Matemáticas y sus aplicaciones 24

FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
(coords.)

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones 24

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: María Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Dirección General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2024
ISBN: 978-607-5914-58-9

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP. 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
www.publicaciones.buap.mx

Diseño de portada: Leonardo Ramírez Aparicio

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 24

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Contenido

Topología

Presentación

La Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) colabora activamente, junto con sus estudiantes, en el desarrollo de las «International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA)», una tradición que se ha llevado a cabo durante 20 años, celebrándose anualmente. En este evento, contamos con la participación de destacados matemáticos de nivel internacional. Esta es la razón que motiva la edición del libro que tienen en sus manos. La base fundamental ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso, emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es el amor por la Matemáticas lo que ha dado origen a este ejemplar, el cual nos brinda la sabiduría necesaria para compartir parte de nuestras actividades diarias.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo con las áreas temáticas correspondientes. Dichos capítulos han pasado por un riguroso proceso de arbitraje.

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, gentileza, dedicación y labor científica. Agradecemos profundamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su apoyo en la edición de esta obra, y a Kevin Águila Méndez por el apoyo técnico en la edición de esta obra 24.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Álgebra

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 1

El anillo de Burnside para grupos nilpotentes finitos

David Villa Hernández, Carlos Alberto López Andrade, Brenda Zavala López, Diego Mora Antonio
FCFM, BUAP

Resumen

Dado un grupo finito G, su anillo de Burnside es el anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismo de los G-conjuntos con la suma y producto dados por la unión disjunta y el producto cartesiano, respectivamente. En este capítulo nos centraremos en el caso en el que G es un grupo nilpotente finito.

1 Introducción

Sean G un grupo finito y $B(G)$ su anillo de Burnside. Nuestro objeto principal es el estudio de los grupos nilpotentes finitos, para lo cual utilizaremos el siguiente teorema conocido:

Teorema A. Un grupo finito G es nilpotente si y solo si G es el producto de sus subgrupos de Sylow.

Para más detalles acerca de este resultado ver [2] (Central Series and Nilpotents Groups).

En este trabajo, pretendemos dar un ejemplo para comprender los resultados vistos en [5]. En la segunda sección, el Lema 2.3 caracteriza el anillo de Burnside para un producto directo de grupos cuyos ordenes son primos relativos, por lo que este lema y el Teorema A nos permiten concluir el estudio de los anillos de Burnside para grupos nilpotentes finitos en el Teorema 2.4 . Finalmente el Ejemplo 2.6 es la principal contribución de este capítulo, con el cual se pretende ilustrar a través de la tabla de marcas, lo que ocurre con los isomorfismos mencionados en el Corolario 2.5.

2 El anillo de Burnside para grupos nilpotentes finitos

Sea G un grupo finito, recordemos que el anillo de Burnside G denotado en esta sección como $B(G)$, es el anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismo de los G-conjuntos con la suma dada por la unión disjunta y el producto dado por el producto cartesiano. $B(G)$ es libre como grupo abeliano con base dada por las clases de isomorfismo de G-conjuntos transitivos de la forma G/H con $H \leq G$, en donde dos de estos se identifican si sus estabilizadores H son conjugados en G, esto es:

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}(G/H),$$

donde $\mathcal{C}(G)$ es un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G.
A menudo $B(G)$ se estudia a través del homomorfismo inyectivo de anillos, llamado marca:

$$\varphi : B(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|},$$

en donde para cada K en $\mathcal{C}(G)$, la K-ésima coordenada de φ se define como la marca de K en X, es decir:

$$\varphi_K(X) = |X^K|,$$

donde X es un G-conjunto, extendiéndose de manera lineal a todo $B(G)$.
Denotamos por $\tilde{B}(G) = \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$ el cual un anillo conmutativo con unidad con la suma y producto entrada a entrada. Este último es llamado el anillo fantasma de G.
Sean $p \in \mathbb{Z}$ primo y $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos. Denotamos los siguientes productos tensoriales:

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \otimes B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p(G/H);$$

$$\tilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \otimes \tilde{B}(G) = \mathbb{Z}_p^{|\mathcal{C}(G)|}.$$

Aquí tenemos que $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p$-orden con $\tilde{B}_p(G)$ su orden máximo.

Observación 2.1. *Sea $q \in \mathbb{Z}$ primo, notemos que $B_q(G) \subseteq \tilde{B}_q(G)$ (a través de la marca). Sabemos que para cada $a \in \tilde{B}_q(G)$, se cumple que $|G|a \in B_q(G)$, en el caso en que $q \nmid |G|$ tenemos que $|G| \in \mathbb{Z}_q$ es unidad, esto implica $a \in B_q(G)$. Concluimos que:*

$$\textit{si } q \nmid |G| \textit{ entonces } B_q(G) = \tilde{B}_q(G).$$

Ejemplo 2.2. *Sean $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y C_{p^n} un grupo cíclico de orden p^n. Entonces $\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{H_0, \ldots, H_n\}$ en donde $H_i \leq C_{p^n}$ de orden p^i para $i = 0, \ldots, n$. Por lo anterior una base para $B_p(C_{p^n})$ sería $a_0, \ldots, a_n$, donde:*

$$a_i = C_{p^n}/H_i \text{ para } i = 0, \ldots, n,$$

es decir que $B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}_p a_i$ y su $\mathbb{Z}_p$-orden máximo es $\mathbb{Z}_p^{n+1}$. Sean H y K subgrupos de C_{p^n}, recordemos que:

$$\varphi_H(C_{p^n}/K) = \begin{cases} |C_{p^n}/K| & si \quad H \subseteq K; \\ \\ 0 & si \quad H \nsubseteq K. \end{cases}$$

Ahora el homomorfismo marca, induce la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} \varphi : B_p(C_{p^n}) &\to \mathbb{Z}_p^{n+1} \\ X &\mapsto (\varphi_{H_0}(X), \ldots, \varphi_{H_n}(X)). \end{aligned}$$

Por lo anterior, podemos ver a $B_p(G)$ como el subanillo de $\mathbb{Z}_p^{n+1}$, generado por las columnas de la siguiente matriz (conocida como la tabla de marcas de C_{p^n})

$$\begin{pmatrix} p^n & p^{n-1} & \cdots & p & 1 \\ 0 & p^{n-1} & \cdots & p & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{(n+1)}(\mathbb{Z}_p),$$

en donde la i-ésima columna esta dada por:

$$\varphi_{H_j}(C_{p^n}/H_{i-1}) = \begin{cases} p^{n-i+1} & si \quad j \leq i-1; \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $j = 0, \dots, n$.

Para un estudio más detallado del anillo de Burnside se puede consultar [1].

Lema 2.3. *Sean P y K dos grupos finitos tales que P es un p-grupo para algún $p \in \mathbb{Z}$ primo y K de orden primo relativo a p. Si $G = P \times K$ entonces:*

$$B_p(G) \cong \prod_{H \in \mathcal{C}(K)} B_p(P).$$

Demostración.
La prueba se basa en el Teorema 3.1 de [3], y el lector la puede encontrar en el Lema 5.1 de [4]. □

Teorema 2.4. *(El anillo de Burnside para grupos nilpotentes finitos.) Sea G un grupo nilpotente finito de orden $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ con $p_i \in \mathbb{Z}$ primo y $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \dots, r$. Sea P_i el p_i-subgrupo de Sylow de G. Entonces:*

$$B_{p_i}(G) \cong (B_{p_i}(P_i))^{\prod_{j \neq i} |\mathcal{C}(P_j)|}.$$

Demostración.
Consideramos $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Entonces $\left|\mathcal{C}\left(\prod_{j \neq i} P_j\right)\right| = \prod_{j \neq i} |\mathcal{C}(P_j)|$ y por Teorema A tenemos que $G \cong \prod_{j=1}^{r} P_j$. Sea $i \in \{1, \dots, r\}$ por el Lema 2.3 concluimos que:

$$\begin{aligned} B_{p_i}(G) &\cong (B_{p_i}(P_i))^{\left|\mathcal{C}\left(\prod_{j \neq i} P_j\right)\right|} \\ &= (B_{p_i}(P_i))^{\prod_{j \neq i} |\mathcal{C}(P_j)|}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.5. *Con la notación del teorema anterior, si cada P_i es cíclico de orden $p_i^{\alpha_i}$ para $i = 1, \dots, r$. Entonces $B_{p_i}(G) \cong (B_{p_i}(P_i))^{\prod_{j \neq i} (\alpha_j + 1)}$ para cada $i = 1, \dots, r$.*

Demostración.
Observamos que $|\mathcal{C}(P_j)| = \alpha_j + 1$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$. El resultado es inmediato del teorema anterior. □

Ejemplo 2.6. *Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ primos distintos y $G = P \times Q$ con P un grupo cíclico de orden p y Q un grupo cíclico de orden q^2.*

1. *Del Ejemplo 2.2, tenemos:*

$$\mathcal{C}(P) = \{H_0 = \{1\},\, H_1 = P\}.$$

Una base para $B_p(P)$ es $a_0 = P/\{1\}$ y $a_1 = P/P$, es decir, $B_p(P) = \mathbb{Z}_p a_0 \oplus \mathbb{Z}_p a_1$. De la marca correspondiente tenemos la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} \varphi : B_p(P) &\to \mathbb{Z}_p^2 \\ a_0 &\mapsto (p, 0); \\ a_1 &\mapsto (1, 1). \end{aligned}$$

Así $B_p(P) \subseteq \mathbb{Z}_p^2$ está generada por las columnas de su tabla de marcas:

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Del Ejemplo 2.2, tenemos que: $\mathcal{C}(Q) = \{K_0 = \{1\}, K_1, K_2 = Q\}$ donde $K_1 < Q$ es de orden q.*

Si $b_0 = Q/K_0$, $b_1 = Q/K_1$ y $b_1 = Q/K_2$, entonces $B_q(Q) = \mathbb{Z}_q b_0 \oplus \mathbb{Z}_q b_1 \oplus \mathbb{Z}_q b_2$. De la marca correspondiente tenemos la siguiente inclusión:

$$\begin{aligned} \varphi : B_q(Q) &\to \mathbb{Z}_q^3 \\ b_0 &\mapsto (q^2, 0, 0); \\ b_1 &\mapsto (q, q, 0); \\ b_2 &\mapsto (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Así $B_q(Q) \subseteq \mathbb{Z}_q^3$ está generada por las columnas de su tabla de marcas:

$$\begin{pmatrix} q^2 & q & 1 \\ 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Calculemos $B_q(G)$. Con la notación de 1 y 2 de este mismo ejemplo, tenemos que:*

$$\mathcal{C}(G) = \{H_0 \times K_0, H_0 \times K_1, H_0 \times K_2, H_1 \times K_0, H_1 \times K_1, H_1 \times K_2\}.$$

Si $c_0 = G/(H_0 \times K_0)$, $c_1 = G/(H_0 \times K_1)$, $c_2 = G/(H_0 \times K_2)$, $c_3 = G/(H_1 \times K_0)$, $c_4 = G/(H_1 \times K_1)$, $c_5 = G/(H_1 \times K_2)$, entonces la marca correspondiente induce la siguiente inclusión:

$$\varphi : B_q(G) = \bigoplus_{i=0}^{5} \mathbb{Z}_q c_i \to \mathbb{Z}_q^6$$
$$\begin{aligned} c_0 &\mapsto (pq^2, 0, 0, 0, 0, 0); \\ c_1 &\mapsto (pq, pq, 0, 0, 0, 0); \\ c_2 &\mapsto (p, p, p, 0, 0, 0); \\ c_3 &\mapsto (q^2, 0, 0, q^2, 0, 0); \\ c_4 &\mapsto (q, q, 0, q, q, 0); \\ c_5 &\mapsto (1, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Así $B_q(G) \subseteq \mathbb{Z}_q^6$ está generada por las columnas de su tabla de marcas:

$$\begin{pmatrix} pq^2 & pq & p & q^2 & q & 1 \\ 0 & pq & p & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como $p \in \mathbb{Z}_q$ es unidad tenemos que p es invertible, aplicando operaciones elementales en columnas tenemos que esta tabla de marcas es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} q^2 & q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos que $B_q(G) \cong B_q(Q)^{|\mathcal{C}(P)|} = (B_q(Q))^2$.

4. *Calculemos* $B_p(G)$. *Con la notación de 1 y 2 de este mismo ejemplo, tenemos que:*

$$\mathcal{C}(G) = \{H_0 \times K_0, H_1 \times K_0, H_0 \times K_1, H_1 \times K_1, H_0 \times K_2, H_1 \times K_2\}.$$

Si $d_0 = G/(H_0 \times K_0)$, $d_1 = G/(H_1 \times K_0)$, $d_2 = G/(H_0 \times K_1)$, $d_3 = G/(H_1 \times K_1)$, $d_4 = G/(H_0 \times K_2)$, $d_5 = G/(H_1 \times K_2)$, *entonces la marca correspondiente induce la siguiente inclusión:*

$$\varphi : B_p(G) = \bigoplus_{i=0}^{5} \mathbb{Z}_p d_i \to \mathbb{Z}_p^6$$

$$\begin{aligned}
d_0 &\mapsto (pq^2, 0, 0, 0, 0, 0);\\
d_1 &\mapsto (q^2, q^2, 0, 0, 0, 0);\\
d_2 &\mapsto (pq, 0, pq, 0, 0, 0);\\
d_3 &\mapsto (q, q, q, q, 0, 0);\\
d_4 &\mapsto (p, 0, p, 0, p, 0);\\
d_5 &\mapsto (1, 1, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Así $B_p(G) \subseteq \mathbb{Z}_p^6$ *está generada por las columnas de su tabla de marcas:*

$$\begin{pmatrix}
pq^2 & q^2 & pq & q & p & 1\\
0 & q^2 & 0 & q & 0 & 1\\
0 & 0 & pq & q & p & 1\\
0 & 0 & 0 & q & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & p & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

como $q \in \mathbb{Z}_p$ *es unidad tenemos que* q *es invertible, aplicando operaciones elementales en columnas tenemos que esta matriz es equivalente* *a:*

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En donde finalmente tenemos que $B_p(G) \cong B_p(P)^{|\mathcal{C}(Q)|} = (B_p(P))^3$.

Agradecimientos

Agradecemos a los editores de este libro y a los árbitros. Este trabajo se realizó gracias al apoyo del proyecto VIEP 00248 *Anillos, módulos, códigos y matemáticas discretas*.

Referencias

[1] S. Bouc, *Burnside rings*, Handbook of Algebra, Vol 2, North - Holland, Amsterdam, (2000), 739-804.

[2] J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, 1995.

[3] W. Kimmerle, F. Luca and G. Raggi-Cardenas, *Irreducible components and isomorphisms of the Burnside ring*, J. Group Theory, **11(6)** (2008), 831-844.

[4] D. Villa-Hernández, *Zeta function of the Burnside ring for cyclic groups*, Int. J. Algebra, **5(26)** (2011), 1255-1266.

[5] D. Villa-Hernández, C. A. López-Andrade and J. M. Ramírez-Contreras, *The Burnside ring for finite nilpotent groups and its zeta function*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, **40(3)** (2018), 351-358.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dvilla@fcfm.buap.mx
clopez@fcfm.buap.mx
bzavala@fcfm.buap.mx
diego.moraan@alumno.buap.mx

Análisis Matemático

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 2

Una introducción a la teoría de las clases de Fraïssé

Sonia Navarro Flores
FCFM, BUAP

Resumen

La teoría de las clases de Fraïssé es una subárea de la teoría de modelos que nos permite construir estructuras numerables como límite de estructuras finitas. En este capítulo presentamos una introducción a la teoría de las clases de Fraïssé para que el lector se familiarice con las herramientas que se usan en esta subárea. Además mostramos algunas de sus propiedades y ejemplos de clases de Fraïssé que provienen de distintas áreas de las matemáticas. Para finalizar, mencionamos diversas líneas por las cuales se puede profundizar en el tema.

1 Introducción

La teoría de las clases de Fraïssé nos proporciona un método para construir estructuras numerables como límites de familias de estructuras finitamente generadas. La importancia de esta teoría yace en el hecho de que si la familia de estructuras finitamente generadas cumple algunas propiedades, se puede garantizar la homogeneidad del límite. Aún más, la familia de subestructuras finitamente generadas de una estructura homogénea también poseerá propiedades interesantes. Recientemente, la teoría de las clases de Fraïssé ha tenido aplicaciones a otras áreas de las matemáticas como Análisis y Sistemas dinámicos, esto se debe principalmente al trabajo de Kechris, Pestov y Todorcevic. En [10], ellos establecen una correspondencia entre una propiedad tipo Ramsey sobre las clases de Fraïssé, la existencia del flujo minimal universal y la propiedad de ser extremadamente amenable en grupos. El lector interesado en profundizar en este tema puede revisar [8].

Algunas líneas de investigación actuales relacionadas con esta área tienen que ver con calcular el límite de Fraïssé de diversas estructuras matemáticas (ver [13], [21], [2]), calcular el flujo universal mínimo (ver [15], [11]) y el cálculo de los "big Ramsey degrees" (ver [9], [22]).

En este texto incluiremos algunas pruebas que ayudan a comprender las técnicas usadas en esta teoría, de los resultados que se presentan sin prueba incluimos la referencia para que el lector interesado pueda consultarlos.

Para empezar vamos a presentar algunas definiciones de teoría de modelos. Para que se entienda mejor a que nos referimos por "nombres" en la siguiente definición daremos un breve ejemplo. Sabemos que en la teoría de grupos usualmente denotamos al elemento neutro por 1 y eso no significa que todos los grupos tengan al mismo neutro. Sabemos que el neutro de cada grupo puede ser un número entero, una permutación, una función u otro objeto matemático dependiendo del grupo en cuestión, sin embargo como a cada neutro lo denotamos por el 1, decimos que 1 nombra al elemento neutro de cada grupo.

Definición 1.1. *Una* estructura $\mathbf{A}$ *es un objeto que tiene asociados los siguientes conjuntos:*

- *Un conjunto llamado* el dominio *o* el universo *de* $\mathbf{A}$*, que se denota por* A*. Los elementos de* A *son llamados los elementos de la estructura* $\mathbf{A}$*. La cardinalidad de* $\mathbf{A}$*,* $|\mathbf{A}|$ *se define como la cardinalidad* $|A|$*.*

- *Un conjunto de elementos de* $\mathbf{A}$ *llamados* elementos constantes*, cada uno nombrado por una constante. Si* c *es una constante, escribimos* $c^{\mathbf{A}}$ *para denotar el elemento constante nombrado por* c*.*

- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, exite un conjunto de relaciones de aridad* n *sobre* A*. Cada relación es nombrada por un símbolo de relación de aridad* n*. Si* R *es un símbolo de relación, escribimos* $R^{\mathbf{A}}$ *para denotar a la relación nombrada por* R*.*

- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, existe un conjunto de funciones de aridad* n *de* A^n *en* A*. Cada función es nombrada por un símbolo de función de aridad* n*. Si* f *es un símbolo de función, escribimos* $f^{\mathbf{A}}$ *para denotar a la función nombrada por* R*.*

En esta definición, los conjuntos que se mencionan pueden ser vecíos. Observamos que la definición es muy abstracta, la ventaja de esto es que diversos objetos matemáticos son estructuras al considerar sus constantes, relaciones y funciones. A continuación presentamos ejemplos de objetos matemáticos que son estructuras matemáticas.

Ejemplo 1.2. *Recordamos que un* grafo *es una pareja $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de vértices y $E \subseteq [V]^2$ es el conjunto de aristas. Para considerar a G como una estructura, tomamos el dominio de G como el conjunto de vértices con una relación binaria R^G que satisface que $(u, v) \in R^G$ si y solamente si $\{u, v\}$ es una arista. De esta forma podemos ver a un grafo como una estructura.*

Ejemplo 1.3. *Sea $(X, \leq)$ un orden lineal. Podemos pensar a $(X, \leq)$ como una estructura $\mathbf{A}$ de la siguiente manera. El dominio $\mathbf{A}$ es el conjunto X. Existe un símbolo de relación binaria R, y su interpretación $R^{\mathbf{A}}$ es el orden $\leq$.*

Ejemplo 1.4. *Sea G un grupo. Podemos pensar a G como una estructura con una constante 1 que nombra a la identidad 1^G, un símbolo de función binaria $\cdot$ que nombra a la operación del grupo $\cdot^G$, y un símbolo de función unaria $^{-1}$ que nombra la operación inverso $^{(-1)^G}$. Otro grupo H tendrá los mismos símbolos $1, \cdot, ^{-1}$; así 1^H es el elemento identidad de H, $\cdot^H$ es la operación de H, y $^{(-1)^H}$ es la operación inverso de H.*

Ahora nos podríamos preguntar si dado un objeto matemático, la elección de relaciones que incluimos para visualizarlo como estructura es arbitraria, más adelante veremos que no es así.

Una signatura numerable para una estructura $\mathbf{A}$ es una colección numerable L que incluye el conjunto de todas las constantes de $\mathbf{A}$, el conjunto de símbolos de relaciones de aridad n y el conjunto de símbolos de función de aridad n donde $n \in \mathbb{N}$. Dada una estructura $\mathbf{A}$, usaremos la siguiente notción para denotarla.

$$\mathbf{A} = \langle A, \{R_i^{\mathbf{A}}\}_{i \in I}, \{f_j^{\mathbf{A}}\}_{j \in J} \rangle,$$

donde A es el dominio de $\mathbf{A}$, $R_i^{\mathbf{A}}$ es una relación de aridad $n(i)$ sobre A, y $f_j^{\mathbf{A}} : A^{m(j)} \to A$ es una función. Observe que dos grupos tienen la misma signatura pues su signatura consiste de la constante que representa al neutro y de la función binaria que representa la operación del grupo.

Dadas dos estructuras $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ con la misma signatura L, un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es una función $\pi : A \to B$ tal que

$$R_i^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{n(i)}) \Leftrightarrow R_i^{\mathbf{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_{n(i)}))$$

y

$$\pi(f_i^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{m(j)})) = f_i^{\mathbf{B}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_{m(j)})).$$

Si π es un homomorfismo inyectivo, decimos que π es un *encaje*. Si además π es sobreyectivo, decimos que π es un isomorfismo. Si existe un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos*. Un *automorfismo* de $\mathbf{A}$ es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en si mismo.

En este texto nos interesan las estructuras $\mathbf{A}$ para las cuales su dominio A es numerable. Diremos que $\mathbf{B}$ es una subestrucutra de $\mathbf{A}$ si su universo $B \neq \emptyset$ satisface que $B \subseteq A$, B es cerrado bajo cada función $f_j^{\mathbf{A}}$, y $R_i^{\mathbf{B}} = R_i^{\mathbf{A}} \cap B^{n(i)}$. En este caso escribiremos $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Una estructura es finitamente generada si es generada por un conjunto finito. Si una signatura L es relacional, es decir que no contiene funciones, entonces cualquier estructura finitamente generada con signatura L es en realidad finita. Esto también ocurre si L contiene una cantidad finita de funciones y cada una tiene aridad 0.

Como hemos observado antes, un objeto matemático puede ser interpretado como estructura de diferentes formas. Por ejemplo, cuando interpretamos a un grupo como estructura nos queda claro que debemos incluir un nombre para la operación $\cdot$ pero ¿podemos incluir el nombre $[,]$ para el conmutador $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ y dejar fuera al inverso?

En realidad la elección de constantes, relaciones y funciones a incluir en la signatura no es arbitraria pues para que la teoría que estamos presentando sea útil, la elección de la signatura debe garantizar que las nociones de homomorfismo y subestructura coincidan con las del objeto matemático en cuestión. Continuando con el ejemplo de los grupos, si nosotros solamente incluimos en la signatura al nombre de la operación $\cdot$, entonces las subestructuras de un grupo serían los subsemigrupos, cerrados bajo la operación pero que no necesariamente contienen inversos ni a la identidad. Si nombramos a la operación $\cdot$ y a la identidad 1, entonces las subestructuras de un grupo serán los submonoides. Para garantizar que las subestructuras de un grupo sean los subgrupos es necesario adicionalmente nombrar al inverso $^{-1}$. Para grupos la elección natural de una signatura es la que nombra la operación del grupo, la identidad y el inverso, a tal signatura se le conoce como *la signatura de grupos*.

2 Teoría de Fraïssé

Diremos que una estructura $\mathbf{A}$ es *homogénea* si cada isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$ se puede extender a un automorfismo de $\mathbf{A}$. Diremos que una estructura $\mathbf{A}$ es *débilmente homogénea* si para cada par $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ de subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$ tales que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ y para cada $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ encaje, existe un encaje $g : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ que extiende a f.

Note que si una estructura es homogénea entonces es débilmente homogénea.

Ejemplo 2.1. *Los racionales con su orden usual* ($\langle \mathbb{Q}, < \rangle$) *son una estructura homogénea.*

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{p_1, \dots, p_n\}$, $\{p'_1, \dots, p'_n\}$ subconjuntos finitos de $\mathbb{Q}$ ordenados de forma que $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $p_i < p_{i+1}$ y $p'_i < p'_{i+1}$. Sea $\varphi : \{p_1, \dots, p_n\} \to \{p'_1, \dots, p'_n\}$ un isomorfismo y note que $\varphi(p_i) = p'_i$.

Extenderemos φ a un automorfismo ψ de $\mathbb{Q}$ usando la técnica llamada "back-and-forth". Fijamos una enumeración de los racionales $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Primero definimos ψ sobre $\{p_1, \dots, p_n\}$ como φ.

Paso 1. Sea k el mínimo número natural tal que ψ no está definida en q_k.

Caso 1. Existen $i, j < k$ tales que $q_k \in (q_i, q_j)$ y $(q_i, q_j) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Note que $(\psi(q_i), \psi(q_j)) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Ahora sea l el mínimo número natural tal que $q_l \in (\psi(q_i), \psi(q_j))$ y q_l no pertenece al rango de ψ. Definimos $\psi(q_k) = q_l$.

Caso 2. Existe $i < k$ tal que $q_k > q_i$ y $(q_i, \infty) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Note que $(\psi(q_i), \infty) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Ahora sea l el mínimo número natural tal que $q_l \in (\psi(q_i), \infty)$ y q_l no pertenece al rango de ψ. Definimos $\psi(q_k) = q_l$.

Caso 3. Existe $i < k$ tal que $q_k < q_i$ y $(-\infty, q_i) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Note que $(-\infty, \psi(q_j)) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Ahora sea l el mínimo número natural tal que $q_l \in (-\infty, \psi(q_i))$ y q_l no pertenece al rango de ψ. Definimos $\psi(q_k) = q_l$.

Paso 2. Sea l el mínimo número natural tal que q_l no pertenece al rango de ψ.

Caso 1. Existen $i, j < l$ tales que $q_l \in (\psi(q_i), \psi(q_j))$ y $(\psi(q_i), \psi(q_j)) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Note que $(q_i, q_j) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Sea k el mínimo número natural tal que $q_k \in (q_i, q_j)$ y ψ no está definido en q_k. Definimos $\psi(q_k) = q_l$.

Caso 2. Existe $i < l$ tal que $q_l > \psi(q_i)$ y $(\psi(q_i), \infty) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Note que $(q_i, \infty) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Sea k el mínimo número natural tal que $q_k \in (q_i, \infty)$ y ψ no está definido en q_k. Sea $\psi(q_k) = q_l$.

Caso 3. Existe $i < l$ tal que $q_l < \psi(q_i)$ y $(-\infty, \psi(q_i)) \cap \mathrm{ran}\psi = \emptyset$. Note que $(-\infty, q_i) \cap \mathrm{dom}\psi = \emptyset$. Sea k el mínimo número natural tal que $q_k \in (-\infty, q_i)$ y ψ no está definido en q_k. Definimos $\psi(q_k) = q_l$.

Repetimos los pasos 1 y 2 alternadamente una cantidad numerable de veces. Por la forma en que se extendió a ψ garantizamos que es un automorfismo.

Definición 2.2. *Sean L una signatura y $\mathbf{A}$ una L-estructura.* El esqueleto de $\mathbf{A}$ *es la clase $\mathcal{K}$ de todas las estructuras finitamente generadas que se pueden encajar en $\mathbf{A}$. El esqueleto de $\mathbf{A}$ se denota por $age(\mathbf{A})$*

De acuerdo con la definición de $\mathcal{K} = age(\mathbf{A})$, cualquier estructura en $\mathcal{K}$ es isomorfa a una subestructura de $\mathbf{A}$. Observamos que al incluir en $\mathcal{K}$ a todas las estructuras isomorfas a alguna subestructura de $\mathbf{A}$ el tamaño de $\mathcal{K}$ podría ser infinito no numerable lo cual no nos conviene pues $\mathbf{A}$ es una estructura numerable. Para garantizar que $\mathcal{K}$ es numerable y así esta clase sea más fáci de manipular, en adelante el esqueleto de $\mathbf{A}$ será la clase de todas las subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$.

Definición 2.3. *Sean L una signatura y $\mathcal{K}$ una clase de L-estructuras finitamente generadas. Definimos las siguientes propiedades para $\mathcal{K}$.*

(1) Propiedad Hereditaria (HP)*: Si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\mathbf{B}$ es una subestructura finitamente generada de $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{B}$ es isomorfa a una estructura en $\mathcal{K}$.*

(2) Propiedad del encaje conjunto (JEP): *Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pertenecen a $\mathcal{K}$ entonces existe $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se pueden encajar en $\mathbf{C}$.*

(3) Propiedad de la amalgamación (AP)*: Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ pertenecen a $\mathcal{K}$ y $e : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ son encajes, entonces existen $\mathbf{D} \in \mathcal{K}$ y encajes $g : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $h : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tales que $g \circ e = h \circ f$.*

En este punto surge de manera natural la pregunta de en qué condiciones la clase de subestructuras finitamente generadas de una estructura dada posee las propiedades HP, JEP, y AP. La siguiente proposición dice que los esqueletos de las estructuras homogéneas satisfacen las tres propiedades.

Proposición 2.4. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura homogénea no vacía. Entonces $\mathcal{K} =$ age$(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, y satisface las propiedades HP, JEP y AP.*

Demostración. Como el universo de $\mathbf{A}$ no es vacío, tomamos un conjunto finito $F \subset A$ no vacío. Sea $\mathbf{B}$ la subestructura de $\mathbf{A}$ generada por F. Entonces $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Para ver que $\mathcal{K}$ satisface la propiedad HP tomamos $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $\mathbf{C}$ una subestructura finitamente generada de $\mathbf{B}$. Como $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, existe un isomorfismo $h : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ donde $\mathbf{D}$ es una subestructura finitamente generada de A. Entonces $h[\mathbf{C}]$ es isomorfo a $\mathbf{C}$ y es una subestructura finitamente generada de $\mathbf{A}$. Por lo tanto $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$. Ahora veremos que $\mathcal{K}$ satisface la propiedad JEP. Tomamos $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K} = \mathrm{age}(\mathbf{A})$, existen estructuras $\mathbf{B}', \mathbf{C}' \subseteq \mathbf{A}$ que son isomorfas a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ respectivamente. Observamos que $\mathbf{B}'$ y $\mathbf{C}'$ son estructuras generadas por conjuntos finitos, sean $F, G \subset A$ tesos conjuntos finitos. Sea $\mathbf{D}$ la subestructura generada por $F \cup G$. Entonces $\mathbf{D} \in \mathcal{K}$ y ambos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ se pueden encajar en $\mathbf{D}$.

Finalmente veamos que $\mathcal{K}$ satisface la propiedad AP. Fijamos $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ en $\mathcal{K}$ y sean $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $g : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ encajes. Para simplificar la prueba supondremos que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son de hecho subestructuras de $\mathbf{A}$. note que $f \circ g^{-1} : g[\mathbf{B}] \to f[\mathbf{B}]$ es un isomorfismo entre subestructuras de $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}$ es una estructura homogénea, existe un automorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ que extiende a $f \circ g^{-1}$. Sea $\mathbf{E}$ la subestructura finitamente generada de $\mathbf{A}$ que contiene a C y $h[D]$. Sea $i : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ la inclusión y tomamos $h \mid \mathbf{D}$. Entonces

$$h \circ g = (h \circ g^{-1}) \circ g = f = f \circ i.$$

□

Por otro lado nos podríamos preguntar si dada una clase de estructuras finitamente generadas con las propiedades HP, JEP y AP es posible construir una estructura homogénea. El siguiente teorema nos dice que si tenemos una clase de estructuras finitamente generadas que satisfacen las propiedades HP y JEP, esta debe ser el esqueleto de una estructura numerable.

Teorema 2.5. *Sean L una signatura y $\mathcal{K} \neq \emptyset$ una clase finita o numerable de L-estructuras finitamente generadas que satisface las propiedades HP y JEP. Entonces $\mathcal{K}$ es el esqueleto de una estructura finita o numerable.*

Demostración. Sea $\langle \mathbf{A}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ una enumeración de las estructuras en $\mathcal{K}$. Definiremos recursivamente una cadena de estructuras $\langle \mathbf{B}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ que son isomorfas a estructuras en $\mathcal{K}$. Sea $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$. Ahora suponemos que B_i se ha definido. Usando la propiedad del encaje conjunto obtenemos una estructura

$\mathbf{B}' \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{B}_i$ y $\mathbf{A}_{i+1}$ se pueden encajar en $\mathbf{B}'$. Sea $\mathbf{B}_{i+1}$ una copia isomorfa $\mathbf{B}'$ que extiende a $\mathbf{B}_i$. Sea $\mathbf{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{B}_i$. Notamos que $\mathbf{C}$ es a lo más numerable. Tomamos $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$. Como $\mathbf{A}_n$ se puede encajar en algún $\mathbf{B}_{i+1}$, entonces $\mathbf{A}$ se puede encajar en $\mathbf{C}$. Por lo tanto $\mathcal{K}$ está contenido en el esqueleto de $\mathbf{C}$. Ahora sea $\mathbf{A}$ una subestructura finitamente generada de $\mathbf{C}$, entonces el conjunto finito de generadores de $\mathbf{A}$ está contenido en algún $\mathbf{B}_n$. Así $\mathbf{A}$ es isomorfa a alguna subestructura de $\mathbf{B}_n$ pues $\mathcal{K}$ tiene la propiedad hereditaria.

□

Ahora probaremos algunos Lemas para establecer el Teorema de Fraïssé el cual dice que es necesario que una clase de estructuras finitamente generadas satisfaga la propiedad AP para garantizar que esta clase es el esqueleto de una estructura homogénea.

Lema 2.6. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *L-estructuras que son a lo más numerables. Si* $\operatorname{age}(\mathbf{A}) \subseteq \operatorname{age}(\mathbf{B})$ *y* $\mathbf{B}$ *es débilmente homogénea, entonces* $\mathbf{A}$ *se puede encajar en* $\mathbf{B}$.

Demostración. Fijamos $\mathbf{C}_1 \in \operatorname{age}(\mathbf{A})$. Como $\mathbf{A}$ es a lo más numerable, podemos escribir $\mathbf{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}_n$ como la unión de una cadena de subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$. Por inducción sobre n, construiremos una colección de encajes compatibles $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbf{C}_n \to \mathbf{B}$. Como $\operatorname{age}(\mathbf{A}) \subseteq \operatorname{age}(\mathbf{B})$, existe un encaje $f_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{B}$. Ahora suponemos que conocemos el encaje $f_n : \mathbf{C}_n \to \mathbf{B}$. Sea $g : \mathbf{C}_{n+1} \to \mathbf{D}$ un isomorfismo de $\mathbf{A}_{n+1}$ en una subestructura de $\mathbf{B}$. Notamos que $f_n \circ g^{-1}$ es un encaje de $g[\mathbf{C}_n]$ en $\mathbf{B}$. Por la homogeneidad débil de $\mathbf{B}$ este encaje se extiende a un encaje $h : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$. Sea $f_{n+1} : \mathbf{C}_{n+1} \to \mathbf{B}$ igual a $h \circ g$. Notamos que $f_n \subseteq f_{n+1}$. Sea f la unión de todos los encajes f_n. Entonces f es un encaje de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. □

Lema 2.7. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *L-estructuras numerables con el mismo esqueleto. Supongamos que ambas estructuras son débilmente homogéneas. Entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$. *Aún más, una estructura numerable es homogenea si y solo si es débilmente homogenea.*

Demostración. Primero escribiremos las estructuras $\mathbf{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{A}_n$ y $\mathbf{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}_n$ como uniones de cadenas de subestructuras finitamente generadas. Definiremos una cadena $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ de isomorfismos entre subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ que cumplan que para cada $n \in \mathbb{N}$, el dominio de f_{2n-1} incluye a A_n y la imagen de f_{2n} incluye a B_n.

