natural en* $\mathcal{A}$, *entonces existe un único morfismo* $\overline{k} : L \to M$, *llamado el morfismo conector, tal que el digrama:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "m_i"'] & & L \arrow[ll, "\overline{k}"'] \arrow[dl, "c_i"] \\ & D(i) & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in Ob(\mathcal{D})$.

Observación 3.3. *Si* $\mathcal{F} = (L, (c_i : L \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ *es un* D*-límite, entonces es una* $\mathcal{A}$*- monofuente. tambien todo* D*-co-límite es un* $\mathcal{A}$*-epipozo.*

Lema 3.4. *Los* D*-límites y* D*-colímites son únicos salvo isomorfismo,*

Demostración: Veamos el caso del co-límite. Sean $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ un diagrama, $(L, (c_i : D(i) \to L)_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ y $(M, (m_i : D(i) \to L)_{i \in Ob(\mathcal{D})})$ dos D-co-límites. Entonces existen $k_1 : L \to M$ y $k_2 : M \to L$, $\mathcal{A}$-morfismos conectores es decir $k_1 c_i = m_i$ y $k_2 m_i = c_i$, se puede ver que los diagramas:

$$\begin{tikzcd} L & & L \arrow[ll, "k_2 k_1"'] \\ & D(i) \arrow[ul, "c_i"] \arrow[ur, "c_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "k_1 k_2"] & & M \\ & D(i) \arrow[ul, "m_i"] \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} L & & L \arrow[ll, "Id_L"'] \\ & D(i) \arrow[ul, "c_i"] \arrow[ur, "c_i"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "Id_M"] & & M \\ & D(i) \arrow[ul, "m_i"] \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. Por la unicidad de los morfismos conectores conluimos que $Id_L = k_2 k_1$ y $Id_M = k_1 k_2$, luego L y M son isomorfos. $\square$

Sean $\mathcal{A}$ una categoria$\{C_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ y $\{D_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ donde I es conjunto.Si $(D, (f_\alpha : D \to D_\alpha)_{\alpha \in I})$ es una $\mathcal{A}$-fuente y $(D, (q_\alpha : D \to D_\alpha)_{\alpha\in I})$ es un producto. Entonces existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $F : D \to D$ tal que $q_\alpha F = f_\alpha$, llamado el producto de la familia $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$. Para esto observemos que, como $(D, (q_\alpha : D \to D_\alpha)_{\alpha\in I})$ es un producto, por tanto para la $\mathcal{A}$-fuente $(D, (f_\alpha : D \to D_\alpha)_{\alpha\in I})$, existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $F : D \to D$ tal que $q_\alpha F = f_\alpha$. Denotaremos por $F = \prod_{\alpha\in I} f_\alpha$

Lema 3.5. *1. Si $(C, (p_\alpha : C \to C_\alpha)_{\alpha\in I})$ es un producto para la familia$\{C_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathcal{A})$, entonces existe $D : I \to \mathcal{A}$ con I una categoría pequeña y D un diagrama en $\mathcal{A}$ tal que $(C, (p_\alpha : C \to C_\alpha)_{\alpha\in I})$ es un D-límite.*

2. Si $(M, (i_\alpha : C_\alpha \to M)_{\alpha\in I})$ es un co-producto para la familia $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces existe $K : I \to \mathcal{A}$ con I una categoria pequeña y K diagrama tal que $(M, (i_\alpha : C_\alpha \to M)_{\alpha\in I})$ es un K- co-límite.

Demostración: 1. Sea I la categoría cuyos objetos son los elementos de I, con morfismos tales que si $\alpha, \beta \in Ob(I)$:

$$Hom_I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \{Id_\alpha\} & \text{si} \quad \alpha = \beta \\ \emptyset & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

A las categorías con este tipo de morfismos se les llama categorías discretas.

Si $D(\alpha) = C_\alpha$, entonces D es un funtor y cualquier $\mathcal{A}$-fuente de forma $(M, (f_\alpha : M \to D(\alpha))_\alpha \in I)$ es una D-fuente natural, si $(C, (p_\alpha : C \to D(\alpha) = C_\alpha)_{\alpha\in I}$ es un producto y $(M, (q_\alpha : M \to C_\alpha))$ una $\mathcal{A}$-fuente ya que es una D-fuente natural, y además existe $k : M \to C$ tal que $p_\alpha k = q_\alpha$, por los tanto $(C, (p_\alpha : C \to C_\alpha))$ es un D-límite.

2. De manera análoga. □

Veamos las siguientes propiedades:

Corolario 3.6. *Todo producto es una $\mathcal{A}$-monofuente y todo co-producto es un $\mathcal{A}$-epipozo.*

Sea $I = \{a, b\}$ con $Hom_I(a, a) = \{Id_a\}$, $Hom_I(b, b) = \{Id_b\}$ y $Hom_I(a, b) = \{\alpha, \beta\}$ a la categoría I se le puede "dibujar" como:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\beta"'] \\ a \arrow[r, "\alpha"'] & b \end{tikzcd}$$

Sea $D : I \to \mathcal{A}$ definido como $D(\alpha) = f : X = D(a) \to Y = D(b)$, $D(\beta) = g : X = D(a) \to Y = D(b)$, trivialmente $D(Id_a) = Id_X$, $D(Id_b) = Id_Y$.

Sea $I' = \{a, b\}$ con $Hom_I(a, a) = \{Id_a\}$, $Hom_{I'}(b, b) = \{Id_b\}$ y $Hom_{I'}(b, a) = \{\alpha, \beta\}$ a la categoría I se le puede "dibujar" como:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "\beta"'] \\ b \arrow[r, "\alpha"'] & a \end{tikzcd}$$

Sea $D' : I' \to \mathcal{A}$ definido como $D'(\alpha) = f : Y = D'(a) \to X = D'(b)$, $D'(\beta) = g : Y = D(a) \to X = D'(b)$, trivialmente $D'(Id_a) = Id_Y$, $D(Id_b) = Id_X$.

Lema 3.7. *Sean f, g $\mathcal{A}$-morfismos. Entonces:*

1. Existe un igualador para f y g si y sólo si existe un D-límite, para el diagrama $D : I \to \mathcal{A}$.

2. Existe un co-igualador para f y g si y sólo si existe un D'-co-límite, para un diagrama $D' : I' \to \mathcal{A}$.

Demostración:

Sea $(c_a : M \to D(a), c_b : M \to D(b))$ un D-límite, afirmamos que (c_a, M) es un igualador de f y g. Notar que la naturalidad del D-límite implica que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "c_a"'] \arrow[dr, "c_b"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ & Y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "c_a"'] \arrow[dr, "c_b"'] & X \arrow[d, "g"'] \\ & Y \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Así que, $fc_a = c_b$ y $gc_a = c_b$. Ahora, si $h : L \to X$, cumple que $fh = gh$, entonces la $\mathcal{A}$-fuente $(h : L \to X, gh : L \to Y)$ es D-natural, luego existe $r : L \to M$ tal que $c_a r = h$. Lo cual concluye lo deseado, es decir $(M, c_a : M \to X)$ es un igualador de f y g.

Ahora supongamos que (M, e) es un igualador de f y g, sea la $\mathcal{A}$-fuente $(e : M \to X, fe : M \to Y)$, veamos que es D-natural, pero $ge = fe$, luego es D-natural, ahora sea la D-fuente natural $(h : L \to X, l : L \to Y)$, entonces $D(\alpha)h = D(\alpha)$ y $D(\alpha)l = D(\alpha)$ o sea $fh = g = fl$, por ser igualador tenemos que existe un único morfismo $r : X \to M$ tal que $er = h$, pero $fer = fh$, pero por la $D-$ naturalidad tenemos que $hf = l$, luego la $\mathcal{A}$-fuente $(e : M \to X, fe : M \to Y)$ es un $D-$límite.

2. Se obtiene dualizando la demostración anterior. □

Corolario 3.8. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. Sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ y (E, e) un igualador de f y g entonces e es un monomorfismo en $\mathcal{A}$.

2. Sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$, si (E, e) es un igualador de f y g y e es epimorfismo, entonces e es isomorfismo.

Demostración:

1. Sean $u, v : H \to M$ $\mathcal{A}$- morfismos tales que $eu = ev$. Sabemos que $fe = ge$. Como $f(eu) = g(eu)$, entonces existe un único $k : H \to M$ tal que $ek = eu$, entonces $v = k$; pero trivialmente $eu = eu$, luego $u = v$, luego e es monomorfismo.

2. Ahora, supongamos que (E, e) es un igualador de f y g, además que e es epimorfismo. Como $fe = ge$, implicamos que $f = g$, es claro que $fId_x = gId_x$, entonces existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $K : X \to E$ tal que $ek = Id_x$, también $e(ke) = (ek)e = e = eId_E$, como e es mnomorfismo, tenemos que $ke = Id_E$ □

Veamos el siguiente Lema técnico.

Lema 3.9. *En cualquier categoría $\mathcal{A}$:*

1. Dado el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "h''"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ d \arrow[r, "f"'] & e \arrow[r, "g"'] & l \end{tikzcd}$$

i. Si

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[d, "h''"'] \\ d \arrow[r, "f"'] & e \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "h''"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ e \arrow[r, "g"'] & l \end{tikzcd}$$

son jaladores, entonces

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g'f'"'] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ d \arrow[r, "gf"'] & l \end{tikzcd}$$

es jalador.

ii. Si

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "h''"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ e \arrow[r, "g"'] & l \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "g'f'"'] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ d \arrow[r, "gf"'] & l \end{tikzcd}$$

son jaladores, entonces

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[d, "h''"'] \\ d \arrow[r, "f"'] & e \end{tikzcd}$$

es jalador.

2. $f : a \to b$ *es monomorfismo si y sólo si el siguiente diagrama es jalador:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "Id_a"'] \arrow[d, "Id_a"'] & a \arrow[d, "f"'] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

3. Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "t_1"'] & b \arrow[d, "t_2"'] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

es un jalador y f *es monomorfismo, entonces* g *es monomorfismo.*

Demostración: 1. i. Sea

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\ & & c \arrow[d, "h"'] \\ & d \arrow[r, "gf"'] & l \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo. Formamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "f\beta"'] & & \\ & & c \arrow[d, "h"'] \\ & e \arrow[r, "g"'] & l \end{tikzcd}$$

Como $h\alpha = (gf)\beta = g(f\beta)$, el diagrama es conmutativo, y por hipótesis, existe un único morfismo $h_1 : W \to b$ tal que

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "h_1"] \arrow[ddr, "f\beta"'] & & \\ & b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "h''"'] & c \arrow[d, "h"'] \\ & e \arrow[r, "g"'] & l \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $g'h_1 = \alpha$ y $h''h_1 = f\beta$. Por tanto el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "h_1"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& & b \arrow[d, "h''"'] \\
& d \arrow[r, "f"'] & e
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así que existe un único morfismo $h_2 : W \to a$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "h_1"] \arrow[dr, dashed, "h_2"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[d, "h''"'] \\
& d \arrow[r, "f"'] & e
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir $h'h_2 = \beta$ y $f'h_2 = h_1$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "h_2"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "g'f'"'] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"'] \\
& d \arrow[r, "gf"'] & l
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, solo resta demostrar que $(g'f')h_2 = \alpha$, pero $(g'f')h_2 = g'(f'h_2) = g'h_1 = \alpha$. Par finalizar demostremos que h_2 es único. Pero si $t : W \to a$ es tal que $h't = \beta$ y $(g'f')t = \alpha$. Tenemos que $h''(f't) = (fh')t = f\beta$ y ademaás $g'(f't) = \alpha$, por la unicidad de h_1, tenemos que $h_1 = f't$ y $h't = \beta$. Por la unicidad de h_2, conlcuimos que $t = h_2$.

1. ii. Ahora supongamos que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & (1) \\
& & b \arrow[d, "h''"'] \\
& d \arrow[r, "f"'] & e
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "g'\alpha"] \arrow[ddr, "f\beta"'] & & \\
& & c \arrow[d, "h"'] \\
& e \arrow[r, "g"'] & l
\end{tikzcd}$$

por hipótesis existe un único morfismo $h_1 : W \to b$ tal que

(2)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "g'\alpha"] \arrow[dr, dashed, "h_1"] \arrow[ddr, "f\beta"'] & & \\
& b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "h''"'] & c \arrow[d, "h"'] \\
& e \arrow[r, "g"'] & l
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir $g'h_1 = g'\alpha$ y $h''h_1 = f\beta$. Ahora formamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "g'h_1"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "g'f'"'] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"'] \\
& d \arrow[r, "gf"'] & e
\end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo. Entonces existe un único $h_2 : W \to a$ tal que

(3)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "g'h_1"] \arrow[dr, dashed, "h_2"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "g'f'"'] \arrow[d, "h'"'] & c \arrow[d, "h"'] \\
& d \arrow[r, "gf"'] & e
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Resta desmostrar que

(3)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "h_2"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & b \arrow[d, "h''"'] \\
& d \arrow[r, "f"'] & e
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Pero, ver (3) y (2), $g'(f'h_2) = g'h_1 = g'\alpha$, ver nuevamente (3), y $h''(f'h_2) = (h''f')h_2 = (fh')h_2 = f(h'h_2) = f\beta$.así por la unicidad de h_1, conluimos que $h_1 = f'h_2$. Como, ver (2), $g'\alpha = g'h_1$, ahora ver (1), $h''\alpha = f\beta$, por la unicidad de h_1 tenemos que $\alpha = h_1$, es decir $f'h_2 = \alpha$, es claro, por (3), que $h'h_2 = \beta$. Ahora, demostremos la unicidad. Si $t : W \to a$ tal que $f't = \alpha$ y $h't = \beta$, entonces $g'(f't) = g'\alpha = g'h_1$, por la unicidad de h_2, tenemos que $t = h_2$.

2. Suponemos que f es monomorfismo y sea

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& & a \arrow[d, "f"'] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo, comprobemos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "Id_a"'] \arrow[d, "Id_a"'] & a \arrow[d, "f"'] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es claro que $Id_a\alpha = \alpha$. Po otra parte , sabemos que $f\alpha = f\beta$, podemso concluir que $\alpha = \beta$, así que $Id_a\alpha = \beta$. Veamos la unicidad de α; es claro que si $Id_a\alpha_0 = \alpha$, entonces $\alpha = \alpha_0$.

Ahora supongamos que $f\alpha = f\beta$ y demostremos que $\alpha = \beta$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& & a \arrow[d, "f"'] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos que existe un unico $h : W \to a$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "h"'] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& a \arrow[r, "Id_a"'] \arrow[d, "Id_a"'] & a \arrow[d, "f"'] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces $hId_a = \alpha$ y $hId_a = \beta$, luego $\alpha = \beta$.

3. Sean $\alpha, \beta : W \to a$ tales que $g\alpha = g\beta$. Construimos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rrd, "g\alpha=g\beta"] \arrow[rdd, "t_1\alpha"'] & & \\ & & b \arrow[d, "t_2"'] \\ & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo; por hipótesis de jalador, existe $s : W \to a$ único tal que

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rrd, "g\alpha=g\beta"] \arrow[rd, dashed, "s"] \arrow[rdd, "t_1\alpha"'] & & (*) \\ & a \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "t_1"'] & b \arrow[d, "t_2"'] \\ & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si sutituimos s por α o β en (*) los diagramas

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rrd, "g\alpha=g\beta"] \arrow[rd, dashed, "\alpha"] \arrow[rdd, "t_1\alpha"'] & & (**) \\ & a \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "t_1"'] & b \arrow[d, "t_2"'] \\ & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[rrd, "g\alpha=g\beta"] \arrow[rd, dashed, "\beta"] \arrow[rdd, "t_1\alpha"'] & & (***) \\ & a \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "t_1"'] & b \arrow[d, "t_2"'] \\ & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

son conmutativos, solo comprobaremos que $t_1\alpha = t_1\beta$, pero $f(t_1\alpha) = (ft_1)\alpha = (t_2g)\alpha = t_2(g\alpha)$ y $f(t_1\beta) = (ft_1)\beta = (t_2g)\beta = t_2(g\alpha)$, por ser f monomorfismo obtenemos que $t_1\alpha = t_1\beta$, así que (**) y (***) son conmutativos, luego $\alpha = \beta$. $\square$

Teorema 3.10. *En una categoría $\mathcal{A}$ son equivalentes:*
1. *$\mathcal{A}$ tiene jaladores y objeto terminal.*
2. *$\mathcal{A}$ tiene productos finitos e igualadores.*
3. *$\mathcal{A}$ tiene límites finitos.*

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n \in Ob(\mathcal{A})$. Haremos inducición sobre n. Sean $X_1, X_2 \in Ob(\mathcal{A})$. Además sean $T \in Ob(\mathcal{A})$ objeto terminal y $f_1, f_2 \in Mor(\mathcal{A})$, tales que $\{f_1\} = Hom_{\mathcal{A}}(X_1, T)$, $\{f_2\} = Hom_{\mathcal{A}}(X_2, T)$. Tomamos $(C, p_i : C \to X_i)_{i\in\{1,2\}}$ un jalador de $(T, (f_i : X_i \to T)_{i\in\{1,2\}})$, es decir, el digrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_i"'] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & T \end{tikzcd}$$

es un jalador. Queremos demostrar que la $\mathcal{A}$-fuente $(C,(p_i : C \to X_i)_{i\in\{1,2\}})$, es un producto para la familia $\{X_1, X_2\}$. Para esto, sea $(D,(q_i : C \to X_i)_{i\in\{1,2\}})$ una $\mathcal{A}$-fuente, veamos que

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "q_1"'] \arrow[d, "q_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"'] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & T \end{tikzcd}$$

conmuta, pero $f_1q_1, f_2q_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(D,T)$, entonces $f : 1q_1 = f_2q_2$, así que existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $D \to C$ tal que

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] & & \\ & C \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"'] \\ & X_2 \arrow[r, "f_2"'] & T \end{tikzcd}$$

conmuta. Es claro que hay productos finitos.

Sean $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$, ahora construiremos un igualador para f y g. Por lo anterior podemos construir un producto de la famila $\{X,Y\}$. Sea $(C,(p_1 : C \to X, p_2 : C \to Y))$ tal producto, veamos las siguientes $\mathcal{A}$-fuentes: $(X,(f : X \to Y, Id_X : X \to X))$, $(X,(g : X \to Y, Id_X : X \to X))$, por la propiedad del producto existen $F : X \to C$ y $G : X \to C$ tales que $p_1F = I_X$, $p_2F = f$, $p_1G = I_X$,$p_2G = g$. Construimos un jalador para el pozo $(C,(F : X \to C, G : X \to C))$, o sea una fuente $(W,(\alpha : W \to X, \beta : W \to X))$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & X \arrow[d, "F"'] \\ X \arrow[r, "G"'] & C \end{tikzcd}$$

es jalador. Entonces $F\alpha = G\beta$ y $Id_X\alpha = p_1(F\alpha) = p_1(G\beta)$, luego $\alpha = \beta$. Por tanto $F\alpha = G\alpha$, de donde $p_2(F\alpha) = p_2(G\alpha)$, por tanto $f\alpha = g\alpha$. Finalizamos, si demsotramos que (W,α) es un igualador para f y g. Sea $h : Z \to X$ tal que $fh = gh$. Queremos demostrar la propeiadad universal para esta pareja.

Observar que $(p_2F)h = fh = gh = (p_2G)h$, además $(p_1F)h = Id_Xh = (p_1G)h$. La fuente producto es una monofuente, así que $Fh = Gh$. Por la propiedad de jalador tenemos que existe un único morfismo $t : Z \to W$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "h"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& W \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "F"'] \\
& X \arrow[r, "G"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmuta, tenemos que $\alpha t = h$, la cual es la propiedad universal requerida.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $\mathcal{K}$ una categoría con un número finito de objetos y $D : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ un diagrama. Tenemos que el conjunto $\{D(i) : i \in Ob(\mathcal{K})\}$ es finito. Por hipótesis existe el producto de la familia $\{D(i) : i \in Ob(\mathcal{K})\}$ sea la $\mathcal{A}$-fuente $(X, (p_i : X \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ un $\mathcal{A}$- producto de la familia $\{D(i) : i \in Ob(\mathcal{K})\}$.

Para cada $i \in Ob(\mathcal{K})$, sea $\mathcal{M}_i = \bigcup_{j \in Ob(\mathcal{K})} Hom_{\mathcal{K}}(j, i)$. Para cada $j \in Ob(\mathcal{K})$ y $a \in Hom_{\mathcal{K}}(j, i)$ sean $s_a = D(a)p_j : X \to D(i)$ y $t_a = p_j : X \to D(j)$. Consideremos las $\mathcal{A}$-fuentes $\mathcal{F}_i = (X, (s_a : X \to D(i)))$ y $\mathcal{G}_i = (X, (t_a : X \to D(i)))$. POr la propiedad universal del producto de la familia $\{D(cos(a)) : a \in Mor(\mathcal{K})\}$, existen morfismos unicos $s, t : X \to \prod_{a \in Mor(\mathcal{K})} D(cod(a))$ tales que para cada $a \in Mor(\mathcal{K})$, conmutan los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "s_a"'] & \prod_{a \in Mor(\mathcal{K})} D(cod(a)) \arrow[d, "p_{cod(a)}"'] \\
& D(cod(a))
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "t"'] \arrow[dr, "t_a"'] & \prod_{a \in Mor(\mathcal{K})} D(cod(a)) \arrow[d, "p_{cod(a)}"'] \\
& D(cod(a))
\end{tikzcd}$$

Sea $h : Z \to X$ un igualador de s y t. Entonces $sh = th$. En particular para cada $a \in Hom_{\mathcal{K}}(j, i)$, tenemos que $s_a h = (p_i s)h = p_i(sh) = p_i(th) = (p_i t)h = t_a h$.

Veamos que $\mathcal{L}(Z, (p_i h : Z \to D(i)_{i \in Ob(\mathcal{K})}))$ es un $D-$límite: $\mathcal{L}$ es una $D-$fuente natural ya que si $a : j \to i$, entonces conmuta el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "p_j h"'] \arrow[dr, "p_i h"'] & D(j) \arrow[d, "D(a)"'] \\
& D(i)
\end{tikzcd}$$

En efecto, $D(a)(p_jh) = (D(a)p_j)h = s_ah = t_ah = p_ih$. Además si $\mathcal{B} = (Z', (b_i : Z' \to D(i))_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es una $D-$fuente natural, entonces existe $b : Z' \to X$ tal que para todo $i \in Ob(\mathcal{K})$, $p_ib = b_i$ (por la propiedad universal del producto).