Como $\mathbf{A}_1 \in \text{age}(\mathbf{B})$, existe un isomorfismo $g : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es una subestructura finitamente generada de $\mathbf{B}$. Sea $f_1 = g$. Ahora suponemos que conocemos el isomorfismo $f_n : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ donde $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. Si $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces $n+1 = 2(k+1)-1$. Sea m un número natural tal que $\mathbf{C}, \mathbf{A}_{k+1} \subseteq \mathbf{A}_m$. Como $\mathbf{A}_m \in \text{age}(\mathbf{B})$, existe un isomorfismo $g : \mathbf{A}_m \to \mathbf{D}'$, donde $\mathbf{D}'$ es una subestructura finitamente generada de $\mathbf{B}$. Notamos que $g \circ f_{2k}^{-1}$ encaja $\mathbf{D}$ en $\mathbf{D}'$. Como $\mathbf{B}$ es débilmente homogenea, existe un encaje $h : \mathbf{D}' \to \mathbf{B}$ que extiende a $g \circ f_{2k}^{-1}$. Entonces $h \circ g$ encaja $\mathbf{A}_m$ en $\mathbf{B}$. Sea $f_{n+1} = h \circ g$ y notamos que f_{n+1} es un isomorfismo entre $\mathbf{A}_m$ y su imagen. Ahora veamos el caso $n = 2k-1$. Notamos que $n+1 = 2k$. Sea m un número natural tal que $\mathbf{D}, \mathbf{B}_k \subseteq \mathbf{B}_m$. Como $\mathbf{B}_m \in \text{age}(\mathbf{A})$, existe un isomorfismo $g : \mathbf{C}' \to \mathbf{B}_m$, donde $\mathbf{C}'$ es una subestructura finitamente generada de $\mathbf{A}$. Notamos que $g^{-1} \circ f_n$ encaja $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}'$. Como $\mathbf{A}$ es una estructura débilmente homogenea, existe un encaje $h : \mathbf{C}' \to \mathbf{A}$ que extiende a $g^{-1} \circ f_n$. Entonces $h \circ g^{-1}$ encaja $\mathbf{B}_m$ en $\mathbf{A}$. Sea $f_{n+1} = (h \circ g^{-1})^{-1}$. Entonces f_{n+1} es un isomorfismo entre $h[\mathbf{C}']$ y $\mathbf{B}_m$.

Ahora, sea $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ la unión de todos los isomorfismos f_n. Por la construcción de los isomorfismos f_n se cumple que f es un isomorfismo.

Finalmente sea $\mathbf{A}$ una L-estructura numerable, débilmente homogenea. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ subestructuras finitamente generadas de $\mathbf{A}$ y sea $h : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un isomorfismo. Sean $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}$. Repitiendo la última prueba, podemos extender h a un autormorfismo de $\mathbf{A}$. □

Teorema 2.8 (Fraïssé)**.** *Sea L una signatura numerable y sea $\mathcal{K}$ una clase no vacía de L-estructuras finitamente generadas que cumplen las propiedades HP, JEP y AP. Entonces existe una L-estructura infinita numerable A, única salvo isomorfismo tal que $\mathcal{K} = \text{age}(A)$ y $\mathbf{A}$ es homogenea.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ y es cerrado bajo copias isomorfas. Construiremos una cadena $\langle \mathbf{A}_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ de estructuras en $\mathcal{K}$ que satisfacen la siguiente propiedad:

Si $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ son estructuras en $\mathcal{K}$ tales que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, y existen $i \in \mathbb{N}$ y un encaje $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}_i$ entonces existen $j > i$ y un encaje $g : \mathbf{C} \to \mathbf{A}_j$ que extiende a f.

Sea $\mathbf{P}$ el conjunto numerable de parejas de estructuras $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ tales que $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{K}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ de forma que $\mathbf{P}$ incluye solamente un representante de todas las parejas que son isomorfas entre ellas. Sea $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva tal que $\pi(i, j) \geq i$.

Ahora definimos la sucesión $\langle \mathbf{A}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ de manera recursiva. Sea $\mathbf{A}_0$ cualquier estructura en $\mathcal{K}$. Ahora suponemos que conocemos la estructura $\mathbf{A}_k$. Hacemos la lista $\{(f_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_{i_j}) : i, j \in \mathbb{N}\}$ de la colección de todas las tercias $(f, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ donde $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}_k$ es un encaje y $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$. Fijamos $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $k = \pi(i, j)$. Por la Propiedad de Amalgamación existe una estructura $\mathbf{D} \in \mathcal{K}$ y encajes $g : \mathbf{A}_k \to \mathbf{D}$, $h : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tales que $g \circ f_i = h \circ i$ donde $i : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es la inclusión. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que g es la inclusión. Sea $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{D}$ y notamos que g extiende a f_i.

Sea $\mathbf{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n$ y notamos que $\operatorname{age}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{K}$. Para ver la otra contención tomamos $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$. Por la propiedad del encaje conjunto existe una estructura $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$ se encaja en $\mathbf{C}$. Entonces la función identidad en $\mathbf{A}_0$ se extiende a un encaje de $\mathbf{C}$ en algún $\mathbf{A}_j$. Por lo tanto $\mathbf{B}$ pertenece al esqueleto de $\mathbf{A}$. Por la forma en la que definimos la cadena $\langle \mathbf{A}_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, se sigue que $\mathbf{A}$ es débilmente homogenea. Entonces por el Lema 2.7 se concluye que $\mathbf{A}$ es homogénea. □

Sean $\mathbf{A}$ una estructura numerable y $\mathcal{K} = \operatorname{age}(\mathbf{A})$. Diremos que $\mathbf{A}$ es *universal* para $\mathcal{K}$ si para cualquier estructura $\mathbf{B}$ se cumple que $\operatorname{age}(\mathbf{B}) \subset \mathcal{K}$ se cumple que $\mathbf{B}$ se puede encajar en $\mathbf{A}$. La estructura $\mathbf{A}$ obtenida en el teorema anterior se llama *estructura universal homogénea con esqueleto* $\mathcal{K}$ o el *límite de Fraïssé* de la clase $\mathcal{K}$.

Ejemplo 2.9. *La clase de todos los órdenes lineales finitos, $\mathcal{LO}$, satisface las propiedades HP, JEP y AP. El límite de Fraïssé de esta clase es el orden* $(\mathbb{Q}, <)$. *Para ver esto observamos que* $\operatorname{age}(\mathbb{Q}) = \mathcal{LO}$.

Ejemplo 2.10. *El grafo de Rado o el grafo de Erdos es un grafo infinito numerable que contiene una copia de cualquier grafo finito. Este grafo se puede construir fijando a los vértices como el conjunto de números naturales y para cada par de números naturales se lanza una moneda para decidir si se pone arista o no. Este grafo es muy interesante pues cumple la propiedad* *de que si tomamos dos conjuntos finitos de vértices ajenos E y F, podemos encontrar un vértice v que tiene arista con todos los vértices de E y no tiene arista con ningún vértice de F. La clase de todos los grafos finitos satisface las propiedades HP, JEP y AP. El límite de Fraïssé de esta clase es el grafo de Rado denotado por $\mathcal{R}$.*

Ejemplo 2.11. *En 1959, Phillip Hall [7] probó que existe un único grupo numerable localmente finito U tal que cualquier grupo finito se puede encajar en U y cualesquiera dos subgrupos finitos de U son conjugados en U. Note que la última propiedad significa que U satisface la definición de homogeneidad vista en este texto. Sea $\mathcal{K}$ la clase de grupos finitos. Como U es localmente finito, cualquier subgrupo de U finitamente generado en realidad es finito, así $\mathcal{K}$ es el esqueleto de U. Por lo tanto el límite de Fraïsséde $\mathcal{K}$ es U.*

Definición 2.12. *Dada una signatura L, una* clase de Fraïssé *en L es una clase de estructuras finitas con signatura L, la cual contiene estrucutras de cardinalidad arbitrariamente grande, es numerable y satisface las propiedades HP, JEP y AP. Una* estructura de Fraïssé *en L es una estructura infinita numerable que además es localmente finita y homogénea.*

Observamos que una consecuencia del teorema de Fraïssé es que existe una relación biunívoca entre las clases de Fraïssé y las estructuras de Fraïssé.

Para entender mejor el ejemplo que sigue, primero recordaremos algunos propiedades de los campos finitos. Sea p un número primo.

- Si k es un entero positivo, todos los campos finitos de orden p^k son isomorfos.
- Un campo finito $\mathbb{F}$ tiene característica p si y solo si el orden de $\mathbb{F}$ es p^k para algún entero positivo k.
- Denotaremos por $\mathbb{F}_q$ al campo finito de orden q. $\mathbb{F}_{p^n}$ contiene un subcampo isomorfo a $\mathbb{F}_{p^m}$ si y solo si $m \mid n$.
- La cerradura algebraica de $\mathbb{F}_p$ es un campo infinito numerable que contiene una copia del campo de orden p^n para cada $n \in \mathbb{N}$ (y de hecho es la unión de esas copias).
- Un campo no contiene dos subcampos diferentes del mismo orden.

Ejemplo 2.13. *Sea p un número primo y sea $\mathcal{K}$ la clase de todos los campos finitos de característica p. $\mathcal{K}$ satisface las propiedades HP, JEP y AP, y el límite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ es la cerradura algebraica del campo primo de característica p.*

Para ver que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad HP notamos que si tomamos algún $\mathbb{F}_{p^n} \in \mathcal{K}$, sus subcampos tienen orden p^m con $m \mid n$ y por lo tanto pertenece a $\mathcal{K}$. Para ver que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad JEP, note que si tomamos dos campos finitos $\mathbb{F}_{p^m}$, $\mathbb{F}_{p^n}$, ambos se pueden encajar en el campo $\mathbb{F}_{p^{mn}}$ que pertenece a $\mathcal{K}$. Para ver que $\mathcal{K}$ cumple la propiedad AP, notamos que si tenemos dos campos finitos $\mathbb{F}_{p^l}$, $\mathbb{F}_{p^m}$ y $\mathbb{F}_{p^n}$ donde $l \mid m, n$ entonces $l \mid mn$ entonces $\mathbb{F}_{p^m n}$ es una amalgama para $\mathbb{F}_{p^m}$ y $\mathbb{F}_{p^n}$ sobre $\mathbb{F}_{p^l}$. Finalmente, por la definición de cerradura algebraica de un campo primo, el esqueleto de la cerradura algebraica del campo primo de característica p es la clase $\mathcal{K}$.

Ejemplo 2.14. *Sea $\mathcal{K}$ la clase de los grupos abelianos finitamente generados libres de torsión. $\mathcal{K}$ satisface las propiedades HP, JEP y AP, y el límite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ es la suma directa de una cantidad numerable de copias de los racionales vistos como grupo aditivo.*

No es fácil probar que la clase de los grupos finitos cumple la propiedad de amalgamación, para ver la prueba puede consultar [19].

Ejemplo 2.15. *Sea $\mathcal{K}$ la clase de las álgebras booleanas finitas. $\mathcal{K}$ satisface las propiedades HP, JEP y SAP, y el límite de Fraïssé de $\mathcal{K}$ es el álgebra booleana sin átomos.*

3 Teoría de Ramsey estructural

La teoría de Ramsey ha sido muy fructífera en los últimos años, la simpleza de los enunciados tipo Ramsey permiten plantear este tipo de enunciados para diversos objetos matemáticos. La teoría de Ramsey estudia la existencia de estructuras homogéneas para coloraciones finitas sobre subestructuras de una estructura dada. La piedra angular de la teoría de Ramsey es el teorema de Ramsey que fue probado por Ramsey en [6].

Teorema 3.1 (Teorema de Ramsey finito). *Para cada $m, r \in \mathbb{N}$ con $r \geq 2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto X con N elementos y cualquier* *coloración $c : [X]^2 \to r$, existe $Y \subseteq X$ con r elementos tal que $c \mid [X]^2$ es constante.*

Hablando en términos de coloraciones, el teorema nos dice que Y es monocromático pues todos sus pares tienen el mismo color.

Los teoremas siguientes son otros ejemplos de resultados de la teoría de Ramsey.

Teorema 3.2 (Van Der Waerden)**.** *Si partimos a $\mathbb{N}$ en una cantidad finita de piezas entonces una de ls piezas contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.*

En [5], Graham, Ronald y Rothschild presentan una prueba corta del teorema anterior.

Teorema 3.3 (Hindman)**.** *Si partimos a $\mathbb{N}$ en una cantidad finita de piezas entonces una de las piezas A contiene a un conjunto infinito H tal que si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos distintos de H entonces $a_1 + \cdots + a_n \in A$.*

En [1], Baumgartner presenta una prueba corta de este teorema.

Ahora presentaremos la notación necesaria para hablar de la propiedad de Ramsey para estructuras. Sea $\mathcal{K}$ una clase hereditaria de estructuras finitas con signatura L. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, denotaremos por $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ al conjunto de todas las subestructuras de $\mathbf{B}$ que son isomorfas a $\mathbf{A}$.

Sean $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ estructuras en $\mathcal{K}$ y $k \geq 2$, escribiremos

$$\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$$

si para cada coloración $c : \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}} \to \{1, \ldots, k\}$, texiste $\mathbf{B}' \in \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ tal que $\binom{\mathbf{B}'}{\mathbf{A}}$ es homogéneo. En este caso diremos que $\mathbf{B}'$ es homogéneo.

Definición 3.4. *Diremos que $\mathcal{K}$ satisface la* propiedad de Ramsey *si para cada $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ en $\mathcal{K}$ y $k \geq 2$, existe $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ y $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$.*

Observamos que si $\mathcal{LO}$ es la clase de los órdenes lineales finitos, el teorema de Ramsey finito garantiza que $\mathcal{LO}$ tiene la propiedad de Ramsey. Nesetril y Rodl probaron que la clase de los grafos finitos tiene la propiedad de Ramsey. Graham-Leeb-Rothschild probaron que la clase de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo finito tiene la propiedad de Ramsey. Para profundizar en este tema invitamos al lector a leer [18].

Dada una cantidad finita de clases de Fraïssé $\{\mathcal{K}_j\}_{j<n}$, con $n \in \mathbb{N}$, escribiremos $\binom{(\mathbf{B}_j)_{j<J}}{(\mathbf{A}_j)_{j<n}}$ para denotar al conjunto de todas las sucesiones $(\mathbf{D}_j)_{j<n}$ tales que para cada $j < n$, $\mathbf{D}_j \in \binom{\mathbf{B}_j}{\mathbf{A}_j}$. Para estructuras $\mathbf{A}_j \leq \mathbf{B}_j \leq \mathbf{C}_j \in \mathcal{K}_j$, $j < n$, escribiremos $(\mathbf{C}_j)_{j<n} \to ((\mathbf{B}_j)_{j<n})_k^{(\mathbf{A}_j)_{j<n}}$ para denotar que para cada coloración de $\binom{(\mathbf{C}_j)_{j<n}}{(\mathbf{A}_j)_{j<n}}$ en k colores, existe $(\mathbf{B}'_j)_{j<n} \in \binom{(\mathbf{C}_j)_{j<n}}{(\mathbf{B}_j)_{j<n}}$ tal que $\binom{(\mathbf{B}'_j)_{j<n}}{(\mathbf{A}_j)_{j<n}}$ es homogéneo es decir, cada elemento de $\binom{(\mathbf{B}'_j)_{j<n}}{(\mathbf{A}_j)_{j<n}}$ tiene el mismo color.

Por un teorema de Nešetřil, Jaroslav y Rödl en [17], existen muchas clases de Fraïssé con la propiedad de Ramsey. El siguiente teorema para productos de clases de Fraïssé fue probado por Sokiśc en su tesis de doctorado [20].

Teorema 3.5 (teorema de Ramsey para productos, Sokiśc)**.** *Sean k y m números naturales fijos y sea $\{\mathcal{K}_j\}_{j<n}$, una sucesión de clases de objetos finitos con la propiedad de Ramsey. Fijamos dos sucesiones $(\mathbf{A}_j)_{j<m}$ y $(\mathbf{B}_j)_{j<m}$ tales que para cada $j < m$, se cumpla que $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j \in \mathcal{K}_j$ y $\mathbf{A}_j \leq \mathbf{B}_j$. Entonces existe una sucesión $(\mathbf{C}_j)_{j<m}$ tal que $\mathbf{C}_j \in \mathcal{K}_j$ para cada $j < m$, y $(\mathbf{C}_j)_{j<m} \to ((\mathbf{B}_j)_{j<m})_k^{(\mathbf{A}_j)_{j<m}}$.*

Como podemos observar este teorema es muy poderoso pues nos dice que los productos de clases con la propiedad de Ramsey también tienen la propiedad de Ramsey.

En el artículo [10], Kechris, Pestov y Todorcevic establecen una correspondencia entre una propiedad tipo Ramsey, el cálculo del flujo universal mínimo en sistemas dinámicos y la propiedad de ser extremadamente amenable en grupos.

4 Clasificación de estructuras homogéneas

Como las estructuras homogéneas satisfacen propiedades interesantes, hay una línea de investigación que se enfoca en clasificar a las estructuras homogéneas. El siguiente teorema es una muestra de ese trabajo.

Teorema 4.1 (Lachlan y Woodrow [12])**.** *Cada grafo no dirigido que es numerable y homogéneo es isomorfo a uno de los siguientes grafos.*

1. *La unión disjunta de m grafos completos con n vértices, donde $m, n \leq \omega$ y m ó n es número natural.*

2. *El complemente de alguno de los grafos mencionados en 1.*

3. *El límite de Fraïssé de la clase de todos los grafos que no contienen al K_n para una n fija con $n \geq 3$.*

4. *El complemento de alguno de los grafos mencionados en 3.*

5. *El grafo de Rado $\mathcal{R}$.*

Corolario 4.2. *Si fijamos un grafo G, la clase de todos los grafos finitos que no contienen una copia de G no satisface la propiedad de amalgamación.*

Los grafos sirven para modelar diversos problemas matemáticos y computacionales. Por ejemplo, con teoría de grafos se pueden modelar diversos problemas de inteligencia artificial. Aún más, los grafos dirigidos que son aquellos donde las aristas tienen dirección son muy útiles en logística y transporte pues permiten modelar flujos. Así, tener una clasificación de los grafos homogéneos tiene aplicaciones para medir la complejidad computacional de problemas importantes.

Hay un concepto más general que de el de grafo y es el de hipergrafo. En los hipergrafos las aristas no son conjuntos de dos elementos sino conjuntos finitos de cualquier tamaño. Este concepto ha recibido mucho interés pues permite modelar problemas más complejos que los modelados por grafos. Naturalmente se ha tratado de clasificar a los hipergrafos homogenéos de manera análoga como se hizo con los grafos pero al tener aristas de cualquier tamaño finito la cantidad de posibles hipergrafos aumenta bastante y aún no se logra completar la clasificación. Para leer más sobre estructuras homogéneas se puede consultar el survey [14].

Agradecimientos

Este Capítulo se escribió con apoyo del Proyecto de Ciencia de Frontera 217392 financiado por CONACYT.

Referencias

[1] Baumgartner, James E, *A short proof of Hindman's theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17.3** (1974), 384–386.

[2] Eagle, Christopher J and Farah, Ilijas and Hart, Bradd and Kadets, Boris and Kalashnyk, Vladyslav and Lupini, Martino, *Fraïssé limits of C^*-algebras*, The Journal of Symbolic Logic. **81** (2016), 755–773.

[3] Erdos, Paul, and Richard Rado. *Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set*, Proceedings of the London mathematical Society **3.1** (1952), 417–439.

[4] Graham, Ronald L., Klaus Leeb, and Bruce L. Rothschild, *Ramsey's theorem for a class of categories* Proceedings of the National Academy of Sciences **69.1** (1972), 119–120.

[5] Graham, Ronald L., and Bruce L. Rothschild, *A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Proceedings of the American Mathematical Society **42.2** (1974), 385–386.

[6] Graham, Ronald L and Rothschild, Bruce L and Spencer, Joel H, *Ramsey theory*, John Wiley & Sons. **20** (1991).

[7] Hall, Philip, *Some constructions for locally finite groups*, Journal of the London Mathematical Society, Oxford Academic. **1** (1959), 305–319.

[8] Hodges, Wilfrid and others, *Model theory*, Cambridge University Press,1993.

[9] Jasiński, Jakub, *Ramsey degrees of boron tree structures*, Combinatorica. **33** (2013), 23–24.

[10] Kechris, AS and Pestov, VG and Todorcevic, S, *Fraïssé Limits, Ramsey Theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geometric and Functional Analysis **15** (2005), 106–189.

[11] Kwiatkowska, Aleksandra, *Universal minimal flows of generalized Ważewski dendrites*, The Journal of Symbolic Logic **83.4** (2018), 1618–1632.

[12] Lachlan, Alistair H., and Robert E. Woodrow, *Countable ultrahomogeneous undirected graphs*, Transactions of the American Mathematical Society (1980), 51–94.

[13] Lupini, Martino, *Fraïssé limits in functional analysis*, Advances in Mathematics, Elsevier. **338** (2018), 93–174.

[14] Macpherson, Dugald, *A survey of homogeneous structures* , Discrete mathematics **311.15** (2011), 1599–1634.

[15] Melleray, Julien and Van Thé, Lionel Nguyen and Tsankov, Todor, *Polish groups with metrizable universal minimal flows*, International Mathematics Research Notices, Oxford university Press. **5** (2016), 1285–1307.

[16] Nešetřil, Jaroslav, and Vojtěch Rōdl, *A simple proof of the Galvin-Ramsey property of the class of all finite graphs and a dimension of a graph*, Discrete Mathematics **23.1** (1978), 49–55.

[17] Nešetřil, Jaroslav, and Vojtěch Rödl, *Ramsey classes of set systems*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **34.2** (1983), 183–201.

[18] Nesetril, Jaroslav, and Vojtech Rödl, eds. *Mathematics of Ramsey theory* Springer Science and Business Media **5** (2012).

[19] Neumann, Bernhard H, *Permutational products of groups*, Journal of the Australian Mathematical Society, Cambridge University Press **1** (1960), 299–310.

[20] Sokic, Miodrag, *Ramsey property of posets and related structures* Diss. (2010).

[21] Yaacov, Itaï Ben, *Fraïssé limits of metric structures*, The Journal of Symbolic Logic **80.1** (2015), 100–115.

[22] Zucker, Andy, *Big Ramsey degrees and topological dynamics*, Groups, Geometry, and Dynamics **13.1** (2018), 235–276.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

sonianavarroflores91@gmail.com

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 3

Algunas variantes del teorema del valor medio para integrales

Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como objetivo presentar a todo aquel que quiera profundizar en el estudio del Teorema del valor medio para integrales y algunas de sus variantes.

1 Introducción

Uno de los teoremas más importantes dentro del cálculo integral es sin duda, el Teorema del valor medio para integrales que relaciona el valor de una función en un punto del intervalo con la integral de la función en el intervalo. Para ser precisos, afirma que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces hay un número $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$

Hay diferentes versiones de la ecuación anterior y que se expresan en la forma $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(a, b, c)$ para alguna función F. En este capítulo discutimos y probamos algunas de esas versiones.

En la sección 2 se hace acopio de nociones y resultados básicos que se usan en el resto del capítulo. En la sección 3 presentamos el teorema de Wayment así como algunas generalizaciones de este teorema. En la sección 4 presentamos el teorema de Sahoo así como algunas generalizaciones de este teorema. En la sección 5 presentamos otros resultados relacionados al teorema del valor medio de la integral y en la sección 6 presentamos los teoremas de Jacobson y Zhang Bao-lin.

2 Resultados generales

En este sección se resumen los conceptos básicos y algunos resultados acerca de estos, que son parte de la formación básica de cualquier estudiante de matemáticas, los cuales pueden ser consultados en [1] o en [2]. Probaremos algunos de ellos, aquellos que no siempre se acostumbra demostrar en los cursos de cálculo de cualquier licenciatura en matemáticas. Todo lo que aquí presentamos servirá de base para el tema que le da el nombre al capítulo y que desarrollamos en las siguientes dos secciones.

Algunos de los resultados fundamentales para el cálculo de una variable, que aplicaremos a lo largo de este trabajo, que enunciamos a continuación pueden ser consultados en [1] y [2].

Teorema 2.1. *(Teorema del valor intermedio) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$, entonces*

$$\textit{para cada } c \in (f(a), f(b)) \textit{ existe } x_0 \in (a, b) \textit{ tal que } f(x_0) = c.$$

Observemos que en el teorema del valor intermedio si $f(b) < f(a)$ también se satisface la conclusión de dicho teorema.

Como un caso particular tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Es bien conocido que el siguiente teorema es una consecuencia del teorema 2.1.

Teorema 2.3. *(Teorema de los valores extremos) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces*

$$\textit{existen } x_1, x_2 \in [a, b] \textit{ tales que } f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \textit{ para cada } x \in [a, b].$$

Los siguientes teoremas resumen algunas de las propiedades importantes de las funciones derivables.

Teorema 2.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$ son tales que f es derivable en x_0 y $f(x_0) \leq f(x)$ para cada $x \in [a,b]$ o $f(x) \leq f(x_0)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Teorema 2.5. *(Teorema de Rolle) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces*

$$\textit{existe } c \in (a,b) \textit{ tal que } f'(c) = 0.$$

Teorema 2.6. *(Teorema del valor medio) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces*

$$\textit{existe } c \in (a,b) \textit{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Los teoremas 2.7, 2.8, 2.9 son demostrados en [5] los cuales serán aplicados en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 2.7. *(Flett) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a,b]$, tal que $f'(a) = f'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Teorema 2.8. *(Myers) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a,b]$, tal que $f'(a) = f'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Teorema 2.9. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $[a,b]$, entonces*

1. *(Davitt et al.) existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(c - a) \textit{ y}$$

2. *(Cakmak) existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} - \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(b - c).$$

El siguiente resultado lo podemos encontrar en [7, teoremas 2.1, 2.2].

Teorema 2.10. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $[a, b]$*, entonces para toda* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *se tiene que*

(1) *(Lozada) existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{n}{n+1}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(c-a)^n,$$

(2) *(Lozada) existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} + \frac{n}{n+1}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(b-c)^n.$$

Demostración. (1). Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{n+1}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(x-a)^{n+1}.$$

Es claro que g es derivable en $[a, b]$ y que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(x-a)^n.$$

con $g'(a) = f'(a)$ y $g'(b) = f'(a)$ de donde se sigue que $g'(a) = g'(b)$ lo cual implica que g satisface el teorema de Flett.

Por lo tanto,

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{n}{n+1}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(c-a)^{n+1}.$$

(2) Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función dada como

$$g(x) = f(a + b - x).$$

Es claro que g es derivable en $[a, b]$, de donde g satisface el inciso (1), es decir,

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a} + \frac{n}{n+1}\frac{g'(b) - g'(a)}{(b-a)^{n-1}}(c-a)^n.$$

Por lo tanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} + \frac{n}{n+1}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^n}(b-c)^{n+1}.$$

□

Observemos que en el inciso (1) del teorema 2.10 si $n = 0$ tenemos el teorema de $Flett$, y si $n = 1$ tenemos el teorema de $Davitt$, y en el inciso 2 del mismo teorema si $n = 0$ tenemos el teorema de $Myers$, y si $n = 1$ tenemos el teorema de $Caknak$.

Teorema 2.11. *(Teorema fundamental del cálculo) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.*

Definamos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

entonces F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Corolario 2.12. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.*

Definamos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt,$$

entonces G es derivable en $[a, b]$ y

$$G'(x) = -f(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Teorema 2.13. *(Teorema del valor medio para las integrales) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$

Teorema 2.14. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, estrictamente creciente en $[a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(a)(b - a) < \int_a^b f(t)dt < f(b)(b - a).$$

Demostración. Como f es continua, por el teorema 2.13, existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$ y como f es estrictamente creciente $f(a) < f(c) < f(b)$ de donde $f(a)(b - a)f(c)(b - a) < f(b)(b - a)$.

Por lo tanto,

$$f(a)(b-a) < \int_a^b f(t)dt < f(b)(b-a).$$

$\square$

Corolario 2.15. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, estrictamente decreciente en $[a,b]$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$f(b)(b-a) < \int_a^b f(t)dt < f(a)(b-a).$$

3 Teorema de Wayment

En esta sección presentamos el primero de los teoremas relacionados con el teorema del valor medio para integrales, el teorema de Wayment([11]), análogo al teorema 2.7 demostrado en ([5]).

Junto con el teorema de Wayment presentamos otros resultados donde varia el resultado de la integral del teorema de Wayment y dos resultados más que generalizan dicho teorema.

Teorema 3.1. *(Wayment) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a).$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

del teorema 2.11 se tiene que $F'(x)=f(x)$, para todo $x\in[a,b]$, lo cual implica

$$F'(a)=f(a)=f(b)=F'(b).$$

Aplicando el teorema de Flett, existe $c\in(a,b)$ tal que

$$F'(c)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a},$$

se sigue que
$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a).$$
$\square$

Teorema 3.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*
$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(b-c).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como
$$g(x) = (b-x)\int_x^b f(t)dt.$$

Es claro que

1. g es continua en $[a,b]$ y
2. g es derivable en (a,b),

entonces por el teorema del valor medio existe $c \in (a,b)$ tal que
$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Como $g(b) = 0$ y $g(a) = (b-a)\int_a^b f(t)dt$, entonces
$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = -\int_a^b f(t)dt \text{ y } g'(c) = -\int_c^b f(t)dt - f(c)(b-c),$$
se sigue que
$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt + f(c)(b-c).$$

Por lo tanto,
$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(b-c).$$
$\square$

Teorema 3.3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ la cual satisface que $f(a)[(b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt] < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(b-a).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = (b-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt.$$

Es claro que

1. g es continua en $[a,b]$,
2. $g(a) = (b-a)f(a)$ y
3. $g(b) = (b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt$,

se sigue que

$$g(a)g(b) = (b-a)[f(a)[(b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt]] < 0$$

de donde $g(a)g(b) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio se sigue que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$ y $g(c) = (b-a)f(c) - \int_a^c f(t)dt$.

Por lo tanto,

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(b-a).$$

□

El siguiente resultado aparece en [9, Teorema (2.1)].

Teorema 3.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Es claro que g es continua en $[a,b]$, $g(a) = f(a) = g(b)$, entonces aplicando el teorema de Wayment, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$(c-a)g(c) = \int_a^c g(t)dt.$$

Como

$$g(c) = f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$$

y

$$\begin{aligned}\int_a^c g(t)dt = \int_a^c [f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)]dt =\\ \int_a^c f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^c (t-a)dt =\\ \int_a^c f(t)dt - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)^2\end{aligned}$$

se sigue que

$$(c-a)f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)^2 = \int_a^c f(t)dt - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

□

El siguiente resultado aparece en [7, Teorema 2.3].

Teorema 3.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a) - \frac{n}{n+1}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^n}(c-a)^{n+1}.$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Es claro que g es derivable en $[a,b]$ de donde aplicando el inciso (1) del teorema 2.10 tenemos que

$$g(c) - g(a) = g'(c)(c-a) - \frac{n}{n+1}\frac{g'(b)-g'(a)}{(b-a)^n}(c-a)^{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^c f(t)dt = f(c)(c-a) - \frac{n}{n+1}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^n}(c-a)^{n+1}.$$

$\square$

4 Teorema Sahoo

En esta sección presentamos el teorema de Sahoo ([9]) que es otro de los teoremas relacionados con el teorema del valor medio para integrales, análogo al teorema 2.8 demostrado en ([5]).

Junto con el teorema de Sahoo presentamos otros resultados donde varía el resultado de la integral del teorema de Sahoo y dos resultados más que generalizan dicho teorema.

Teorema 4.1. *(Sahoo) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

Demostración. Sea

$$F(x) = -\int_x^b f(t)dt,$$

del teorema 2.11 se sigue que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, lo cual implica

$$F'(a) = f(a) = f(b) = F'(b).$$

Aplicando el teorema de Myers, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(c)}{b - c}.$$

De donde,

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b - c).$$

$\square$

Teorema 4.2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(c - a).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = (x - a) \int_a^x f(t)dt.$$

Es claro que g es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) de donde aplicando el teorema del valor medio para derivadas existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Ahora como

$$g(a) = 0,$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{(b - a) \int_a^b f(t)dt}{b - a} = \int_a^b f(t)dt \text{ y}$$

$$g'(t) = (t - a)f(t) + \int_a^t f(t)dt$$

de donde $g'(c) = (c - a)f(c) + \displaystyle\int_a^c f(t)dt$ lo cual implica que

$$g'(c) = (c - a)f(c) + \int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

con lo que se obtiene que

$$(c-a)f(c) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt.$$

Por lo tanto,

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(c-a).$$

$\square$

Teorema 4.3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ la cual satisface que $f(b)[(b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt] < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b-a).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = (b-a)f(x) - \int_x^b f(t)dt.$$

Es claro que

1. g es una función continua en $[a,b]$,
2. $g(b) = (b-a)f(b)$ y
3. $g(a) = (b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt$

de donde se sigue que

$$g(a)g(b) = (b-a)[f(b)[(b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt]] < 0$$

de donde $g(a)g(b) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio se sigue que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$ y $g(c) = (b-a)f(c) - \int_c^b f(t)dt.$

Por lo tanto,

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b-a).$$

$\square$

Los siguientes dos resultados aparecen en [7, Teoremas 2.6 y 2.5].

Teorema 4.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b-c) + \frac{n}{n+1}\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^n}(b-c)^{n+1}.$$

Demostración. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función dada como $g(x) = -\int_x^b f(t)dt$ es claro que g es derivable en $[a,b]$ de donde aplicando el teorema 2.10 tenemos el resultado deseado. □

Teorema 4.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_c^b f(t)dt = f(c)(b-c) + \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-c)^2.$$

Demostración. Se sigue del teorema 4.4 tomando $n = 1$. □

5 Teorema valor medio

Algunos resultados más relacionados con el teorema del valor medio para integrales son presentados en esta sección los cuales pueden ser consultados en [3], [8], [9], [10].

Teorema 5.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ la cual satisface que $\int_a^b f(t)dt[(b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt] > 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(c-a).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = (x-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt.$$

Es claro que

1. g es una función continua en $[a,b]$,

2. $g(a) = -\int_a^b f(t)dt$ y

3. $g(b) = (b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt$,

se sigue que

$$g(a)g(b) = \left[-\int_a^b f(t)dt\right]\left[(b-a)f(b) - \int_a^b f(t)dt\right] < 0,$$

de donde $g(a)g(b) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio se sigue que existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$ y $g(c) = (c-a)f(c) - \int_a^b f(t)dt$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(c-a).$$

□

Teorema 5.2. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $[a,b]$ *la cual satisface que* $\int_a^b f(t)dt\left[(b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt\right] > 0$*, entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

Demostración. Definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$g(x) = (b-x)f(x) - \int_a^b f(t)dt.$$

Es claro que

1. g es una función continua en $[a,b]$,

2. $g(b) = -\int_a^b f(t)dt$ y

3. $g(a) = (b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt$

de donde se sigue que

$$g(a)g(b) = -\int_a^b f(t)dt \left[(b-a)f(a) - \int_a^b f(t)dt \right] < 0$$

de donde $g(a)g(b) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio se sigue que existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$ y $g(c) = (b-c)f(c) - \int_a^b f(t)dt$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

□

Teorema 5.3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ tal que para algún $c \in [a, b]$*

$$2\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a),$$

entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(c-a) \ \ o \ \ \int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

Demostración. Definamos las funciones $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(x-a) \text{ y } h(x) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(b-x)$$

es claro que

1. $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y

2. $g(x) + h(x) = 2\int_a^b f(t)dt - f(x)(b-a)$.

Como $2\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$, para algún $c \in [a,b]$ entonces del inciso 2 se sigue que $g(c) = -h(c)$ para algún $c \in [a,b]$.

Es claro que si $g(c) = 0$ o $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)(c-a)$ en forma similar si $h(c) = 0$ o $h\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c)$.