Veamos que $sb = tb$. Para ello bastará comprobar que para todo $a \in Mor(\mathcal{K})$ se cumple que $p_{cod(a)}(sb) = p_{cod(a)}(tb)$, lo cual se cumple ya que si $a \in Mor(\mathcal{K})$, digamos que $a : j \to i$, entonces $p_i(sb) = (p_is)b = s_ab = (D(a)p_j)b = D(a)(p_jb) = D(a)b_j = b_i = p_ib = t_ab = (p_it)b = p_i(tb)$.

Como h es igualador de s y t, existe un único morfismo $g : Z' \to Z$ tal que $hg = b$. Por lo tanto, para cada $i \in Ob(\mathcal{K})$, $(p_ih)g = p_i(hg) = p_ib = b_i$, luego $\mathcal{L}$ es un $D-$límite.

3. $\Rightarrow$ 1. Bastará demostrar que los jaladores y los objetos terminales son $D-$límites para $D : I \to \mathcal{A}$ funtor e I una categoría finita, adecuados.

Sean $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$, morfismos de $\mathcal{A}$. Sea I la categoría descrita por las flechas:

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[d, "\beta"'] \\ a \arrow[r, "\alpha"'] & b \end{tikzcd}$$

El funtor D, es definido como $D(\alpha) = f : X = D(c) \to D(b) = Y$, $D(\beta) = g : D(a) = Z \to D(b) = Y$. Es decir:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\beta"'] & \arrow[r, "D"'] & {} & & Z \arrow[d, "g"'] \\ c \arrow[r, "\alpha"'] & b & & & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $(m_a : M \to D(a)$, $m_b : M \to D(b)$, $m_c : M \to D(c)$ un $D-$límite, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m_a"'] \arrow[dr, "m_b"] \arrow[ddr, "m_c"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ & Y \\ & Z \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sea

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[d, "g"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmutativo, por tanto la $\mathcal{A}$-fuente

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g'"'] \arrow[dr, "gf'"] \arrow[ddr, "f'"'] & X \\
 & Y \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

es natural, ya que

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g'"'] \arrow[dr, "gf'"] \arrow[ddr, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
 & Y \\
 & Z \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo; luego existe $r : L \to M$ tal que

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr, "g'"'] & & \\
 & M \arrow[r, "m_c"'] \arrow[d, "m_a"'] & Z \arrow[d, "g"'] \\
 & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, luego

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m_c"'] \arrow[d, "m_a"'] & Z \arrow[d, "g"'] \\
X \arrow[r, "d"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es jalador.

Finalmente, si $\mathcal{K}$ es la categoría vacía, $D : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ el "funtor vacío" y $(L, (l_i))$ es un $D-$límite, entonces L es un objeto terminal. Es claro que $Ob(\mathcal{K}) = \emptyset$ y $Mor(\mathcal{K}) = \emptyset$, sea $D : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$, entonces si $(L(l_i))$ es un $D-$límite, y $A \in Ob(\mathcal{A})$, entonces (A, l_i) es una $D-$fuente natural, la demostración es por vacuidad ya que D es el funtor vacío, entonces existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $f : A \to L$, luego L es terminal. $\square$

4. El funtor subobjetos

En *Set*, la categoría de conjuntos, tenemos dos objetos importantes junto con morfismos que permiten tener toda la información de los subconjuntos de un conjunto dado. Sea $1 = \{0\}$ el conjunto singular y $2 = \{0, 1\}$ un conjunto de dos puntos: si X es un conjunto y $M \subseteq X$, podemos definir los siguientes morfismos en

Set, $C_1^M : M \to 1$ donde $C_1^M(x) = 0$ y $C_1^1 : 1 \to 2$ donde $C_1^1(0) = 0$, $\phi_M : X \to 2$ donde $\phi_M(x) = 0$ si $x \in M$ y $\phi_M(x) = 1$ si $x \notin M$, $i_M : M \to X$ donde $i_M(x) = x$. Los cuales cumplen que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "C_1^M"'] \arrow[d, "i_M"'] & 1 \arrow[d, "C_1^1"] \\
X \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es un jalador en Set. En efecto, sea

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& M \arrow[r, "C_1^M"'] \arrow[d, "i_M"] & 1 \arrow[d, "C_1^1"'] \\
& X \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo. Notar que el único posible morfismo entre Z y 1 es el morfismo constante C_1^Z; así $\beta = C_1^Z$. Sea $\bar{\alpha} : Z \to M$, donde $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$. Para ver que esta bien definida bastará ver que $\alpha(x) \in M$. pero $C_1^1(C_1^Z(x)) = \phi_M(\alpha(x)) = 1$, luego $\alpha(x) \in M$. También $C_1^M \bar{\alpha} = C_1^Z$, por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "C_1^Z"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\alpha}"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& M \arrow[r, "C_1^M"'] \arrow[d, "i_M"] & 1 \arrow[d, "C_1^1"'] \\
& X \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. La unicidad de $\bar{\alpha}$ es clara.

Las herramienta para construir una teoría de los subobjetos de un objeto X, tendría que hacerse para los monomorfismos con codominio X; pero, si $l : Z \to X$ es un monomorfismo entonces $l \cong i_{l(Z)}$, ver Proposición 2.4 . En efecto, sea $l|^{l(Z)} : Z \to l(Z)$, que es isomorfismo en **Set**; entonces $h = (l|^{l(Z)})^{-1}$ cumple que $lh = i_{l(Z)}$. Por otro lado si

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "C_1^M"'] \arrow[d, "i_M"'] & 1 \arrow[d, "C_1^1"] \\
Y \arrow[r, "\phi_m"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es un jalador, sea $f \cong^{h}$; entonces

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h^{-1}"'] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "C_1^M"'] \arrow[d, "i_M"'] & 1 \arrow[d, "C_1^1"'] \\
Y \arrow[r, "Id_Y"'] & Y \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Veamos que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "C_1^M h^{-1}"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "C_1^1"'] \\
Y \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Es jalador. para esto, sea

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[ddr, "f"'] & M \arrow[r, "C_1^M"] & 1 \arrow[dd, "C_1^1"'] \\
 & L \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & Y \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Entonces existe $g : L \to M$, tal que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[ddr, "f"'] & M \arrow[r, "C_1^M"] & 1 \arrow[dd, "C_1^1"'] \\
 & L \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & Y \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es claro que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[ddr, "f"'] & M \arrow[r, "C_1^M"] & 1 \arrow[dd, "C_1^1"'] \\
 & L \arrow[ul, dashed, "hg"] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \\
 & Y \arrow[r, "\phi_M"'] & 2
\end{tikzcd}$$

conmuta. la unicidad de g y que h es isomorfismo, implica la unicidad de hg.

Esta situación se busca generalizar: Sea $\mathcal{C}$ una categoría, tenemos que dado $X \in Ob(\mathcal{X})$, existe una relación de equivalencia en la clase $\mathcal{M}_X = \{f \in Mor(\mathcal{C}) : Cod(f) = X\}$, lo siguientes diagramas conmutativos demuestran que la relación: $f \sim g$ si y sólo si existe h isomorfismo tal que $fh = g$ es una relación de equivalencia:

$f \sim f$ $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ X & \end{tikzcd}$, $f \sim g, g \sim l \Rightarrow f \sim l$ $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "l"] \\ & X & \end{tikzcd}$, $f \sim g \Rightarrow$ $g \sim f$ $\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ X & \end{tikzcd}$ con h_1, h_2, h isomorfismos, tales que: $fh_1 = g, gh_2 = l, fh = g$.

Definición 4.1. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría diremos que es bien potenciada si para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$, las clases de equivalencia en $\mathcal{M}_X$ tienen un conjunto de representantes. Denotaremos por $Sub(X)$ a la clase de representantes de la relación de equivalencia $\sim$.*

Lema 4.2. *Sea $f : M \to X$, tal que $f \in \mathcal{M}_X$ y $g : Y \to X$; si existe el jalador*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces $f' \in \mathcal{M}_Y$ y f' es único salvo isomorfismo.

Demostración: Supongamos que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "h'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

es jalador; por Lema 3.9, 3, tenemos que $f' \in \mathcal{M}_Y$, demostremos que $l' \sim f'$. Por propiedades de jaladores existe s_1 y s_2 tales que

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "g'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\ & T \arrow[ul, dashed, "s_1"] \arrow[ur, "l'"] \arrow[dl, "h'"'] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "l'"] \arrow[dd, "h'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\ & Z \arrow[ul, dashed, "s_2"] \arrow[ur, "f'"] \arrow[dl, "g'"'] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

conmutan, luego

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "g'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& Z \arrow[ul, dashed, "s_1s_2"'] \arrow[ur, "f'"'] \arrow[dl, "g'"] & \\
M \arrow[rr, "f"'] & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "l'"] \arrow[dd, "h'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& T \arrow[ul, dashed, "s_2s_1"'] \arrow[ur, "l'"'] \arrow[dl, "h'"] & \\
M \arrow[rr, "f"'] & & X
\end{tikzcd}$$

conmutan, entonces $s_2s_1 = Id_T$ y $s_1s_2 = Id_Z$, por tanto $f' \sim l'$. $\square$

Resulta que si $\mathcal{C}$ es bien potenciada, entonces $Sub(X)$ es un conjunto para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$. Vamos a definir el siguiente funtor.

Definición 4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría bien potenciada con límites finitos. Definimos $Sub : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Para $X \in Ob(\mathcal{C})$, sea $Sub(X)$ el conjunto de representantes de $\mathcal{M}_X$ si $f : Y \to X$ tal que $f \in Mor(\mathcal{C})$, entonces $Sub(f) : Sub(X) \to Sub(Y)$, definida como $Sub(f)[h] = [t]$ tal que*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"'] \\
W \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

es jalador. Por el Lema 4.2 $Sub(f)$ esta bien definida.

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría bien potenciadad con límites finitos. La relación $Sub : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ es funtor contravariante.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Id_X : X \to X$, entonces $Sub(I_X)([h]) = [T]$, donde

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "Id_X"'] \\
W \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

es jalador. Queremos demostrar que $h \sim t$. Pero,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "Id_W"'] & & \\
& Z \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "Id_X"'] \\
& W \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego existe un único morfismo $k : W \to Z$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "h"] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[ddr, "Id_W"'] & & \\
& Z \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "Id_X"'] \\
& W \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego $f'k = Id_W$ y $tk = h$ luego $t \leq^{f'} h$ y como $hf' = t$ tenemos que $h \leq^{k} t$, ver Proposición 2.4, luego $h \sim t$. Sólo resta demostrar que $Sub(fg) = Sub(g)Sub(f)$; sea $f : N \to X$, $g : Y \to N$ morfismos de $\mathcal{C}$. Sea $h \in \mathcal{M}_X$,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h_0"'] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[d, "fg"'] & M' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "f'"'] & N \arrow[d, "f"'] \\
M \arrow[r, "h"'] & X & M \arrow[r, "h"'] & K
\end{tikzcd}$$

jaladores. Es claro que $h' \in \mathcal{M}_N$ y que $Sub(f)([h]) = [h']$; sea

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[r, "h''"'] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\
M' \arrow[r, "h'"'] & N
\end{tikzcd}$$

jalador; queremos demostrar que $h'' \sim h_0$, y como $Sub(g)(Sub(f)([h])) = Sub(g)([h']) = [h'']$, $[h_0] = Sub(fg)([h])$ concluimos que $Sub(fg)[h] = Su(g)(Sub(f)([h]))$.