Ahora si $g(c) \neq 0$, como $g(c) = -h(c)$ entonces $g(c)$ y $h(c)$ tienen signos opuesto y como $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, entonces $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ y $h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ tienen el mismo signo, lo cual implica que si $g(c)$ y $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ tienen el mismo signo entonces $h(c)$ y $h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ tienen signos opuestos de donde aplicando el teorema del valor intermedio existe un c_0 tal que $h(c_0) = 0$ con lo cual obtenemos que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c_0)(b-c_0).$$

y si $h(c)$ y $h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ tienen el mismo signo entonces $g(c)$ y $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ tienen signos opuestos de donde aplicando el teorema del valor intermedio existe un c_0 tal que $g(c_0) = 0$ con lo cual obtenemos que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c_0)(c_0-a).$$

$\square$

Teorema 5.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, tal que*

(1) *Si f es estrictamente creciente y $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(c-a)$$

para algún $c \in [a,b]$.

(2) *Si f es estrictamente decreciente y* $\int_a^b f(x)dx < 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(c-a)$$

para algún $c \in [a, b]$.

(3) *Si f es estrictamente creciente y* $\int_a^b f(x)dx < 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-c)$$

para algún $c \in [a, b]$.

(4) *Si f es estrictamente decreciente y* $\int_a^b f(x)dx > 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-c)$$

para algún $c \in [a, b]$.

Demostración. (1) Sea f es estrictamente creciente con $\int_a^b f(x)dx > 0$. Como f es estrictamente creciente, entonces del teorema 2.14

$$\int_a^b f(x)dx < f(b)(b-a)$$

lo cual implica que

$$\int_a^b f(x)dx - f(b)(b-a) < 0.$$

Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \int_a^b f(t)dt - f(t)(x-a),$$

es claro que

1. g es continua en $[a, b]$,

2. $g(a) = \int_a^b f(t)dt > 0$ y

3. $g(b) = \int_a^b f(t)dt - f(b)(b - a) < 0$.

Por lo tanto, $g(b) < 0 < g(a)$. Por el Teorema del valor intermedio, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(c - a).$$

(2) Sea f estrictamente decreciente y $\int_a^b f(x)dx < 0$. Como f es estrictamente decreciente, entonces del corolario 2.15 $f(b)(b - a) < \int_a^b f(t)dt$ es decir $\int_a^b f(t)dt - f(b)(b - a) > 0$.

Definamos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(x - a),$$

es claro que

1. g es continua en $[a, b]$,

2. $g(a) = \int_a^b f(t)dt < 0$ y

3. $g(b) = \int_a^b f(t)dt - f(b)(b - a) > 0$.

Por lo tanto, $g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema del valor intermedio existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(c - a).$$

(3) Sea f es estrictamente creciente con $\displaystyle\int_a^b f(x)dx < 0\ f$. Como f es estrictamente creciente, entonces por el Teorema 2.14 tenemos que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > f(a)(b-a)$ lo cual implica que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a) > 0$.

Definamos la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(b-x),$$

es claro que

1. h es continua en $[a,b]$,
2. $h(a) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(b-x){>}0$ y
3. $h(b) = \int_a^b f(t)dt{<}0$.

Por lo tanto, $h(b) < 0 < 0h(a)$. Por el Teorema del valor intermedio existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

(4) Sea f es estrictamente decreciente y $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Como f es estrictamente decreciente, entonces del corolario 2.15, tenemos que $f(a)(b-a) > \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ es decir $\displaystyle\int_a^b f(t)dt - f(a)(b-a) < 0$.

Definamos la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \int_a^b f(t)dt - f(x)(b-x),$$

es claro que

1. h es continua en $[a,b]$,
2. $h(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt - f(a)(b-a){<}0$ y

3. $h(b) = \int_a^b f(t)dt > 0.$

Por lo tanto, $g(b) < 0 < g(a)$. Por el Teorema del valor intermedio existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-c).$$

$\square$

El siguiente resultado aparece en [10].

Teorema 5.5. *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continua en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt = f(c)(b-c) + g(c)(c-a).$$

Demostración. Definamos la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$h(x) = (x-b)\int_a^x f(t)dt + (x-a)\int_x^b g(t)dt.$$

Dado que f, g son continuas en $[a,b]$, entonces

1. h es una función continua en $[a,b]$
2. h es en derivable en (a,b) y
3. $h(a) = 0 = h(b)$.

De donde aplicando segundo teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$h'(x) = (x-b)f(x) + \int_a^x f(t)dt - (x-a)g(x) + \int_x^b g(t)dt$$

y aplicando el teorema de Rolle $h'(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt = f(c)(b-c) + g(c)(c-a).$$

$\square$

Observemos que si $f(x) = g(x)$ para toda $x \in [a, b]$ se obtiene el teorema 2.13 (teorema del valor medio para integrales) y si $g(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$ se tiene el teorema 4.1 (teorema de Sahoo).

Teorema 5.6. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que*

1. $0 \leq f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$,
2. $0 \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$ *y*
3. *existen* $u, v \in [a, b]$ *tales que*

$$f(v) \leq f(x) \leq f(u) \quad y \quad g(v) \leq g(x) \leq g(u)$$

para todo $x \in [a, b]$,

entonces para todo $k \in (0, 1)$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = kf(c)\int_a^b g(x)dx + (1-k)g(c)\int_a^b f(x)dx.$$

Demostración. Como $f(v) \leq f(x) \leq f(u)$, $g(v) \leq g(x) \leq g(u)$, $0 \leq g(x)$ y $0 \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ se sigue que

$$f(v)\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(u)\int_a^b g(t)dt \text{ y}$$

si f es constante o $g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ se obtienen igualdades.

$$g(v)\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq g(u)\int_a^b f(t)dt.$$

si g es constante o $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ se obtienen igualdades.

Sea $k \in (0, 1)$ y definamos la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada como

$$h(x) = kf(x)\int_a^b g(t)dt + (1-k)g(x)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

es claro que h es una función continua en $[a, b]$ y que

$$h(u) = k(f(u)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(x)dt) +$$

$$(1-k)(g(u)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)g(x)dt).$$

de donde se sigue que $h(u) \geq 0$.

En forma similar se puede ver que $h(v) \leq 0$, entonces aplicando el teorema del valor intermedio existe $c \in (u, v)$ o $c \in (v, u)$ tal que $h(c) = 0$.

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = kf(c)\int_a^b g(t)dt + (1-k)g(c)\int_a^b f(t)dt.$$

□

Corolario 5.7. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que*

1. $0 \leq f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$,
2. $0 \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$ *y*
3. *ambas crecientes o decrecientes,*

entonces para todo $k \in (0, 1)$ existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = kf(c)\int_a^b g(t)dt + (1-k)g(c)\int_a^b f(t)dt.$$

6 Teoremas de Jacobson y Zhang Bao-lin

En esta sección daremos dos resultados más que involucran al teorema del valor medio para integrales a el teorema de Jacobson y una generalización de este el teorema de Zhang Bao-lin los cuales pueden ser consultados en [4] y [6].

Recordemos que el teorema del valor medio para integrales nos dice

Teorema 6.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Ahora para cada $x \in (a,b)$ podemos aplicar el resultado anterior para obtener el siguiente resultado

Teorema 6.2. *Sea $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,x]$, entonces existe $c \in (a,x)$ tal que*

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a).$$

Teorema 6.3. *(Teorema de Jacobson) Si $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,x]$, tal que f es derivable en a con $f'(a) \neq 0$ y $c \in (a,x)$ el punto que satisface el teorema 6.2, entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Escribamos el polinomio de Taylor con residuo de f en a el cual queda

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \epsilon(t)(t-a)$$

con $\lim_{t\to a} \epsilon(t) = 0$.

Integrando el polinomio de Taylor obtenemos

$$\int_a^x f(t)dt = f(a)(x-a) + f'(a)\frac{(x-a)}{2!} + \int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt.$$

Ahora evaluando el polinomio de Taylor en c obtenemos

$$f(c) = f(a) + f'(a)(c-a) + \gamma(c)(c-a)$$

con $\lim_{t\to a} \gamma(t) = 0$.

Se sigue que

$$f(c)(x-a) = f(a)(x-a) + f'(a)(c-a)(x-a) + \gamma(c)(c-a)(x-a).$$

De esta igualdad y la igualdad del teorema 6.2 tenemos que

$$\int_a^x f(t)dt = f(a)(x-a) + f'(a)(c-a)(x-a) + \gamma(c)(c-a)(x-a).$$

Lo cual implica que

$$f(a)(x-a)+f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt=$$

$$f(a)(x-a)+f'(a)(c-a)(x-a)+\gamma(c)(c-a)(x-a).$$

De donde reduciendo términos semejantes tenemos

$$f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt=$$

$$f'(a)(c-a)(x-a)+\gamma(c)(t-a)(x-a).$$

Ahora dado que

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x \epsilon(t)(t-a)dt}{(x-a)}=0$$

y

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(c)(t-a)}{(x-a)}=0$$

se tiene el resultado deseado

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

□

Teorema 6.4. *(Teorema de Zhang Bao-lin) Sea $f:[a,x]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,x]$, tal que f es dos veces derivable en a con $f'(a)=0$, $f''(a)\neq 0$ y $c\in(a,x)$ el punto que satisface el teorema 6.2, entonces*

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Demostración. Escribamos el polinomio de Taylor con residuo de f en a el cual queda

$$f(t)=f(a)+f''(a)\frac{(t-a)^2}{2}+\epsilon(t)(t-a)^2$$

con $\lim_{t\to a}\epsilon(t)=0$.

Integrando el polinomio de Taylor obtenemos

$$\int_a^x f(t)dt = f(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt.$$

Ahora evaluando el polinomio de Taylor en c obtenemos

$$f(c) = f(a) + f''(a)\frac{(c-a)^2}{2} + \epsilon(c)(c-a)^2$$

con $\lim_{t\to a} \epsilon(t) = 0$.
Se sigue que

$$f(c)(x-a) = f(a)(x-a) + f''(a)\frac{(c-a)^2}{2}(x-a) + \epsilon(c)(c-a)^2(x-a).$$

De esta igualdad y la igualdad del teorema 6.2 tenemos que

$$\int_a^x f(t)dt = f(a)(x-a) + f''(a)\frac{(c-a)^2}{2}(x-a) + \epsilon(c)(c-a)^2(x-a).$$

lo cual implica

$$f(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt =$$

$$f(a)(x-a) + f''(a)\frac{(c-a)^2}{2}(x-a) + \epsilon(c)(c-a)^2(x-a).$$

Reduciendo términos semejantes,

$$f''(a)(x-a)^3 + 6\int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt =$$

$$f''(a)3(c-a)^2(x-a) + 6\gamma(c)(t-a)^2(x-a),$$

es decir,

$$f''(a) + \frac{6}{(x-a)^3}\int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt = f''(a)3\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^2 + 6\frac{\epsilon(c)(t-a)^2}{(x-a)^2}.$$

Ahora dado que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^3} \int_a^x \epsilon(t)(t-a)^2 dt = 0$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{\gamma(c)(t-a)^2}{(x-a)^2} = 0.$$

Se tiene el resultado deseado

$$\lim_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a los árbitros su revisión exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

Bibliografía

[1] José Juan Angoa, Jaime Arroyo, Agustín Contreras, David Herrera, Manuel Ibarra, Raúl Linares, Fernando Macías, Armando Martínez, Celestino Soriano, Fernando Velázquez, *Cálculo diferencial en una variable*, Fomento Editorial BUAP, serie Textos Científicos, México, (2005).

[2] José Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra, Raúl Linares, María de Jesús López, Armando Martínez, *Cálculo Integral*, Fomento Editorial BUAP, serie Textos Científicos, México, (2015).

[3] C. W. Baker, *Mean Value Type Theorems of Integral Calculus*, The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 10, No. 1(Jan., 1979) pp. 35–37.

[4] Z. Bao-lin *Note on the Value Theorem for Integrals*, The American Mathematical Monthly No. 6 (Jun-Jul 1997) 561–562.

[5] M. Ibarra Contreras, A. Martínez García *Algunas variantes del teorema del valor medio*, Matemáticas y sus aplicaciones 9, 71–92, Fomento Editorial BUAP, serie Textos Científicos, México, (2018).

[6] B. Jacobson *On the Value Theorem for Integrals*, The American Mathematical Monthly No. 5 (May 1982) 300–301.

[7] G. Lozada-Cruz, *Some variants of the integral mean value theorem*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 52:7 1124–1130.

[8] M. Mihai, *An Integral Mean Value Theorem concerning Two Continuous Functions and Its Stability*, International Journal of Analysis V 2015 pp. 1–4.

[9] P. K. Sahoo, *Some results related to the integral mean value theorem.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 38:6 818–822.

[10] J. Tong, *Generalization of the Mean Value Theorems for Integrals*, The College Mathematics Journal Vol. 33 No. 5(Nov., 2002), pp. 408–409.

[11] S. G. Wayment, *An Integral Mean Value Theorem.* Mathematical Gazette, Vol. 54 No. 389(1970) pp 300–301.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

maga@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 4

How to use the extension of the five islands theorem in holomorphic dynamics

Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto, Karla Hernández Reyes, Wendy Rodríguez Díaz
FCFM, BUAP

Abstract

The five islands theorem was first used in holomorphic dynamics by I. N Baker in [3] to prove that the repulsive fixed points of a transcendental entire function are dense in the Julia set. Also it was used to prove the existence of the residual Julia set for the same class of functions mentioned before. For this kind of functions ∞ is always an isolated essential singularity. In this chapter we show some examples given in [9] of how to use an extension of the theorem for functions with either (i) a compact countable set of essential singularities or (ii) a compact totally disconnected set of essential singularities. This document was written while the authors were having a weekly seminar.

1 Introduction

We denote the Riemann sphere by $\widehat{\mathbb{C}}$ and the complex plane by $\mathbb{C}$. A. Bolsch in [7] and M. Herring in [15] investigated the iteration of analytic functions outside some compact set of essential singularities, Their study was a natural generalization of the Fatou-Julia theory.

Bolsch in [6, 7, 8], investigated the iteration of analytic functions outside a compact countable set $B(f)$ which is the closure of isolated essential singularities. In this class infinity may not be an essential singularity. We will assume that the set $B(f)$ has at least one essential singularity, removing the case when we have always omitted poles, then the study of the dynamics of this kind of functions is different from either rational functions or transcendental entire functions. We denote this class by $\mathcal{K}$ following the notation in [11].

Herring in [15] investigate the iteration of analytic functions outside a compact totally disconnected set $E(f)$ of isolated essential singularities. We denote by $\mathcal{H}$. this class of functions.

We recall that if E is any compact totally-disconnected set in $\widehat{\mathbb{C}}$, $z_0 \in E$ and f is a non-constant meromorphic function in $E^c = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, the **Cluster set** is defined as
$C(f, E^c, z_0) := \{w \mid w = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \text{ for some } z_n \in E^c \text{ with } z_n \to z_0\}$.

Now, we will give examples of functions in classes $\mathcal{K}$ and $\mathcal{H}$.

Examples of functions in class $\mathcal{K}$

(1) The family $f_c(z) = e^{\frac{1}{z^2+c}}$, has two isolated essential singularities $z_1 = i\sqrt{c}$ and $z_2 = -i\sqrt{c}$. Observe that none of them is ∞. and that the set of essential singularities is compact and countable.

(2) The family $g_c(z) = \tan(\tan z) = \tan(\frac{\sin z}{\cos z}) = \frac{\sin(\frac{\sin z}{\cos z})}{\cos(\frac{\sin z}{\cos z})}$, which has an infinite compact countable set of essential singularities when $\cos z = 0$, that is, when $z = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ for $k \in \mathbb{Z}$.

Examples of functions in class $\mathcal{H}$

The following example is given in [5].

For any choice of E we may construct functions in $\mathcal{H}$. For example, take a sequence $\{w_k\}$ dense in $\mathbb{C}$, and sequences $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ in E^c such that A_n are mutually disjoint, and the set of limit points of each A_n and of $B = \cup_n A_n$ is precisely E. (One may construct the A_n inductively to be mutually disjoint and $d(A_n, E) < 1/n$). Mittag-Lefflers theorem allows the construction of two functions g, h meromorphic in E^c and such that the poles of g are at the points $b \in B$ where the principal part is $(z-b)^{-1}$, while those of h are at points $b \in B$ such that when $b \in A_n$ the principal part is $w_n(z-b)^{-1}$. Then $f = h/g$ is meromorphic in E^c and $f(z) = w_n$ when $z \in A_n$. Hence $C(f, E^c, z_0) = \widehat{\mathbb{C}}$ for every $z_0 \in E$. The function f has essential singularities precisely at the points of E.

Observe that to get examples of functions in class $\mathcal{H}$ is more complicated than for functions in class $\mathcal{K}$, since we need to have a compact totally disconnected set $E(f)$ of isolated essential singularities.

The set of **singular values** of $f \in \mathcal{K}$ or $f \in \mathcal{H}$, denoted by $SV(f)$, is defined as follows:

$$SV(f) = \overline{C(f) \cup A(f)},$$

where $C(f)$ is the set of critical values of f and $A(f)$ is the set of asymptotic values of f. We recall that a **critical value** is the image of a critical point. A point $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ is called an **asymptotic value** of f at e if there is a path $\gamma(t) \to e$ as $t \to \infty$, such that $f(\gamma(t)) \to a$, where $e \in B(f)$ for $f \in \mathcal{K}$ or $e \in E(f)$ for $f \in \mathcal{H}$.

2 The five island theorem and its extension

In 1930 Ahlfors proposed his theory of covering surfaces, one important theorem in the subject is the five islands theorem, which will be the subject of study in this section. We need a definition of an island before we state the theorem.

Suppose that T, X are Riemann surfaces, f is a holomorphic map $f : T \to X$ and $V \subset f(T)$ a Jordan domain. We say that a connected component G of $f^{-1}(V)$ is a **island** (respectively simple island) over V if the restriction $f : G \to V$ is a proper map (respectively homemorphism).

Theorem 2.1. *Let $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ be any nonconstant analytic function, and let Δ be any collection of 5 or more Jordan regions in $\widehat{\mathbb{C}}$ with pairwise disjoint closures. Then there is a simple island over some $\Delta_i \in \Delta$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$*

The above theorem is called five Ahlfors' theorem or Ahlfors' five island property.

Extension of the Five Islands Theorem

In the preprint in [14] Epstein suggests a generalization of the Ahlfors' five islands property which generalize the definition used in Herring's thesis. We will state three definitions given by Epstein, Herring and Oudkerk. The definition given by Oudkerk follows from the work of Epstein, but we mention it since Oudkek is the first in defining the Ahlfors' functions.The difference from the definitions used by A. Epstein and M. Herring is basically that Epstein does not require that the boundary of the domain of definition be totally disconnected.

I. Definition given by M. Herring in [15]

We shall consider a subclass of $\mathcal{H}$, which is closed under composition. We say that $f \in \mathbf{H} \subset \mathcal{H}$ has the m **islands property** at $z_0 \in E(f)$ if, given any neighborhood U of z_0 and m simply-connected domains Δ_i in $\mathbb{C}$ which have disjoint closures and which are bounded by sectionally analytic Jordan curves, there is a simply-connected subdomain D in $U \setminus E(f)$ which forms a Schlicht island over one of the Δ_i, that is f maps D univalently onto Δ_i.

The functions that have the m islands property belong to the following set

$\mathbf{H_m}$ is the set of $f \in \mathbf{H}$ such that $E(f) \neq \emptyset$ and for each $z_0 \in E(f)$ the function f has the m islands property at z_0.

II. Definition given by A. Epstein in [14]

Consider a collection C of arbitrary sets contained in W, where W is an open subset of a complex 1-manifold, in practice the elements of C will be points or Jordan domains with pairwise disjoint closures. The collection C is said **ubiquitous** near $u \in \partial W$ if for every sufficiently small connected open U, which contains u, and every component V of $U \cap W$, there exists a $G \in C$ with $G \in V$.

A general statement of the Ahlfors' five island property is as follows.

Let $f : W \to X$ be any analytic map between Riemann surfaces, where X is compact and W lies in some compact $\hat{W}$. The map f has the m island property if for every collection Δ of m or more Jordan regions in X with pairwise disjoint closure, the simple islands in $\bigcup_{G\in\Delta} f^{-1}(G)$ are ubiquitous near ∂W.

In [14] Eptein works with a class of analytic functions called finite type maps, that is, analytic maps where the set of singular values SV is finite. He proved the following theorem.

Theorem 2.2. *If $f : D_f \to X$ is a finite type map, then f has the Ahlfors' property.*

III. Definition given by R. Oudkerk in [18]

Let T, X Riemann surfaces, we state the following definitions.

$$Hol(T, X) :=$$

$$\{f : D_f \subset T \to X : f \text{ is holomorphic, } D_f \text{ is open and non-empty}\}.$$

$$Hol^{op}(T, X) := \{f \in Hol(T, X) : f \text{ is open}\}.$$

Let T, X be Riemann surfaces and let $D_f \subset T$ be open and non-empty. A function $f \in Hol^{op}(T, X)$ satisfies the m-island property if there is a finite number m satisfying the following condition.

Let $V_1, V_2, \dots V_m \subset X$ be m Jordan domains with pairwise disjoint closures, and let $U \subset X$ be open with $U \cap \partial D_f \neq \emptyset$. Then for every connected component U_0 of $U \cap D_f$ there is $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that f has a simple island over V_i in U_0.

Define

$$\mathcal{A}_m(T, X) = \{f \in Hol^{op}(T, X) \mid f \text{ satisfies the } m \text{ island property}\}.$$

A map is said to satisfy the finite island property or Ahlfors' property if its belongs to the family $\mathcal{A}(T, X) = \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{A}_m(T, X)$. Such maps are called Ahlfors' functions.

It can be write $\mathcal{A}_m(X,X) = \mathcal{A}_m(X)$ and $\mathcal{A}(X,X) = \mathcal{A}(X)$.

From the definition of the m island property if $\partial D_f = \emptyset$, then there is an extra condition needed: there exists at lest m Jordan domains which are simple islands over some i. The reason of this extra condition is to ensure that the class of Ahlfors' maps $A_m(X)$ is closed under composition for each m, for a proof we referred to Oudkerk [18].

Observe that the definition given by Epstein does not include this condition instead a map $f \in Hol(X)$ (where X is compact) with $\partial D_f = \emptyset$ satisfy the 0 island property. The definition given by Herring for the class $\mathcal{H}$ exclude rational maps, so there is no worry about $\partial D_f = \emptyset$.

3 Fatou and Julia sets for functions in clases $\mathcal{K}$ and $\mathcal{H}$

We recall that functions in class $\mathcal{K}$ are analytic outside a compact countable set $B(f)$ of essential singularities, and that functions in class $\mathcal{H}$ are analytic outside a compact totally disconnected set $E(f)$ of essential singularities. In what follows we must distinguish between the sets $B(f)$ and $E(f)$.

Bolsch in [7] and Herring [15] proved that for functions f, g in class $\mathcal{K}$ or $\mathcal{H}$ respectively, the composition $f \circ g$ is in $\mathcal{K}$ (or $\mathcal{H}$) where $B(f \circ g) = B(g) \bigcup g^{-1}(B(f))$ (or $E(f \circ g) = E(g) \bigcup g^{-1}(E(f))$). For $n \in \mathbb{N}$ we denote

$$f^{-n}(B(f)) = \{z : f^n(z) = e \in B(f)\},$$

$$(or \;\; f^{-n}(E(f)) = \{z : f^n(z) = e \in E(f)\}.$$

The following theorem follows from [6] and [15].

Theorem 3.1. *If $f \in \mathcal{K}$ (or $f \in \mathcal{H}$), then $f^n \in \mathcal{K}$ (or $f^n \in \mathcal{H}$) and for each $n \geq 1$ the natural boundary of f^n is the set*

$$B_n = B(f^n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(B(f)),$$

$$(or \ \ E_n = E(f^n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(E(f))),$$

so that f^n is meromorphic function in the region

$$D_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus B_n$$

$$(or \ \ D_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_n).$$

Further, the sets B_n (or E_n) are all compact and countable. Moreover, f^n cannot be continued meromorphically over any point of B_n (or E_n).

Let $f \in \mathcal{K}$ or $f \in \mathcal{H}$. If n is the minimum such that z satisfies $f^n(z) = z$, we say that z is a **periodic point of period n**. If z is a fixed point of period n the quantity

$$\prod_{j=1}^{n} f^{'}(z_i) = \lambda(z)$$

is called the **multiplier** of z. When any value z is the point at infinity the factor $f^{'}(z)$ is replace by the derivative of $1/f(1/z)$ at the origin.

The classification of a periodic point z of period n of $f \in \mathcal{K}$ or $f \in \mathcal{H}$ is given as follows:
(a) z **is super-attracting** if $|\lambda(z)| = 0$;

(b) z **is attracting** if $0 < |\lambda(z| < 1$;

(c) z **is repelling** if $|\lambda(z)| > 1$;

(d) z **is rationally indifferent** if $|\lambda(z)| = 1$ and $(f^n)'(z)$ is a root of unit, in this case z is known also as a *parabolic periodic point*;

(e) z **is irrationally indifferent** if $|\lambda(z)| = 1$, but $\lambda(z)$ is not a root of unit.

For functions in class $\mathcal{K}$ (or $\mathcal{H}$) we define the **Fatou set**, denoted by $F(f)$, as the maximal open set G such that all f^n are analytic and forms a normal family in G (in the sense of Montel). The complement of the Fatou set is called the **Julia set** which is denoted by $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ and therefore $B(f) \subset J(f)$ (or $B(f) \subset J(f)$). The Fatou and Julia sets have important properties, we mention some of them bellow, to see the proofs we refer to the reader to [7] and [15].

(a) The Fatou set $F(f)$ is open and the Julia set $J(f)$ is closed.

(b) The Julia set $J(f)$ is infinite

(c) The sets $F(f)$ and $J(f)$ are completely invariant under f., this means, it is forward invariant $f(F(f)) \subseteq F(f)$ and backward invariant $f^{-1}(F(f)) \subseteq F(f)$.

(d) For a positive integer m, $F(f^m) = F(f)$ and $J(f^m) = J(f)$.

For $f \in \mathcal{K}$ or $f \in \mathcal{H}$ a Fatou component U can be either:

(a) **periodic** if $f^n(U) \subset U$, for some $n \geq 1$;

(b) **pre-periodic** if $f^m(U)$ is periodic for some integer $m \geq 0$ or

(c) **wandering** if U is neither periodic nor pre-periodic.

If U is a periodic component of $F(f)$ of period p, the classification of the periodic component is given as follows.

1. U is called **attracting component**, if U contains an attracting periodic point z_0 of period p such that $f^{np}(z) \to z_=$ for $z \in U$ as $n \to \infty$.

2. The component U is called either a Leau domain or a **parabolic component**, if U contains a periodic point $z_0 \in \partial U$ of period p and $f^{np}(z) \to z_0$ for $z \in U$ as $n \to \infty$.

3. The component U is called a **Siegel disc**, if there exists an analytic homeomorphism $\varphi : U \to D$ where D is the unit disc such that $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ for some $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. The component U is called a **Herman ring**, if there exists an analytic homeomorphism $\varphi : U \to A$ where A is an annulus $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, $r > 1$, such that $\varphi(f^p(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha} z$ for some $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. U is called a **Baker domain**, if there exists $z_0 \in \partial U$ such that $f^{np}(z) \to z_0$, for $z \in U$ as $n \to \infty$, but $f^p(z_0)$ is not defined.

When the set of singular values $SV(f)$ of analytic functions in $\mathcal{K}$ (or $f \in \mathcal{H}$) is finite there are neither Baker domains nor wandering domains in the Fatou set. This result was proved in [4] and [13] for different classes of functions, since the proofs remain valid for $f \in \mathcal{K}$ (or $f \in \mathcal{H}$) they are omitted. Thus the only remaining types of Fatou periodic components are either attracting, parabolic, Sigel disk or Herman ring.

A study of the dynamics of the family $G_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$, where λ, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbb{C}$ in class $\mathcal{K}$ which has two isolated essential singularities at $z_1 = i\sqrt{c}$ and $z_2 = -i\sqrt{c}$ (none of them is ∞ and that the set of essential singularities is compact and countable) has been done in [12], were it is shown some components of the Fatou set. We give some examples of them, see [12] for details.

Attracting component in the Fatou set

Theorem 3.2. *Let $G_{\lambda,c,\mu}(z)$ as above. If $\mu = -\lambda e^{1/c}$, $|\lambda|$ is sufficiently small, and $1/|c| < \log(3/2)$ for $\lambda, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, then the Fatou set of $G_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ is an attracting completely invariant multiply-connected component.*

We dealing with the case when $z = 0$ is the only fixed point. Figure 1 shows the Fatou and Julia sets for the parameters $c = 0.7$, $\lambda = 0.2$ and $\mu = 0$. The Fatou set in black is the attracting component.

Parabolic component in the Fatou set

Theorem 3.3. *Let $G_{\lambda,c,\mu}(z)$. If $c \in \mathbb{C} \setminus \{-u^2\}$, $\lambda = -(c+u^2)^2/(2ue^{1/(u^2+c)})$ and $\mu = u + (c+u^2)^2/2u$, where u is a square root of unit, then the Fatou set of $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ contains a parabolic component.*

If we take $z = x \in \mathbb{R}$, $u = -1$ and $c = 9$, above, then the parameters are $\lambda = 50/e^{1/10}$ and $\mu = -51$.

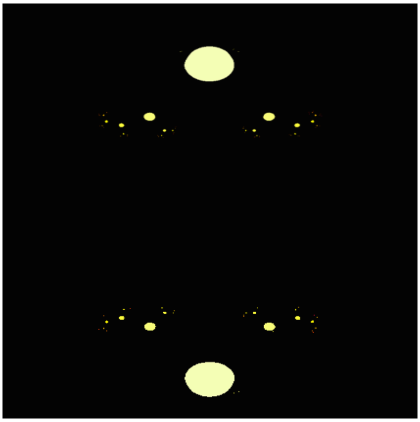


Figure 1: The Fatou set, of $F_{0.2,0.7,0}(z)$ on black, is multiply connected and completely invariant.

The Fatou set of the map $G_{50/e^{1/10},9,-51}$ contains a parabolic component, where $u=-1$ is the fixed point. Figure 2 shows the parabolic component and an orbit of some point in the component.

Siegel disk in the Fatou set

Theorem 3.4. *Let $G_{\lambda,c,\mu}$. For $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, θ is a Bruno number, $c=(1/2)e^{2\pi i\theta}+1$ and $\lambda = e^{-1}\sqrt{1-c}$, the Fatou set of $F_{\lambda,c,0}(z)$ contains a Siegel disk.*

Examples of Herman rings can be done by using cuasi conformal surgery.

4 Some applications of the Ahlfors' property

The following results are related to an important property of the Julia set. The first one was was proved by A. Bolsch in [6] with an elegant argument, he uses results of normal families and consequences of Nevannlina theory. The second was proved by M. Herring [15] by using the generalization of Ahlfors' property, see I in Section 2.

Theorem A. *If $f \in \mathcal{K}$, then repelling periodic points are dense in $J(f)$.*

Theorem B. *If $f \in \mathbf{H_m}$, then the repelling periodic points are dense in $J(f)$.*

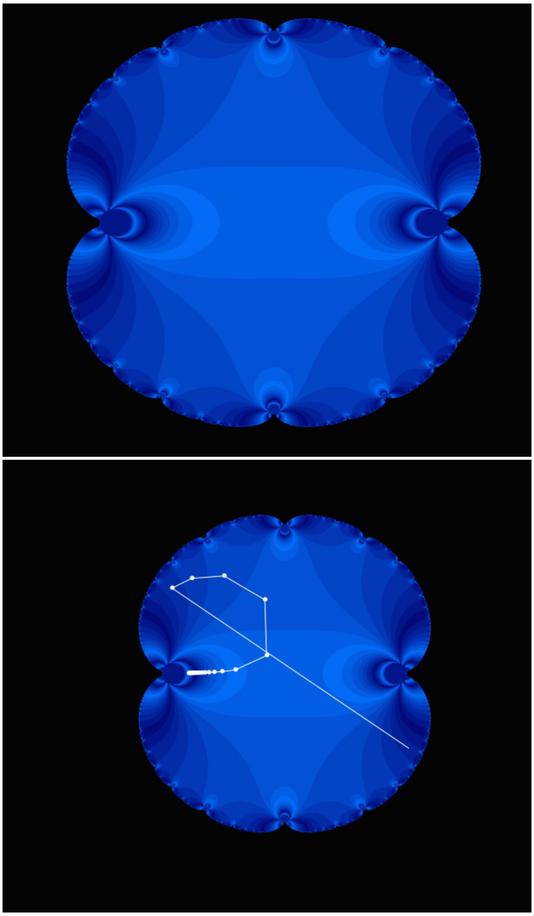


Figure 2: The parabolic component on blue and an orbit of some point

Theorem A can be proved by using a similar argument as in Theorem B, since functions in class $\mathcal{K}$ have the Ahlfors' five island property. Observe that the similar statement and proof in Theorem B works for $f \in \mathcal{A}(X)$, that is, functions studied by Oudkerk, see III Section 2. We recall that X is a Riemann surface, $D_f \subset X$ and $\mathcal{A}(X) = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{A}_m(X)$, see Section 2.

Residual Julia sets

The *residual Julia set* of f is defined, denoted by $J_r(f)$, as the set of those points of $J(f)$ which do not belong to the boundary of any component of the

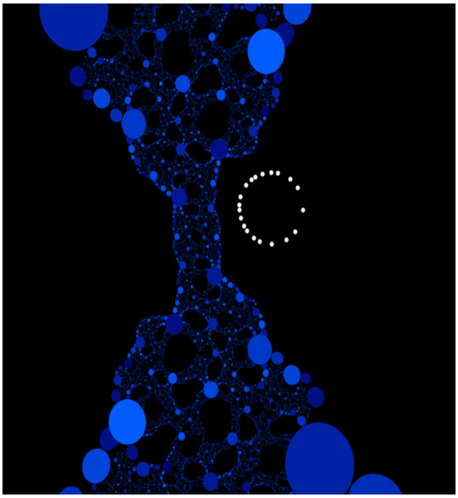


Figure 3: The Siegel disk (in black) of $G_{e^{-1}\sqrt{1-c},c,0}$ with $c = \sqrt{1-5}/2$ and an orbit of a point on it

Fatou set $F(f)$. The points of $J_r(f)$ are called *buried points* of $J(f)$ and a component of $J(f)$ that belongs to $J_r(f)$ is called a *buried component.*

This concept was first introduced in the context of Kleinian groups by Abikoff in [1] and [2]. He defined the residual set $\Lambda_r(\Gamma)$ of a Kleinian group Γ to be the subset of those points of the limit set $\Lambda(\Gamma)$ which do not lie on the boundary of any component of the complement of $\Lambda(\Gamma)$.

The following theorem was proved in [9] for functions in class $\mathcal{K}$, where the proof uses the Ahlfors' property. We re-write the proof for the readers.

Theorem C. *Let $f \in \mathcal{K}$. Suppose that the Fatou set has no completely invariant domain and the Julia set is disconnected in such a way that the Fatou set has a component D of connectivity at least five. Then, singleton components are dense in $J(f)$.*

Before we proof the theorem we need a Lemma which can be found in [17].

Lemma 1. *If D is a domain in $\widehat{\mathbb{C}}$ whose complement contains at least p components $D_1, ..., D_p$, then there are p disjoint simple polygons γ_p, $0 \leq i \leq p$, in D such that γ_i separates D_i from the remaining D_j, $j \neq i$. Thus, there is* *a component Δ_i of the complement, γ_i such that $D_i \subset \Delta_i$ and the closures of D_i are disjoint pairwise.*

Proof Theorem C. Let $f \in \mathcal{K}$ and D be a component of the Fatou set of connectivity at least five. Thus, D^c has at least five components, say $D_1, ..., D_5$. It follows from Lemma 1 that there are simple polygons $\gamma_1, 1 \leq i \leq 5$, in D and complementary domains Δ_i of γ_i such that $D_i \subset \Delta_i$, where $\Delta_i \cap \Delta_j \neq 0$, $i \neq j$, and each Δ_i contains points in the Julia set, see Figure 4.