Notemos que $\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "gh_0"'] \arrow[d, "\gamma"'] & N \arrow[d, "f"'] \\
M \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$

es conmutativo, luego existe $\alpha_1 : W \to M''$ tal que

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, "h'"'] \arrow[dd, "f'"'] & & N \arrow[dd, "f"'] \\
& W \arrow[ul, dashed, "\alpha_1"] \arrow[ur, "gh_0"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
M \arrow[rr, "h"'] & & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, pero $\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h_0"'] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\
M' \arrow[r, "h'"'] & N
\end{tikzcd}$

también conmuta, luego existe $\alpha_2 : W \to M''$ tal que

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[rr, "h''"] \arrow[dd, "g'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& W \arrow[ul, dashed, "\alpha_2"'] \arrow[ur, "h_0"'] \arrow[dl, "\alpha_1"] & \\
M' \arrow[rr, "h'"'] & & N
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero
$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[r, "h''"'] \arrow[d, "f'g'"'] & Y \arrow[d, "gf"] \\
M \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, así que existe $\alpha_0 : M'' \to W$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dd, "\gamma"'] & & Y \arrow[dd, "fg"] \\
& M'' \arrow[ul, dashed, "\alpha_0"'] \arrow[ur, "h''"'] \arrow[dl, "f'g'"] & \\
M \arrow[rr, "h"'] & & X
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $h_0\alpha_0\alpha_2 = h''\alpha_2 = h_0$ y $\gamma\alpha_0\alpha_2 = f'g'\alpha_2 = f'\alpha_1 = \gamma$, entonces

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dd, "\gamma"'] & & N \arrow[dd, "fg"] \\
& W \arrow[ul, dashed, "\alpha_0\alpha_2"'] \arrow[ur, "h_0"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
M' \arrow[rr, "h"'] & & N
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego $\alpha_0\alpha_2 = Id_W$. Analogamente

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[rr, "h''"] \arrow[dd, "g'"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
& M'' \arrow[ul, dashed, "\alpha_2\alpha_0"'] \arrow[ur, "h''"'] \arrow[dl, "g'"] & \\
M \arrow[rr, "h'"'] & & N
\end{tikzcd}$$

conmuta ya que $h''\alpha_2\alpha_0 = h_0\alpha_0 = h''$, pero $h'(g'\alpha_2\alpha_0) = h'(\alpha_1\alpha_0) = (gh_0)\alpha_0 = gh'' = h'g'$, luego $h'(g'(\alpha_2\alpha_0)) = h'g'$ por ser h' monomorfismo. concluimos que $g'(\alpha_2\alpha_0) = g'$, así que $\alpha_2\alpha_0 = Id_{M''}$ y como $h_0\alpha_0 = h''$, luego $h_0 \cong h''$ o sea $h_0 \sim h''$. $\square$

5. subobjeto clasificador

Para categorías con límites finitos, tenemos que la categoría tiene objeto terminal y jaladores, definiremos un objeto clasificador como algo parecido a lo que tenemos en conjuntos.

Definición 5.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites finitos. Un subobjeto clasificador es un monomorfismo $true : 1 \to \Omega$, donde 1 es un objeto terminal de la categoría; tal que para todo $f : M \to X$ monomorfismo en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $\phi_M : X \to \Omega$ tal que :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador.

Recordaremos que si $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son funtores, una transformación natural $\mathcal{V}$ entre los funtores F y G, es una clase $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_A : F(A) \to G(A) : A \in Ob(\mathcal{A})\}$ de morfismos en $\mathcal{B}$ tal que si $f : A_1 \to A_2$ es un $\mathcal{A}$-morfismo, entonces el diagrama en $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r, "\mathcal{V}_{A_1}"'] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f)"'] \\ F(A_2) \arrow[r, "\mathcal{V}_{A_2}"'] & G(A_2) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, diremos que ella es localmente pequeña si para todo $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, la clase $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \in Mor(\mathcal{C}) : Dom(f) = A, Cod(f) = B\}$ es un conjunto.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña. Para $B \in Ob(\mathcal{C})$ definimos el funtor contravariante$H_{\mathcal{C}}(_, B) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, como $H_{\mathcal{C}}(\_, B)(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y si $f : A_1 \to A_2$, entonces $H_{\mathcal{C}}(\_, B)(f) : Hom_{\mathcal{C}}(A_2, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A_1, B)$ es la función definida como $H_{\mathcal{C}}(\_, B)(f)(h) = hf$.

Ahora, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2. *Una categoría, bien potenciad, localmente pequeña y con límites finitos, tiene un subobjeto clasificador si y sólo si existe $\Omega \in Ob(\mathcal{C})$ y $\theta : Sub \to H_{\mathcal{C}}(\_, B)$ una transformación natural tal que para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$,$\theta_X : Sub(X) \to H_{\mathcal{C}}(X, B)$ es una biyección*

Demostración: Supongamos que existe un subobjeto clasificador $true : 1 \to \Omega$, sea $[f] \in Sub(X)$, como $f : M \to X$ es monomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces existe un único morfismo $\phi_M : X \to \Omega$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador.

Sea $\theta_M : Sub(X) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$, definida como $\theta_M([f]) = \phi_M$, veamos que está bien definida, sea $f \cong h$ con $f, h \in \mathcal{M}_X$, es decir, existe l isomorfismo tal que $fl = h$ sea

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmutativo. Tenemos los jaladores

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_N"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama es jalador:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "fl"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Primero, veamos que es conmutativo: $\phi_M fl = truet_M l = true\ t_N$ ya que $t_M l = t_N$, usando que 1 es terminal. Así que $\phi_M fl = true\, t_N$. Ahora, sea

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "t_Z"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

conmutativo. Entonces existe $\psi : Z \to .M$ única, tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drr, "t_M"] \arrow[ddr, "f"'] & & \\ & Z \arrow[ul, dashed, "\psi"'] \arrow[r, "t_Z"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ & X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora veamos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "l"'] \arrow[drr, "t_N"] \arrow[ddr, "h"] & & \\ M \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[ul, dashed, "l^{-1}\psi"'] \arrow[r, "t_Z"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ & X \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es claro que $fll^{-1}\psi = f\psi = \alpha$ y que $t_N l^{-1}\psi = t_z$, nuevamente usamos que 1 es terminal. Finalmente, veamos que es única, supongamos que $p : Z \to N$ con $flp = \alpha$ y $t_N p = t_Z$, veamos que $p = l^{-1}\psi$, por la unicidad de ψ, tenemos que

$lp = \psi$, luego $p = l^{-1}\psi$. Así que $\phi_M = \phi_N$, luego $\theta_X : Sub(X) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$ es funvción. Ahora, si $\theta = \{\theta_X : X \in Ob(\mathcal{C})\}$, veamos que θ es transformación natural. Sea $f : X_1 \to X_2$ un morfismo de $\mathcal{C}$, veamos que

$$\begin{tikzcd}
Sub(X_2) \arrow[r, "\theta_{X_2}"] \arrow[d, "Sub(f)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X_2, \Omega) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(_, \Omega)(f)"] \\
Sub(X_1) \arrow[r, "\theta_{X_1}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X_1, \Omega)
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

es conmuta. Si $h : M \to X_2$ con $h \in \mathcal{M}_{X_2}$, entonces $\theta_{X_2}([h]) = \phi_M$ y $Hom_{\mathcal{C}}(\_,)(f)(\phi_M) = \phi_M f$. Por otro lado, $Sub(f)([h]) = [h']$ con $h' \in \mathcal{M}_{X_1}$, entonces $\theta_{X_1}([h']) = \phi_N$ y

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "f'"'] & X_1, \arrow[d, "f"'] \\
M \arrow[r, "h"'] & X_2
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X_2 \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad y \qquad
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h'"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X_1 \arrow[r, "\phi_N"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

son jaladores. Veamos que:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h'"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\
X_1 \arrow[r, "\phi_M f"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

es jalador, como $\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "f'"'] & X_1 \arrow[d, "f"'] \\
M \arrow[r, "h"'] & X_2
\end{tikzcd}$, es jalador , entonces $\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[d, "h"] \\
X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2
\end{tikzcd}$ es jalador.

Notemos que $\phi_m f h' = \phi_M h f' = true t_m f'$, como $t_M f' : N \to 1$, entonces $t_M f' = t_N$, así que $\phi_M f h' = true\ t_N$. Por el Lema 3.9, 1.,i., el retángulo exterior, de (3)

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2 \arrow[r, "\phi_M"'] & \Omega
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

es jalador, usando que $t_M f' = t_N$, obtenemos que (2) es jalador. Por tanto $\phi_M f = \phi_N$. Por tanto (1) es conmutativo y θ es transformación natural.

Ahora veamos que para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$, se tiene que θ_X es biyectiva. Sea $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$, formamos el jalador

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como *true* es monomorfismo, entonces $h \in \mathcal{M}_X$ Luego formamos el jalador:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\phi_N"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

por tanto $\phi_N = \gamma$, esto es θ_X es sobreyectiva. Ahora, si $\theta_X([h]) = \theta_X([h'])$, entonces existe $\gamma \in Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$ tal que son jaladores:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad y \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h'"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

y conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drr, "t_M"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\ & N \arrow[ul, dashed, "s_1"'] \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h"] & 1 \arrow[d, "true"] \\ & X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad y \; \begin{tikzcd} N \arrow[drr, "t_N"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & M \arrow[ul, dashed, "s_2"'] \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h'"] & 1 \arrow[d, "true"] \\ & X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

, luego

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drr, "t_M"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\ & M \arrow[ul, dashed, "s_1 s_2"'] \arrow[r, "t_M"'] \arrow[d, "h'"] & 1 \arrow[d, "true"] \\ & X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad y \; \begin{tikzcd} N \arrow[drr, "t_N"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & N \arrow[ul, dashed, "s_2 s_1"'] \arrow[r, "t_N"'] \arrow[d, "h"] & 1 \arrow[d, "true"] \\ & X \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

conmutan, luego $s_2 s_1 = Id_N$ y $s_1 s_2 = Id_M$, luego $[h] = [h']$, por tanto θ_X es biyección.

Ahora supongamos que $\theta = \{\theta_X : Sub(X) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega) : X \in Ob(\mathcal{C})\}$ es una transformación natural, donde cada θ_X es biyección. Queremos hallar un subobjeto clasificador.

Como $\theta_\Omega : Sub(\Omega) \to Hom_{\mathcal{C}}(\Omega, \Omega)$ es una biyección, sea $t : \Omega_0 \to \Omega$ con $t \in \mathcal{M}_\Omega$ tal que $\theta_\Omega([t]) = Id_\Omega$. Sean $f : M \to X$ con $f \in \mathcal{M}_X$ y $\phi : X \to \Omega$ tales que $\theta_X([f]) = \phi$. Por la naturalidad de θ, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Sub(\Omega) \arrow[r, "\theta_\Omega"'] \arrow[d, "Sub(\phi)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(\Omega, \Omega) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(\_, \Omega)(\phi)"] \\ Sub(X) \arrow[r, "\theta_X"'] & Hom_{(}X, \Omega) \end{tikzcd}$$

Si $Sub(\phi)([t]) = [\phi']$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(\_,\Omega)(\phi)(\theta_\Omega([t])) = \theta_X(Sub(\phi)([t])) = \theta_X([\phi'])$, pero $Hom_{\mathcal{C}}(\_,\Omega)(\phi)(\theta_\Omega([t])) = Hom_{\mathcal{C}}(\_,\Omega)(\phi)(Id_\Omega) = \phi$, luego $\theta_X([\phi']) = \phi = \theta_X([f])$, luego $[\phi'] = [f]$ y además $Sub(\phi)([t])) = [f]$, entonces existe el jalador

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "\phi"'] \\ \Omega_0 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

luego tenemos el jalador

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "l"'] \arrow[d, "f"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Veamos que ϕ es unico, si

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "l'"'] \arrow[d, "f"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ X \arrow[r, "\psi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador, pero $\psi = Hom_{\mathcal{C}}(\_,\Omega)(\psi)(Id_\Omega) = Hom_{\mathcal{C}}(\_,\Omega)(\psi)(\theta_\Omega([t])) = \theta_X(Sub(\psi)([t]))$, pero $Sub(\psi)([t]) = [f]$ y además $\theta_X([f]) = \phi$, luego $\psi = \theta_X([f]) = \phi$.