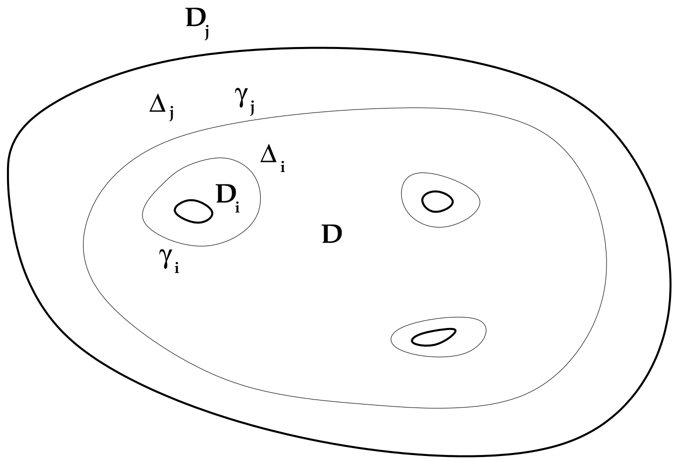


Figure 4: The complementary domains Δ_i of γ_i such that $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, $i \neq j$.

Now, pick a point ϕ_1 in the Julia set and any open neighborhood V_1 which contains ϕ_1. Then there is some $k \in \mathbb{N}$ such that f^k has an essential singularity $e_1 \in V_1$ and $f^{k-1}(e_1)$ is in the set $B(f)$. Take any neigbourhood U of e_1 such that $\overline{U} \subset V_1$. Since f has the five island property at $f^{k-1}(e_1)$, there exists a simply connected subdomain $V_2 \subset U \setminus \{e_1\}$ such that $f^k(V_2)$ is one of the Δ_i, say Δ_1, and $f^k(\partial V_2) = \gamma_1$. Since Δ_1 which meets the Julia set, it follows that V_2 contains a point $\phi_2 \in J(f)$. From $f^k(\partial V_2) = \gamma_1$ it follows that $\partial V_2 \in F(f)$.

We may replace V_1 by V_2, ϕ_1 by ϕ_2 and deduce that V_2 contains an arbitrary smal simple neigbouthood of V_3 such that $\overline{V_3} \subset V_2$, $\partial V_3 \subset F(f)$ and $\phi_s \in J(f) \neq \emptyset$. By continuing inductively, we obtain a sequence of nested simply connected domains V_n, each of them contains a point ϕ_n. The sets

V_n shrink to a single point ϕ, thus $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n \in J(f)$. Further, ∂V_n is constructed to be in the Fatou set, and so ϕ is a singleton component of the Julia set. Thus, singleton components are dense in the Julia set.

To prove that the singleton components are buried follows from an argument in ([16]), Theorem 2.2) with some small modifications.

Similar arguments, applying the Ahlfors' property, can be used for functions in $\mathbf{H_m}$ to prove the following theorems, see [10] for the proof.

Theorem D. *Let $f \in \mathbf{H_m}$. Suppose that the Fatou set has no completely invariant domain and the Julia set is disconnected in such a way that the Fatou set has a bounded component D of connectivity m, $m \geq 5$ (the connectivity of D can be infinite). Then, singleton components are dense in $J(f)$.*

Theorem E *If f is a function in class $\mathcal{K}$ or class $\mathbf{H_m}$, the Fatou set has no completely invariant domains and the Fatou set has k-doubly connected components U_i, $i = 1, \ldots, k$, which are disjoint $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$, $k \geq 5$, with $k \in \mathbb{N}$.*

Proof. The Fatou set has k-doubly connected components U_i, $i = 1, \ldots k$, $k \geq 5$, with $k \in \mathbb{N}$, which are disjoint $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$. Using Lemma 1 we can take simple polygons γ_i in U_i, $1 \leq i \leq k$, and complementary domains $\Delta_i \subset U_i$ which contain the inner boundaries of U_i, such that $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$. Each Δ_i contains points in the Julia set, see Figure 5.

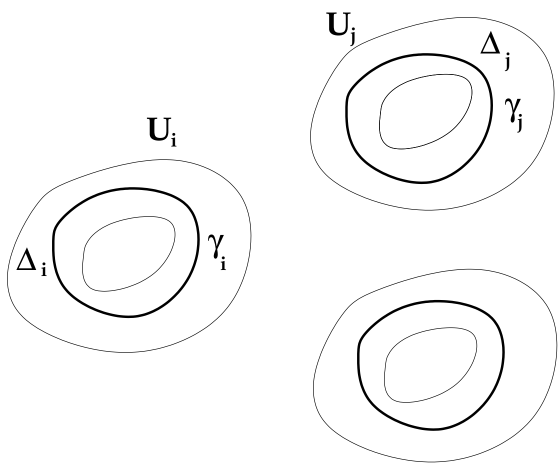


Figure 5: The complementary domains Δ_i of γ_i such that $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, $i \neq j$.

When we have done the above choice of the complementary domains the proof follows as in Theorem D.

THEOREM F. *If $f \in \mathbf{H_m}$ is a function where the Fatou set has no completely invariant domains and either the Fatou set has one doubly connected component U which has in its inner boundary k-doubly connected components U_i, $i = 1, \ldots, k$, which are disjoint $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$, $k \geq 5$, with $k \in \mathbb{N}$. Then the singleton buried components are dense in the Julia set $J(f)$.*

Proof. Let U be the component of the Fatou set of connectivity two with inner boundary ∂_{IB} and outer boundary ∂_{OB}. The inner boundary, ∂_{IB}, contains k doubly connected components U_i, $i = 1, \ldots k$, $k \geq 5$, with $k \in \mathbb{N}$, which are disjoint $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$. Thus we can use Lemma 1 to take a simple polygon γ in U, simple polygons γ_i in U_i and complementary domains Δ and Δ_i such that:

(i) Δ contains the outer boundary, ∂_{OB}, of U.

(ii) Each Δ_i contains the inner boundary of U_i, such that $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, $i \neq j$.

Δ and each Δ_i contain points in the Julia set, see Figure 6.

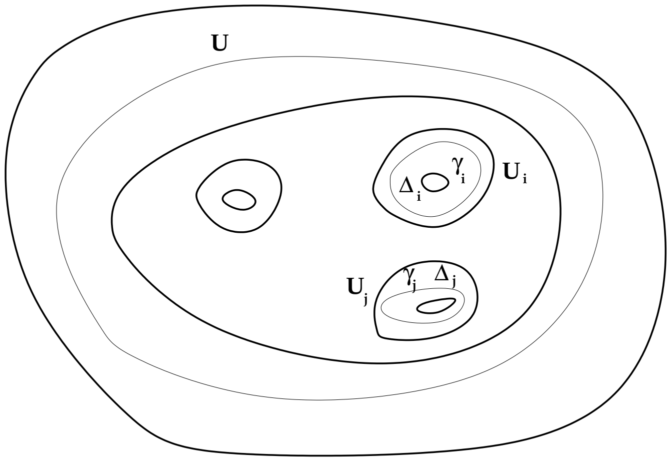


Figure 6: The complementary domains Δ_i and Δ_j of γ_i and γ_j respectively such that $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, $i \neq j$.

When we have done the above choice of the complementary domains the proof follows as Theorem D.

Acknowledgment.

The authors thank the referee for his/her careful reading of the manuscript.

Bibliography

[1] Abikoff W., Some Remarks on Kleinian Groups, *Annals of Mathematics.* **66,** (1971), 1–5.

[2] Abikoff W., The Residual Limits Sets of Kleinian Groups, *Acta Mathematica.***130** (1) (1973), 127–144.

[3] Baker I.N., Fixpoints and iterates of entire functions, *Math. Z.* **71** (1959), 146–153.

[4] Baker I.N., Domínguez P. and Herring M.E., Dynamics of functions meromorphic outside a small set, *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* **21** (2001), 647–672.

[5] Baker I.N., Domínguez P. and Herring M.E., Dynamics of Functions meromorphic outside a small set,: completely invariant domains *Complex Variables.* **94** (2) (2004), 95–100.

[6] Bolsch A., Repulsive periodic points of meromorphic function, *Complex Variables Theory and Applications.* **31** (1996), 75–79.

[7] Bolsch A., Iteration of meromorphic functions with countably many singularities. Dissertation, Berlin (1997).

[8] Bolsch A., Periodic Fatou components of meromorphic functions, *Bull. London Math. Soc.* **31** (1999), 543–555.

[9] Domínguez P., Residual Julia sets for meromorphic functions with countably many essential singularities, *Journal of Difference Equations and Applications*, **16** (5–6) (2010), 519–522.

[10] Domínguez P., Residual Julia set for functions with the Ahlfors' property, *Journal of Difference Equations and Applications*, **20** (7) (2014), 1019–1032

[11] Domínguez P., Montes de Oca M. and Sienra G., General escaping set for meromorphic functions outside a countable set of transcendental singularities. *Annales Polonici Mathematici*, (2022), 1–17.

[12] Domínguez P., Sienra G. and Hernández I., Dynamics of a family of some meromorphic functions with two essential singularities which are not omitted values *Qualitative Theory of Dynamical Systems.*, **20:1** (2021), 1–19.

[13] Epstein A.L, Towers of finite type complex analytic maps, PhD. Thesis, City University of New York, 1995.

[14] Epstein A.L. Dynamics of finite types complex analytic maps I: Global structure (in preparation).

[15] Herring M.E., An extension of the Julia-Fatou theory of iteration. PhD thesis (1994) Imperial College, London.

[16] Ng T.W., Zheng J.H. and Choi Y.Y., Residual Julia sets of meromorphic functions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 141 (2006), pp. 113–126.

[17] Newman M.H.A., Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge UniversityPress, Cambridge, 1954.

[18] Oudkerk R. Iterartion of Ahlfors and Picard functions which overflow their domain (in preparation).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

lcano@fcfm.buap.mx
pdsoto@fcfm.buap.mx
karla.hernandezrey@alumno.buap.mx
wendy.rodriguezdi@alumno.buap.mx

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 5

Sobre continuos enrejados y el espacio $\mathcal{E}_n(X)$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Al estudiar la unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo X, denotado por $SF_n(X)$, es necesario encontrar una propiedad que se preserve bajo homeomorfismos, en este caso se estudia la colección de todos elementos en $F_n(X)$ que tienen una vecindad homeomorfa a una n-celda en $F_n(X)$, denotado por $\mathcal{E}_n(X)$. En este capítulo, se presentan algunas propiedades de este subespacio de $F_n(X)$.

1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dado un continuo X, un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos de X. Los hiperespacios que se estudían en este trabajo son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \ y \ A \text{ es un cerrado de } X\};$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

La familia 2^X es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de X, y $C(X) = C_1(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X. Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n-ésimo producto simétrico de X y fue introducido en 1931, por K. Borsuk y S. M. Ulam [1]. Note que, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X, y se puede probar que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

En 1979, S. B. Nadler Jr. [13] introdujo el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo X como el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$, que se obtiene de $C(X)$ al identificar a $F_1(X)$ en un punto y se denota como $HS(X)$. En 2004, S. Macías [10] definió el n-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo X, para un entero n mayor que 1, como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$, y se denota como $HS_n(X)$.

En 2010, F. Barragán [2] definió para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, el n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$.

Dado un continuo X, sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), HS_n(X), SF_n(X)\}$. Decimos que un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$, si para cualquier continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. Una clase de continuos C tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ si para cada continuo $X \in C$, se tiene que X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$.

La sección 3, esta dedicada a presentar la definición de continuo enrejado, así como algunos ejemplos y resultados. En la sección 4 se enuncian y prueban algunos resultados sobre el subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para X un continuo enrejado. Finalmente, en la sección 5 se muestran algunas propiedades, que sirven para abordar el problema de la unicidad del $n-$ésimo producto simétrico suspensión de un continuo enrejado.

2 Preliminares

Dado un continuo X denotaremos por d a la métrica de X. Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en a y de radio ε, se denota por $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Para cualquier $A \subset X$ y $\delta > 0$ definimos la **nube** de radio δ alrededor de A, como $N_d(A, \delta) = \bigcup\limits_{a \in A} B_d(a, \delta)$. La métrica d en X induce una métrica en 2^X, que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \;\; y \;\; B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$.

La métrica de Hausdorff es heredada a $F_n(X)$ y esta lo hace un espacio métrico, el cual también resulta ser un continuo. En este trabajo $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y por ende, todos sus subespacios.

Definición 2.1. *Un* ***arco*** *es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1]$*, con la topología euclideana.*

Definición 2.2. *Un continuo* X *es una* ***gráfica finita*** *si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.*

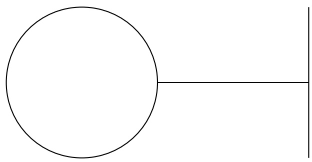


Figura 1: Gráfica finita.

Definición 2.3. *Sea* X *un espacio métrico y* $p \in X$*. Diremos que* X *es* ***localmente conexo en*** p*, si para toda vecindad* U *de* p*, existe* V *abierto y conexo tal que* $p \in V \subset U$*. Se dice que* X *es localmente conexo, si es localmente conexo en todos sus puntos.*

Una n**-celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ y $||\mathbf{x}||$ denota la norma euclidiana. Una **curva cerrada simple** es cualquier espacio homeomorfo al espacio $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{x}|| = 1\}$

Definición 2.4. *El* ***n-odo simple****, con* $n \in \mathbb{N}$*, denotado por* T_n*, es un continuo que se construye uniendo* n *arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado* ***vértice*** *del* n*-odo simple, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los* n *arcos y, los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del* n*-odo.*

Definición 2.5. *Dado* X *una gráfica finita,* $p \in X$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, decimos que* p *es de* ***orden*** n *en* X*, denotado por* $ord(p, X) = n$*, si* p *tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un* n*-odo simple que tiene a* p *como vértice.*

Los puntos de orden 1 son puntos extremos, los de orden 2 son puntos ordinarios y los puntos de orden 3 o mayor son puntos de ramificación, estos se denotan con $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$, respectivamente.

Sean $U_1, U_2, ..., U_m$ una colección finita de subconjuntos de X, $\langle U_1, U_2, ..., U_m\rangle_n$ denota el subconjunto de $F_n(X)$

$$\{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, 2, ..., m\}\}.$$

Se sabe por [7, Teorema 1.2] que la familia de todos los subconjuntos de $F_n(X)$ de la forma $\langle U_1, U_2, ..., U_m\rangle_n$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, es una base para la topologia inducida por la métrica de Hausdorff en $F_n(X)$.

Teorema 2.6. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in U$ arbitrario, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, para algún $m \leq n$.

Caso 1. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap U$.

Caso 2. Si $m < n$, como $\mathcal{U}$ es abierto en $F_n(X)$, existe $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset U$. Podemos hallar $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(a_1, r)$ distintos de $a_1, \ldots, a_m$. Sea $B = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Como $H(A, B) < r$, se tiene que
$B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset U$, y por tanto $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap U$.

Por lo tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$. □

A continuación definiremos el hiperespacio a estudiar. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{D} = \{F_1(X)\} \cup \{\{A\} : A \in F_n(X) - F_1(X)\}$ una descomposición de $F_n(X)$. El n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/\mathcal{D}$, como $SF_n(X)$ se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente, $F_n(X)/\mathcal{D}$ se suele denotar por:

$$F_n(X)/F_1(X).$$

La función cociente q_X es tal que, $q_X : F_n(X) \to SF_n(X)$ definida por

$$q_X(A) = \begin{cases} \{A\} & si \;\; A \in F_n(X) - F_1(X) \\ F_X & si \;\; A \in F_1(X). \end{cases}$$

F_X denota al elemento tal que $q_X(F_1(X)) = \{F_X\}$. La restricción de q_X al subespacio $F_n(X) - F_1(X)$,

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} : F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X\}$$

es un homeomorfismo. De ahora en adelante, escribimos

$$q_X^* = q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}.$$

3 Continuos enrejados

En 2013 Alejandro Illanes, Rodrigo Hernández Gutiérrez y Verónica de la Vega definieron nuevas clases de continuos en su artículo titulado **Unicidad de hiperespacios para continuos de Peano** (veáse [4]), a saber; la clase de los continuos enrejados y casi enrejados. Para poder definir a estos, consideremos los siguientes subconjuntos de un continuo X.

Dado un continuo X, sean

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X) &= \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X, \text{ tal que} \\ &\qquad G \text{ es una gráfica finita}\}, \\ \mathcal{P}(X) &= X - \mathcal{G}(X). \end{aligned}$$

Definición 3.1. *Un continuo X es **casi enrejado** si y sólo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento $U \in \mathcal{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

A continuación presentamos el bosquejo de un continuo que es enrejeado y solo tiene un punto que pertenece a $\mathcal{P}(X)$, denotado en color rojo.

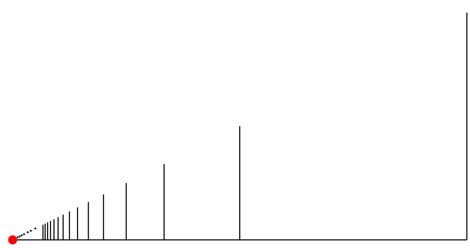


Figura 2: Continuo enrejado.

El siguiente continuo es enrejado y contiene un único punto de $\mathcal{P}(X)$, además este es un punto ordinario.

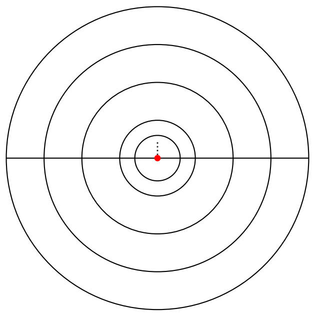


Figura 3: Continuo enrejado.

La siguiente figura es un bosquejo de un continuo enrejado que tiene una cantidad infinita de puntos de $\mathcal{P}(X)$, denotados en color rojo y estos son puntos de ramificación.

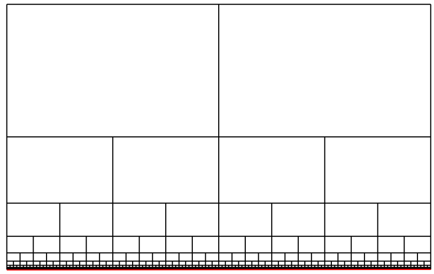


Figura 4: Continuo enrejado

El continuo de la Figura 4 es un continuo enrejado. Sin embargo, si le pegamos un continuo como lo muestra la Figura 5, el continuo resultante es casi enrejado pero no enrejado.

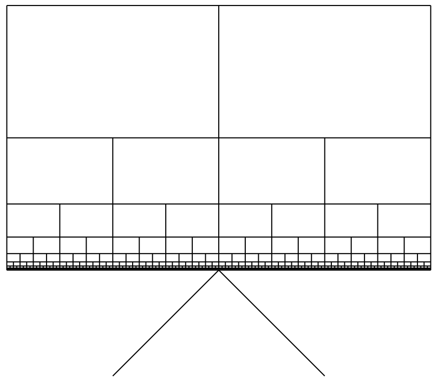


Figura 5: Continuo casi enrejado pero no enrejado

Un **ciclo** en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto de X, para algún $a \in J$. Un **arco libre** en X es un arco α en X con puntos extremos p y q tales que $\alpha - \{p, q\}$ es abierto en X. Un **arco libre maximal** en X es un arco libre en X que es maximal, con respecto a la inclusión. Consideremos los siguientes conjuntos que serán importantes para las siguientes secciones:

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\}.\\
\mathcal{A}(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X\}.\\
\mathcal{A}_E(X) = \{J \in \mathcal{A}(X) : \text{ tal que existe } p \in E(J) \text{ con } p \in \operatorname{int}_X(J)\}.\\
\mathcal{A}_S(X) = \mathcal{A}(X) \cup \mathcal{A}_R(X).\\
\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una n-celda}\}.\\
\mathcal{SE}_n(X) = \{A \in SF_n(X) :\\
A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(X) \text{ que es una n-celda}\}.\\
\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \cap (R(X) \cup \mathcal{P}(X)) = \emptyset\}.\\
\mathcal{P}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset\}.
\end{gathered}$$

Lema 3.2. *Sean X un continuo y $r > 0$. Si $I \in \mathcal{A}_S(X)$ entonces $B(x, r) \cap \operatorname{int}_X(I) \neq \emptyset$ para cada $x \in I$.*

Demostración. Sea $x \in I$ y supongamos que $I \in \mathcal{A}(X)$. Si $x \in \operatorname{int}_X(I)$ se cumple lo pedido. Supongamos que $x \notin \operatorname{int}_X(I)$ y además $B(x, r) \cap \operatorname{int}_X(I) = \emptyset$. Como I es un arco libre, entonces $I - \{a, b\} \subset \operatorname{int}_X(I)$, donde a, b son sus puntos extremos, así $B(x, r) \cap (I - \{a, b\}) = \emptyset$, luego $B(x, r) \cap I \subset \{a, b\}$ es decir, $B(x, r) \cap I$ es un conjunto finito en I, por lo que es un cerrado en I, pero también $B(x,r)\cap I$ es abierto en I, lo cual no puede ser posible ya que I es conexo. Por ende $B(x,r)\cap \mathrm{int}_X(I)\neq\emptyset$.

Supongamos ahora que $I\in\mathcal{A}_R(X)$. Si $x\in\mathrm{int}_X(I)$ se cumple lo pedido. Supongamos que $x\notin\mathrm{int}_X(I)$ y además $B(x,r)\cap\mathrm{int}_X(I)=\emptyset$. Como I es un ciclo existe $a\in I$ tal que $I-\{a\}$ es abierto, entonces $I-\{a\}\subset\mathrm{int}_X(I)$, así $B(x,r)\cap(I-\{a\})=\emptyset$, luego $B(x,r)\cap I\subset\{a\}$ es decir, $B(x,r)\cap I=\{a\}$ es un conjunto finito en I, por lo que es un cerrado en I, pero también $B(x,r)\cap I$ es abierto en I, lo cual no puede ser posible ya que I es conexo. Por ende $B(x,r)\cap\mathrm{int}_X(I)\neq\emptyset$. □

Un resultados que es de bastante utilidad en este trabajo, es el siguiente.

Teorema 3.3. *[6, Teorema 4.1] Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo. Entonces $x\in\mathcal{P}(X)$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de $\mathcal{A}_S(X)$, distintos dos a dos, que converge a $\{x\}$.*

Teorema 3.4. *Sea X un continuo enrejado. Entonces $X=\mathrm{cl}_X(\cup\mathcal{A}_S(X))$.*

Demostración. Sea $x\in X$, si $x\in\mathcal{G}(X)$ entonces existe $I\in\mathcal{A}_S(X)$ tal que $x\in I$, entonces $x\in\cup\mathcal{A}_S(X)$. Si $x\in\mathcal{P}(X)$, por el Teorema 3.3 existe $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos distintos contenidos en $\mathcal{A}_S(X)$ que converge a $\{x\}$. Sea $n\in\mathbb{N}$, existe $i_n\in\mathbb{N}$ tal que $H(I_{i_n},\{x\})<\frac{1}{n}$, por lo que existe $x_n\in I_{i_n}$ tal que $d(x_n,x)<\frac{1}{n}$, de esta forma se puede construir de forma inductiva, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\cup\mathcal{A}_S(X)$ que es convergente a x, es decir, $x\in\mathrm{cl}_X(\cup\mathcal{A}_S(X))$. □

Lema 3.5. *Sea X un continuo casi enrejado, entonces $\mathcal{G}(X)-R(X)$ es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Sea $x\in X$, tal que $x\notin\mathcal{G}(X)-R(X)$, eso implica que $x\in(R(X)\cap\mathcal{G}(X))\cup\mathcal{P}(X)$. Si $x\in R(X)\cap\mathcal{G}(X)$, existe una vecindad V de x, que es una gráfica finita, como $x\in R(X)$ entonces existe $I\in\mathcal{A}(X)$ tal que $x\in\mathrm{Bd}(I)$, podemos construir una sucesión de puntos ordinarios contenida en $\mathrm{int}_X(I)$ que sea convergente a x, esto implica que $x\in\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)-R(X))$.

Supongamos que $x\in\mathcal{P}(X)$, por la densidad de $\mathcal{G}(X)$, existe $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{G}(X)$ tal que $x_i\longrightarrow x$. Sea $i\in\mathbb{N}$. Si $x_i\in R(X)$, como $R(X)\cap\mathcal{G}(X)\subset\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)-R(X))$ podemos tomar $x_i'\in\mathcal{G}(X)-R(X)$ tal que $d(x_i',x_i)<\frac{1}{i}$, en caso contrario $x_i'=x_i$. De esta forma, hemos definido $\{p_i'\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{G}(X)-R(X)$ tal que $x_i'\longrightarrow x$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(X)\subset\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)-R(X))$. □

Los continuos enrejados tienen la propiedad de ser localmente conexos, los siguientes teoremas son necesarios para probar esto.

Teorema 3.6. *[8, Corolario 6.1.11] Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si existe un subconjunto conexo B de X tal que $B \subset A \subset \mathrm{cl}_X(B)$, entonces A es conexo.*

Lema 3.7. *Sean X un continuo casi enrejado y U un subconjunto de X. Entonces $int_X(U) \subset cl_X(U - \mathcal{P}(X))$.*

Demostración. Sean $x \in \mathrm{int}_X(U)$ y V un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$.

Luego, $\mathrm{int}_X(U) \cap V$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Como X es casi enrejado, $\mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$. De esta manera $\mathrm{int}_X(U) \cap V \nsubseteq \mathcal{P}(X)$, es decir, $(V \cap \mathrm{int}_X(U)) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$.

Es claro que, $V \cap (\mathrm{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) = (V \cap \mathrm{int}_X(U)) - \mathcal{P}(X)$, por lo que $V \cap (\mathrm{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$.

Como, $V \cap (U - \mathcal{P}(X)) \supset V \cap (\mathrm{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$. □

Teorema 3.8. *Si X es un continuo enrejado entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo enrejado, entonces existe $\mathcal{B}$ una base de vecindades de X tal que para cada $T \in \mathcal{B}$ se tiene que $T - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Tomemos $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Por el teorema 3.6 exite W un subconjunto abierto de X tal que $x \in W \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset U$.

Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathrm{int}_X(V) \subset V \subset W$. Aplicando el Lema 3.7, tenemos que $\mathrm{int}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset U$.

Así, $x \in \mathrm{int}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset U$ y, como $V \in \mathcal{B}$, se tiene que $V - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Luego, por el Teorema 3.6, $\mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$ es conexo.

De esto que, existe un conjunto abieto que tine a x y esta contenido en $\mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$ por lo tanto, $x \in \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) \subset U$.

Por lo tanto, X es conexo en pequeño y la familia $\mathcal{B}' = \{\mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X)) : V \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades para X, concluimos que X es localmente conexo. □

Teorema 3.9. *Si X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $F_n(X)$. Como $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$, existen $p_1, \ldots, p_n \in X$ tal que $A = \{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathcal{U}$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_H(A, \delta) \subset \mathcal{U}$ y $\rho = \text{mín}\{d(p_i, p_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $i \neq j\}$. Tomemos $r = \text{mín}\{\delta, \frac{\rho}{2}\}$. Note que si $i \neq j$, entonces $B(p_i, r) \cap B(p_j, r) = \emptyset$.

Por el Lema 3.5, existe $q_i \in B(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $B(p_1, r), \ldots, B(p_n, r)$ son ajenos por pares, se cumple que $q_1, \ldots, q_n$ son puntos distintos dos a dos. Así, $B = \{q_1, \ldots, q_n\} \in \mathcal{N}_n(X)$. Más aún, $B \in B_H(A, r) \subset \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. □

4 Resultados sobre el espacio $\mathcal{E}_n(X)$

El conjunto $\mathcal{E}_n(X)$ está definido mediante una propiedad topológica, por lo que se preserva bajo homeomorfismo. Este conjunto juega un papel importante en el estudio de la unicidad. Esta sección está dedicada a estudiar las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ y mostrar algunas de sus propiedades.

Teorema 4.1. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe U una vecindad de A, tal que U es una n-celda en $F_n(X)$. Por ser U vecindad se cumple que $A \in \text{int}_{F_n(X)}(U) \subset U$. Note que dado $B \in \text{int}_{F_n(X)}(U) - \{A\}$ se cumple que $B \in U$, es decir, U es una vecindad de B que es una n-celda, por ende $B \in \mathcal{E}_n(X)$, luego $A \in \text{int}_{F_n(X)}(U) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es abierto. □

Teorema 4.2. *[4, Teorema 4] Sean X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\dim(A, C_n(X))$ *es finita.*

(b) *Existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \text{int}_X(D)$.*

(c) $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Teorema 4.3. *[3, Lema 4.3] Sea X una gráfica finita, $A \in F_{n-1}(X)$ y $n \geq 4$, entonces ninguna vecindad de A en $F_n(X)$ puede ser encajada en $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.4. *Sean X un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}(X)$. Supongamos que $A = \{a_1, ..., a_n\}$, como $A \cap (R(X) \cup \mathcal{P}(X)) = \emptyset$, esto implica que $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$, por el Teorema 4.2 existe una gráfica finita D contenida en X tal que $A \subset \text{int}_X(D)$, dado que $A \cap R(X) = \emptyset$, se tiene que cada elemento de A pertenece al interior de algún elemento de $\mathcal{A}_S(X)$, por ende existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ arcos de X, ajenos por pares, tal que $(\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i) \cap R(X) = \emptyset$ y $a_i \in \text{int}_X(\alpha_i)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Sea $f : \alpha_1 \times ... \times \alpha_n \to \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle_n$ definida por $f(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$. Es claro que f es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle_n$ es una n-celda. Además, $\langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle_n$ es una vecindad de A en $F_n(X)$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$.

Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por [5, Teorema 3.8] se cumple que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Como $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ por el Teorema 4.2, se cumple que existe una gráfica finita T en X tal que $A \subset \text{int}_X(T)$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$, por lo tanto $A \in F_{n-1}(T)$. Por hipótesis, existe V una vecindad de A en $F_n(X)$ tal que V es una n-celda. Así, $V \cap F_n(T)$ es una vecindad de A en $F_n(T)$ que puede ser encajada en $\mathbb{R}^n$, esto contradice el Teorema 4.3. Por ende $A \in F_n(X)$. $\square$

Sean X un continuo enrejado , $n \in \mathbb{N}$. Sea $l \in \{1, ..., n\}$ y $I_1, ..., I_l \in \mathcal{A}_S(X)$. Dados $i_1, ..., i_l \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{l} i_j = n$. Consideramos $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada elemento de $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ tiene exactamente i_j puntos en el interior de I_j, para cada $j \in \{1, ..., l\}$, es decir, $A \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ implica que $|A \cap \text{int}_X(I_j)^{i_j}| = i_j$ y por ende $|A| = n$. Este conjunto tiene la siguiente definición,

$$\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}) = \{A \in F_n(X) : |A \cap \text{int}_X(I_j)| = i_j \text{ para cada } j \in \{1, ..., l\}, \text{ donde } i_j \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{j=1}^{l} i_j = n\}.$$

Para $\mathcal{K}_X(I^n)$ solo escribiremos $\mathcal{K}_X(I)$. A continuación se presentan propiedades inmediatas de estos conjuntos.

Lema 4.5. *Sean X un continuo enrejado tal que $\mathcal{A}_S(X) \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \{1, ..., n\}$ y $I_1, ..., I_l \in \mathcal{A}_S(X)$.*

1. $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})) \subset \langle I_1, I_2, ..., I_l \rangle_n$,
2. $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I)) = \langle I \rangle_n$,
3. $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}) \subset \langle \mathrm{int}_X(I_1), \mathrm{int}_X(I_2), ..., \mathrm{int}_X(I_l) \rangle_n$.
4. $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\langle \mathrm{int}_X(I_1), \mathrm{int}_X(I_2), ..., \mathrm{int}_X(I_l) \rangle_n) \subset \langle I_1, I_2, ..., I_l \rangle_n$

Demostración.

1. Sea $A \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$. Existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ que es convergente a A. Supongamos que $A \notin \langle I_1, I_2, ..., I_l \rangle_n$, entonces pueden ocurrir dos cosas:

   (a) $A \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{l} I_j$. Entonces existe $x \in A$ tal que $x \notin \bigcup_{j=1}^{l} I_j$. Como I_j es cerrado para cada $j \in \{1, ..., l\}$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap I_j = \emptyset$ para cada $j \in \{1, ..., l\}$. Para $\frac{r}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_N, A) < \frac{r}{2}$. De esto que $A \subset N(A_N, \frac{r}{2})$, por lo que existe $a \in A_N$ tal que $x \in B(a, \frac{r}{2})$, esto implica que $a \in B(x, r)$. Por otro lado, existe $k \in \{1, ..., l\}$ tal que $a \in I_k$, luego $B(x, r) \cap I_k \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

   (b) Existe $k \in \{1, ..., l\}$ tal que $A \cap I_k = \emptyset$. Consideremos $r = \min\{d(a, x) : a \in A, x \in I_k\}$, se cumple que $r > 0$. Para $\frac{r}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_N, A) < \frac{r}{2}$, entonces $A_N \subset N(A, \frac{r}{2})$. Podemos tomar $a_k \in A_N \cap I_k$, por lo que debe existir $y \in A$ tal que $d(y, a_k) < \frac{r}{2} < r$. A su vez, por como se definió r se cumple que $d(y, a_k) \geq r$, esto implica que $r < r$ lo cual es una contradicción.

   En ambos casos se llega a una contradicción, por lo tanto $A \in \langle I_1, I_2, ..., I_l \rangle_n$

2. Solo resta probar la contención $\langle I \rangle_n \subset \mathrm{cl}_{F(X)}(\mathcal{K}_X(I))$. Sea $A \in \langle I \rangle_n$, $r > 0$ y supongamos que $|A| = m > 1$. Tomemos $r' = \min\{d(a_i, a_j) : i, j \in \{1, ..., m\}$ con $i \neq j\}$, consideremos $R = \min\{\frac{r'}{2}, r\}$. Sea $i \in \{1, ..., m\}$,

por el Lema 3.2 $B(a_i, R) \cap \mathrm{int}_X(I) \neq \emptyset$. Para $i \in \{1, ..., m-1\}$ tomemos $a_i^{'} \in B(a_i, R) \cap \mathrm{int}_X(I)$, es claro que $a_i^{'} \neq a_j^{'}$ cuando $i \neq j$. Podemos tomar $n - m + 1$ elementos distintos tales que $\{a_m^{'}, a_{m+1}^{'}, ..., a_n^{'}\} \subset B(a_m, R) \cap \mathrm{int}_X(I)$. Definamos $A^{'} = \{a_1^{'}, ..., a_n^{'}\}$. Note que $|A^{'} \cap \mathrm{int}_X(I)| = n$, es decir, $A^{'} \in \mathcal{K}_X(I)$. Además, $H(A^{'}, A) < R$, por lo tanto $A^{'} \in \mathcal{K}_X(I) \cap B_H(A, R)$, esto implica que $B(A, r) \cap \mathcal{K}_X(I) \neq \emptyset$, por lo tanto $A \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I))$. Si $m = 1$ basta con aplicar la segunda parte de la prueba anterior. Esto completa la prueba.

3. Se obtiene de la definición de $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$.

4. Se obtiene del hecho de que $\langle \mathrm{int}_X(I_1), \mathrm{int}_X(I_2), ..., \mathrm{int}_X(I_l)\rangle_n \subset \langle I_1, I_2, ..., I_l\rangle_n$.

$\square$

Teorema 4.6. *[9, Lema 3.1] Sean X un continuo localmente conexo y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces*

1. $\mathrm{int}_X(J) \cap R(X) = \emptyset$ *y*

2. si $\mathrm{int}_X(J) \cap K \neq \emptyset$, *entonces $J = K$.*

Teorema 4.7. *Sean X un continuo enrejado, $n \in \mathbb{N}$, $l, r \in \{1, ..., n\}$ y $I_1, ..., I_l, J_1, ..., J_r \in \mathcal{A}_S(X)$, entonces las siguientes propiedades se cumplen :*

a) $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ *es arco conexo.*

b) $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ *es abierto en $F_n(X)$.*

c) Si $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \ldots, I_l^{i_l}) \cap \mathcal{K}_X(J_1^{j_1}, \ldots, J_r^{j_r}) \neq \emptyset$, *entonces* $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \ldots, I_l^{i_l}) = \mathcal{K}_X(J_1^{j_1}, \ldots, J_r^{j_r})$.

Demostración. a) Sean $A, B \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$. Para cada $j \in \{1, ..., l\}$, sean $A_j = A \cap \mathrm{int}_X(I_j)$ and $B_j = B \cap \mathrm{int}_X(I_j)$. Tomemos $j \in \{1, ..., l\}$ de forma arbitraria, tenemos que $A_j, B_j \in \langle \mathrm{int}_X(I_j)\rangle_n$ y $|A_j| = |B_j| = i_j$ entonces, existe una función continua $\alpha_j : [0, 1] \to \langle \mathrm{int}_X(I_j)\rangle_n$ que cumple lo siguiente: $\alpha_j(0) = A_j$, $\alpha_j(1) = B_j$ y $|\alpha_j(t)| = i_j$ para toda $t \in [0, 1]$.

Consiedremos la función $\alpha\colon [0, 1] \to \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \ldots, I_l^{i_l})$ definida por $\alpha(t) = \alpha_1(t) \cup \cdots \cup \alpha_l(t)$, esta función esta bien definida, es continua y $\alpha(0) = A$

y $\alpha(1) = B$. Como $[0,1]$ es localmente conexo y α es continua, por el Lema ,se cumple que $\alpha([0,1])$ es localmente conexo. Por lo que $\alpha([0,1])$ es arco conexo, es decir, existe un arco contenido en $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},...,I_l^{i_l})$ que une A con B. Por ende $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},...,I_l^{i_l})$ es arco conexo.

b) Sea $A \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l})$, supongamos que $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Sean $J_1,\ldots,J_n$ de X, ajenos dos a dos, tales que $J_i \cap R(X) = \emptyset$ y $a_k \in \mathrm{int}_X(J_k)$, para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Luego, $A \in \langle \mathrm{int}_X(J_1),\ldots,\mathrm{int}_X(J_n)\rangle_n$. Note que, si $B \in \langle \mathrm{int}_X(J_1),\ldots,\mathrm{int}_X(J_n)\rangle_n - \{A\}$, entonces $|B| = n$. Dado $j \in \{1,\ldots,l\}$, como $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = i_j$, entonces I_j contiene i_j de los arcos $J_1,\ldots,J_n$. Podemos suponer que I_j contiene los arcos $J_1,\ldots,J_{i_j}$. Así, $B \cap \mathrm{int}_X(J_1) \subset \mathrm{int}_X(I_j),\ldots,B \cap \mathrm{int}_X(J_{i_j}) \subset \mathrm{int}_X(I_j)$. Como los arcos $J_1,\ldots,J_n$ son ajenos por pares, tenemos que $|B \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = i_j$. Esto implica que $B \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l})$. Así, tenemos $\langle \mathrm{int}_X(J_1),\ldots,\mathrm{int}_X(J_n)\rangle \subset \mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_m^{i_l})$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_m^{i_l})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

c) Sea $A \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l}) \cap \mathcal{K}_X(J_1^{j_1},\ldots,J_r^{j_r})$. Sean $s \in \{1,...,l\}$, como $\mathrm{int}_X(I_s) \cap A \neq \emptyset$, existe $a \in A$ tal que $a \in \mathrm{int}_X(I_s)$. Por otro lado debe existir $t \in \{1,...,r\}$ tal que $a \in \mathrm{int}_X(J_t)$, esto implica que $\mathrm{int}_X(I_s) \cap \mathrm{int}_X(J_t) \neq \emptyset$, luego por el Teorema 4.6 se cumple que $I_s = J_t$. De este modo $\{I_1,...,I_l\} \subset \{J_1,...,J_r\}$, con un proceso análogo se cumple que $\{J_1,...,J_r\} \subset \{I_1,...,I_l\}$. Esto implica que $l = r$. Podemos escribir que $\mathcal{K}_X(J_1^{j_1},\ldots,J_l^{j_r}) = \mathcal{K}_X(I_1^{j_1},\ldots,I_l^{j_l})$. Dado $s \in \{1,...,l\}$ como $|A \cap \mathrm{int}_X(I_s)| = i_s$ y $|A \cap \mathrm{int}_X(I_s)| = j_s$ se tiene que $i_s = j_s$, por lo tanto $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l}) = \mathcal{K}_X(J_1^{j_1},\ldots,J_r^{j_r})$.

□

Teorema 4.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es un continuo enrejado entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l}).$$

Demostración. Es claro que $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l}) \subset \mathcal{N}_n(X)$ y por el teorema 4.4 se cumple que $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1},\ldots,I_l^{i_l}) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$ entonces $A \in \mathcal{N}_n(X)$, es decir, $A \cap (R(X) \cup \mathcal{P}(X)) = \emptyset$, esto implica que $A \subset \mathcal{G}(X) \cap (O(X) \cup E(X))$, por ende existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \langle \mathrm{int}_X(I_1),...,\mathrm{int}_X(I_l)\rangle_n$ con $I_j \in \mathcal{A}_S(X)$ para cada $j \in \{1,...,l\}$. Definiendo $i_j \in \mathbb{N}$ tal que $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = i_j$, se cumple que $n = |A| = \sum_{j=1}^{l} |A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = \sum_{j=1}^{l} i_j$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$. Esto implica que $\mathcal{E}_n(X)$ es igual a la unión de todos los conjuntos del tipo $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$. Sea $C \subset \mathcal{E}_n(X)$ una componente conexa. Supongamos que $C \subset \cup\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una colección de elementos de la forma $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$, Veamos que $|\mathcal{A}| = 1$. Supongamos que $|\mathcal{A}| > 1$, tomemos $A \in \mathcal{A}$, entonces se cumple que A y $\cup(\mathcal{A} - \{A\})$ son abiertos en $F_n(X)$, ajenos y no vacíos tales que, $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap [\cup(\mathcal{A} - \{A\})] \neq \emptyset$ y $C \subset A \cup [\cup(\mathcal{A} - \{A\})]$, lo cua es una contradicción. Por lo tanto C esta contenido en solo un subconjunto de la forma $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$. Luego por el teorema 4.7 se tiene que $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$ es conexo y como C es una componente se cumple que $C = \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \dots, I_l^{i_l})$. $\square$

Teorema 4.9. *Sean X un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Dados $I_1, ..., I_l \in \mathcal{A}_S(X)$ con $l \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $A \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$, entonces $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| \leq i_j$, para cada $j \in \{1, ..., l\}$.*

2. *La única componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$ es $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$.*

Demostración. 1. Sea $A \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$ y supongamos que existe $j \in \{1, ..., l\}$ tal que $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| > i_j$. Digamos que $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = n_j$ y $A \cap \mathrm{int}_X(I_j) = \{a_1, ..., a_{n_j}\}$. Existe $r > 0$ tal que $B(a_k, r) \subset I_j$ y $B(a_s, r) \cap B(a_t, r) = \emptyset$ para $k, s, t \in \{1, ..., n_j\}$ con $s \neq t$.

Para $\frac{r}{2}$ existe $A_M \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ tal que $H(A_M, A) < \frac{r}{2}$. A su vez, $|A_M \cap \mathrm{int}_X(I_j)| = i_j$. Como $A \subset N(A_N, \frac{r}{2})$ se cumple que $\{a_1, ..., a_{n_j}\} \subset N(A_M, \frac{r}{2}) \cap \mathrm{int}_X(I_j)$.

Tomemos $s, t \in \{1, ..., n_j\}$ tales que $s \neq t$, existen $a_s', a_t' \in A_M \cap \mathrm{int}_X(I_j)$ tales que $a_s \in B(a_s', \frac{r}{2})$ y $a_t \in B(a_t', \frac{r}{2})$. Si $a_s' = a_t'$, esto implica que $d(a_s, a_t) < r$, es decir, $B(a_s, r) \cap B(a_t, r) \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Por ende, $a_s' \neq a_t'$, esto siempre que $s \neq t$, por dende $|A_M \cap \mathrm{int}_X(I_j)| \geq n_j > i_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|A \cap \mathrm{int}_X(I_j)| \leq i_j$, para cada $j \in \{1, ..., l\}$.

2. Sea $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$ una componente de $\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que existe $\mathcal{K}_X(J_1^{j_1}, ..., J_k^{j_k})$ otra componente de $\mathcal{E}_n(X)$, distinta, de tal manera

que está contenida en $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$. Por ende se cumple que $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, \ldots, I_l^{i_l}) \cap \mathcal{K}_X(J_1^{j_1}, \ldots, J_k^{j_k}) = \emptyset$.

Tomemos $A \in \mathcal{K}_X(J_1^{j_1}, \ldots, J_k^{j_k}) \subset \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$. Sea $a \in A$, existe $r' \in \{1, ..., k\}$ tal que $a \in \mathrm{int}_X(J_{r'})$. Por otro lado, por 1) del Lema 4.5, existe $r \in \{1, ..., l\}$ tal que $a \in I_r$. Esto implica que $I_r \cap \mathrm{int}_X(J_{r'}) \neq \emptyset$, luego por el Teorema 4.6 inciso c) se cumple que $I_r = J_{r'}$. Esto implica que $A \subset \bigcup_{h=1}^{l} \mathrm{int}_X(I_h)$, así $|A| = \sum_{h=1}^{l} |A \cap \mathrm{int}_X(I_h)|$. Por el inciso 1) del Teorema se cumple que $|A \cap \mathrm{int}_X(I_h)| \leq i_h$ para toda $h \in \{1, ..., l\}$. De esta manera $|A| = \sum_{h=1}^{l} |A \cap \mathrm{int}_X(I_h)| \leq \sum_{h=1}^{l} i_h = n$, como $|A| = n$ se tiene que $|A \cap \mathrm{int}_X(I_h)| = i_h$ para todo $h \in \{1, ..., l\}$. Por lo tanto $A \in \mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$, lo cual es una contradicció. Así, La única componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l}))$ es $\mathcal{K}_X(I_1^{i_1}, ..., I_l^{i_l})$.

□

Los resultados que se presentan a continuación son necesarios para probar que la clase de los continuos localmente conexos casi enrejados es cerrada.

Teorema 4.10. *[11, Lema 2.5] Sean X, Y continuos localmente conexos casi enrejados y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$.*

(a) Entonces $q_X^*(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(X)$.

(b) Si $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(q_X^*(A)) \neq F_Y$, para cada $A \in \mathcal{E}_n(X)$.

Lema 4.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X y Y son continuos casi enrejados localmente conexos. Si existe $h : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo, entonces $\mathcal{E}_n(X) = {q_X^*}^{-1}(h^{-1}(q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y))))$.*

Demostración. Por el Teorema 4.10 $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$ y $q_X^*(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(X)$, como $\mathcal{SE}_n(X)$ es una propiedad topológica y h es un homeomorfismo $h(\mathcal{SE}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(Y)$. De esto que $\mathcal{SE}_n(X) = h^{-1}(\mathcal{SE}_n(Y))$ y por ende $\mathcal{SE}_n(X) = h^{-1}(q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)))$. Por otro lado, $\mathcal{E}_n(X) = {q_X^*}^{-1}(\mathcal{SE}_n(X))$, así se cumple la igualdas deseada. □

Del teorema anterior podemos concluir que componentes de $\mathcal{E}_n(Y)$ van a componentes de $\mathcal{E}_n(X)$, cuando existe un homeomorfismo entre $SF_n(X)$ y $SF_n(Y)$.

Lema 4.12. *Sean X un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$ si y solo si $\mathcal{SE}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 4.4, se cumple que $\mathcal{E}_n(X) \cap F_1(X) = \emptyset$. Por lo que $q_X^*(\mathcal{E}_n(X)) = q_X(\mathcal{E}_n(X))$, luego por el Teorema 4.10 se cumple que $q_X(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(X)$. Dado que q_X es una función continua, se cumple que $q_X(\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))) \subset \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{E}_n(X))) = \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X))$. Por hipótesis, $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X)) = F_n(X)$, entonces $q_X(\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))) = q_X(F_n(X)) = SF_n(X)$. Por ende, $SF_n(X) \subset \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X))$, esto implica que $SF_n(X) = \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X))$, es decir, $\mathcal{SE}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$.

Nuevamente, como $\mathcal{E}_n(X) \cap F_1(X) = \emptyset$, por el Teorema 4.10 se cumple que $\mathcal{SE}_n(X) = \mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\}$, entonces como $(q_X^*)^{-1}$ es continua se cumple que $(q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)-\{F_X\}}(\mathcal{SE}_n(X))) \subset \mathrm{cl}_{F_n(X)-F_1(X)}((q_X^*)^{-1}(\mathcal{SE}_n(X))) = \mathrm{cl}_{F_n(X)-F_1(X)}(\mathcal{E}_n(X)) = \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))$. Por otro lado, se cumple que $(q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)-\{F_X\}}(\mathcal{SE}_n(X))) = (q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)-\{F_X\}}(\mathcal{SE}_n(X)))$, y además $(q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)-\{F_X\}}(\mathcal{SE}_n(X))) = (q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\})) = (q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X)))$. Por hipótesis se cumple que $\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(\mathcal{SE}_n(X)) = SF_n(X)$. Por ende,

$$(q_X^*)^{-1}(\mathrm{cl}_{SF_n(X)-\{F_X\}}(\mathcal{SE}_n(X))) = (q_X^*)^{-1}(SF_n(X)) = F_n(X).$$

Esto implica que, $F_n(X) \subset \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X))$. Luego, $F_n(X) = \mathrm{cl}_{F_n(X)}\,\mathcal{S}_n(X))$, es decir, $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$. □

Teorema 4.13. *[5, Teorema 3.1] Sea X un continuo localmente conexo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es casi enrejado,*
2. *para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$,*
3. *cada subconjunto abierto, no vacío, de X contiene un arco libre de X.*

Teorema 4.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 4$. Si X y Y son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si Y es un continuo localmente conexo casi enrejado.*

Demostración. Sean $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo y X un continuo localmente conexo casi enrejado. Por [2, Teorema 5.2] se cumple que $SF_n(X)$ es un continuo localmente conexo. Como h es un homeomorfismo, $SF_n(Y)$, es un continuo localmente conexo. Nuevamente por [2, Teorema 5.2], Y es continuo localmente conexo. Como X es un continuo localmente conexo casi enrejado, por el Teorema 4.13, $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$. Por el Lema 4.12, $\mathcal{SE}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$. Como h es un homeomorfismo, $h\left(\mathcal{SE}_n(X)\right) = \mathcal{SE}_n(Y)$. Esto implica que, $\mathcal{SE}_n(Y)$ es denso en $SF_n(Y)$. Por el Lema 4.12, $\mathcal{E}_n(Y)$ es denso en $F_n(Y)$. Por el Teorema 4.13, Y es un continuo localmente conexo casi enrejado. $\square$

5 Sobre la unicidad

Esta sección esta dedicada a presentar algunos resultados referentes a la unicidad del $n-$ésimo producto simétrico suspensión para un continuo enrejado X.

Teorema 5.1. *Sea X un continuo enrejado. Si $\mathcal{P}(X) = 0$ entonces, X es una gráfica finita.*

Demostración. Como $X \in C(X)$ y $X \cap \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X) = \emptyset$ por el Teorema 4.2, se tienen que existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $X \subset \operatorname{int}_X(D)$, como $D \subset X$ y $X \subset \operatorname{int}_X(D) \subset D$ entonces $X = D$. Por ende X es una gráfica finita. $\square$

Teorema 5.2. *Sea X un continuo enrejado tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $\mid \cap\mathcal{A}_S(X) \mid = 2$, entonces X es una gráfica finita.*

Demostración. Por el Teorema 5.1, basta probar que $\mathcal{P}(X) = \emptyset$. Sean $p, q \in X$ tal que $\{p, q\} = \cap\mathcal{A}_S(X)$, note que p, q pertenecen a cada elemento de $\mathcal{A}_S(X)$. Supongamos que $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Tomemos $a \in \mathcal{P}(X)$, entonces por el Teorema 3.3 existe una sucesión $\{I_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_S(X)$ que converge a $\{a\}$ (la convergencia es en $C(X)$) y $I_i \neq I_j$ cuando $i \neq j$. Tomemos $r = d(p, q) > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(I_{i_0}, \{a\}) < \frac{r}{2}$, como $p, q \in I_{i_0}$ se cumple que $p, q \in B(a, \frac{r}{2})$, esto implica que $d(p, q) < r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{P}(X) = \emptyset$ y así X es una gráfica finita. $\square$

Lema 5.3. *Si X es un continuo enrejado, tal que $R(X) \neq \emptyset$, y $|\mathcal{A}_S(X)| \geq 2$, entonces $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \leq 2$.*

Demostración. Supongamos que $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| > 2$. Podemos tomar $I, J \in \mathcal{A}_S(X)$ tales que $I \neq J$, también tomemos $\{a, b, c\} \subset I \cap J$. Tenemos dos casos:

1. Si I es un arco libre maximal, existen $x, y \in I$ tal que $I - \{x, y\}$ es abierto, entonces $\{a, b, c\} \cap \mathrm{int}_X(I) \neq \emptyset$.

2. Si I es un ciclo, existe $x \in I$ tal que $I - \{x\}$ es abierto, entonces $\{a, b, c\} \cap \mathrm{int}_X(I) \neq \emptyset$.

En cuelquier caso $\{a, b, c\} \cap \mathrm{int}_X(I) \neq \emptyset$. Luego, $\{a, b, c\} \cap \mathrm{int}_X(I) \subset \mathrm{int}_X(I) \cap (I \cap J) = \mathrm{int}_X(I) \cap J$, entonces $\mathrm{int}_X(I) \cap J \neq \emptyset$ y por el Teorema 4.6 se cumple que $I = J$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \leq 2$.

□

Teorema 5.4. *[11, Teorema 3.8] Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.*

Por los teoremas 5.2 y 5.4, el estudio de la unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo enrejado, se debe enfocar al caso donde $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| < 2$.

6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] K. Borsuk, S. Ulam, On symmetric products of topological space, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 37 (1931) 875–882.

[2] F. Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604.

[3] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

[4] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013) 1583–1624.

[5] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.

[6] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product,* Topology Appl. 209 (2016), 1–13.

[7] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).

[8] K. Kuratowski, Topology, vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[9] A. Libreros, F. Macías, D. Herrera, *On the uniqueness of n-fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology Appl., 312 (2022), 108053, 22 pp.

[10] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125-138.

[11] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, Houston J. Math. 48 (1) (2022), 205–225.

[12] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[13] Sam B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1) (1979), 125–132.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 6

Propiedades de los espacios $\mathcal{E}_n(X)$ y $\mathcal{SE}_n(X)$, para $n \in \{2,3\}$ y un continuo X

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Leonardo Ramírez Aparicio
FCFM, BUAP

Resumen

Sean $n \in \{2,3\}$ y un continuo X. En este capítulo demostramos algunas de las propiedades de los subespacios $\mathcal{E}_n(X)$ y $\mathcal{SE}_n(X)$, de $F_n(X)$ y $SF_n(X)$, respectivamente. Por otro lado, dado un subconjunto abierto W y no vacío de X, para cada subconjunto abierto U de X, consideremos $c(U,W,X)$ como el número de componentes de $U \cap W$ si este número es finito, en otro caso $c(U,W,X) = \infty$. Para cada $x \in \mathrm{cl}_X(W)$, sea $v(x,W,X) = \min(\{m \in \mathbb{N}\colon$ existe una base de vecindades $\mathcal{B}$ de x en X tal que $c(U,W,X) = m$ para cada $U \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\})$. En la sección 5, estudiamos algunas propiedades de $v(x,W,X)$, cuando $X = F_n(Y)$ o $X = SF_n(Y)$, para algún continuo Y. En la última sección veremos que las gráficas finitas tienen único n-ésimo producto simétrico suspensión.

1 Preliminares

Como siempre, lo primero que hay que saber, es que un **continuo** X es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Un subconjunto Y de X es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto. Dado un continuo X, mientras no se diga lo contrario, denotamos por d a la métrica de X. Además, si $p \in X$, $A \subset X$ y $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ, será denotada por $B_d(\epsilon, p)$. La ϵ-**nube** de A (o la **nube con centro en** A **y radio** $\epsilon > 0$), es $N_d(\epsilon, A) = \{x \in X\colon$ existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \epsilon\}$. El interior de A y la frontera de A en

X lo denotamos como $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{Fr}_X(A)$, respectivamente. El interior de A en X también será denotado como A°. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ denota el espacio euclideano n-dimensional. El conjunto de los números naturales es denotado por $\mathbb{N}$, así como el conjunto vacío por $\emptyset$. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A.

Para un continuo X, consideraremos el siguiente hiperespacio de X:

$$2^X = \{A \subset X \ : \ A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado de } X\}.$$

La familia 2^X se le conoce como el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** de X. A este hiperespacio se le dota de la topología de Vietoris:

Definición 1.1. *Para un continuo X, la topología de Vietoris para 2^X es la topología más pequeña, τ_V tal que 2^X tiene las siguientes propiedades: (1) $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$, para todo abierto U de X y (2) $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in \tau_V$, para todo cerrado B en X.*

Por otro lado, si $U_1, \ldots, U_m$ son abiertos de X, con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \ \textit{y} \ A \cap U_i \neq \emptyset \ \textit{para cada} \ i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

es un **básico** para la topología de Vietoris (véase [11, Teorema 1.2]).

Como subespacio de 2^X de un continuo X, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos a

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \ : \ A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\}.$$

que denota el n-ésimo producto simétrico de X. Por lo tanto, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X. Se puede ver que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

Al hiperespacio 2^X se le considera también dotado con la métrica de Hausdorff, inducida por la métrica d de X, con la cual resulta ser un espacio métrico, ver [11, Teorema 2.2]. Esta métrica se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0\colon A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$. Como $F_n(X)$ es un subespacio de 2^X, la restricción de la métrica de Hausdorff a $F_n(X)$ lo convierte en un espacio métrico.

Definición 1.2. *Dados un continuo X, $n, m \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$ y $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset X$, el* ***vietórico de*** *$U_1, U_2, \ldots, U_m$* ***en*** *$F_n(X)$ está dado de la siguiente manera:*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_n = \{A \in F_n(X) \;:\; A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Definición 1.3. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología euclideana. Sea $h\colon [0, 1] \to \alpha$ un homeomorfismo, decimos que $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos del arco α.*

Definición 1.4. *Sea X un continuo. Un* ***arco libre*** *de X es un arco α con puntos extremos a y b tal que $\alpha \setminus \{a, b\}$ es un abierto de X.*

Definición 1.5. *Sea X un continuo, un* ***arco libre maximal*** *J de X es un arco libre de X, el cual es maximal con respecto a la inclusión, es decir, para cada arco libre K de X tal que $J \subset K$, se cumple que $J = K$. Una* ***circunferencia libre*** *S de X, es una curva cerrada simple de X para la cual existe $p \in S$ tal que $S \setminus \{p\}$ es un abierto de X.*

Definición 1.6. *Una* ***gráfica finita*** *es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.*

Dado un continuo X, denotamos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_S(X) &= \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X \text{ o} \\ &\qquad J \text{ es una circunferencia libre de } X\}; \\ \mathcal{G}(X) &= \{x \in X \colon \text{ existe } M \subset X \text{ tal que} \\ &\qquad M \text{ es una gráfica finita y } x \in \operatorname{int}_X(M)\}; \\ \mathcal{P}(X) &= X \setminus \mathcal{G}(X). \end{aligned}$$

Lema 1.7. [12, Lema 3.1] *Sean un continuo localmente conexo X y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) $\operatorname{int}_X(J) \cap R(X) = \emptyset$;

(b) $\operatorname{Fr}_X(K) \subset R(X) \cup \mathcal{P}(X)$;

(c) *si* $\operatorname{int}_X(J) \cap K \neq \emptyset$, *entonces* $J = K$.

Definición 1.8. *Un n-**odo simple** es un continuo X que es la unión de n arcos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, con $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, y p es un punto extremo de cada uno de los arcos α_i.*

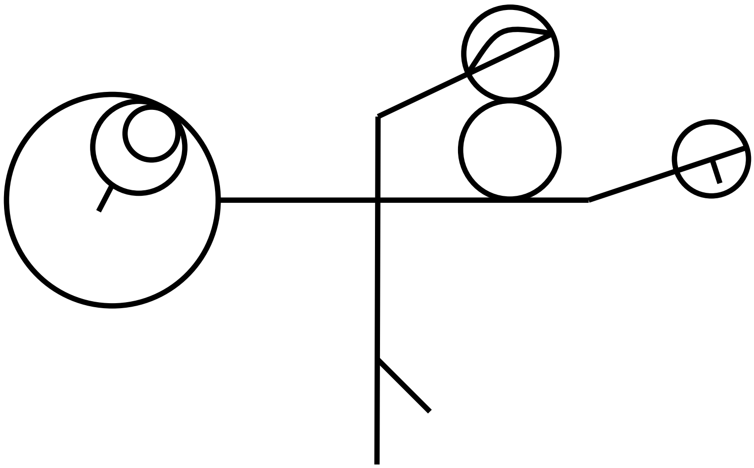


Figura 1: Una gráfica finita.

2 El n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo

Enlistamos las definiciones de función cociente, espacio de descomposición y partición semicontinua superiormente para definir formalmente, el n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo X.

Teorema 2.1. [4, Teorema 4.20] *Si X es un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g\colon X \to Y$ una función suprayectiva, entonces*

$$\tau_g = \{U \subset Y : g^{-1}(U) \text{ es un abierto de } X\}$$

es una topología para Y.

La topología τ_g es la **topología cociente** sobre Y inducida por la función g.

Definición 2.2. *Un espacio topológico Y es un* **espacio cociente** *de un espacio topológico X si existe una función suprayectiva $g\colon X \to Y$ tal que τ_g coincide con la topología de Y. En tal caso, la función g se llama* **función cociente**

Teorema 2.3. [4, 3.1] *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es una partición de X, entonces*

$$T_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \colon \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \text{ es un conjunto abierto de } X\}$$

es una topología para $\mathcal{P}$

Definición 2.4. *Sean un espacio topológico X y $\mathcal{P}$ una partición de X. El espacio topológico $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ se le conoce como un* **espacio de descomposición** *de X y la topología $T_{\mathcal{P}}$ como* **topología de descomposición**

Proposición 2.5. [4, Proposición 4.30] *Sean un espacio topólogico X, $\mathcal{P}$ una partición de X y $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de X, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio cociente de X*

Definición 2.6. *Sea un espacio topológico X. Una partición $\mathcal{P}$ de X es* **semicontinua superiormente** *si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada abierto U de X con $P \subset U$, existe un abierto V de X con $P \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$*

Teorema 2.7. [14, Teorema 3.10] *Si $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente de un continuo, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo*

Teorema 2.8. [14, 3.14] *Si X es un espacio topológico, A un subconjunto cerrado no vacío de X y $\mathcal{D} = \{\{x\} \colon x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$, entonces $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X*

Al espacio de descomposición $(\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}})$ del Teorema 2.8, se le denota por X/A.

Por el Teorema 2.7 y el Teorema 2.8, se obtiene inmediatamente el teorema siguiente.

Teorema 2.9. *Si X es un continuo y A un subconjunto cerrado de X, entonces el espacio cociente X/A es un continuo*

Con el Teorema 2.9, podemos definir el n-ésimo producto simétrico suspensión.

Definición 2.10. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. El* **$n$-ésimo producto simétrico suspensión** *del continuo X, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, con la topología cociente.*

Como $F_1(X)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $F_n(X)$, por el Teorema 2.9, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.11. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo.*

El estudio del **n-ésimo producto simétrico suspensión**, se ha abordado en [1], [2], [3], [8], [13].

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, la respectiva función cociente de $SF_n(X)$ se denota por $q_X \colon F_n(X) \to SF_n(X)$ y está dada de la siguiente manera:

$$q_X(A) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } A \in F_n(X) \setminus F_1(X), \\ F_X & \text{si } A \in F_1(X). \end{cases}$$

Cuando consideramos el espacio cociente $SF_n(X)$, al elemento $F_1(X)$ de $SF_n(X)$ lo denotamos por F_X. Así, acordamos que $q_X\left(F_1(X)\right) = \{F_X\}$. De este modo:

$$SF_n(X) = \{\{A\} \colon A \in F_n(X) \setminus F_1(X)\} \cup \{F_X\}.$$

Observación 2.12. *Como la función $q_X \restriction_{F_n(X) \setminus F_1(X)} \colon F_n(X) \setminus F_1(X) \to SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es biyectiva, continua y abierta, es un homeomorfismo; la denotamos por q_X^*.*

3 La clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$

En esta sección probaremos cómo son las componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$, cuando $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y X es una gráfica finita con algún punto de ramificación. Además, demostraremos que la clase de las gráficas finitas cuyo conjunto de puntos de ramificación es distinto del vacío, es SF_n-cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sean:

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{SE}_n(X) = \{A \in SF_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

Teorema 3.1. [15, Teorema 4.12] *Sean un espacio métrico X, un abierto U de X y una n-celda V, con $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in U \cap \operatorname{int}_X(V)$, entonces existe una n-celda J de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \operatorname{int}_X(V)$.*

Lema 3.2. [8, Lema 3.1] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es un triodo simple, entonces $SF_n(X)$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 3.3. *Sean X un continuo, A un subconjunto no vacío de X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor o igual** que β en X, denotado por $\operatorname{ord}(A,X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|\operatorname{Bd}_X(U)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que $\operatorname{ord}(x,X) \leq \beta$ en lugar de escribir $\operatorname{ord}(\{x\},X) \leq \beta$. Se dice también que A es de **orden** β en X, denotado por $\operatorname{ord}(A,X) = \beta$, si $\operatorname{ord}(A,X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\operatorname{ord}(A,X) \nleq \alpha$.*

Definición 3.4. *Sea X un continuo. Un punto x en X es un punto de **ramificación** de X si, $\operatorname{ord}(x,X) > 2$.*

Si X es un continuo, denotaremos por:

$$R(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto de ramificación }\},$$

al conjunto de puntos de ramificación de X.

Lema 3.5. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces $F_X \notin \mathcal{SE}_n(X)$. Es decir, $\mathcal{SE}_n(X) \subset SF_n(X) \setminus \{F_X\}$.*

Demostración. Supongamos que $F_X \in \mathcal{SE}_n(X)$. Así, existe una vecindad $\mathcal{M}$ de F_X en $SF_n(X)$ la cual es una n-celda. Sea $p \in R(X)$. Notemos que $\{p\} \in \operatorname{int}_{F_n(X)}(q_X^{-1}(\mathcal{M}))$. Sea $r > 0$ tal que $B_H(\{p\},r) \subset q_X^{-1}(\mathcal{M})$ y sea C la componente de $B(p,r)$ tal que $p \in C$. Entonces, C es un abierto de X, y por ende, C es arco conexo. Como $p \in R(X)$, existe un triodo simple T tal que $p \in T \subset C$. Entonces, $F_n(T) \subset B_H(\{p\},r) \subset q_X^{-1}(\mathcal{M})$. Por lo tanto, $q_X(F_n(T)) \subset \mathcal{M}$. Por el Lema 3.2, esto es una contradicción. $\square$

Lema 3.6. [8, Lema 3.4] *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces $q_X^* (\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)) = \mathcal{SE}_n(X)$.*

Lema 3.7. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y un continuo X, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una n-celda $\mathcal{M}$ en $F_n(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset F_n(X)$. Luego, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U} \subset \operatorname{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Sea $A_1 \in \mathcal{U} \setminus \{A\}$, entonces $A_1 \in \mathcal{U} \subset \operatorname{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una n-celda, entonces $A_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. $\square$

Similarmente, como en el Lema 3.7, se prueba el resultado siguiente.

Lema 3.8. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y un continuo X, entonces $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$.*

Lema 3.9. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un continuo X, entonces $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Sean $A \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, con $m \leq n$. Si $|A| = n$, entonces $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Supongamos que $|A| < n$. Como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Además, $B_X(a_1, \epsilon)$ es un conjunto infinito, entonces existen $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(a_1, \epsilon) \setminus A$. Sea $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$, entonces $B \in B_{F_n(X)}(A, \epsilon) \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Luego, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Esto concluye la prueba. $\square$

Lema 3.10. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un continuo X, entonces $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es denso en $SF_n(X)$.*

Demostración. Sean $\Lambda \in SF_n(X)$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ tal que $\Lambda \in \mathcal{U}$. Si $\Lambda \notin \{F_X\}$, entonces $\mathcal{U} \cap (SF_n(X) \setminus \{F_X\}) \neq \emptyset$. Si $\Lambda = F_X$, entonces $F_X \in \mathcal{U} \subset SF_n(X)$. Como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ y $SF_n(X)$ es un continuo, existe $B \in \mathcal{U} \setminus \{F_X\} \subset \mathcal{U} \subset SF_n(X)$. Así, $B \in \mathcal{U} \cap (SF_n(X) \setminus \{F_X\})$. Esto concluye la prueba. $\square$

Lema 3.11. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un continuo X tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$, entonces $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Probemos primero que $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X) \setminus F_1(X)$. Sean $A \in F_n(X) \setminus F_1(X)$ y $\mathcal{U}$ un abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$ y $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es un abierto de $F_n(X)$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \neq \emptyset$. Observemos que $\mathcal{U} \cap (\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$, luego $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X) \setminus F_1(X)$. Sean $B \in F_n(X)$ y $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Por el Lema 3.9, $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$, entonces $\mathcal{V} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{V} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$ es un abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$, entonces $\mathcal{V} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X)) \cap (\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Esto implica que, $\mathcal{V} \cap (\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$. $\square$

De manera similar al Lema 3.11, se demuestra el siguiente lema.

Lema 3.12. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un continuo X tal que $S\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$, entonces $S\mathcal{E}_n(X) \setminus \{F_X\}$ es denso en $SF_n(X)$.*

Lema 3.13. *Si $n \in \{2,3\}$ y X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces las componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ son los conjuntos $q_X^*(\langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n \setminus F_1(X))$, donde $J, K, L \in \mathfrak{A}_S(X)$.*

Demostración. Por [5, Lema 3.1 y Lema 5.1], $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) \setminus R_n(X)$. Por [5, Lema 4.1], las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos $\langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n$, donde $J, K, L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Notemos que

$$\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X) = \bigcup \{ \langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n \setminus F_1(X) : J, K, L \in \mathfrak{A}_S(X) \}.$$

Además, los conjuntos $\langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n \setminus F_1(X)$ son abiertos conexos y ajenos por pares en $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$. Así, las componentes de $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n \setminus F_1(X)$, donde $J, K, L \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por el Lema 3.6 y la Observación 2.12, tenemos que las componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ son los conjuntos $q_X(\langle J^\circ, K^\circ, L^\circ \rangle_n \setminus F_1(X))$. $\square$

Observación 3.14. *Sea X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \{2,3\}$. Por* [5, Lema 4.1] *el número de componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ es igual que el número de componentes de $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$. Por el Lema 3.13, $\mathcal{E}_n(X)$ y $\mathcal{SE}_n(X)$ tiene el mismo número de componentes.*

Lema 3.15. *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \{2,3\}$, entonces X es una gráfica finita si y sólo si $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$ y el número de componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ es finito.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita. Por [5, Teorema 3.4], $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ con un número finito de componentes. Por [13, Lema 2.7] y la observación 3.14, tenemos que $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$ y el número de componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ es finito.

Ahora, supongamos que $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$ y el número de componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ es finito. Por el Lema 3.6, el número de componentes de $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es finito. Dada una componente $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n(X)$, $\mathcal{C}$ es un abierto de $F_n(X)$. Como $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$, $\mathcal{C} \cap (\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Luego, cada componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contiene una componente de $\mathcal{E}_n(X) \setminus F_1(X)$. De esto, el número de componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ es finito. Por [13, Lema 2.7], $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Usando [5, Teorema 3.4], concluimos que X es una gráfica finita. □

Lemma 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X y Y son continuos tales que $R(X) \neq \emptyset$, $R(Y) \neq \emptyset$, y $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es una gráfica finita si y sólo si Y es una gráfica finita.*

Demostración. Caso $n \in \{2, 3\}$. Supongamos que X es una gráfica finita. Por el Lema 3.15, $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$ y el numéro de componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ es finito. Sea $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Notemos que $h(\mathcal{SE}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(Y)$. Así, $\mathcal{SE}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $SF_n(Y)$ y el número de componentes de $\mathcal{SE}_n(Y)$ es finito. Por el Lema 3.15, Y es una gráfica finita.