Veamos que Ω_0 es objeto terminal, sea $M \in Ob(\mathcal{C})$ y $l', l'' : M \to \Omega_0$ morfismos en $\mathcal{C}$. Tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "l'"'] \arrow[d, "Id_M"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ M \arrow[r, "tl'"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "l''"'] \arrow[d, "Id_M"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ M \arrow[r, "tl''"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Veamos que ambos son jaldores. Sea

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ M \arrow[r, "l't"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad (2)$$

conmutativo. Entonces:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drr, "l'"] \arrow[ddr, "Id_M"'] & & \\ & N \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"'] & \Omega_0 \arrow[d, "t"'] \\ & M \arrow[r, "tl'"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo, ya que de (2), $t\beta = tl'\alpha$, como t es monomorfismo, entonces $\beta = l'\alpha$, la unicidad de α se sigue de que $Id_M\alpha = \alpha$. De igual manera el segundo diagrama de (1) es jalador, luego $Sub(tl')([t]) = Sub(tl'')[t]$, entonces $\theta_M(Sub(tl')) = \theta_M(Sub(sl'')[t])$, luego $tl' = tl''$ o sea $l' = l''$. $\square$

6. Conclusiones

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, bien potenciada, con límites finitos y un funtor F de $\mathcal{C}$ a **Set**. Si existe una transformación natural de F a $Hom_{\mathcal{C}}(\_, M)$ para algún $M \in Ob(\mathcal{C})$ tal que en todo nivel es biyección diremos que el funtor es representable.

Hemos demostrado que el funtor Sub es representable si y sólo existe un subobjeto clasificador. Categóricamente significa que tenemos dos problemas equivalentes, y la existencia de un subobjeto clasificador nos asegura en la categoría una estructura robusta de subobjetos.

Bibliografía

[1] Mac Lane, S., Moerdijk I.,*Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos.*, primera edición, Springer, New York, 1992.

[2] Adámek J., Herrlich H., Strecker, George E. Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats, http://katmat.math.uni-bremen.de/acc 25

Correos electrónicos:
`jangoa@fcfm.buap.mx` (Juan Angoa-Amador),
`acontri@fcfm.buap.mx.utm.mx` (Agustín Contreras -Carreto).
`orlando.perezram@alumno.buap.mx` (Orlando Peréz-ramírez)

Capítulo 10

El subobjeto clasificador en una categoría de pregavillas

Joshua Anaya Palacios, Juan Angoa-Amador, Orlando Pérez Ramírez.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Resumen

En este trabajo se define la noción de subobjeto y subobjeto clasificador en teoría de categorías y se determina el subobjeto clasificador en las categorías de pregavillas.

En principio el trabajo fue un curso escolar que consistía en leer algunas partes del texto [**1**], al desarrollar todas las afirmaciones que encontrabamos en tal texto, logramos construir un texto más prolijo y adecuado para gente que se inicia en el estudio de los topos. Así que decidimos ofrecer este texto a la consideración de un publico más general. Esperamos que sea de alguna utilidad este texto para los que se inician en este tema.

2. Definición de subobjeto y subobjeto clasificador

La noción de subobjeto surge del interés por generalizar algunas propiedades de la categoría **Set**, en particular, que cada conjunto tiene subconjuntos. Así, debemos proponer la generalización en lenguaje de flechas, es decir en teoría de categorías, a la idea abstracta de subobjeto de un objeto; es proponer un objeto que sea la colección de todos los subobjetos de un objeto, el objeto "potencia", en una categoría, las categorías que pueden tener tal cualidad serán el camino hacia los topos.

Definición 2.1. *Dada $\mathscr{C}$ una categoría y $X \in Ob(\mathscr{C})$. Un* ***subobjeto*** *de X es un monomorfismo $m \in Hom_{\mathscr{C}}(M, X)$ $(Hom_{\mathscr{C}}(M,X) = \{f \in Mor(\mathscr{C}) : Dom(f) = M, Cod(f) = X\}$ donde $M, X \in Ob(\mathscr{C}))$.*

De esta definición, podríamos decir que de un solo objeto M se pueden construir varios subobjetos de X , tantos como monomorfismos $m \in Hom_{\mathscr{C}}(M, X)$, pero, en la práctica, lo que se dice para un subobjeto de X es para la clase de equivalencia de él, clase de equivalencia que se construye con la relación de equivalencia de ser isomorfos en la categoría $\mathscr{C}/X$. Categoría cuyos objetos son los morfismos de $\mathscr{C}$ con codominio X y sus morfismos son son flechas en $\mathscr{C}$ que hacen comuntar cierto diagrama. Es decir, dados $f : A \to X$ y $g : B \to X$ morfismos de $\mathscr{C}$, un morfismo entre ellos, es una flecha $F : A \to B$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmute.

Dado que estas clases de equivalencia están formadas por flechas isomorfas, se suele elegir una familia de flechas, una por cada clase, que la represente. Así, sí se demuestra alguna afirmación para esta familia de representantes, entonces se prueba para todas las clases. Las inclusiones con definición adecuada generalizan a las inclusiones en **Set** los cuales son monomorfismos fáciles de manejar, se pueden usar como representantes de su clase de equivalencia. Para esto habría que probar que cada clase de equivalencia tiene una inclusión que la representa. En la siguiente seccíon resolveremos de ésto, lo necesario

Definición 2.2. *Sea $\mathscr{C}$ un categoría con objeto treminal, 1. Un* ***subobjeto clasificador*** *en $\mathscr{C}$ es un objeto Ω junto con un morfismo $t \in Hom_{\mathscr{C}}(1, \Omega)$ tal que para cada monomorfismo $m \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C')$ existe un único morfismo $\phi \in Hom_{\mathscr{C}}(C', \Omega)$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ C' \arrow[r, "\phi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un pullback.

Donde 1_C es el único morfismo posible puesto que 1 es terminal.

3. Subobjetos en la categoría de pregavillas

Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Llamaremos $\widehat{\mathscr{C}}$ a la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{op}}$. Esta es la categoría que tiene por objetos a los funtores con dominio $\mathscr{C}^{op}$ y codominio **Set**, y por morfismos a las transformaciones naturales entre ellos; también se le conoce como categoría de pregavillas sobre $\mathscr{C}$. A continuación veremos cómo son los subobjetos en esta categoría. Antes veamos la importante propiedad en $\widehat{\mathscr{C}}$.

Lema 3.1. *$\widehat{\mathscr{C}}$ es cerrada bajo jaladores (pullbacks).*

Demostración: Sean $P, R \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$ y $\theta : P \to R$, $j : S \to R$ transformaciones naturales entre los funtores $P, R, S : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Debemos hallar $T \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$ y $\alpha : T \to R$ y $\beta : T \to S$ transformaciones naturales tales que:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & S \arrow[d, "j"'] \\ P \arrow[r, "\theta"'] & R \end{tikzcd}$$

es un jalador en $\widehat{\mathscr{C}}$. Sea $C \in Ob(\mathscr{C})$, entonces tenemos el siguiente diagrama en **Set**.

$$\begin{tikzcd} & S(C) \arrow[d, "j_C"'] \\ P(C) \arrow[r, "\theta_C"'] & R(C) \end{tikzcd}$$

El cual, genera un jalador en **Set**:

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] \arrow[d, "\beta_C"'] & S(C) \arrow[d, "j_C"'] \\ P(C) \arrow[r, "\theta_C"'] & R(C) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Sea $T(C)$ el conjunto asignado a C mediante el candidato a funtor $T : \mathscr{C}^{op} \to$ **Set**; ahora veamos qué asignar a los morfismos. Sea $f : C \to C'$ un morfismos en $\mathscr{C}^{op}$. Por propiedades de las transformaciones naturales tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} S(C) \arrow[r, "j_C"'] \arrow[d, "S(f)"'] & R(C) \arrow[d, "R(f)"'] \\ S(C') \arrow[r, "j_{C'}"'] & R(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P(C) \arrow[r, "\theta_C"'] \arrow[d, "P(f)"'] & R(C) \arrow[d, "R(f)"'] \\ P(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & R(C') \end{tikzcd}$$

El cuadrado

$$\begin{tikzcd} T(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] \arrow[d, "\beta_{C'}"'] & S(C') \arrow[d, "j_{C'}"'] \\ P(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & R(C') \end{tikzcd}$$

es jalador, y

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] \arrow[d, "\beta_C"'] & S(C) \arrow[r, "S(f)"'] & S(C') \arrow[dd, "j_{C'}"'] \\ P(C) \arrow[d, "P(f)"'] & & \\ P(C') \arrow[rr, "\theta_{C'}"'] & & R(C') \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] \arrow[d, "\beta_C"'] & S(C) \arrow[r, "S(f)"'] \arrow[d, "j_C"'] & S(C') \arrow[d, "j_{C'}"'] \\ P(C) \arrow[r, "\theta_C"'] & R(C) \arrow[r, "R(f)"'] & R(C') \end{tikzcd}$$

conmuta el rectángulo externo, ya que cada rectángulo conmuta, luego $\theta_{C'}P(f)\beta_C = R(f)\theta_C\beta_C = j_{C'}S(f)\alpha_C$. Entonces existe un único $T(f) : T(C) \to T(C')$ tal que:

(3.2)
$$\begin{tikzcd}
T(C') \arrow[rr, "\alpha_{C'}"'] \arrow[dd, "\beta_{C'}"'] & & S(C') \arrow[dd, "j_{C'}"] \\
& T(C) \arrow[ul, "T(f)"'] \arrow[ur, "S(f)\alpha_C"'] \arrow[dl, "R(f)\beta_C"] & \\
R(C') \arrow[rr, "\theta_{C'}"'] & & P(C')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos que esta asociación es funtor es claro que si $f = Id_C : C \to C$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[rr, "\alpha_C"'] \arrow[dd, "\beta_C"'] & & S(C) \arrow[dd, "j_C"] \\
& T(C) \arrow[ul, "Id_{T(C)})"'] \arrow[ur, "Id_{S(C)}\alpha_C"'] \arrow[dl, "Id_{R(C)}\beta_C"] & \\
R(C) \arrow[rr, "\theta_C"'] & & P(C)
\end{tikzcd}$$

por la unicidad de $T(Id_C)$ tenemos que $T(Id_C) = Id_{T(C)}$. Ahora si $g : C' \to C''$ morfismo de $\mathscr{C}^{op}$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(C'') \arrow[rr, "\alpha_{C''}"'] \arrow[dd, "\beta_{C''}"'] & & S(C'') \arrow[dd, "j_{C''}"] \\
& T(C) \arrow[ul, "T(gf)"'] \arrow[ur, "S(gf)\alpha_C"'] \arrow[dl, "R(gf)\beta_C"] & \\
R(C'') \arrow[rr, "\theta_{C''}"'] & & P(C'')
\end{tikzcd}$$