Caso $n \geq 4$. Este caso está demostrado en [13, Teorema 3.1]. □

4 La clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados es SF_n-cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$

Introducimos la clase de los continuos casi enrejados, la definición de clase $\mathcal{H}$-cerrada, de arco libre y probamos que la clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados es SF_n-cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$.

Definición 4.1. *Dado un continuo X, denotemos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X. Una clase de continuos $\mathcal{C}$ es $\mathcal{H}$-cerrada si $X \in \mathcal{C}$ y Y es un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{C}$.*

Dado un continuo X, sea:

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \colon \text{ existe } M \subset X \text{ tal que } \\ M \text{ es una gráfica finita y } x \in \operatorname{int}_X(M)\}.$$

Definición 4.2. *Decimos que un continuo X es* ***casi enrejado*** *si y sólo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X.*

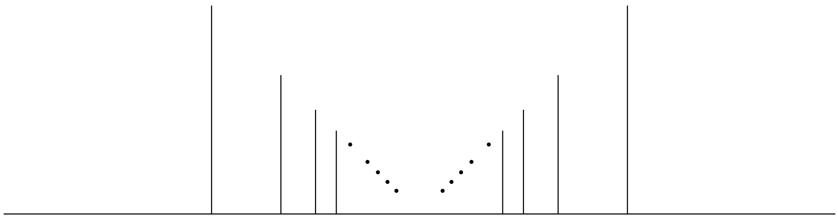


Figura 2: Un continuo casi enrejado

Lema 4.3. [13, Lema 2.7] *Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$ y un continuo X, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$ si y sólo si $\mathcal{SE}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$.*

Teorema 4.4. [9, Teorema 3.1] *Sea un continuo localmente conexo X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *X es casi enrejado;*

(b) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$;*

(c) *cada subconjunto abierto y no vacío de X contiene algún arco libre de X.*

Lema 4.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$ y X y Y continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$. Entonces X es un continuo localmente conexo y casi enrejado si y sólo si Y es un continuo localmente conexo y casi enrejado.*

Demostración. Sean $h \colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo y un continuo localmente conexo y casi enrejado X. Por [1, Teorema 5.2], $SF_n(X)$ es un continuo localmente conexo. Como h es un homeomorfismo, $SF_n(Y)$, es un continuo localmente conexo. Por [1, Teorema 5.2], Y es continuo localmente conexo. Como X es un continuo localmente conexo y casi enrejado, por el

Teorema 4.4, $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$. Por el Lema 4.3, $\mathcal{SE}_n(X)$ es denso en $SF_n(X)$. Como h es un homeomorfismo, $h\left(\mathcal{SE}_n(X)\right) = \mathcal{SE}_n(Y)$. Esto implica que, $\mathcal{SE}_n(Y)$ es denso en $SF_n(Y)$. Por el Lema 4.3, $\mathcal{E}_n(Y)$ es denso en $F_n(Y)$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Por el Teorema 4.4, Y es un continuo localmente conexo y casi enrejado.

Utilizando que h^{-1} es un homeomorfismo, se prueba de manera análoga la otra implicación. Esto termina la prueba del lema. $\square$

5 Valores de v_X y v_X^*

En esta sección calculamos algunos valores para ciertos elementos de $F_n(X)$ y $SF_n(X)$, cuando X es una gráfica finita y $n \in \{2, 3\}$. Además, si Y un continuo, veremos que existe un homeomorfismo $g\colon F_3(X) \setminus F_1(X) \to F_3(Y) \setminus F_1(Y)$, ver Teorema 5.6.

Sean un continuo X y un subconjunto abierto W y no vacío de X. Para cada subconjunto abierto U de X, consideremos $c\,(U, W, X)$ como el número de componentes de $U \cap W$ si este número es finito, en otro caso $c\,(U, W), X) = \infty$.

Para cada $x \in \mathrm{cl}_X\,(W)$, sea

$$\begin{aligned} v\,(x, W, X) = \min(\{m \in \mathbb{N}\colon\ & \text{existe una base de vecindades } \mathcal{B} \text{ de } x \text{ en } X \\ & \text{tal que } c\,(U, W, X) = m \text{ para cada } U \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\}). \end{aligned}$$

Supongamos que X es un continuo localmente conexo y casi enrejado. Por el Lema 3.7 y el Teorema 4.4, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $A \in F_n(X)$ y $B \in SF_n(X)$, tiene sentido hablar de $v_X(A) = v\,(A, \mathcal{E}_n(X), F_n(X))$ y $v_X^*(B) = v\,(B, \mathcal{SE}_n(X), SF_n(X))$.

Lema 5.1. [8, Lema 3.10] *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $A \in F_n(X) \setminus F_1(X)$, entonces $v_X(A) = v_X^*\,(q_X(A))$.*

Lema 5.2. *Sean una gráfica X, $x, y, z, p, q \in X$ tales que* $\mathrm{ord}\,(x, X) = i \geq 3$*,* $\mathrm{ord}\,(y, X) = j \geq 3$, $\mathrm{ord}\,(z, X) = k \geq 3$*, con $i, j, k \in \mathbb{N}$, y $p, q \in E(X) \cup O(X)$. Dado $A \in F_3(X) \setminus F_1(X)$, tenemos los valores siguientes para $v_X^*(q_X(A))$:*

(a) *si $A = \{x, p\}$, entonces $v_X^*(q_X(A)) = i + \binom{i}{2}$;*

(b) *si $A = \{x, p, q\}$ y $p \neq q$, entonces $v_X^*(q_X(A)) = i$;*

(c) *si* $A = \{x, y\}$ *y* $x \neq y$*, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = i\binom{j}{2} + j\binom{i}{2} + ij$*;*

(d) *si* $A = \{x, y, p\}$ *y* $x \neq y$*, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = ij$*;*

(e) *si* $A = \{x, y, z\}$ *y* x, y *y* z *son distintos, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = ijk$*;*

(f) *si* $A \in \Lambda_3(X)$*,* $v_X^*(q_X(A)) = 1$*.*

Demostración. Probemos (a). Por [5, Lema 5.3 (b)], $v_X(A) = i + \binom{i}{2}$. Por el Lema 5.1, $v_X(A) = v_X^*(q_X(A))$. Así, $v_X^*(q_X(A)) = i + \binom{i}{2}$.

De manera análoga, utilizando [5, Lema 5.3] y el Lema 5.1, se prueban los incisos (b)-(f). □

Lema 5.3. *Sean una gráfica finita* X*,* $x, y, z \in X$ *tales que* $\operatorname{ord}(x, X) = i \geq 3$, $\operatorname{ord}(y, X) = j \geq 3$*, con* $i, j \in \mathbb{N}$*, y* $z \in E(X) \cup O(X)$*. Dado* $A \in F_2(X) \setminus F_1(X)$*, tenemos los siguientes valores para* $v_X^*(q_X(A))$:

(a) *si* $A = \{x, z\}$*, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = i$*;*

(b) *si* $A = \{x, y\}$ *y* $x \neq y$*, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = ij$*;*

(c) *si* $A \in \Lambda_2(X)$*, entonces* $v_X^*(q_X(A)) = 1$*.*

Demostración. Probemos (a). Por [5, Lema 5.4 (b)], $v_X(A) = i$. Por el Lema 5.1, $v_X(A) = v_X^*(q_X(A))$. Así, $v_X^*(q_X(A)) = i$.

De manera análoga, utilizando [5, Lema 5.4] y el Lema 5.1, se prueban los incisos (b)-(c). □

Lema 5.4. [8, Lema 3.13] *Sean una gráfica finita* X *tal que* $R(X) \neq \emptyset$*,* Y *un continuo y* $n \in \{2, 3\}$*. Supongamos que existe un homeomorfismo* $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$*. Si* $B \in F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ *y* $B \cap (O(Y) \cup E(Y)) \neq \emptyset$*, entonces* $h(F_X) \neq q_Y(B)$*.*

Teorema 5.5. [8, Teorema 4.1] *Sean* X *una gráfica finita tal que* $R(X) \neq \emptyset$ *y* Y *un continuo. Supongamos que existe un homeomorfismo* $h\colon SF_3(X) \to SF_3(Y)$*. Si* $B \in F_3(Y) \setminus F_1(Y)$ *y* $B \subset R(Y)$*, entonces* $h(F_X) \neq q_Y(B)$*.*

Teorema 5.6. *Sean* X *una gráfica finita tal que* $R(X) \neq \emptyset$ *y* Y *un continuo. Supongamos que existe un homeomorfismo* $h\colon SF_3(X) \to SF_3(Y)$*, entonces* $h(F_X) = F_Y$*. En particular,*

$$g\colon F_3(X) \setminus F_1(X) \to F_3(Y) \setminus F_1(Y)$$

que está dada por $g = (q_Y^*)^{-1} \circ h \circ q_X^*$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Como $h(F_X) \in SF_n(Y)$ y q_Y es sobreyectiva, existe $B \in F_n(Y)$ tal que $h(F_X) = q_Y(B)$. Si $B \in F_n(Y) \setminus F_1(Y)$, por el Lema 5.4 y el Teorema 5.5, $h(F_X) \neq q_Y(B)$. Así, $B \in F_1(Y)$. Luego, $h(F_X) = F_Y$. Por otra parte, q_X^*, h, $(q_Y^*)^{-1}$ son homeomorfismos y $h(\{F_X\}) = \{h(F_X)\}$, entonces la función $g\colon F_n(X) \setminus F_1(X) \to F_n(Y) \setminus F_1(Y)$ que está dada por $g = (q_Y^*)^{-1} \circ h \circ q_X^*$ es un homeomorfismo. $\square$

Lema 5.7. *Si X es un continuo localmente conexo y casi enrejado, entonces X es un arco o una curva cerrada simple si y sólo si $|\mathfrak{A}_S(X)| = 1$.*

Demostración. Si X es un arco o una curva cerrada simple, entonces $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$, y se cumple lo requerido.

Para la otra parte, hacemos la demostración por contrarecíproca. Supongamos que X es un continuo localmente conexo y casi enrejado que no es un arco ni una curva cerrada simple. Veamos que $|\mathfrak{A}_S(X)| \neq 1$. Como X es un continuo casi enrejado, $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, luego $\mathfrak{A}_S(X) \neq \emptyset$. Así, $|\mathfrak{A}_S(X)| \geq 1$. Si $|\mathfrak{A}_S(X)| = 1$, entonces existe un único $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $X = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(J))$. Esto implica que, $X = J$, es decir, X es un arco o una curva cerrada simple, contradicción. Por lo tanto, $|\mathfrak{A}_S(X)| \neq 1$. Esto demuestra el lema. $\square$

Lema 5.8. *Sean una gráfica finita X tal que $R(X) \neq \emptyset$, $|\mathfrak{A}_S(X)| \geq 2$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 2$, entonces*

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} =$$

$$\begin{cases} \{F_X, q_X(\{p,q\})\} & si \bigcap \mathfrak{A}_S(X) = \{p,q\}, \\ \{F_X\} & si\ |\bigcap \mathfrak{A}_S(X)| \neq 2, \end{cases}$$

donde p y q son los puntos extremos de cada elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$.

Demostración. Primero veamos que si $\bigcap \mathfrak{A}_S(X) = \{p,q\}$, entonces

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{p,q\})\}.$$

Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $a \in \mathrm{Fr}_X(J)$. Vamos a demostrar que $\{a\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))$. Como $\{a\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\langle J^\circ\rangle_n)$, dado $\epsilon_i = \frac{1}{i}$, con $i \in \mathbb{N}$, $B_H(\{a\}, \epsilon_i) \cap \langle J^\circ\rangle_n \neq \emptyset$. Como X es un continuo y $\{a\} \in B_H(\{a\}, \epsilon_i) \cap \langle J^\circ\rangle_n$, $B_H(\{a\}, \epsilon_i) \cap \langle J^\circ\rangle_n$ es un conjunto infinito. Dado $i \in \mathbb{N}$, podemos elegir $A_i \in (B_H(\{a\}, \epsilon_i) \cap$

$\langle J^\circ\rangle_n) \setminus \{a\}$. Podemos suponer que $A_i \in F_n(X) \setminus F_1(X)$, así, $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión de $\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)$ que converge a $\{a\}$. Por lo tanto, $\{a\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))$. De la continuidad de q_X, $F_X \in \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)))$. Como J es arbitrario en $\mathfrak{A}_S(X)$, $\{F_X\} \subset \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)))\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Además, $\bigcap \mathfrak{A}_S(X) = \{p,q\}$, entonces $\{p,q\} \subset \mathrm{Fr}_X(J)$, es decir, p y q son los puntos extremos de $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, existe una sucesión $\{R_i\}_{i=1}^\infty$ de elementos de $\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_n \setminus F_1(X)$ que converge a $\{p,q\}$. Así, $\{p,q\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))$. De la continuidad de q_X, $q_X(\{p,q\}) \in \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)))$. Por lo tanto, $q_X(\{p,q\}) \in \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)))\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Ahora, sea $B \in \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Supongamos que $B \neq F_X$, ya que si $B = F_X$, el resultado es inmediato. Como $B \in SF_n(X) \setminus \{F_X\}$, existe $A \in F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $q_X^*(A) = B$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Como $B \in \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)))$, existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ de $q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))$ que converge a B. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $A_i \in \langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X)$ tal que $q_X(A_i) = B_i$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \langle J\rangle_n$ y X es compacto, se sigue que A_i converge a C, para algún $C \in \langle J\rangle_n$. Más aún, por la continuidad de q_X, $q_X(C) = B$, es decir, $C \in \langle J\rangle_n \setminus F_1(X)$. Así, $q_X^*(C) = q_X^*(A)$. Por la inyectividad de q_X^*, se sigue que $C = A$. Por lo tanto, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, $A \subset J$, o sea, $A \subset \bigcap \mathfrak{A}_S(X)$. Como X es continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$, X no es un arco ni una curva cerrada simple. Más aún, como $|\mathfrak{A}_S(X)| \geq 2$, $|\bigcap \mathfrak{A}_S(X)| \leq 2$. Como $\bigcap \mathfrak{A}_S(X) = \{p,q\}$ y $A \in F_n(X) \setminus F_1(X)$, entonces $A = \{p,q\}$. Así, $B \in \{F_X, q_X(\{p,q\})\}$.

Ahora veamos que si $|\bigcap \mathfrak{A}_S(X)| \neq 2$, entonces

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_n \setminus F_1(X))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} = \{F_X\}.$$

La demostración para la contención hacia la izquierda, es la misma que está escrita en el primer párrafo, cuando $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $a \in J^\circ$. La demostración para la contención hacia la derecha, es similar a la que está escrita en el segundo párrafo, lo unico que cambia es que, $|\bigcap \mathfrak{A}_S(X)| \neq 2$, entonces $|\bigcap \mathfrak{A}_S(X)| \leq 1$. Como $A \subset \bigcap \mathfrak{A}_S(X)$ y $A \in F_n(X)$, $A \in F_1(X)$, lo que contradice que A no es un conjunto singular. Por lo tanto, $B = F_X$. Esto demuestra el lema. □

Teorema 5.9. [8, Teorema 4.3] *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_3(X) \to SF_3(Y)$. Si $p, q \in R(X)$ y $p \neq q$, entonces $h(q_X(\{p,q\})) = q_Y(\{p',q'\})$, para algunos $p', q' \in R(Y)$.*

El siguiente teorema nos indica que los elementos de la forma $q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))$, donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, preservan su estructura bajo homeomorfismo.

Teorema 5.10. [8, Teorema 4.6] *Sean X y Y dos gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_3(X) \to SF_3(Y)$. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))) = q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))$.*

Teorema 5.11. *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_3(X) \to SF_3(Y)$, entonces:*

(*a*) *la asociación $J \to J_h$ es una biyección entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$;*

(*b*) *$|J \cap R(X)| = |J_h \cap R(Y)|$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$;*

(*c*) *$J \in \mathfrak{A}_R(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$.*

Demostración. (*a*) Veamos primero que la asociación es uno a uno. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $J_h = K_h$. Así, $q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y)) = q_Y(\langle K_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))$. Por el Teorema 5.10, $q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X)) = q_X(\langle K^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))$. Dado $a, b \in J^\circ$, con $a \neq b$, tenemos que $\{a, b\} \in \langle K^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X)$. Así, $J \cap K^\circ \neq \emptyset$. Por el Lema 1.7 (c), $J = K$. Ahora, sea $L' \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Usando el Teorema 5.10 para h^{-1}, existe $L_{h^{-1}} \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $h^{-1}(q_Y(\langle L'^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) = q_X(\langle L_{h^{-1}}^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))$. Así, $h(q_X(\langle L_{h^{-1}}^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))) = q_Y(\langle L'^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))$.

(*b*) Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Notemos que $1 \leq |J \cap R(X)| \leq 2$ y $1 \leq |J_h \cap R(Y)| \leq 2$. Para probar (*b*), probemos que $|J \cap R(X)| = 2$ si y sólo si $|J_h \cap R(Y)| = 2$. Supongamos que $|J \cap R(X)| = 2$ y sean $p, q \in X$ tales que $J \cap R(X) = \{p, q\}$. Por el Teorema 5.9, existen $p', q' \in R(Y)$ tales que $h(q_X(\{p, q\})) = q_Y(\{p', q'\})$. Como $q_X(\{p, q\}) \in \mathrm{cl}_{SF_3(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X)))$, por el Teorema 5.10, $q_Y(\{p', q'\}) \in \mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) \subset q_Y(\langle J_h\rangle_3)$. Luego, $\{p', q'\} \subset J_h$. Por lo tanto, $|J_h \cap R(Y)| = 2$. Por un argumento análogo se prueba la otro implicación.

(*c*) Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Notemos que

$$\mathrm{cl}_{SF_3(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))) = q_X(\langle J\rangle_3) \text{ y}$$

$$\mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) = q_Y(\langle J_h\rangle_3).$$

Por el Teorema 5.10, $h(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))) = q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))$. Entonces, $h(\mathrm{cl}_{SF_3(X)}\,(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X)))) = \mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y)))$. Luego, $q_X(\langle J\rangle_3)$

es homeomorfo a $q_Y(\langle J_h \rangle_3)$. Además, $q_X(\langle J \rangle_3)$ y $q_Y(\langle J_h \rangle_3)$ son homeomorfos a $SF_3(J)$ y $SF_3(J_h)$, respectivamente. Así, $SF_3(J)$ es homeomorfo a $SF_3(J_h)$. Por [13, Teorema 3.3], se concluye la prueba. $\square$

Teorema 5.12. [8, Teorema 5.3] *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_2(X) \to SF_2(Y)$. Si $B = F_X$ o $B = q_X(\{p,q\})$, con $p,q \in R(X)$ y $p \neq q$, entonces $h(B) = F_Y$ o $h(B) = q_Y(\{p',q'\})$, para algunos $p',q' \in R(Y)$.*

Teorema 5.13. [8, Teorema 5.4] *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_2(X) \to SF_2(Y)$. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X(\langle J^\circ \rangle_2 \setminus F_1(X))) = q_Y(\langle J_h^\circ \rangle_2 \setminus F_1(Y))$. Además,*

(*a*) *si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$,*

(*b*) *si $J \in \mathfrak{A}_R(X)$, then $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$ y*

(*c*) *si J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces J_h es un arco y $J_h \notin \mathfrak{A}_E(Y)$.*

Teorema 5.14. [8, Teorema 5.5] *Sean X y Y continuos enrejados tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_2(X) \to SF_2(Y)$. Entonces:*

(*a*) *la asociación $J \to J_h$ es una biyección entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$;*

(*b*) *$|J \cap R(X)| = |J_h \cap R(Y)|$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$;*

(*c*) *$J \in \mathfrak{A}_R(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$.*

Teorema 5.15. *Sean X y Y gráficas finitas tales ques $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h\colon SF_2(X) \to SF_2(Y)$. Si X y Y no son θ_m-gráficas, para cada $m \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $h(F_X) = F_Y$.*

Demostración. Por el Lema 5.8, el Teorema 5.13 y el Teorema 5.14 (a), tenemos que:

$$\begin{aligned} h(\{F_X\}) &= \bigcap \{\mathrm{cl}_{SF_2(Y)}(h(q_X(\langle J^\circ \rangle_2 \setminus F_1(X)))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap \{\mathrm{cl}_{SF_2(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ \rangle_2 \setminus F_1(Y))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap \{\mathrm{cl}_{SF_2(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ \rangle_2 \setminus F_1(Y))) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\} = \{F_Y\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(F_X) = F_Y$. $\square$

6 Unicidad de $SF_n(X)$ para la clase de las gráficas finitas

En esta última sección de este capítulo probaremos que las θ_m-gráficas tienen hiperespacio único $SF_2(X)$ y $SF_3(X)$. Más aun, veremos que este resultado es más general, es decir, las gráficas finitas tienen hiperespacio único $SF_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.

Definición 6.1. *Sean un continuo X y un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de X, se dice que el continuo X tiene* ***hiperespacio único*** *$\mathcal{H}(X)$ si, para cada continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Teorema 6.2. *Sea $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 2$. Si X es una θ_m-gráfica, entonces X tiene hiperespacio único $SF_3(X)$.*

Demostración. Sea Y un continuo y sea $h : SF_3(X) \to SF_3(Y)$ un homeomorfismo. Como X es una θ_m-gráfica, Por el Lema 5.8, tenemos que

$$\{F_X, q_X(\{p,q\})\} = \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_3(X)}(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\},$$

donde $R(X) = \{p,q\}$. Por el Teorema 5.10 y el Teorema 5.11 (a), tenemos que

$$\begin{aligned} h(\{F_X, q_X(\{p,q\})\}) &= \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(h(q_X(\langle J^\circ\rangle_3 \setminus F_1(X)))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\}. \end{aligned}$$

Así, $|\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_3(Y)}(q_Y(\langle J_h^\circ\rangle_3 \setminus F_1(Y))) : J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)\}| = 2$. Por el Lema 5.8, Y es una $\theta_{m'}$-gráfica. Por lo tanto, por el Teorema 5.11 (a), Y es homeomorfo a X. □

Teorema 6.3. [8, Teorema 6.2] *Sea $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 2$. Si X es una θ_m-gráfica, entonces X tiene único hiperespacio $SF_2(X)$.*

Teorema 6.4. [8, Teorema 6.3] *Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces X tiene hiperespacio único $SF_3(X)$.*

Teorema 6.5. [8, Teorema 6.4] *Si X es una grafica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces X tiene hiperespacio único $SF_2(X)$.*

Teorema 6.6. [8, Teorema 6.5] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es una gráfica finita, entonces X tiene hiperespacio único $SF_n(X)$.*

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo. Sus comentarios acertados permitieron mejorar la calidad de este trabajo.

Bibliografía

[1] Franco Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604

[2] Franco Barragán, *Induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Topology Appl. 158 (2011), 1192–1205

[3] Franco Barragán, *Aposyndetic properties of the n-fold symmetric product suspension of a continuum*, Glasnik Math. 49 (2014), no. 1, 179–193.

[4] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología de conjuntos*, 2011.

[5] Enrique Castañeda, Alejandro Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl., 153 (2006), 1434–1450.

[6] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López, Fernando Macías Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology Appl. 191 (2015), 16 – 27.

[7] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43, (2013), 1583 – 1623.

[8] David Herrera-Carrasco, Antonio Libreros-López A. and Fernando Macías-Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, *Topology Appl.*, 341 (2024).

[9] David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero y Francisco Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal Of Mathematics Research, 4, (2012), 1 – 9.

[10] David Herrera-Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology and its Applications, 209 (2016) 1 – 13.

[11] Alejandro Illanes y Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[12] Antonio de Jesús Libreros-López, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *On the uniqueness of the n-fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology and its Applications, 312 (2022), 108053.

[13] Germán Montero-Rodríguez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías-Romero, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, Houston Journal Math., 48 (1) (2022) 205–225.

[14] Sam Bernardo, Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[15] Sam B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no.18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 7

El hiperespacio $C_K^n(X)$

Gerardo Hernández Valdez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL

Resumen

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Se define el hiperespacio cociente de X $C_n(X)/C_{nK}(X)$, denotado por $C_K^n(X)$, donde $C_{nK}(X) = \{A \in C_n(X)\colon K \subset A\}$ para algún compacto K de X. Presentamos algunos modelos de este hiperespacio cuando X es alguno de los continuos típicos (arco, curva cerrada simple, gráfica finita) y se estudian algunas propiedades generales que relacionan dicha propiedad en el continuo y en el hiperespacio.

1 Introducción

Sea (X, τ) un espacio topológico. El presente trabajo se basa en el artículo [1]. A lo largo de este capítulo se considerará a X como un continuo, es decir, espacios métricos, conexos, compactos y no degenerados. Si $n \in \mathbb{N}$, estaremos interesados en los siguientes hiperespacios de X:

$$2^X = \{A \subset X\colon A \text{ es un subconjunto no vacío y cerrado de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

$$C_{nK}(X) = \{A \in C_n(X)\colon K \subset A,\}, \text{ para algún compacto } K \text{ en } X \text{ y}$$

$$C(X) = C_1(X).$$

A estos hiperespacios se les otorgará la métrica de Hausdorff [6, Teorema 2.2]. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ se conocen como *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X, respectivamente. El hiperespacio

$C_{nK}(X)$ se conoce como el *n-ésimo hiperespacio K anclado*. El caso particular en el cual $K = \{p\}$ para algún $p \in X$ y $n = 1$, se conoce como el *hiperespacio de los anclados*. Este hiperespacio ha sido estudiado ampliamente en [3], [4], [16]. Los espacios cocientes entre hiperespacios se han estudiado a lo largo de la historia de la teoría de continuos y en particular los modelos que se pueden describir para algunos continuos X. Más aún, surge la pregunta: ¿qué propiedades que tiene X se mantienen en el hiperespacio cociente?. Estudios recientes sobre hiperespacios cociente se pueden encontrar en [6] y [8], Con esto, se define el espacio cociente $C^n_K(X) = C_n(X)/C_{nK}(X)$ el cual es un continuo gracias a [18, Teorema 3.10]. Denotamos por $q^n_K : C_n(X) \to C^n_K(X)$ a la función cociente entre hiperespacios y haremos $q^n_K(C_{nK}(X)) = C^n_K$. En la sección 2 presentamos conceptos preliminares necesarios para una mejor comprensión de este trabajo. En la sección 3 se muestran modelos del cociente $C^n_K(X)$ para algunos continuos X y subespacios compactos K. Se procede con la identificación del continuo $C_{nK}(X)$ en $C_n(X)$ y se aplica la función cociente para llegar a $C^n_K(X)$. Si $n \geq 2$ el hiperespacio $C_n(X)$ tiene dimensión mayor o igual a 4 (véase [11, 6]), utilizaremos el caso $n = 1$. Finalmente, en la sección 4 se revisan propiedades generales del hiperespacio tales como la arco-conexidad, conexidad local, contractibilidad, entre otras.

2 Preliminares

Recordaremos algunos conceptos necesarios para los resultados de las siguientes secciones. Dado un subconjunto A en un espacio métrico X, $int_X(A)$ denota el *interior* de A en X. Si d es la métrica del continuo X, $\varepsilon > 0$, $A \subset X$, y $a \in X$, entonces el conjunto $\{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$ se denota por $B_d(a, \varepsilon)$, o $B(a, \varepsilon)$ cuando no hay posibilidad de confusión entre las métricas. Sean $U_1, \ldots, U_r$ subespacios de X, con $r, n \in \mathbb{N}$. Se define el *Vietórico* de $U_1, \ldots, U_r$ como el conjunto

$$\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n = \{A \in C_n(X) : A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r \text{ and } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ for each } i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

La colección de Vietóricos representa una base para una topología en $C_n(X)$, conocida como la *topología de Vietoris* con $U_1, \ldots, U_r$ abiertos en X, véase [6, Teorema 1.2].

Un recurso muy útil en la teoría de hiperespacios es la existencia de arcos ordenados. Si X es un continuo, un *arco ordenado* en 2^X es una función continua $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, para cada $s, t \in [0,1]$ con $s < t$. Si $A, B \in 2^X$ satisface que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, entonces decimos que α es un *arco ordenado desde A hasta B*.

Lema 2.1. *[17, (1.8)] Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) existe un arco ordenado en 2^X desde A hasta B,

(b) $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A.

Un *arco* es un espacio homeomorfo a $[0,1]$. Si $n \in \mathbb{N}$, una *n-celda* es un espacio homeomorfo a $[0,1]^n$. Una *curva cerrada simple* es un continuo homeomorfo a $\mathcal{S}^1$. Una *gráfica finita* es un continuo que se puede expresar como la unión finita de arcos cuya intersección a pares es de dos puntos, a saber uno de sus extremos.

Sean $p \in X$ y β un número cardinal. Se dice que *p tiene orden menor o igual a β en X*, denotado por $\mathrm{ord}(p, X) \leq \beta$, cada que p tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de $\mathrm{Bd}_X(U)$ es menor o igual a β, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que *p tiene orden menor o igual a β en X* ($\mathrm{ord}(p, X) = \beta$) cada que $\mathrm{ord}(p, X) \leq \beta$ y $\mathrm{ord}(p, X) \nleq \alpha$ para cada número cardinal $\alpha < \beta$. Sea $E(X) = \{x \in X \colon \mathrm{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X \colon \mathrm{ord}(x, X) = 2\}$, y $R(X) = \{x \in X \colon \mathrm{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) se conocen como *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X. Utilizaremos las siguientes notaciones: $\dim[X]$ denota la dimensión de X, $\dim_p[X]$ denota la dimensión de X en el punto $p \in X$ y utilizaremos la dimensión para continuos definida en [19, p. 5].

Un continuo es *descomponible* si es posible expresarlo como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible se conoce como *indescomponible*. Se dice que un continuo X es *unicoherente* si cada que A y B son subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Una función continua entre dos espacios X y Y es *monótona* si se cumple que la imagen inversa de los conjuntos unitarios es un conjunto conexo. Un espacio topológico Z_1 es *contráctil* cada que la función identidad de Z_1 es homotópica a alguna función constante de Z_1. Un *punto de corte* de un continuo X es un punto $p \in X$ tal que $X - \{p\}$ no es conexo. Asímismo, un *conjunto de corte* es un subespacio S de X tal que $X - S$ no es conexo. Decimos que un espacio topológico S es *conexo en pequeño* en un punto p si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p.

3 Modelos

En esta sección se describirán algunos modelos del hiperpesacio $C_K^n(X)$ para algunos continuos X y algunos subespacios compactos K de X.

Arco

Sea $X = [0,1]$. Por [11], tenemos que $C(X)$ es una 2-celda. Analizaremos primeramente el subespacio compacto $K = \{0\}$ (observe que su hiperespacios sería homeomorfo a aquel con $K = \{1\}$). Entonces, $C_K(X) = \{[0,a] \subset X : a \geq 0\}$.

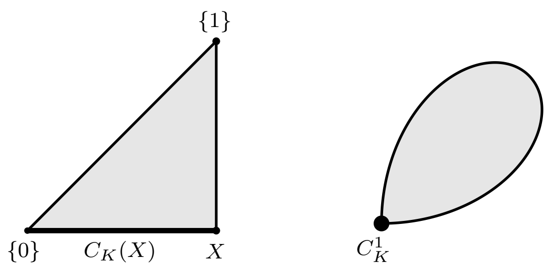


Figura 1: $C_K([0,1])$ en $C([0,1])$ y $C_K^1([0,1])$ cuando $K = \{0\}$.

Ahora elegimos $K = \{p\}$ con $p \in (0,1)$. Notemos que $C_K(X) = \{[s,t] \subset X : s \leq p \leq t\}$. Este conjunto se puede visualizar en la Figura 2, así como el hiperespacio $C_K^1([0,1])$ después de aplicar la función cociente. Analizamos el caso cuando $K = [s,t]$, para $s,t \in (0,1)$ con $s \leq t$. Es claro que $C_K(X) = \{[a,b] \subset X : a \leq s \leq t \leq b\}$. Una vez realizado este paso, se comprime el subespacio con la función cociente, lo cual podemos visualizar en la Figura 3.

Finalmente, supongamos que K tiene más de una componente. Por ser K acotado, existen $s,t \in K$ tales que $s = \text{mín}[K]$ y $t = \text{máx}[K]$. Luego, si $A \in C(X)$ y es tal que $K \subset A$, entonces $[s,t] \subset A$. Esto implica que $C_K(X) = C_{[s,t]}(X)$, por lo que el modelo sería el mismo al último caso analizado.

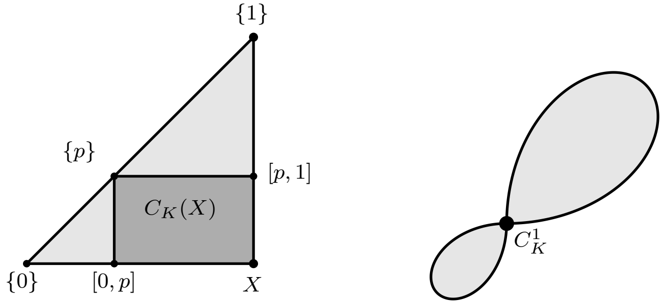


Figura 2: $C_K([0,1])$ en $C([0,1])$ y $C_K^1([0,1])$ cuando $K = \{p\}$.

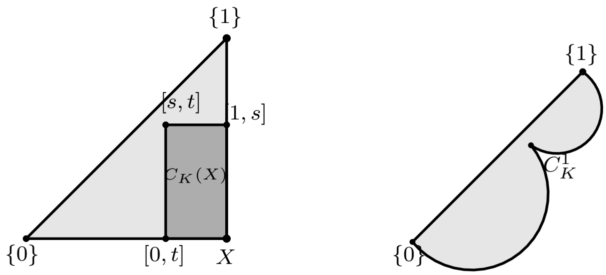


Figura 3: $C_K([0,1])$ en $C([0,1])$ y $C_K^1([0,1])$ cuando $K = [s,t]$.

Triodo

Sea T un 3-odo. Por [11], tenemos que $C(T)$ es una 3-celda con tres 2-celdas pegadas en sus costados, como se aprecia en la Figura 4. La misma Figura muestra el modelo de $C_K^1(T)$ con $K = \{v\}$, siendo v el vértice del 3-odo.

Construimos un segundo modelo para el triodo. Si tomamos al triodo $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ donde L_i es un arco y $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{v\}$, consideramos el caso en que K sea un subcontinuo de L_i que contenga el punto extremo de L_i que no sea v, el modelo para $C_K^1(T)$ se puede apreciar en la Figura 5. Se puede observar que en este caso, $C_K^1(T)$ es homeomorfo a $C(T)$.

Curva cerrada simple

Sean $X = \mathcal{S}^1$ y K un subarco de S^1. En primer parte de la Figura 6 observamos un modelo para $C_K(\mathcal{S}^1)$ en $C(\mathcal{S}^1)$. Tomando el cociente, obtenemos $C_K^1(\mathcal{S}^1)$ en la Figura 6. Cabe mencionar que si K posee dos o más componen-

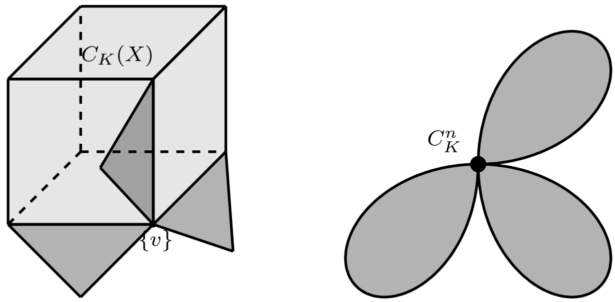


Figura 4: $C_K(T)$ en $C(T)$ y $C^1_K(T)$ cuando $K = \{v\}$.