Veamos que

$$\begin{tikzcd}
T(C'') \arrow[rr, "\alpha_{C''}"'] \arrow[dd, "\beta_{C''}"'] & & S(C'') \arrow[dd, "j_{C''}"] \\
& T(C) \arrow[ul, "T(g)T(f)"'] \arrow[ur, "S(gf)\alpha_C"'] \arrow[dl, "R(gf)\beta_C"] & \\
R(C'') \arrow[rr, "\theta_{C''}"'] & & P(C'')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero sabemos que $S(gf) = S(g)S(f)$ y $R(gf) = R(g)R(f)$ y que

$$\begin{tikzcd}
T(C') \arrow[rr, "\alpha_{C'}"'] \arrow[dd, "\beta_{C'}"'] & & S(C') \arrow[dd, "j_{C'}"] \\
& T(C) \arrow[ul, "T(f)"'] \arrow[ur, "S(f)\alpha_C"'] \arrow[dl, "R(f)\beta_C"] & \\
R(C') \arrow[rr, "\theta_{C'}"'] & & P(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(C'') \arrow[rr, "\alpha_{C''}"'] \arrow[dd, "\beta_{C''}"'] & & S(C'') \arrow[dd, "j_{C''}"] \\
& T(C') \arrow[ul, "T(g)"'] \arrow[ur, "S(g)\alpha_{C'}"'] \arrow[dl, "R(g)\beta_{C'}"] & \\
R(C'') \arrow[rr, "\theta_{C''}"'] & & P(C'')
\end{tikzcd}$$

conmutan. Pero $\alpha_{C''}T(g)T(f) = S(g)\alpha_{C'}T(f) = S(g)S(f)\alpha_C$ y $\beta_{C''}T(g)T(f) = R(g)\beta_{C'}T(f) = R(g)R(f)\beta_C$. Luego T es funtor. Veamos que $\alpha = (\alpha_C)_{C\in Ob(\mathscr{C})} : T \to S$ y $\beta = (\beta_C)_{C\in Ob(\mathscr{C})} : T \to R$ son transformaciones naturales. Para $f : C \to C'$ Por el diagrama (2), tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] \arrow[d, "T(f)"'] & S(C) \arrow[d, "S(f)"] \\
T(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & S(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[r, "\beta_C"'] \arrow[d, "T(f)"'] & R(C) \arrow[d, "R(f)"] \\
T(C') \arrow[r, "\beta_{C'}"'] & R(C')
\end{tikzcd}$$

conmutan. Sólo resta demostrar la propiedad universal del jalador. Sea $\gamma : M \to S$ y $\delta : M \to R$ transformaciones naturales tales que $j\gamma = \theta\delta$, es decir: Para todo $C \in Ob(\mathscr{C})$ se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[r, "\gamma_C"'] \arrow[d, "\delta_C"'] & S(C) \arrow[d, "j_C"] \\
R(C) \arrow[r, "\theta_C"'] & P(C)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser (1) un jalador existen unicos morfismos $\epsilon_C : M(C) \to T(C)$, $\epsilon_{C'} : M(C') \to T(C')$ tales que:

$$\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[rr, "\alpha_C"'] \arrow[dd, "\beta_C"'] & & S(C) \arrow[dd, "j_C"] \\
& M(C) \arrow[ul, "\epsilon_C"'] \arrow[ur, "\gamma_C"'] \arrow[dl, "\delta_C"] & \\
R(C) \arrow[rr, "\theta_C"'] & & P(C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(C') \arrow[rr, "\alpha_{C'}"'] \arrow[dd, "\beta_{C'}"'] & & S(C') \arrow[dd, "j_{C'}"] \\
& M(C') \arrow[ul, "\epsilon_{C'}"'] \arrow[ur, "\gamma_{C'}"'] \arrow[dl, "\delta_{C'}"] & \\
R(C') \arrow[rr, "\theta_{C'}"'] & & P(C')
\end{tikzcd}$$

conmutan. Veamos que $\epsilon = (\epsilon_C)_{C \in Ob(\mathscr{C})}$ es una transformación natural. Sea $f : C \to C'$ morfismo de $\mathscr{C}^{op}$. Queremos demostrar que para todo $C \in Ob(\mathscr{C})$:

$$\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[r, "\epsilon_C"'] \arrow[d, "M(f)"'] & T(C) \arrow[d, "T(f)"'] \\
M(C') \arrow[r, "\epsilon_{C'}"'] & T(C')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[r, "\delta_C"'] \arrow[d, "M(f)"'] & R(C) \arrow[d, "R(f)"'] \\
M(C') \arrow[r, "\delta_{C'}"'] & R(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[r, "\gamma_C"'] \arrow[d, "M(f)"'] & S(C) \arrow[d, "S(f)"'] \\
M(C') \arrow[r, "\gamma_{C'}"'] & S(C')
\end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[r, "S(f)\gamma_C"'] \arrow[d, "R(f)\delta_C"'] & S(C') \arrow[d, "j_{C'}"'] \\
R(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & P(C')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Lo cual se cumple, ya que $j_{C'}S(f)\gamma_C = j_{C'}\gamma_{C'}M(f) = \theta_{C'}\delta_{C'}M(f) = \theta_{C'}R(f)\delta_C$. Luego existe único $\xi_C : M(C) \to T(C')$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
T(C') \arrow[rr, "\alpha_{C'}"'] \arrow[dd, "\beta_{C'}"'] & & S(C') \arrow[dd, "\delta_{C'}"] \\
& M(C) \arrow[ul, "\xi_C"'] \arrow[ur, "S(f)\gamma_C"'] \arrow[dl, "R(f\delta_C)"'] & \\
R(C') \arrow[rr, "\theta_{C'}"'] & & P(C')
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Veamos que tanto $T(f)\epsilon_C$ como $\epsilon_{C'}M(f)$ tienen la propiedad de ξ_C, para concluir su igualdad. Para esto, desarrollamos $\alpha_{C'}\epsilon_{C'}M(f) = \gamma_{C'}M(f) = S(f)\gamma_C$ y $\beta_{C'}\epsilon_{C'}M(f) = \gamma_{C'}M(f) = S(f)\gamma_C$, pero también $\beta_{C'}T(f)\epsilon_C = R(f)\beta_C\epsilon_C = R(f)\delta_C$ y $\alpha_{C'}T(f)\epsilon_C = S(f)\gamma_C$ (ver (3) y (4)). Con este mismo esquema demostramos la unicidad de ϵ. Y, así conluimos que $\widehat{\mathscr{C}}$ es cerrada bajo jaladores. $\square$

En $\widehat{\mathscr{C}}$ existen subobjetos clásicos que forman un sistema de representantes de todos los monomorfismos.

Definición 3.2. *Dados $\mathcal{F}, \mathcal{P} \in \widehat{\mathscr{C}}$ diremos que $\mathcal{P}$ es un **subfuntor** de $\mathcal{F}$ si y solo si:*
Para cada $C \in \mathscr{C}$ se cumple que

$$\mathcal{P}C \subseteq \mathcal{F}C$$

y dada $g \in \mathscr{C}^{op}(C', C)$ sucede que

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{P}g(x)$$

para todo $x \in \mathcal{P}C'$.

Ahora bien, si $\mathcal{P}$ es subfuntor de $\mathcal{F}$ (usaremos la notación $\mathcal{P} \leq \mathcal{F}$) podemos definir una transformación natural $P \in \widehat{\mathscr{C}}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ cuya instacia en $C \in \mathscr{C}$ es:

$$
\begin{aligned}
P_C : \mathcal{P}C &\to \mathcal{F}C \\
x &\mapsto x
\end{aligned}
$$

y bastará comprobar que dada $g \in \mathscr{C}^{op}(C, C')$ el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}C \arrow[r, "P_C"] \arrow[d, "\mathcal{P}g"'] & \mathcal{F}C \arrow[d, "\mathcal{F}g"] \\
\mathcal{P}C' \arrow[r, "P_{C'}"'] & \mathcal{F}C'
\end{tikzcd}
$$

conmmuta.
Para esto, tomemos $x \in \mathcal{P}C$, luego

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}g \circ P_C(x) &= \mathcal{F}g(x) \\
&= \mathcal{P}g(x) \\
&= P_{C'} \circ \mathcal{P}g(x)
\end{aligned}
$$

Donde la primera igualdad es por la definición de P_C, la segunda igualdad es por la definición de subfuntor, en particular porque $\mathcal{F}g(x) = \mathcal{P}g(x)$ para todo $x \in \mathcal{P}C$

y la tercera por la definición de $P_{C'}$. Además, dadas transformaciones naturales θ y θ' tales que

$$P \circ \theta = P \circ \theta'$$

por el hecho de ser transformaciones naturales esto es equivalente a

$$(P \circ \theta)_C = (P \circ \theta')_C$$

naturalmente en C y esto si y solo si

$$P_C \circ \theta_C = P_C \circ \theta'_C$$

y como cada P_C es inyectiva (es una inclusión) entonces

$$\theta_C = \theta'_C$$

naturalmente en C, por lo tanto

$$\theta = \theta'.$$

Lo que demuestra que P es un monomorfismo en $\widehat{\mathscr{C}}$, P será llamada la transformación natural inclusión definida entre un subfuntor $\mathcal{P}$ del funtor $\mathcal{F}$.

Hecho esto, tenemos que, según la Definición 3.2, la transformación natural inclusión P es un **subobjeto** de $\mathcal{F}$. Es más, en general dado un subobjeto de $\mathcal{F}$ éste es isomorfo a alguna transformación naturales inclusión P de un subfuntor $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}$. Veamos el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea $\mathcal{F} \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$, θ un monomorfismo en $\widehat{\mathscr{C}}$ con $Cod(\theta) = \mathcal{F}$, entonces existe $\mathcal{P}$ subfuntor de $\mathcal{F}$ tal que θ es isomorfa a P (la transformación natural inclusión definida entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{F}$).*

DEMOSTRACIÓN: Si $\theta : R \to P$ es una transformación natural entre los funtores $R, P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$, que es monomorfismo. Como $\theta_C : R(C) \to P(C)$ función entre los conjuntos $R(C)$ y $P(C)$, sea $S(C) = \theta_C(R(C)) \subseteq P(C)$ y cuando $f : C \to C'$ donde $f \in Mor(\mathscr{C}^{op})$, entonces $P(f) : P(C) \to P(C')$, sea $S(f) = P(f)|_{S(C)}$, veamos que S es subfuntor de P; además, demostremos que θ es isomorfo a $\mathcal{S}$ la transformación natural inclusión del subfuntor S de P.