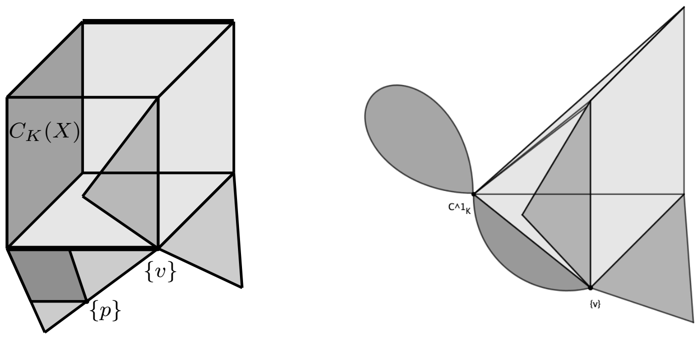


Figura 5: $C_K(T)$ en $C(T)$ y $C^1_K(T)$ cuando $K = \{e\}$.

tes, el hiperespacio $C_K(X)$ será homeomorfo al mismo que hemos estudiado ahora.

Paleta

Sean I un arco con puntos extremos v, x y $P = \mathcal{S}^1 \cup I$ tal que $\mathcal{S}^1 \cap I = \{v\}$. Se dice que P es el continuo *paleta*. Construiremos un modelo para este continuo. Sea K un subcontinuo de P que contiene a v, con más de un punto (distinto de v) en cada continuo $\mathcal{S}^1$ e I. Gracias nuevamente a [11], tenemos el modelo de $C(P)$ en la Figura 7. Al comprimir el espacio $C_K(P)$ es posible observar que $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $C^1_{\{p\}}(I)$ con P paleta y $p \in (0,1)$.

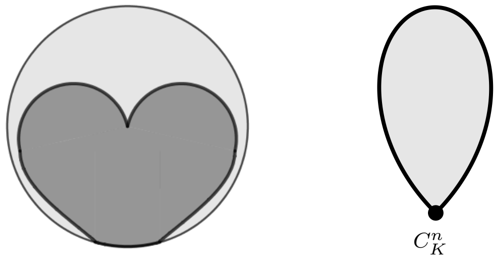


Figura 6: $C_K(\mathcal{S}^1)$ en $C(\mathcal{S}^1)$ y $C_K^1(\mathcal{S}^1)$ cuando K es subarco.

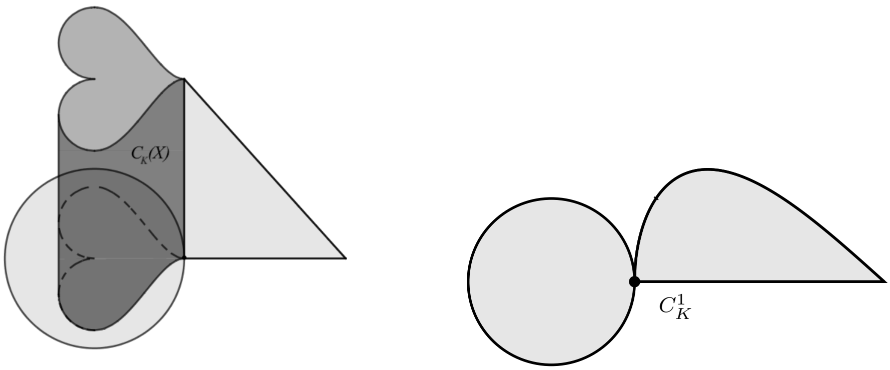


Figura 7: $C_K(P)$ en $C(P)$ y $C_K^1(P)$ cuando $K = \{v\}$.

Gráfica finita

Sea X una gráfica finita (distinta de un arco) y $p \in E(X)$. Tomamos el único punto $q \in R(X)$ tal que existe un arco minimal J con $\{p, q\} = E(J)$. Sea $G = \text{cl}(X - J)$ y notemos que $C(X) = C(G) \cup C(J) \cup C_{\{q\}}(X)$ y $C(G) \cap C_{\{q\}}(X) = \emptyset$. Esto implica que $C(G)$ es homeomorfo a $q_{\{q\}}(C(G))$. Por la Figura (b), tenemos que $q_{\{q\}}(C(L))$ es una 2-celda, homeomorfo a $C(L)$. De manera análoga al caso cuando X es una paleta, tenemos que $C_{\{q\}}(X)$ es homeomorfo a $C_{\{q\}}(G) \times [0, 1]$. Si $f : [0, 1] \to J$ es un homeomorfismo tal que $f(0) = q$ y $f(1) = p$, podemos definir el homeomorfismo $h : C_{\{q\}}(X) \to C_{\{q\}}(G) \times [0, 1]$ por $h(A) = (A \cap G, f^{-1}(A \cap J))$, para cada $A \in C_{\{p\}}(X)$. De este modo, $h(C_{\{p\}}(X) \cap C_{\{q\}}(X)) \subset C_{\{q\}}(G) \times \{1\}$. De aquí, podemos decir que $q_{\{p\}}(C_{\{q\}}(X))$ es homeomorfo al $Cono(C_{\{q\}}(G))$ y el vértice de este será $C_{\{p\}}^1$. En consecuencia, el hiperespacio $C_{\{p\}}^1(X)$ es la unión de una 2-

celda, $q_{\{p\}}(C(L))$, el espacio homeomorfo al $Cono(C_{\{q\}}(G))$, $q_{\{p\}}(C_{\{q\}}(X))$ y al subespacio $q_{\{p\}}(C(G))$ el cual es homeomorfo a $C(G)$, considerando las siguientes intersecciones.

- $q_{\{p\}}(C(L)) \cap q_{\{p\}}(C(q,X)) = C(q,L)$,
- $q_{\{p\}}(C(L)) \cap q_{\{p\}}(C(G)) = \{C^1_{\{p\}}\}$,
- $q_{\{p\}}(C(G)) \cap q_{\{p\}}(C(q,X)) = q_{\{p\}}(C(q,G))$, el cual es homeomorfo a $C(q,G)$ debido a que $C(q,G) \cap C(p,X) = \emptyset$.

Esto se puede observar mejor en las siguientes figuras.

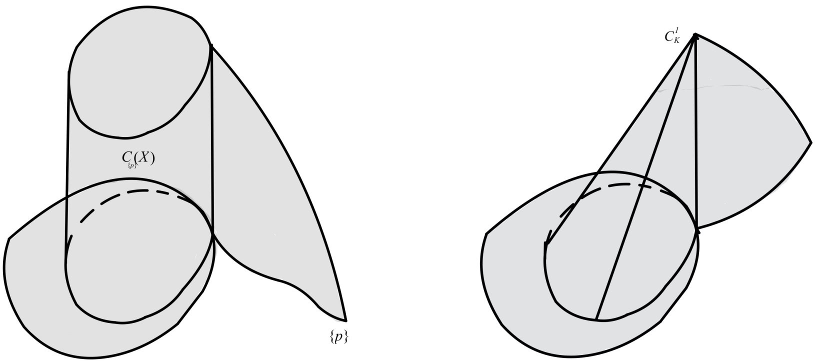


Figura 8: $C_K(X)$ en $C(X)$ y $C^1_K(X)$ cuando $K = \{p\} \subset E(X)$.

4 Propiedades Generales

En esta sección vamos a probar algunas propiedades topológicas del hiperespacio $C^n_K(X)$. Existen algunas equivalencias entre el continuo y su hiperespacio.

Lema 4.1. *La función q^n_K es monótona.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C^n_K(X)$. Si $\mathcal{A} = C^n_K$, se tiene que $(q^n_K)^{-1}(\mathcal{A}) = C_{nK}(X)$, el cual es conexo en $C_n(X)$. En cualquier otro caso, al ser $q^n_K|_{C_n(X)-C_{nK}(X)}$ un homeomorfismo, el resultado se sigue. $\square$

En el siguiente resultado, hacemos notar que el continuo puede o no ser unicoherente, pero su hiperespacio siempre lo será. El ejemplo más sencillo de un continuo que no es unicoherente es la curva cerrada simple. Obsérvese que la Figura 6 confirma visualmente el siguiente resultado para el caso $n = 1$ y cualquier K compacto.

Teorema 4.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo y $K \in 2^X$, entonces $C_K^n(X)$ es unicoherente.*

Demostración. By [15, Teorema 6.2.4], $C_n(X)$ es unicoherente. Puesto que la función q_K^n es monótona, se sigue que la función es cerrada por [18, Proposición 22]. Esto termina la demostración. $\square$

Teorema 4.3. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. p es un punto de corte si y sólo si $C_{n\{p\}}(X)$ es un conjunto de corte de $C_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que $p \in X$ es un punto de corte. Por consiguiente, existen U, V abiertos ajenos en X tales que $X - \{p\} = U \cup V$. Notemos que $\langle U \rangle_n$ y $\langle X - \{p\}, V \rangle_n$ son subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos de $C_n(X)$. Vamos a probar que $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X) = \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$. Sea $A \in C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$. Por definición tenemos que $p \notin A$ y $A \subset X - \{p\} = U \cup V$. Si $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \in \langle X - \{p\}, V \rangle_n$. Por otro lado, si $A \cap V = \emptyset$, se tiene que $A \subset U$, lo cual implica que $A \in \langle U \rangle_n$. En cualquier caso, se sigue la contención $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X) \subset \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$.

Para analizar la segunda contención, tomamos $A \in \langle U \rangle_n \cup \langle X - \{p\}, V \rangle_n$. De aquí se siguen dos casos: $A \subset U$ o $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \subset X - \{p\}$. En ambos casos tenemos que $A \subset X - \{p\} = U \cup V$, por lo que $p \notin A$. Esto a su vez implica que $A \in C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$. Se sigue la segunda contención y por ende, la igualdad deseada. Esto prueba que $C_{n\{p\}}(X)$ es un conjunto de corte de $C_n(X)$.

Ahora probaremos la necesidad utilizando la contradicción. Supongamos que $X - \{p\}$ es conexo. Notemos que

$$C_n(X - \{p\}) = \{A \in C_n(X)\colon A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes y } p \notin A\}.$$

Esta definición implica que $C_n(X - \{p\}) = C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$ y como el primero es conexo (pues $X - \{p\}$ lo es), entonces $C_n(X) - C_{n\{p\}}(X)$ es conexo, lo cual es una contradicción. Se sigue que p es un punto de corte de X. $\square$

Nuevamente, es posible visualizar este resultado en las Figuras 2 y 5, pues existen puntos de corte en los arcos y los n-odos.

Corolario 4.4. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$. Entonces p es un punto de corte en X si y sólo si $C^n_{\{p\}}$ es un punto de corte de $C^n_{\{p\}}(X)$.*

Demostración. El resultado se sigue del hecho que $q^n_K|_{C_n(X)-C_{n\{p\}}(X)}$ es homeomorfismo y del Teorema 4.3. □

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $C^n_K(X)$ es un continuo arco-conexo para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Es un hecho conocido que el continuo $C_n(X)$ es arco-conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, véase [14, Teorema 3.1]. Dado que q^n_K es una función continua, se sigue el resultado. □

A diferencia del resultado anterior, la conexidad local del hiperespacio cociente se asegura si y sólo si el continuo es localmente conexo. Veamos el siguiente resultado previo.

Lema 4.6. *Sean X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(X) - C_{nK}(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ tal que $x \notin K$ y V un abierto en X que contiene a x. Luego, $W = X - K \cap V$ es un abierto en X que contiene a x. Por consiguiente, $\{x\} \in \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{nK}(X)$. Utilizando la conexidad local de este último espacio, podemos encontrar un abierto conexo no vacío $\mathcal{U}$ de $C_n(X) - C_{nK}(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U}) \subset \langle W \rangle_n$. Más aún, sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{H_d}(\{x\}, \varepsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Considere $\Lambda = \bigcup \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$. Por [17, Lema 1.49], Λ es un subcontinuo de X. Por definición del Vietórico $\langle W \rangle_n$ y el subcontinuo H, tenemos que $x \in \Lambda \subset W \subset V$. Veamos que $\mathrm{int}_X(\Lambda)$ es la vecindad abierta y conexa que buscamos. Si $y \in B_d(x, \varepsilon)$, tenemos que $\{y\} \in B_{H_d}(\{x\}, \varepsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$. Por definición del subcontinuo Λ, tenemos que $y \in \Lambda$. Consiguientemente, $x \in \mathrm{int}_X(\Lambda) \subset W \subset V$ y se concluye que X es localmente conexo.

Supongamos ahora que $x \in K$ y $K \notin F_1(X)$. Por consiguiente, existe $y \in K$ distinto a x. Sea V un conjunto abierto en X que contiene a x. Notamos que $W = V \cap X - \{z\}$ es un conjunto abierto en X que contiene a

x. Más aún, $\{x\} \subset \langle W \rangle_n \subset C_n(X) - C_{nK}(X)$. A partir de aquí, se procede de manera análoga al caso anterior.

Analizamos el último caso. Supongamos que $K = \{x\}$. Por [18, Teorema 5.13], tenemos que X no puede fallar en ser conexo en pequeño en un solo punto. Por ende, X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Esto es equivalente a que X es localmente conexo. $\square$

Ahora es posible probar lo siguiente.

Teorema 4.7. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \in 2^X$. X es un continuo localmente conexo si y sólo si $C_K^n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Si suponemos que X es localmente conexo, se sigue que $C_n(X)$ es localmente conexo por [15, Teorema 6.1.6]. Puesto que la función q_K^n es cerrada, se sigue que $C_K^n(X)$ es localmente conexo.

Ahora supongamos que $C_K^n(X)$ es localmente conexo. Notemos que $C_K^n(X)$ es localmente conexo. Puesto que $q_K^n|_{C_n(X)-C_{nK}(X)}$ es un homeomorfismo, se sigue que $C_n(X) - C_{nK}(X)$ es localmente conexo. Por Lema 4.6, X es localmente conexo. $\square$

Un resultado importante es la equivalencia entre la indescomponibilidad del continuo X y la arco-conexidad del hiperespacio.

Teorema 4.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $K \in 2^X$, X es indescomponible si y sólo si $C_K^n(X) - \{C_{nK}\}$ no es arco-conexo.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$ y supongamos que X es un continuo indescomponible. Entonces X tiene una cantidad infinita de composantes distintas por pares, véase [13, Teorema 7, p. 212]. Tomamos x, y en distintas composantes de X. Puesto que X es indescomponible, si $\alpha : I \to C_n(X)$ es tal que $\alpha(0) = \{x\}$ y $\alpha_1(y) = \{y\}$, existe $t_0 \in I$ tal que $K \subset \alpha(t_0)$. Esto implica que $\alpha(t_0) \subset C_{nK}(X)$. Se sigue que $\alpha(t_0) \nsubseteq C_n(X) - C_{nK}(X)$. Luego, no es posible conectar $\{x\}$ con $\{y\}$ en $C_n(X) - C_{nK}(X)$. Por el homeomorfismo, $C_K^n(X) - \{C_k^n\}$ no es arco-conexo.

Por otro lado, supongamos que X descomponible y sean X_1, X_2 subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Tomamos $p \in X_1 - X_2$ y $q \in X_2 - X_1$. Verificaremos que $C_n(X) - C_{nK}(X)$ es arco-conexo si $K = \{p, q\}$. Sea $r \in X_1 \cap X_2$. Observemos que $\{p\} \in C_n(X) - C_{nK}(X)$. Sea $A \in C_n(X) - C_{nK}(X)$ y supongamos que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ con

$A_i \in C(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Podemos suponer ahora que sin pérdida de generalidad existen $1 \leq s \leq t \leq m$ tales que

(i) $A_l \subset X_1$ con $1 \leq l \leq s$,

(ii) $A_l \subset X_2$ con $s + 1 \leq l \leq t$, y

(iii) $A_l \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$ y $A_l \not\subseteq X_i$ para $i = 1, 2$ y $t + 1 \leq l \leq m$.

Para (i), la idea es construir un arco desde A hasta $\{r\} \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right)$. Dado que $C_s(X_1)$ es arco-conexo y $A_1 \cup \cdots \cup A_s, \{r\} \in C_s(X_1)$, existe un arco $\alpha_1 : I \to C_s(X)$ tal que $\alpha_1(0) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s$ y $\alpha_1(1) = \{p\}$. Definamos la función $\beta_1 : I \to C_n(X)$ tal que $\beta_1(t) = \alpha_1(t) \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right)$. β_1 está bien definida puesto que α_1 es una función. Más aún, β_1 es continua. Puesto que $q \notin X_1$, se tiene que $K \not\subseteq \beta_1(t)$ para cada $t \in I$. Esto implica que $\beta_1(I) \subset C_n(X) - C_{nK}(X)$ es un arco que contiene a A y $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right)$.

Para (ii), construiremos un arco desde $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right)$ hasta $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=l}^{m} A_i\right)$. Dado que $C_{l-s}(X_2)$ es un continuo arco-conexo y $A_{s+1} \cup \cdots \cup A_m$, $\{p\} \in C_{l-s}(X_2)$, tenemos que existe un arco $\alpha_2 : I \to C_{l-s}(X_2)$ tal que $\alpha_2(0) = A_{s+1} \cup \cdots \cup A_m$ y $\alpha_2(1) = \{p\}$. De manera similar al caso (i), definimos $\beta_2 : I \to C_n(X)$ de tal manera que $\beta_2(t) = \alpha_2(t) \cup \{p\} \cup \left(\bigcup_{i=t+1}^{m} A_i\right)$. Se tiene que β_2 es una función continua bien definida y que $K \not\subseteq \beta_2(t)$ para cada $t \in I$. Concluimos que $\beta_2(I)$ es un arco contenido en $C_n(X) - C_{nK}(X)$ y que pasa por $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=t+1}^{m} A_i\right)$ y $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right)$. De lo anterior, notemos que $\{p\} \cap \left(\bigcup_{i=s+1}^{m} A_i\right) \in \beta_1(I) \cap \beta_2(I)$. Consecuentemente, $\beta_1(I) \cup \beta_2(I) \subset C_n(X) - C_{nK}(X)$ es arco-conexo.

Para (iii), construimos un arco de $\{p\}$ a $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=t+1}^{m} A_i\right)$. Por axioma de elección, para cada $j \in \{t + 1, \ldots, m\}$ elegimos $a_j \in A_j \cap X_1$. Por Lema

2.1, existe un arco ordenado $\gamma : I \to C_n(X)$ tal que $\gamma(0) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$ hasta $\gamma(1) = A_{t+1} \cup A_m$. Notemos que $K \not\subseteq \gamma(I)$. Puesto que $C_{m-t}(X_1)$ es arco-conexo, existe un arco $\alpha_3 : I \to C_{m-t}(X_1)$ tal que $\alpha_3(0) = \{p\}$ y $\alpha_3(1) = \{a_{t+1}, \dots, a_m\}$. Definimos ahora

$$\beta_3(t) = \begin{cases} \alpha_3(2t) \cup \{p\}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma(2t-1) \cup \{p\}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Luego, β_3 está bien definida. Como en los casos ya analizados, tenemos que $K \not\subseteq \beta_3(t)$, para cada $t \in I$ y $\beta_3(I)$ es un arco contenido en $C_n(X) - C_{nK}(X)$ que pasa por $\{p\}$ y $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=t+1}^{m} A_i \right)$. Con todo lo anterior, notemos que $\{p\} \cup \left(\bigcup_{i=t+1}^{m} A_i \right) \in \beta_3(I) \cap (\beta_1(I) \cap \beta_2(I))$. Se tiene que $\beta_1(I) \cup \beta_2(I) \cup \beta_3(I) \subset C_n(X) - C_{nK}(X)$ es arco-conexo. Si $K \cap A = \emptyset$, entonces $\beta_1(I) \cup \beta_2(I) \cup \beta_3(I)$ es un subcontinuo de $C_n(X) - C_{nK}(X)$ que contiene a $\{p\}$ y a A. Por otra parte, si $A \cap K \neq \emptyset$, existe $j \in \{t+1, \dots m\}$ tal que $A_j \cap K \neq \emptyset$. Ya que $K \not\subseteq A$, existe $x \in A_j$ y sin pérdida de generalidad, $j = 1$ o $j = t+1$. Si $j = 1$, construimos β_1, β_2 y β_3 como antes. Finalmente, si $j = t+1$, construimos β_1, β_2 y β_3 de tal forma que su imagen no contenga a K. Se sigue el resultado. □

Analizamos ahora la contención de n-celdas en nuestro hiperespacio.

Teorema 4.9. *Sean X un continuo no degenerado y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_K^n(X)$ contiene una n-celda para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sean $K \in 2^X$ y $x \in K$. Tomamos $A_1, \dots A_n$ subcontinuos propios ajenos por pares de $X - \{x\}$. Utilizamos el Lema 2.1 para construir los arcos ordenados $\alpha_i : I \to C(A_i)$ tales que $\alpha_i(0) = \{a_i\}$ y $\alpha_i(1) = A_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la elección de los subcontinuos A_i, tenemos que $K \not\subseteq \alpha_i(t)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $t \in I$. Finalmente, si definimos la función $\alpha : I^n \to C_n(X)$ tal que $\alpha((t_1, \dots, t_n)) = q_K^n(\alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n))$ para cada $(t_1, \dots, t_2) \in I^n$, observamos que $\alpha(I)$ es un encaje de I^n en $C_K^n(X)$ y se tiene el resultado. □

Es posible hallar k-celdas con $k > n$ en $C_K^n(X)$ bajo ciertas condiciones de X.

Teorema 4.10. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $X - \{x\}$ contiene n subcontinuos descomponibles ajenos por pares para algún $x \in X$, entonces $C_K^n(X)$ contiene una $2n$-celda.*

Demostración. Sean $M_1, \ldots, M_n$ subcontinuos descomponibles ajenos por pares de $X - \{x\}$, para algún $x \in X$. Al ser descomponibles, sean A_i, B_i subcontinuos tales que $M_i = A_i \cup B_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por [7, Teorema 3.2], es posible asumir que $A_i \cap B_i$ es conexo, $A_i - (A_i \cap B_i) \neq \emptyset$, $B_i - (A_i \cap B_i) \neq \emptyset$ y $[A_i - (A_i \cap B_i)] \cap [B_i - (A_i \cap B_i)] = \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por Lema 2.1, existen arcos ordenados $\alpha_i : I \to C(A_i)$ y $\beta_i : I \to C(B_i)$ tales que $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = A_i \cap B_i$, $\alpha_i(1) = A_i$ y $\beta_i(1) = B_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos la función $\gamma : I^{2n} \to C_K^n(X)$ definida por $\gamma((t_1, \ldots, t_{2n})) = q_K^n(\alpha_1(t_1), \ldots, \alpha_n(t_n), \beta_1(t_{2n+1}), \ldots, \beta_1(t_{2n}))$. Esta función está bien definida y es un encaje de I^{2n} en $C_K^n(X)$, llegando a la conclusión deseada. $\square$

Ahora probamos un par de resultados sobre contractibilidad.

Teorema 4.11. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $C_{nK}(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$. Por Lema 2.1, existe un arco ordenado $\alpha : I \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = K$ y $\alpha(1) = X$. Definamos la función $H : C_{nK}(X) \times I \to C_{nK}(X)$ definida por $H(A, t) = \alpha(t) \cup A$. Veamos que $H(C_{nK}(X) \times I) \subset C_{nK}(X)$. Sean $A \in C_{nK}(X)$ y $t \in I$. Por [13, Teorema 15.3], toda componente de K intersecta a $\alpha(t)$ para cada $t \in I$. Dado que $K \subset A$, tenemos que cada componente de A intersecta a $\alpha(t)$. Se sigue que $A \cup \alpha(t)$ tiene a lo más n componentes. Notemos ahora que $H(A, 0) = \alpha(0) \cup A = A$ y $H(A, 1) = \alpha(1) \cup A = X$, para cada $A \in C_{nK}(X)$. Concluimos que $C_{nK}(X)$ es contráctil. $\square$

Teorema 4.12. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. $C_n(X)$ es contráctil si y sólo si $C_K^n(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $K \in 2^X$ y supongamos que $C_n(X)$ es contráctil. Por ende, existe $H : C_n(X) \times I \to C_n(X)$ tal que $H(A, 0) = A$ y $H(A, 1) = X$, para cada $A \in C_n(X)$. Definimos la función $G : C_n(X) \times I \to C_n(X)$ tal que

$$G(A, t) = \bigcup \{H(A, s) \colon 0 \leq s \leq t\},$$

el cual define el segmento de la homotopía asociada a H. Por [13, Lema 16.3], G es una función continua. Más aún, tenemos que $G(\{A\} \times I)$ es un arco ordenado desde A hasta X, para cada $A \in C_n(X)$. Verificaremos que $G(C_{nK}(X) \times I) = C_{nK}(X)$. Para ello, notemos que $G(C_{nK}(X) \times \{0\}) = \{B \in C_n(X) \colon G(A, 0) = B, A \in C_{nK}(X)\} = \{B \in C_n(X) \colon H(A, 0) = A = B\} = C_{nK}(X)$. Esto implica que $C_{nK}(X) \subset G(C_{nK}(X) \times I)$. Por otro lado, sea $A \in G(C_{nK}(X) \times I)$. Notemos que $G(A, 0) = A$ y $G(A, 0) \subset G(A, t)$, para cada $t \in I$. Luego, $K \subset A \subset G(A, t)$. Esto es, $G(A, t) \in C_{nK}(X)$, para cada $t \in I$. Definimos la función $L : C_K^n(X) \times I \to C_K^n(X)$ por

$$L(\mathcal{A}, t) = q_K^n(G((q_k^n)^{-1}(\mathcal{A}), t)).$$

Notemos que $L(\mathcal{A}, 0) = q_K^n(G((q_K^n)^{-1}(\mathcal{A}), 0)) = q_K^n((q_K^n)^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ y $L(\mathcal{A}, 1) = q_K^n(G((q_K^n)^{-1}(\mathcal{A}), 1)) = q_K^n\left(\bigcup H(\mathcal{A}, 1) \colon 0 \leq s \leq 1\}\right) = q_K^n(G(C_{nK}(X) \times I)) = q_K^n(C_{nK}(X)) = C_K^n$. Esto implica que $C_{nK}(X)$ es contráctil.

Supongamos que $C_{nK}(X)$ es contráctil para cada $K \in 2^X$. En particular, si $X = K$ ocurre que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_{nK}(X)$, por lo cual se tiene que $C_n(X)$ es contráctil. □

Hablaremos ahora sobre la unicidad de hiperespacios.

Definición 4.13. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. El continuo X posee* **hiperespacio único** $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), C_K^n(X)\}$, *cada que la siguiente implicación se cumple: si Y es un continuo y $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Estudios recientes sobre unicidad de hiperespacios se pueden encontrar en [2], [4], [8]–[9]. De la definición y observando los ejemplos de las Figuras (b) y (l), se sigue que las gráficas finitas no poseen hiperespacio único $C_K^n(X)$.

Un concepto importante en el estudio de unicidad es la dimensión.

Teorema 4.14. *Sean X un continuo, $K \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\dim[C_K^n(X)] = \dim[C_n(X) - C_{nK}(X)].$$

Demostración. Es claro que $C_K^n(X) - \{C_K^n\}$ es homeomorfo a $C_n(X) - C_{nK}(X)$. Luego, la dimensión de un espacio no se incrementa al colocarle un punto por [19, 7.4], por lo que el resultado se sigue. □

Recordemos el siguiente resultado sobre la dimensión de gráficas finitas.

Teorema 4.15. *[20, Teorema 2.4] Si G es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(G)$, entonces*

$$\dim_A[C_n(G)] = 2n + \sum_{p \in A \cap R(G)} (\mathrm{ord}(p, G) - 2).$$

Debido a que $q_K^1|_{C(X)-C_K(X)}$ es un homeomorfismo, por Teorema 4.15, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sean X una gráfica finita y $K = \{p\} \in X$. Si $A \in C(X) \setminus C_K(X)$, entonces*

$$\dim_{q_K^1(A)}[C_K^1(X)] = 2 + \sum_{r \in R(X) \cap A} (\mathrm{ord}(r, X) - 2)$$

Tenemos el caso particular en que X es un arco y $K = \{p\}$ para algún punto $p \in X$. Utilizaremos el concepto de **árbol** en el siguiente Teorema. Un árbol es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.

Teorema 4.17. *Sean X un arco y $K = \{p\} \subset X$. Si $C_K^1(X)$ es homeomorfo a $C_{K'}^1(Y)$ para algún Y árbol y algún $K' = \{q\} \subset Y$, entonces Y es un arco.*

Demostración. Sea $h : C_K^1(X) \to C_{K'}^1(Y)$ un homeomorfismo. Veamos que Y es a lo más un n-odo, para algún $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe un punto $r \in R(Y)$ distinto a q y sea $B \in C(X) - C_{K'}(Y)$ tal que $B \cap R(Y) \neq \emptyset$. Por Teorema 4.16, tenemos que $\dim_B[C_{K'}^1(Y)] > 2$, lo cual implica que $\dim_{h^{-1}(B)}[C_K^1(X)] > 2$. Esto es una contradicción, de acuerdo a las Figuras (b) y (d). De lo anterior, tenemos que $R(Y)$ contiene a lo más un punto, a saber, q. Sin embargo, Y no puede ser un n-odo debido a la Figura (h), ya que $C_{K'}^1(X) - \{C_{K'}^1\}$ posee n componentes mientras que $C_K^1(X) - \{C_K^1(X)\}$ posee a lo más 2 componentes. Esto implica que Y es un arco. Veamos finalmente la localización del punto $q \in Y$. Si $p \in E(X)$, $C_K^1(X)$ se modela como la Figura (b). Observemos que $q \notin O(Y)$, pues de otro modo, $C_{K'}^1(Y)$ tendría un punto de corte por Corolario 4.4, llegando a una contradicción pues h es un homeomorfismo entre hiperespacios. Se sigue que $q \in O(Y)$. De otro modo, queda demostrado que si $q \in O(X)$, entonces $q \in O(Y)$ y se completa la demostración. □

De este resultado y de los modelos realizados en la sección 3, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.18. *Sea X un árbol. Si $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $C(X)$ para todo $K \in 2^X - F_1(Cut(X))$, donde $Cut(X)$ representa el conjunto de los puntos de corte de X, entonces X es un arco o un n-odo simple.*

Así como se estudian los casos en los cuales el hiperespacio $C^1_K(X)$ coincide con el hiperespacio de subcontinuos $C(X)$, se verifican más espacios que puedan coincidir con $C^1_K(X)$. Recordemos que dado un espacio X, el $Cono(X)$ se define como la imagen del espacio $X \times [0,1]$ bajo una función cociente que identifica a $X \times 1$ en un punto.

Teorema 4.19. *Si X es una gráfica finita, $C^1_K(X)$ es homeomorfo al $Cono(X)$ si y sólo si $X = I$ y $K \in 2^X - F_1((0,1))$ o $X = \mathcal{S}^1$ y $K \in 2^X$.*

Demostración. Sea $h : Cono(X) \to C^1_K(X)$ un homeomorfismo. Puesto que X es una gráfica finita, tenemos que $\dim(Cono(X)) = 2$, por lo que $\dim(C(X)) = 2$. Veamos que X no tiene puntos de ramificación. Notemos que para cada $y \in Cono(X)$, se tiene que y no es un punto de corte de X. Por ende, $h(y)$ no es un punto de corte de $C^1_K(X)$. En particular, C^1_K no es un punto de corte de $C^1_K(X)$. Analizaremos dos casos.

Caso 1. $|K| = 1$. Sea $z \in X$ tal que $K = \{z\}$. Por Corolario 4.4, z no es punto de corte de X. Luego, z es un punto extremo de X o z está en una curva cerrada simple.

Caso 2. $|K| \geq 2$. Sea $C \in C(X)$ tal que $K \subset C$ y supongamos que existe $p \in R(X)$. Si $p \in X - C$, existe $C(p) \in C(X)$ tal que $p \in C(p) \subset X - C$ puesto que X es gráfica finita. Más aún, $\dim_{C(p)}[C(X)] \geq 3$. Por la construcción realizada, $C(p) \notin C_K(X)$. Por el homeomorfismo h, se tiene que $\dim_{h^{-1}(C(p))}[Cono(X)] \geq 3$, lo cual es una contradicción. Ahora supongamos que $p \in C$. Seleccionamos un punto $q \in K - C$ y puesto que X es un espacio Hausdorff, se tiene que existen vecindades abiertas ajenas U, V de p y q respectivamente. Como X es localmente conexo (al ser gráfica finita) existe un subcontinuo $C(p)$ de X tal que $p \in C(p) \subset U$. De la construcción, tenemos que $K \nsubseteq C(p)$, por lo que $C(p) \notin C_K(X)$ y $\dim_{C(p)}[C(X))] \geq 3$. De manera análoga, se tiene una contradicción. Concluimos que X no contiene puntos de ramificación.

De ambos casos, se concluye que X es un arco o una curva cerrada simple pues X no contiene triodos.

Supongamos que $X = I$ y $K \in 2^X - F_1((0,1))$. Supongamos que $K = \{0\}$ o $K = \{1\}$. Por Figura (a), $C_K(X)$ es un arco y $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$. Si $K \in 2^X - F_1(X)$, sean $a = \text{mín}[K]$ y $b = \text{máx}[K]$. Si $a = 0$ o $b = 1$, entonces $C_K(X)$ es un arco y por ende, $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$. Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, por el modelo de $C^1_K(X)$, tenemos que este es homeomorfo a una 2-celda. Se sique que $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.

Finalmente, supongamos que $X = \mathcal{S}^1$ y $K \in 2^X$. Notemos que si K es unitario o un subarco, $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $C(X)$ (véase Figrua (k)). Luego, $C^1_K(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$, como se quería.

$\square$

En la actualidad, el autor se encuentra inverstigando la unicidad de este hiperespacio para árboles. En particular, se está buscando la respuesta a la siguiente pregunta.

Pregunta 1. *¿El hiperespacio $C^n_K(X)$ posee hiperespacio único en la clase de los árboles?*

Agradecimientos

El autor agradece a los árbitros por su tiempo y valiosas observaciones sobre este proyecto, las cuales mejoraron significativamente su calidad.

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, J. A. Martínez-Cortez, *On the hyperspace $C_n(X)/C_{nK}(X)$*, Comment. Math. Univ. Carolin. 62, 2 (2021), 201–224.

[2] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, Topol. Appl. 268 (2019).

[3] F. Corona-Vázquez, R. A. Quiñones-Estrella, J. Sánchez-Martínez, H. Villanueva, *Hyperspaces $C(p, X)$ of finite graphs*, Topol. Appl. 248 (2018) 40–49.

[4] F. Corona-Vázquez, R. A. Quiñones-Estrella, J. Sánchez-Martínez, R. Toalá-Enríquez, *Uniqueness of the hyperspaces $C(p,X)$ in the class of trees*, Topol. Appl. 269 (2020) 106926.

[5] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[6] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Uniqueness of the (n,m)-fold hyperspace suspension for continua*, Topology Appl. 325 (2023), 108385.

[7] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M.J. López, F. Macías-Romero, *Properties of the (n,m)-fold hyperspace suspension of continua*, Rev. Integr. Temas Mat.,40 (2022), No. 2,159–168.

[8] D. Herrera-Carrasco, A. Libreros-López, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, Topology Appl. 341 (2024) 108729.

[9] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique n-fold hyperspace suspension,* Houston J. Math. Volume 44, Number 4, (2018), 1335–1365.

[10] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.

[11] A. Illanes, *Models of hyperspaces,* Topology Proc. 41 (2013), 39–69.

[12] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[13] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, New York, (1968).

[14] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology Appl. 109 (2001), 237–256.

[15] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[16] J. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces* $C(p, X)$, Topology Proc. 27 (2003), 259–285.

[17] S.B. Nadler, Jr., Hyperspaces of sets. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.

[18] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[19] S.B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana, Mexico, 2002.

[20] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of* n*-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006), 783–799.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
Avenida Pedro de Alba S/N, Colonia Niños Héroes,
San Nicolás de los Garza, Nuevo León. C.P. 66451

gerardo.hernandezvld@uanl.edu.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 24, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-XXXX-XX-X

Capítulo 8

Conociendo el (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo

Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP.

Resumen

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Existen varios hiperespacios de X, por ejemplo 2^X, $C_n(X)$, $F_n(X)$, $SF_n(X)$ y $HS_m^n(X)$. Este capítulo está dedicado a conocer al (n, n)-ésimo hiperespacio suspensión $HS_m^n(X)$, así como algunas propiedades que tiene este hiperespacio asociado a ciertas clases de continuos.