Para la primera parte, bastará demostrar que si $y \in S(C)$, entonces $P(f)(y) \in S(C')$, pero el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R(C) \arrow[r, "\theta_C"'] \arrow[d, "R(f)"'] & P(C) \arrow[d, "P(f)"'] \\ R(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & P(C') \end{tikzcd}$$

es conmutativo, luego, si $y = \theta_C(x)$ con $x \in R(C)$ (es decir $y \in S(C)$), entonces $P(f)(y) = P(f)\theta_C(x) = \theta_{C'}R(f)(x)$, como $R(f)(x) \in R(C')$, entonces $P(f)(y) \in S(C')$. Por tanto S es subfuntor de P, entonces formamos el jalador en $\widehat{\mathscr{C}}$ (ver Lema 3.1)

(3.3)
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & S \arrow[d, "\mathcal{S}"'] \\ R \arrow[r, "\theta"'] & P \end{tikzcd}$$

Es conocido el hecho de que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "t"'] & B \arrow[d, "s"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

es jalador en una categoría $\mathscr{A}$ y f es monomorfismo de $\mathscr{A}$, entonces g es monomorfismo en $\mathscr{A}$, luego del diagrama 3.3, tenemos que α es monomorfismo. Como $\mathcal{S}$ es monomorfismo y composición de monomorfismos es monomorfismo, entonces $\theta\beta$ es monomorfismo. En cualquier categoría si ft son monomorfismos, entonces t es monomorfismo. Así que, como y $\theta\beta$ son monomorfismos, entonces β es monomorfismo. Ahora, usamos la propiedad de jalador para 3.3 y que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "Id_R"'] & S \arrow[d, "\mathcal{S}"] \\ R \arrow[r, "\theta"'] & P \end{tikzcd}$$

donde $\gamma_C = \theta_C|^{S(C)}$, es conmutativo en $\widehat{\mathscr{C}}$. Para concluir que existe una única $\epsilon : R \to M$ transformación natural tal que:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & R \arrow[ul, "\epsilon"'] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "Id_R"] & S \arrow[d, "\mathcal{S}"'] \\ & R \arrow[r, "\theta"'] & P \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como $\beta\epsilon = Id_R$ y β es monomorfismo, tenemos que β es isomorfismo. Se puede demostrar que para todo $C \in Ob(\mathscr{C})$ se cumple que β_C es isomorfismo en **Set**, es decir β_C es biyectiva. Como de (1), implicamos para todo $C \in Ob(\mathscr{C})$ el diagrama conmutativo en **Set**:

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] \arrow[d, "\beta_C"'] & S(C) \arrow[d, "\mathcal{S}_C"] \\ R(C) \arrow[r, "\theta_C"'] & P(C). \end{tikzcd}$$

Sea $y \in S(C)$, entonces $y = \theta_C(x)$ para algún $x \in R(C)$, por tanto existe un único $x' \in T(C)$ tal que $\beta_C(x') = x$, entonces $y = \theta_C(x) = \theta_C(\beta_C(x')) = \mathcal{S}_C(\alpha_C(x')) = \alpha_C(x')$, ya que $\alpha_C(x') \in S(C)$, luego para todo $y \in S(C)$, tenemos qué existe $x' \in T(C)$ tal que $\alpha_C(x') = y$. Usando el axioma de elección. Definimos: $\delta_C : S(C) \to T(C)$ como $\delta_C(\theta_C(x)) = x'$ tal que $\beta_C(x') = x$. Veamos que $\delta = (\delta_C)_{C\in Ob(\mathscr{C})} : S \to T$ es transformación natural. Sea $f : C \to C'$ morfismo de $\mathcal{C}^{op}$, veamos que:

$$\begin{tikzcd}
S(C) \arrow[r, "\delta_C"'] \arrow[d, "S(f)"'] & T(C) \arrow[d, "T(f)"'] \\
S(C') \arrow[r, "\delta_{C'}"'] & T(C')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Nos auxiliamos de los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[r, "\beta_C"'] \arrow[d, "T(f)"'] & R(C) \arrow[d, "R(f)"'] \\
T(C') \arrow[r, "\beta_{C'}"'] & R(C')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R(C) \arrow[r, "\theta_C"'] \arrow[d, "R(f)"'] & P(C) \arrow[d, "P(f)"'] \\
R(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & P(C').
\end{tikzcd}$$

Luego $\delta_{C'}(S(f)(\theta_C(x))) = \delta_{C'}(P(f)(\theta_C(x))) = \delta_{C'}(\theta_{C'}(R(f)(x)) = x'$, donde $\beta_{C'}(x') = R(f)(x)$. Por otro lado, $T(f)(\delta_C(\theta_C(x))) = T(f)(x'')$, donde $\beta_C(x'') = x$, pero $\beta_{C'}(T(f)(x'')) = R(f)(\beta_C(x'')) = R(f)(x)$, por tanto $\beta_{C'}(x') = \beta_{C'}(T(f)(x''))$, finalmente: $\delta_{C'}(S(f)(\theta_C(x))) = T(f)(\delta_C(\theta_C(x)))$.

Como $\alpha\delta = Id_S$ y α es monomorfismo, entonces α es isomorfismo, entonces $\alpha\beta$ es isomorfismo, luego θ y $\mathcal{S}$, son isomorfos. $\square$

Aquí pedimos que $\mathscr{C}$, tenga límites finitos y sea localmente pequeña. Desarrollaremos la asociación: $Sub(\_)$. Sea $X \in Ob(\mathscr{C})$, definimos

$$\mathbf{Sub}(X) = \{m : m \text{ es subobjeto de } X\}$$

y si $m_1, m_2 \in \mathbf{Sub}(X)$, recordar que m_1 es isomorfo a m_2, si existe $f : Dom(m_1) \to Dom(m_2)$ isomorfismo en $\mathscr{C}$ tal que $m_1 = m_2 f$, es decir

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "m_1"'] & M \arrow[d, "m_2"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

conmuta y f es isomorfismo. Se puede demostrar que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia y si denotamos que m_1 es isomorfo a m_2 por $m_1 \sim m_2$, luego denotamos $Sub(X) = \mathbf{Sub}(X)/\sim$, es decir $Sub(X)$ es la clase cociente de la relación de equivalencia de isomorfismo. Vamos a demostrar algunas propiedades de esta asociación. Sea $f : C \to C'$ morfismo en $\mathscr{C}^{op}$, denotamos $Sub(f) : Sub(C) \to Sub(C')$ y $Sub(f)([m]) = [n]$, los que construimos en $\mathscr{C}$, mediante el jalador (1), el cual existe ya que $\mathscr{C}$ tiene límites finitos,

(3.4)
$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "n"'] & M \arrow[d, "m"'] \\
C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Veamos que n es único salvo isomorfismo. Supongamos que

(3.5)
$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "n'"'] & M \arrow[d, "m"'] \\
C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

es jalador. Combinando, que 3.4 y 3.5 son jaladores, tenemos que existen $\alpha_1 : L' \to L$ y $\alpha_2 : L \to L'$, tales que los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rdd, bend right, "n"'] & & \\
& L' \arrow[ul, "\alpha_1"'] \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "n'"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L' \arrow[rrd, bend left, "g'"] \arrow[rdd, bend right, "n'"'] & & \\
& L \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "n"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

conmutan. Luego $n\alpha_1 = n'$, pero tambien conmutan:

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[rrd, bend left, "g'"] \arrow[rdd, bend right, "n'"'] & & \\
& L' \arrow[ul, "\alpha_2\alpha_1"'] \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "n'"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
L \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rdd, bend right, "n"'] & & \\
& L \arrow[ul, "\alpha_1\alpha_2"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "n"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
L \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rdd, bend right, "n"'] & & \\
& L \arrow[ul, "Id_L"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "n"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
L' \arrow[rrd, bend left, "g'"] \arrow[rdd, bend right, "n'"'] & & \\
& L \arrow[ul, "Id_{L'}"'] \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "n'"] & M \arrow[d, "m"'] \\
& C' \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de los jaladores tenemos que: $\alpha_2\alpha_1 = Id_{L'}$, $\alpha_1\alpha_2 = Id_L$, luego $n \sim n'$. Sean $l : Y \to Z$, $f : X \to Y$ morfismos en $\mathscr{C}^{op}$, entonces para $n_1\mathbf{Sub}(X)$, y si $Sub(f)([n_1]) = [n_2]$ y $Sub(l)([n_2]) = [n_3]$, entonces tenemos los siguientes jaladores en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "n_2"'] & M_1 \arrow[d, "n_1"'] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "n_3"'] & L_1 \arrow[d, "n_2"'] \\
Z \arrow[r, "l"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces es jalador el rectángulo más externo:

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "n_3"'] & L_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "n_2"'] & M_1 \arrow[d, "n_1"'] \\
Z \arrow[r, "l"'] & Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd},$$

o, sea si componemos en $\mathscr{C}^{op}$:

$$Sub(lf)(n_1) = Sub(fl)([n_1]) = [n_3] = Sub(l)([n_2]) = Sub(l)(Sub(f)(n_1))$$

Así que $Sub(\_)$ es un funtor de $\mathscr{C}^{op}$ a las clases.

Finalizamos esta sección presentando un importante teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que existan subobjetos clasificadores. Mac Lane da una versión de este teorema, asi como su demostración en [**1**, pág 33], (para ver una demostración en forma más desglosada ver [**2**])

Teorema 3.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y con límites finitos, entonces, tiene un subobjeto clasificador si y sólo si existe un objeto Ω y un isomorfismo* *natural*

$$\theta : Sub(\_) \to Hom_{\mathscr{C}}(\_, \Omega)$$

.

4. Subobjeto clasificador en la categoría de pregavillas

Recordando la definición de subobjeto clasificador (Definición 2.2), para cada monomorfismo $m \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C')$, que representa un subobjeto de C', existe un único morfismo $\phi \in Hom_{\mathscr{C}}(C', \Omega)$, tal que se completa el pullback , entonces, es posible pensar que los subobjetos de un objeto dado, C', están relacionados uno a uno con las flechas en $Hom_{\mathscr{C}}(C', \Omega)$.

Por el Teorema 3.4, si la categoría $\widehat{\mathscr{C}}$ tiene un subobjeto clasificador Ω. Tomemos el funtor representable $h_C : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ [1] en $\widehat{\mathscr{C}}$, luego

$$Sub(h_C) \cong \widehat{\mathscr{C}}(h_C, \Omega)$$

y por el Lema de Yoneda tenemos que

$$\widehat{\mathscr{C}}(h_C, \Omega) \cong \Omega(C)$$

por lo tanto

$$Sub(h_C) \cong \Omega(C).$$

Esto nos dice que un funtor representable tiene tantos subobjetos como elementos el conjunto $\Omega(C)$.
Para reinterpretar esto necesitamos la siguiente definición:

Definición 4.1. *Dado C en $\mathscr{C}$ una **gavilla** sobre C es la colección $S(C)$ de flechas f en $\mathscr{C}$ con codominio C, tales que, dada otra flecha g en la categoría, si la composición fg está definida entonces $fg \in S(C)$.*

Ahora podemos ver que para cada $\mathcal{F}$ subfuntor de h_C podemos construir una gavilla

$$S_F(C) = \bigcup_{C' \in \mathscr{C}} \mathcal{F}C'$$

que claramente es una colección de flechas con codominio C y se cumple que si la composición fg está definida, para una flecha $f \in S_F(C)$ entonces $fg \in S_F(C)$, porque $f \in \mathcal{F}(C') \subseteq \mathscr{C}(C', C)$ y $g : C'' \to C'$ $\mathcal{F}C''(g)(f) = fg$, que se define a través de la composición en $\mathscr{C}$.
Reciprocamente, dada una gavilla $S(C)$ podemos definir un subfuntor de h_C

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathscr{C}^{op} &\to \mathbf{Set} \\ C' &\mapsto h_C(C') \cap S(C) \end{aligned}$$

y dada una flecha $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C'')$ la función $\mathcal{P}g$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}g : \mathcal{P}C'' &\to \mathcal{P}C' \\ f &\mapsto fg \end{aligned}$$

cumpliéndose que $fg \in h_C(C'') \cap S(C)$ por la definición del gavilla y del funtor h_C. Queda claro que $\mathcal{P}C' \subseteq h_C(C)$ para cada $C \in \mathscr{C}$ y que, dado g, $\mathcal{P}g(x) = h_C(g)(x)$ para todo x en el dominio de $\mathcal{P}g$. Por lo tanto $\mathcal{P} \leq h_C$. Lo que nos permite decir que las gavillas sobre C y los subobjetos de h_C estan relacionados uno a uno. Y nos hace

[1] $h_C(C') = \mathscr{C}(C', C)$ y si $f : C' \to C''$ en $\mathscr{C}^{op}$, entonces $h_C(f) : \mathscr{C}(C', C) \to \mathscr{C}(C'', C)$, con $h_C(f)(g) = gf$ (la composición en $\mathscr{C}$) y $g \in \mathscr{C}(C', C)$.

intuir quién es el objeto clasificador Ω. Pues sabemos que $\Omega(C) \cong Sub(h_c) \cong \{S|S$ es una gavilla sobre $C\}$. Partiendo de eso construimos de la siguiente manera a Ω:

$$\Omega(C) = \{s|s \text{ es gavilla sobre } C\}$$

Y dada $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C)$ tenemos

$$\begin{aligned} \Omega g : \Omega(C) &\to \Omega(C') \\ S &\mapsto S \cdot g = \{h|g \circ h \in S\} \end{aligned}$$

Ahora, dado $Id_C \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C)$ la identidad en C, tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega(Id_C)(S) &= \{h|Id_C \circ h \in S\} \\ &= S \end{aligned}$$

Para cada $S \in \Omega(C)$ por lo tanto $\Omega(Id_C) = Id_{\Omega(C)}$.
También, dadas f, g flechas en $\mathscr{C}$ cuya composición $g \circ f$ está definida en $\mathscr{C}$

$$\begin{aligned} (\Omega(g) \circ \Omega(f))\,(S) &= \Omega(g)(\Omega(f)(S)) \\ &= \Omega(g)(S \cdot f) \\ &= S \cdot f \cdot g \\ &= \{h|g \circ f \circ h \in S\} \\ &= \Omega(g \circ f) \end{aligned}$$

Para demostrar que esta manera de definir al funtor Ω lo hace subobjeto clasificador, necesitamos encontrar al objeto terminal de $\hat{\mathscr{C}}$.
Es fácil ver que la asignación:

$$\begin{aligned} 1 : \mathscr{C}^{op} &\to \mathbf{Set} \\ C &\mapsto \{\cdot\} \end{aligned}$$

y dada una flecha $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C)$ definimos $1g = Id_{\{\cdot\}}$. Es trivialmente un funtor. Y es el objeto terminal de $\widehat{\mathscr{C}}$.
Ahora, el morfismo t, de la definición de subobjeto clasificador es, en este caso, una transformación natural. Si definimos cada instancia t_C asignando al único punto la gavilla maximal sobre C, es decir:

$$\begin{aligned} t_C : 1(C) &\to \Omega(C) \\ \cdot &\mapsto tC = \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)|\ A \in \mathscr{C}\} \end{aligned}$$

tenemos que , dado $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \{\cdot\} \arrow[r, "t_C"] \arrow[d, "Id_{\{\cdot\}}"'] & \Omega(C) \arrow[d, "\Omega g"] \\ \{\cdot\} \arrow[r, "t_{C'}"'] & \Omega(C') \end{tikzcd}$$

conmuta si $\Omega g \circ t_C(\cdot) = t_{C'}(\cdot)$, para esto basta probar que $\Omega(g)(tC) = tC'$, es decir, para todo $A \in \mathscr{C}$ y para toda $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C')$ se cumple que $g \circ f \in tC$.
En efecto, dada $A \in \mathscr{C}$, de la definición de tC, $Hom_{\mathscr{C}}(A, C) \subseteq tC$ por lo tanto dada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C')$ se cumple que $g \circ f \in tC$, es decir , $\Omega g(tC) = tC'$.
Lo que muestra que t es transformación natural.

Ahora bien, si $\widehat{\mathscr{C}}$, con $\mathscr{C}$ localmente finita y con límites finitos, y si tiene subobjeto clasisifcador, entonces $Sub(h_C)$ para todo C es un conjunto y por lo anterior $\{s|s \text{ es gavilla sobre } C\}$ es conjunto, luego $\Omega \in \widehat{\mathscr{C}}$.

Teorema 4.2. *Si $\mathscr{C}$ es localmente finita y con límites finitos, y tiene un subobjeto clasificador, entonces el funtor Ω con la transformación natural t es el subojeto clasificador de $\widehat{\mathscr{C}}$*

Demostración: De la definición de subobjeto clasificador y por el Lema 3.3, queremos probar que dados $\mathcal{R}, \mathcal{P} \in \widehat{\mathscr{C}}$ funtores tales que $\mathcal{R} \leq \mathcal{P}$, y i la inclusión. Existe una flecha $\phi^i \in \widehat{\mathscr{C}}(\mathcal{P}, \Omega)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "1_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, hook, "i"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\phi^i"'] & \Omega \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

es un pullback.
Definimos ϕ^i en la instancia C

$$\begin{aligned} \phi^i_C : \mathcal{P}(C) &\to \Omega(C) \\ x &\mapsto \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)|\ \mathcal{P}f(x) \in \mathcal{Q}(A) \wedge A \in \mathscr{C}\}. \end{aligned}$$

Veamos que ϕ^i es transformación natural:
Dado $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(C) \arrow[r, "\phi^i_C"] \arrow[d, "\mathcal{P}g"'] & \Omega(C) \arrow[d, "\Omega g"] \\ \mathcal{P}(C') \arrow[r, "\phi^i_{C'}"'] & \Omega(C') \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

conmuta si $\Omega g \circ \phi^i_C = \phi^i_C \circ \mathcal{P}g$.
Para esto, dado $x \in \mathcal{P}(C)$

$$\begin{aligned} \Omega g \circ \phi^i_C(x) &= \Omega g(\{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)|\ \mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)\}) \\ &= \{h | g \circ h \in \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)|\ \mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)\}\} \\ &= \{h \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C') | \mathcal{P}(g \circ h)(x) \in \mathcal{R}(A)\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\phi^i_C \circ \mathcal{P}g)(x) =& \phi^i_{C'}(\mathcal{P}g(x)) \\ =& \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C')|\ \mathcal{P}f(\mathcal{P}g(x)) \in \mathcal{R}(A)\} \end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}$ es un funtor contravariante, entonces $\mathcal{P}(g \circ f)(x) = (\mathcal{P}f \circ \mathcal{P}g)(x)$ para cada $x \in \mathcal{P}(C)$, entonces, los conjuntos son iguales para cada x, por lo tanto $\Omega g \circ \phi^i_C = \phi^i_C \circ \mathcal{P}g$. De esta manera ϕ^i es una transformacin natural y podemos construir el diagrama 4,1, que conmuta en $\widehat{\mathscr{C}}$ si y solo el diagrama

(4.3)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(C) \arrow[r, "1_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, hook, "i_C"'] & 1(C) \arrow[d, "t_C"] \\ \mathcal{P}(C) \arrow[r, "\phi^i_C"'] & \Omega(C) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{C}$. La prueba de esto ultimo consiste en ver que, dado $x \in \mathcal{R}(C)$ se cumple que $t_c \circ 1_{\mathcal{R}}(x) = \phi^i_C \circ i_C(x)$ lo que es equivalente a que si $x \in \mathcal{R}$ entonces $\phi^i_C(x) = tC$. Esto es inmediato a la definición

$$\phi^i_C(x) = \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C) | A \in \mathscr{C} \wedge \mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)\}$$

y de que $\mathcal{R} \leq \mathcal{P}$, pues esto asegura que $\mathcal{P}f(x) = \mathcal{R}f(x)$ por lo tanto, para toda $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$ y $A \in \mathscr{C}$ sucede que $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$, es decir, $\phi^i_C(x) = \{f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C) | A \in \mathscr{C}\} = tC$.
El diagrama 4.1 en $\widehat{\mathscr{C}}$ este es un pullback si y sólo si el diagrama 4.3 es pullback en $\mathscr{C}$ para toda $C \in \mathscr{C}$.
Supongamos que el siguiente diagrama

(4.4)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}'(C) \arrow[r, "1_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, hook, "m'_C"'] & 1(C) \arrow[d, "t_C"] \\ \mathcal{P}(C) \arrow[r, "\phi^i_C"'] & \Omega(C) \end{tikzcd}$$

conmuta.
Para esto simplemente verificamos la propiedad universal dando la flecha

$$\begin{aligned} \bar{f}_C : \mathcal{R}(C) &\to \mathcal{R}'(C) \\ r &\mapsto m'_C(r) \end{aligned}$$

que claramente hace conmutar el siguiente diagrama

(4.5)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}'(C) \arrow[dr, dotted, "\bar{f}_C"] \arrow[drr, bend left, "1_{\mathcal{R}'}"] \arrow[ddr, bend right, "m'_C"'] & & \\ & \mathcal{R}(C) \arrow[r, "1_{\mathcal{R}}"'] \arrow[d, "i_C"] & 1(C) \arrow[d, "t_C"'] \\ & \mathcal{P}(C) \arrow[r, "\phi^i_C"] & \Omega(C) \end{tikzcd}$$

Resta demostrar que es única. Para esto considere $\bar{f}^*_C$ tal que $m'_C = i_C \circ \bar{f}^*_C$, entonces $i_C \circ \bar{f}^*_C = i_C \circ \bar{f}_C$, y como i_C es mono, se tiene que $\bar{f}^*_C = \bar{f}_C$.

Por último, supongamos que existe $\theta \in \widehat{\mathscr{C}}(\mathcal{P}, \Omega)$ tal que el siguiente el diagrama

(4.6)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "1_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, hook, "i"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\theta"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un pullback.
Comparando 4,1 con este último diagrama (4,6), si tomamos $x \in \mathcal{P}(C)$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$ entonces $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y solo si $\theta_A(\mathcal{P}f(x)) = tA$, y usando la naturalidad de θ segun el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(C) \arrow[r, "\phi^i_C"] \arrow[d, "\mathcal{P}f"'] & \Omega(C) \arrow[d, "\Omega f"] \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\phi^i_A"'] & \Omega(A) \end{tikzcd}$$

esto es quivalente a que $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y solo si $\Omega f \circ \theta_C(x) = tA$, lo que, por la definición de Ω, nos dice que $\{h | f \circ h \in \theta_C(x)\} = tA$. Luego, en particular $Id_A \in tA$, entonces $f \in \theta_C(x)$, es decir $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y sólo si $f \in \theta_C(x)$, entonces $\phi^i_C = \theta_C$ naturalmente en C y esto si y sólo si $\phi^i = \theta$. $\square$

Bibliografía

[1] Mac Lane, S., Moerdijk I., *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos.*, primera edición, Springer, New York, 1992.

[2] Angoa-Amador Juan, Contreras-Carreto Agustín, Pérez-Ramírez Orlando, *El funtor Sub*, Capítulo 9 en Topología y sus aplicaciones 9. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Agustín Contreras Carreto, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos.

Correos electrónicos:
`jangoa@fcfm.buap.mx` (Juan Angoa-Amador),
`orlando.perezram@alumno.buap.mx` (Orlando Peréz-ramírez)
`daniel.anaya@alumno.buap.mx` (Joshua Anaya Palacios).

Topología y sus aplicaciones 9
de Juan Angoa, Agustín Contreras, Raúl Escobedo,
María de Jesús LópezToriz
está a disposición en formato pdf en la página
de la Dirección General de Publicaciones de la
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)
https://publicaciones.buap.mx
a partir de 24 marzo de 2023
Peso del archivo: 2423Kb