1 Introducción

Los espacios métricos forman una clase importante de espacios topológicos, por el simple hecho de que en ellos se puede calcular la distancia entre cualquier par de puntos. Si además agregamos las virtuosas propiedades de la conexidad y la compacidad, obtenemos espacios topológicos ricos en propiedades matemáticas y muy aptos para ser explorados y desarrollar nuevos teoremas que sirven tanto para la Topología misma como para otras ramas de matemáticas, como el Análisis Matemático, por ejemplo.

Estos espacios topológicos, con tales atractivas características, tienen un nombre especial; se llaman continuos, y habitan dentro de la Topología General en un área llamada Teoría de Continuos.

Por otro lado, dado un espacio topológico X, podemos considerar alguna colección bien definida $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X y preguntarnos si a $\mathcal{H}$ se le puede dotar de alguna topología, o si $\mathcal{H}$ será espacio métrico, o de manera más ambiciosa, si $\mathcal{H}$ podrá ser un continuo.

Tales colecciones bien definidas de un espacio topológico X se conocen como hiperespacios cuando se les puede dotar de alguna topología.

Por nuestra parte pretendemos, en este capítulo de libro, conocer un poco a un hiperespacio especial llamado (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión, veremos aquí cómo es y algunas propiedades que tiene.

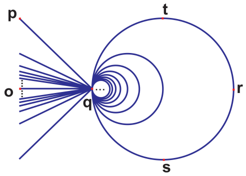
La segunda sección retoma lo más básico de continuos e hiperespacios para adentrarnos a esta teoría. Luego, en la sección 3 tenemos la definición espacios de descomposición y espacios cociente, así como propiedades básicas de estos espacios. La sección 4 está dedicada al (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión, para conocerlo bien y ver algunas propiedades generales de éste. En la sección 5 vemos la propiedad del punto fijo presente en el (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión con ciertas hipótesis. En la secciones 6, 7 y 8 vemos propiedades interesantes del hiperespacio protagonista asociadas a clases específicas de continuos. La seección 9 aborda algunas clases de continuos que no tienen (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión único. Finalmente, en la sección 10 tenemos algunos problemas abiertos de importancia actual.

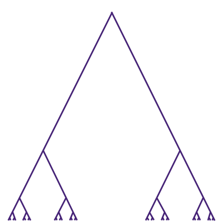
2 Continuos e hiperespacios

En esta sección tenemos las definiciones y teoremas básicos sobre continuos e hiperespacios en general.

Como mencionamos en la introducción, existen unos espacios topológicos mágicos, con características especiales, llamados continuos.

Definición 2.1. *Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*





Habiendo precisado ya formalmente qué es un continuo, es momento de conocer la noción de hiperespacio, por lo que vemos a continuación la siguiente definición.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideremos la familia siguiente de subconjuntos de X :

$$2^X = \{A \subset X\colon A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

A la familia 2^X se le dota de la topología de Vietoris para considerarse como un hiperespacio de X. Veamos cómo es la topología de Vietoris.

Si X es un continuo, $m \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_m$ son subconjuntos de X, entonces definimos

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle =$$
$$\left\{A \in 2^X\colon A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ y para cada } i \in \{1, \ldots, m\},\ A \cap U_i \neq \emptyset\right\}.$$

El siguiente teorema nos muestra cómo es una base para la topología de 2^X.

Theorem 2.1. *[6, Teorema 1.2] Si X es un continuo, entonces*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle\colon m \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_m \text{ son abiertos en } X\}$$

es una base para una topología de 2^X.

A la topología generada por $\mathcal{B}$ se le conoce como la **topología de Vietoris.**

Como subespacios de 2^X de un continuo X, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$F_n(X) = \{A \subset X\colon A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \subset X\colon A \text{ es cerrado en } X,\ \text{no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Notemos que para un continuo X se tiene que $F_n(X) \subset C_n(X) \subset 2^X$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, en el libro de Nadler [13, 4.2], se prueba que 2^X es metrizable. La métrica que se define para 2^X se conoce como **métrica de Hausdorff.** Como $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, se tiene que $F_n(X)$ y $C_n(X)$ también son metrizables. De hecho, a $F_n(X)$ y a $C_n(X)$, considerados con la métrica de Hausdorff, se les conoce como el **n-ésimo producto simétrico** de X y el **n-ésimo hiperespacio** de X, respectivamente.

De hecho, la topología generada por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris. Enunciamos a continuación este hecho como un lema.

Lemma 2.2. *[6, Teorema 3.1] Sea X un continuo. La topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff en 2^X son iguales.*

El hiperespacio que nos interesa en este capítulo de libro es el (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo, el cual se define como el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$, que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_m(X)$ a un punto, donde $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, el cual se denota por $HS_m^n(X)$. Del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión hablaremos con más detalle en la sección creada especialmente para éste.

Dentro de las características más relevantes para los hiperespacios está la propiedad de ser único, por lo que anotamos a continuación la definición de hiperespacio único.

Definición 2.2. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), SF_n(X), HS_m^n(X)\}$. Se dice que X tiene **hiperespacio único** $\mathcal{H}(X)$, si la implicación siguiente es verdadera: si Y es un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

3 Espacios de descomposición y espacios cociente

Esta sección está dedicada a la revisión de los espacios de descomposición y los espacios cociente como un preliminar para comprender la estructura que tiene el hiperespacio que estamos revisando en este trabajo.

Iniciamos recordando que es la topología cociente.

Teorema 3.1. *Si X es un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \to Y$ una función suprayectiva, entonces*

$$\mathcal{T}_g = \{U \subset Y : g^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología para Y.

Demostración. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_g$. Como $g^{-1}(U_1 \cap U_2) = g^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$, tenemos que $g^{-1}(U_1 \cap U_2)$ es abierto en X. Luego, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_g$.

Ahora, sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_g$. Luego, para cada $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $g^{-1}(U)$ es abierto en X. Como $g^{-1}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} g^{-1}(U)$, tenemos que $g^{-1}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$ es abierto en X. Así, $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}_g$.

Además, como $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $g^{-1}(Y) = X$, tenemos que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_g$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_g$ es una topología para Y. □

La topología $\mathcal{T}_g$ del teorema 3.1 tiene un nombre especial, como vemos a continuación.

Definición 3.2. *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \to Y$ una función suprayectiva. La topología*

$$\mathcal{T}_g = \{U \subset Y : g^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

*es conocida como la **topología cociente** sobre Y inducida por la función g.*

Dados X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \to Y$ una función suprayectiva, notemos que la función g es continua con la topología $\mathcal{T}_g$. Además, si $\mathcal{T}$ es una topología para Y con la que g resulta ser continua, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_g$.

Definición 3.3. *Un espacio topológico Y es un **espacio cociente** de un espacio topológico X si existe una función suprayectiva $g : X \to Y$ tal que $\mathcal{T}_g$ coincide con la topología de Y. En tal caso, la función g se llama **función cociente.***

Dado un espacio topológico X y una partición de X, se puede dotar de una topología a dicha partición de X, tal como lo asegura el resultado siguiente.

Teorema 3.4. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es una partición de X, entonces*

$$T_{\mathcal{P}} = \left\{ \mathcal{U} \subset \mathcal{P} \colon \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \text{ es un conjunto abierto en } X \right\}$$

es una topología para $\mathcal{P}$.

Demostración. Como $\bigcup_{U\in\mathcal{P}} U = X$ y X es abierto en X, tenemos que $\mathcal{P} \in T_{\mathcal{P}}$. También notemos que $\emptyset \subset \mathcal{P}$ y $\bigcup_{U\in\emptyset} U = \emptyset$. Como $\emptyset$ es abierto en X, tenemos que $\emptyset \in T_{\mathcal{P}}$.

Ahora, sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$. Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$. Como $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ y $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ son abiertos en X, tenemos que $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) \cap \left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\right)$ es abierto en X. Notemos que

$$\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) \cap \left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\right) = \bigcup_{C\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} C.$$

Así, $\bigcup_{C\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} C$ es abierto en X. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$.

Sean $\mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$, para $\alpha \in J$. Veamos que $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$. Para cada $\alpha \in J$, tenemos que $\bigcup_{A\in\mathcal{A}_\alpha} A$ es abierto en X. Luego, $\bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_\alpha} A\right)$ es abierto en X. Notemos que

$$\bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_\alpha} A\right) = \bigcup_{C\in\bigcup_{\alpha\in J}\mathcal{A}_\alpha} C.$$

Así, $\bigcup_{C\in\bigcup_{\alpha\in J}\mathcal{A}_\alpha} C$ es abierto en X. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$. $\square$

Enseguida recordamos el nombre de la topología $T_{\mathcal{P}}$ y del espacio $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ que aparecen en el teorema 3.4.

Definición 3.5. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una partición de X. El espacio topológico $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un **espacio de descomposición** de X y la topología $T_{\mathcal{P}}$ es la **topología de descomposición.***

Ejemplo 3.6. *Sean $X = [0,1]$ y $A = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos $\mathcal{P} = \{\{x\} \colon x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$. El espacio $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio de descomposición de X. De hecho, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es homeomorfo al continuo conocido como el **Arete Hawaiano.***

Definición 3.7. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una partición de X. La* ***función natural*** *de X sobre $\mathcal{P}$ es la función $q : X \to \mathcal{P}$ definida por $q(x) = P_x$, donde P_x es el único elemento de la partición que contiene al punto x.*

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una partición de X. Notemos que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$, entonces

$$q^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in X\colon q(x) \in \mathcal{U}\} = \{x \in X\colon P_x \in \mathcal{U}\} = \bigcup_{P_x \in \mathcal{U}} P_x.$$

Así, si $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{P}$, tenemos que $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ es abierto en X. Luego, $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X. Por lo tanto, la función natural q es continua.

Notemos que dado un espacio de descomposición $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ de un espacio topológico X, la topología $T_{\mathcal{P}}$ es la topología más grande tal que la función natural es continua.

Además, notemos que q es suprayectiva. De hecho, q es una función cociente como lo establece el resultado siguiente.

Teorema 3.8. *Todo espacio de descomposición de un espacio topológico X es un espacio cociente de X.*

Demostración. Sea $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X. Veamos que la función $q : X \to \mathcal{P}$ satisface que $\mathcal{T}_q = T_{\mathcal{P}}$. Como q es una función continua y suprayectiva con la topología $T_{\mathcal{P}}$, tenemos que $T_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}_q$. Por otro lado, si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_q$, por la definición de la topología $\mathcal{T}_q$, tenemos que $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X. Como $q^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, tenemos que $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ es abierto en X. Así, $\mathcal{U} \in T_{\mathcal{P}}$. Luego, $\mathcal{T}_q \subset T_{\mathcal{P}}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_q = T_{\mathcal{P}}$. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio cociente de X. □

Sean X y Y espacios topológicos, para una función cociente $g : X \to Y$, consideramos la colección

$$\mathcal{P}_g = \{g^{-1}(y)\colon y \in Y\}.$$

Notemos que $\mathcal{P}_g$ es una partición de X. Además, $\mathcal{P}_g$ con la topología de descomposición $T_{\mathcal{P}_g}$ es un espacio topológico homeomorfo a Y, demostramos este hecho a continuación.

Definición 3.9. *Sea X un espacio topológico. Una partición $\mathcal{P}$ de X es* ***semicontinua superior*** *si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada U abierto en X con $P \subset U$, existe un abierto V en X con $P \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.*

El teorema 3.10 nos mostrará más adelante que nuestro hiperespacio en estudio tiene la estructura de espacio de descomposición semicontinua superior.

Teorema 3.10. *Si X es un espacio topológico, A un conjunto cerrado en X y $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{A\}$, entonces $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superior de X.*

Demostración. Sean $P \in \mathcal{P}$ y U un abierto en X con $P \subset U$.

Caso I. Supongamos que $P = A$. Sean $V = U$ y $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \cap V \neq \emptyset$. Si $Q = A$, entonces $Q \subset U$; si $Q = \{x\}$, para algún $x \in X - A$, entonces $x \in V$, es decir, $Q \subset U$.

Caso II. Supongamos que $P = \{x\}$, para algún $x \in X - A$. Tomemos $V = U \cap (X - A)$. Sea $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \cap V \neq \emptyset$. Notemos que $Q \neq A$, pues de lo contrario, si $Q = A$, entonces $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap V = A \cap (U \cap (X - A)) = \emptyset$. Así, tenemos que $Q = \{y\}$, para algún $y \in X - A$. Como $\{y\} \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $y \in U$, y así $Q \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superior de X. $\square$

El siguiente teorema nos ayuda a probar que toda descomposición semicontinua superior de un continuo es un continuo.

Teorema 3.11. *[13, 3.9] Si $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superior de un espacio métrico compacto, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable.*

Teorema 3.12. *Si $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superior de un continuo, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo.*

Demostración. Sea X un continuo y $q : X \to \mathcal{P}$ es la función natural. Como q es continua, y la compacidad y la conexidad son invariantes topológicos, tenemos que $\mathcal{P}$ es compacto y conexo. Además, por el teorema 3.11, tenemos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo. $\square$

4 El (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión

El hiperespacio protagonista en este trabajo es el (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo, por eso dedicamos esta sección para conocerlo más a detalle.

El (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo tiene su origen en el hiperespacio $HS(X)$, que fue el hiperespacio suspensión definido inicialmente, como el espacio cociente $C_1(X)/F_1(X)$, que se obtiene de $C_1(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto.

Años más tarde, se generaliza y, surge el hiperespacio $HS_n(X)$, el cual de manera análoga, se define como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$, que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_n(X)$ a un punto.

Posteriormente, en 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez van más lejos y siguiendo la misma idea definen en [1] el (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo X como el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$, que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_m(X)$ a un punto, donde $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, el cual se denota por $HS_m^n(X)$.

Veamos estas ideas de una manera más formal.

Definición 4.1. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. El (n,m)-**ésimo hiperespacio suspensión** de un continuo, que denotamos por $HS_m^n(X)$, es el espacio de descomposición de $C_n(X)$ dado por*

$$HS_m^n(X) = \{\{A\} \colon A \in C_n(X) - F_m(X)\} \cup \{F_m(X)\},$$

donde $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

Notación 4.2. *A lo largo de este trabajo usaremos las siguientes equivalencias $HS_1^1(X) = HS(X)$ y $HS_n^n(X) = HS_n(X)$.*

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos en este caso particular por

$$q_X^{(n,m)} : C_n(X) \to HS_m^n(X)$$

a la función natural. Al punto $q_X^{(n,m)}(F_m(X))$ lo denotamos por F_X^m.

En seguida algunos resultados que nos ayuda a probar que el (n,m)-ésimo producto simétrico de un continuo es un continuo.

Teorema 4.3. *[5, 2.3] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. La función $g : X^n \to F_n(X)$ definida para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ por*

$$g((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

es suprayectiva y continua.

Teorema 4.4. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como el producto finito de espacios compactos es compacto y el producto finito de espacios conexos es conexo, tenemos que X^n es compacto y conexo. Como la conexidad y la compacidad son invariantes bajo funciones continuas, por el teorema 4.3, tenemos que $F_n(X)$ es conexo y compacto. Así, $F_n(X)$ es un continuo. □

Teorema 4.5. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Sea $f : C(X)^n \to C_n(X)$ la función definida, para cada $(A_1, \ldots, A_n) \in C(X)^n$, por $f((A_1, \ldots, A_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. En [12, (1.48)] se prueba que la función f es continua. Es claro que la función f es suprayectiva. En [9, 1.8.5] se prueba que $C(X)$ es compacto. En [12, (1.13)] se prueba que $C(X)$ es conexo. Como el producto finito de espacios compactos es compacto y el producto finito de espacios conexos es conexo, tenemos que $C(X)^n$ es compacto y conexo. Como la conexidad y la compacidad son invariantes bajo funciones continuas, tenemos que $C_n(X)$ es conexo y compacto. Así, $C_n(X)$ es un continuo. □

Ahora sí, estamos listos para ver este resultado importante.

Teorema 4.6. *El (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo es un continuo.*

Demostración. Sean X un continuo y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Por el teorema 4.4, tenemos que $F_m(X)$ es un subconjunto compacto de $C_n(X)$. Por el teorema 4.5, tenemos que $C_n(X)$ es un continuo. Luego, $C_n(X)$ es de Hausdorff. Así, $F_m(X)$ es un cerrado en $C_n(X)$. Por el teorema 3.10, tenemos que $HS_m^n(X)$ es una descomposición semicontinua superior. Luego, por el teorema 3.12, tenemos que $HS_m^n(X)$ es un continuo. □

La arco conexidad es una propiedad natural que tiene el n-ésimo hiperespacio suspensión aún si el continuo es o no arco conexo.

Teorema 4.7. *[9, 7.1.3] Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $HS_n(X)$ es un continuo arco conexo.*

Otra propiedad interesante es que el hiperespacio $HS_m^s(X)$ se puede encajar $HS_m^n(X)$ cuando $m < n$.

Teorema 4.8. *[3, Teorema 3.3] Si X es un continuo y $n, m, s \in \mathbb{N}$ con $m \leq s < n$, entonces $HS_m^s(X)$ se puede encajar $HS_m^n(X)$.*

5 Propiedad del punto fijo

En esta sección revisamos la propiedad del punto fijo y los teoremas relacionados con el n-ésimo hiperespacio suspensión.

La propiedad del punto fijo es una característica importante a considerar en distintas áreas de Matemáticas, muy en especial dentro del Análisis Matemático, por nuestra parte revisamos los resultados que existen sobre el punto fijo para el n-ésimo hiperespacio suspensión.

Comenzamos conociendo que siginifica que un espacio topológico tenga la propiedad del punto fijo.

Definición 5.1. *Un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cualquier función continua $f : X \to X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Al punto p se le llama **punto fijo** de f.*

La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.

Teorema 5.2. *[9, 1.19 (a)] Si X es un espacio topológico que tiene la propiedad del punto fijo y Y es un espacio topológico homeomorfo a X, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Los espacios topológicos que tienen la propiedad del punto fijo son de una sola pieza, es decir, son conexos.

Teorema 5.3. *[9, 1.19 (b)] Si X es un espacio topológico que tiene la propiedad del punto fijo, entonces X es un espacio topológico conexo.*

Del teorema 5.3, tenemos que al hablar de espacios topológicos con la propiedad del punto fijo, la conexidad se convierte en una característica inherente de tales espacios topológicos. Ahora, por otro lado, la compacidad es una virtud muy apreciada en los espacios topológicos y en el Análisis Matemático (recuerde por ejemplo el teorema de los Valores Extremos), por estas dos razones, los continuos son terrenos muy fértiles para cosechar teoremas de la propiedad del punto fijo.

El continuo más sencillo que conocemos tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 5.4. *El intervalo* $[0, 1]$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida, para cada $t \in [0, 1]$, por $g(t) = f(t) - t$. Notemos que g es un función continua. Además, $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ y $g(1) = f(1) - 1 = f(0) \leq 1$. Luego, por el teorema del Valor Intermedio, existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Así, existe $p \in [0, 1]$ tal que $f(p) = p$. Por lo tanto, $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. □

Una consecuencia inmediata de los teoremas 5.2 y 5.4 es el resultado siguiente.

Corolario 5.5. *Si* X *es un arco, entonces* X *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X un arco. Tenemos que X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Por el teorema 5.2, tenemos que X tiene la propiedad del punto fijo. □

Los continuos encadenables son espacios topológicos bastante interesantes, además el hiperespacio $HS(X)$ tiene la propiedad del punto fijo si X es continuo encadenable, por esta razón, veamos ahora que es un continuo encadenable.

Definición 5.6. *Sea* X *un espacio métrico. Una familia* $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ *de subconjuntos de* X *es llamada una* ***cadena simple*** *en* X *si se cumple que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$. *A cada* U_i *se le llama* ***eslabón*** *de la cadena simple. Una cadena simple* $\mathcal{C}$ *de conjuntos abiertos de* X *es llamada una* ***ϵ-cadena*** *si el diámetro de cada eslabón es menor que* ϵ.

Definición 5.7. *Un continuo* X *se llama* ***encadenable*** *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe una familia finita de abiertos* $\{U_1, ..., U_n\}$ *de* X *tales que* $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, *para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *se tiene que* $\operatorname{diám} U_i < \epsilon$ *y* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$.

Ejemplo 5.8. *El intervalo* $[0, 1]$ *es un continuo encadenable.*

Teorema 5.9. *[9, 7.7.2] Si* X *es un continuo encadenable, entonces* $HS(X)$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Surge de manera natural la pregunta siguiente.

Pregunta 2. *Si* X *es un continuo encadenable, entonces ¿*$HS_n(X)$ *tiene la propiedad del punto fijo?*

O incluso de manera más general.

Pregunta 3. *Si* X *es un continuo encadenable, entonces ¿*$HS^n_m(X)$ *tiene la propiedad del punto fijo?*

Ahora, recordemos qué es un continuo tipo disco, para esto veamos las definiciones siguientes.

Definición 5.10. *Sean* X *y* Y *espacios métricos. Una función* $f : X \to Y$ *es una* $\epsilon-$***función*** *si* f *es continua y para todo* $x \in X$ *se tiene que diám*$(f^{-1}(f(x))) < \epsilon$.

Definición 5.11. *Sea* $\mathcal{P}$ *una colección bien definida de espacios métricos compactos. Un espacio métrico compacto* X *es* ***tipo*** $\mathcal{P}$ *si para cada* $\epsilon > 0$*, existe una* ϵ-***función*** *sobreyectiva* $f_\epsilon : X \to Y_\epsilon$*, donde* Y_ϵ *es algún elemento de* $\mathcal{P}$.

Un ejemplo vale más que mil palabras.

Ejemplo 5.12. *Un continuo* X *es* ***tipo arco*** *si para cada* $\epsilon > 0$*, existe una* ϵ*-función sobreyectiva* $f_\epsilon : X \to Y_\epsilon$*, donde* Y_ϵ *es algún arco. Un continuo es* ***tipo disco*** *si para cada* $\epsilon > 0$*, existe una* ϵ*-función sobreyectiva* $f_\epsilon : X \to Y_\epsilon$*, donde* Y_ϵ *es homeomorfo a* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

El teorema 5.9 tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 5.13. *[9, 7.7.4] Si* X *es un continuo encadenable, entonces* $HS(X)$ *es un continuo tipo disco con la propiedad del punto fijo.*

Otra clase de continuos que tienen la propiedad del punto fijo son los que tienen margen suprayectivo cero, por eso vemos a continuación cómo se definen estos continuos.

Definición 5.14. *Un continuo X tiene* ***margen suprayectivo cero,*** *si para cada subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $\pi_1(Z) = X$ se tiene que $Z \cap \Delta_X \neq \emptyset$, donde $\pi_1 : X \times X \to X$ es la proyección sobre el primer factor y $\Delta_X = \{(x, x) \colon x \in X\}$.*

Teorema 5.15. *[9, 7.7.7] Si X es un continuo que tiene margen suprayectivo cero, entonces $HS(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

También, en este caso, surgen las preguntas siguientes.

Pregunta 4. *Si X es un continuo que tiene margen suprayectivo cero, entonces ¿$HS_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

Pregunta 5. *Si X es un continuo que tiene margen suprayectivo cero, entonces ¿$HS_m^n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

El n-ésimo hiperespacio suspensión de un retracto absoluto tiene la propiedad del punto fijo, por esta razón recordemos que es un retracto absoluto antes de enunciar tan importante resultado.

Definición 5.16. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es un* ***retracto*** *de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que para cada $a \in A$, tenemos que $r(a) = a$. A la función $r : X \to A$ se le llama* ***retracción.***

Ejemplo 5.17. *Sea $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \parallel x \parallel \leq 1\}$. Sea $r : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{B}^n$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, por*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \in \mathcal{B}^n, \\ \frac{x}{\|x\|}, & si \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{B}^n. \end{cases}$$

La función r es una retracción, y por tanto, $\mathcal{B}^n$ es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 5.18. *Un* ***retracto absoluto*** *es un espacio métrico separable y no vacío X si para cada espacio métrico Z y cada encaje $h : X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es un retracto de Z.*

Ahora, un teorema de suma importancia sobre los retractos absolutos.

Teorema 5.19. *[9, 7.7.9] Si X es un retracto absoluto y $n \in \mathbb{N}$, entonces $HS_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Ahora, se ocurre pensar lo siguiente.

Pregunta 6. *Si X es un retracto absoluto y $n,m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces ¿$HS_m^n(X)$ es un retracto absoluto?*

Como mencionamos lineas atrás, los retractos absolutos tienen la propiedad del punto fijo, tal como se enuncia formalmente a continuación.

Teorema 5.20. *[7, Teorema 11, p. 343] Si X es un retracto absoluto, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Una consecuencia muy relevante de los teoremas 5.19 y 5.20 es el resultado siguiente.

Corolario 5.21. *[9, 7.7.10] Si X es un retracto absoluto y $n \in \mathbb{N}$, entonces $HS_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Si $HS_m^n(X)$ no fuera un retracto absoluto cuando X es un retracto absoluto, de todas formas queda en el aire esta cuestión.

Pregunta 7. *Si X es un retracto absoluto y $n,m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces ¿$HS_m^n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo?*

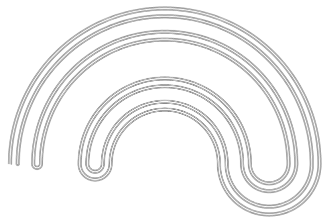
6 Hereditariamente indescomponibles

La clase de continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles son bastante interesantes por lo que dedicamos esta pequeña sección, primero para conocerlos un poco, y más adelante para conocer los resultados que se saben sobre el (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión para estas clases de continuos.

Comenzamos conociendo los continuos descomponibles e indescomponibles.

Definición 6.1. *Un continuo X es **descomponible** si X se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo X es **indescomponible** si X no es descomponible.*

Ejemplo 6.2. *Sean C el conjunto de Cantor y para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $G_n = \{x \in F\colon \frac{2}{3^n} \leq x \leq \frac{1}{3^{n-1}}\}$. Utilizando el $(\frac{1}{2}, 0)$ como centro, constrúyase la colección de semicircunferencias con ordenada no negativa y teniendo a los puntos de F como puntos extremos. Para cada $n \geq 1$, los puntos $(\frac{5}{2\cdot 3^n}, 0)$ se utilizan como los centros de las semicircunferencias con ordenada* *no positiva y teniendo a los puntos de G_n como puntos extremos. Sea K la unión de todas estas semicircunferencias, para todo $n \geq 1$. El conjunto K un continuo indescomponible tal que sus subcontinuos propios no degenerados son arcos. Este continuo se conoce como el* ***Arcoiris de Knaster.***



Arcoiris de Knaster

La cualidad de que todo subcontinuo de un continuo tenga alguna característica específica se considera como algo muy especial, se dice que la característica especial se hereda.

Definición 6.3. *Se dice que un continuo es* ***hereditariamente indescomponible*** *si todos sus subcontinuos son indescomponibles.*

Ejemplo 6.4. *El pseudoarco es un ejemplo de un continuo hereditariamente indescomponible.*

En 2004, R. Escobedo, M. López y S. Macías probaron que:

Teorema 6.5. *[2, Teorema 5.8] Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único $HS(X)$.*

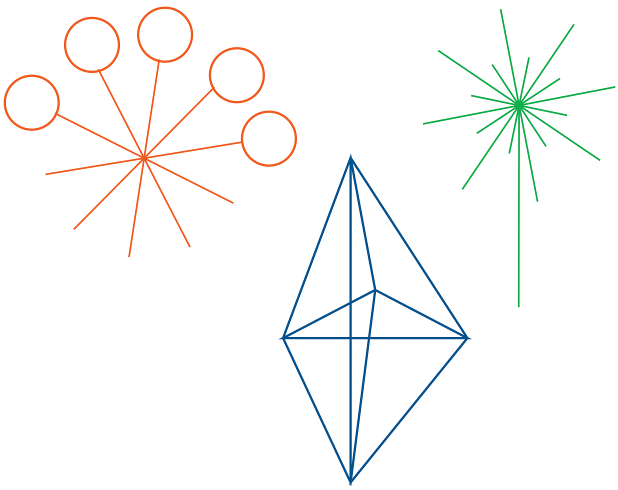
En 2006, S. Macías demostró el resultado siguiente:

Teorema 6.6. *[8, Teorema 7.1] Sea $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único $HS_n(X)$.*

7 Gráficas finitas

El (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión tiene algunas propiedades interesantes y muy actuales para cuando el continuo asociado es una gráfica finita. Por esta razón, dedicamos esta sección, que iniciamos con la definicón de gráfica finita.

Definición 7.1. *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, o son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.*



Ejemplo 7.2. *Un n-**odo simple** X es un continuo que es unión de n arcos $J_1, J_2, \ldots, J_n$ tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $J_i \cap J_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, y p es un punto extremo de cada uno de los arcos J_i. Los n-odos simples son ejemplos de gráficas finitas. En la Figura 2 vemos gráficamente un 10-odo simple y un 17-odo simple.*

En 2014, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez probaron que:

Teorema 7.3. *[10, Teorema 3.2] Sea $n \in \mathbb{N}$. Las gráficas finitas tienen hiperespacio único $HS_n(X)$.*

En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez probaron lo siguiente:

Teorema 7.4. *[1, Teorema 3.6] Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único $HS^n_m(X)$.*

8 Continuos enrejados

Los continuos enrejados forman una familia importante dentro de la Teoría de Continuos e Hiperespacios, aquí dedicamos esta pequeña sección para ver que la clase de continuos enrejados tiene (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión único.

Dado un continuo X, sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$$

y

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Definición 8.1. *Un continuo X es **casi enrejado** si $\mathcal{G}(X)$ es denso en X.*

Ahora, veamos que es un continuo enrejado.

Definición 8.2. *Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ tal que para cada $U \in \mathfrak{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Veamos ahora un par de ejemplos para conocer más de continuos casi enrejados y continuos enrejados.

Ejemplo 8.3. *Sea $X = ([-1,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right)\right)$. El conjunto X considerado con la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es un continuo. En este caso, $\mathcal{P}(X) = \{(0,0)\}$. El continuo X (véase Figura 4) es casi enrejado pero no es enrejado, porque para cualquier conjunto abierto U en X que tiene al punto $(0,0)$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ no es conexo.*

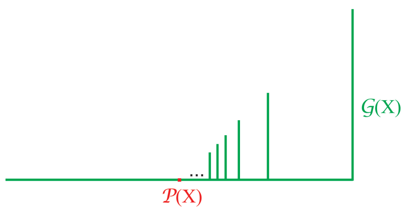


Figura 4.
Ejemplo de continuo casi enrejado que no es enrejado.

Ejemplo 8.4. *El continuo de la Figura 5 es definido de la manera siguiente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{(x, 2^{-n+1}) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\}$ y $A_0 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada entero m tal que*

$0 \leq m \leq 2^{n+1}$, *sea* $B_{n,m} = \{(m2^{-n-1}, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$. *Finalmente, consideremos*

$$X = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{2^{n+1}} B_{n,m}\right)\right).$$

El continuo X es un continuo enrejado. En este espacio $\mathcal{P}(X) = A_0$ y obviamente $\mathcal{G}(X) = X - A_0$. Notemos que X no es gráfica finita ni dendrita.

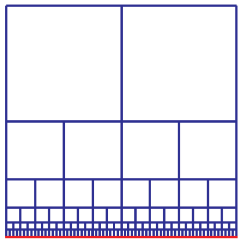


Figura 5. *Ejemplo de continuo enrejado.*

En 2015, D. Herrera, M. López y F. Macías demostraron el resultado siguiente:

Teorema 8.5. *[11, Teorema 3.4] Sea $n \in \mathbb{N}$. Los continuos enrejados tienen hiperespacio único $HS_n(X)$.*

En 2023, G. Hernández, D. Herrera, M. López y F. Macías demostraron que:

Teorema 8.6. *[4, Teorema 6.10] Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. La clase de los continuos enrejados tiene hiperespacio único $HS^n_m(X)$.*

9 Sin (n,m)-ésimo hiperespacio suspensión único

En esta sección vamos a necesitar el concepto de conexidad local, por lo que comenzamos esta sección con la definición y un ejemplo de esta clase de espacios topológicos.

Definición 9.1. *Un espacio topológico X es localmente conexo en $p \in X$ si y sólo si para todo conjunto U abierto en X con $p \in U$, existe un conjunto V*

abierto en X tal que V es conexo y $p \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es ***localmente conexo.***

Ejemplo 9.2. *Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ y U es abierto en $\mathbb{R}^n$ con $p \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \in B_X(p, \varepsilon) \subset U$. Además, el conjunto $B_X(p, \varepsilon)$ es conexo y abierto en X. Luego, $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo.*

Ahora, tenemos el concepto de contracción.

Definición 9.3. *Sea X un espacio topológico. Una* ***contracción*** *es una función continua $h : X \times [0, 1] \to X$ tal que*

(a) Para todo $x \in X : h((x, 0)) = x$.

(b) Existe $p \in X$ tal que para todo $x \in X : h((x, 1)) = p$.

Un espacio topológico X es ***contráctil*** *si existe una contracción $h : X \times [0, 1] \to X$.*

Rocordemos la noción de arco libre.

Definición 9.4. *Sean X un continuo y A un arco contenido en X con puntos extremos p y q. Decimos que A es un* ***arco libre de*** *X si $A - \{p, q\}$ es un abierto en X.*

También necesitamos saber qué es una dendrita.

Definición 9.5. *Una* ***dendrita*** *es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 9.6. *Sea*

$$F_\omega = [(-1, 0), (1, 0)] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(0, 0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right] \right).$$

Este continuo es una dendrita y se conoce precisamente como F_ω.

Ejemplo 9.7. *Sean*

$$W_R = [(-1, 0), (0, 0)] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left(-\frac{1}{n}, 0 \right), \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right] \right)$$

y $W = W_R \cup [(0, 0), (1, 0)]$. *Los continuos W_R* y *W son dendritas.*

Respecto de la no unicidad del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión, en [4] los autores demuestran los siguientes resultados:

Teorema 9.8. *[4, Teorema 7.1] Si X es continuo localmente conexo y contraíble sin arcos libres y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces X no tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$.*

Teorema 9.9. *[4, Teorema 7.4] Si X una dendrita que no es continuo casi enrejado y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces X no tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$.*

10 Problemas abiertos

Las siguientes preguntas son de importancia actual y están planteadas en [4].

Pregunta 8. *[4, Pregunta 7.5] Si X es un continuo descomponible y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces ¿$HS_m^n(X)$ es localmente arco conexo en F_X^m?*

Ahora, para ver otra pregunta, consideremos el resultado siguiente demostrado en [4].

Teorema 10.1. *[4, Teorema 5.8] Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $n, m, s, t \in \mathbb{N}$ con $t \leq s$ y $m \leq n$. Si Y es un continuo tal que existe un homeomorfismo $h : HS_m^n(X) \to HS_t^s(Y)$ con $h(F_X^m) = F_Y^t$, entonces Y is homeomorfo a X.*

Respecto del teorema 10.1, está la cuestión siguiente.

Pregunta 9. *[4, Pregunta 7.6] ¿Se sigue cumpliendo la conclusión del teorema 10.1 si eliminamos la suposición de que $h(F_X^m) = F_Y^t$?*

Finalizamos con esta pregunta.

Pregunta 10. *[4, Pregunta 7.8] Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado, entonces ¿X tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$?*

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo. De igual manera se agradece a los editores por brindar la oportunidad de formar parte de esta edición.

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace* $HS_m^n(X)$ *for a finite graph* X *is unique,* Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[2] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[3] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Properties of the* (n,m)*-fold hyperspace suspension of continua,* Revista Integración, Vol. 40, N∘ 2, 2022, pág. 159–168

[4] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Uniqueness of the* (n,m)*-fold hyperspace suspension for continua,* Topology Appl. 325 (2023) 108385.

[5] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no. 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] Illanes A., Nadler Jr. S. B., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[7] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II,* Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[8] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61) (2006), 335–343.

[9] S. Macías, *Topics on Continua,* Second edition, Springer, 2018.

[10] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$,* Topology Proc. 44 (2014), 75–95.

[11] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n-fold hyperspace suspension,* Topology Appl. 196 (2015), 652–667.

[12] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Deckker, New York, Basel, 1978.

[13] Nadler Jr. S. B., *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

luisguerrerom@fcfm.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Índice de autores

Matemáticas y sus aplicaciones 24

Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco

16 de octubre de 2024

pdf

6 MB