

Matemáticas y sus aplicaciones 22

FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
(coords.)



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones
22



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: María Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Dirección General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2024
ISBN: 978-607-5914-53-4

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

DR © Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP. 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
www.publicaciones.buap.mx

Diseño de portada: Leonardo Ramírez Aparicio

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 22

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Angoa Amador José Juan (BUAP), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (Rosario Catellanos), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), María de Jesús López Toriz (BUAP) Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX) Cenobio Yescas Aparicio (UTM, Oax-MEX)

Contenido

Presentación	1
Álgebra	
Capítulo 1. Una generalización del isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices	5
<i>José de Jesús Sáez Macegoza, Iván Fernando Vilchis Montalvo</i>	
1	Introducción 5
2	Preliminares 6
3	Bases y dimensión 14
4	Transformaciones lineales e isomorfismos 24
5	Generalización del isomorfismo entre matrices y transformaciones lineales 28
6	Conclusiones 32
Análisis Matemático	
Capítulo 2. Some powers of Dirichlet kernel	37
<i>Jorge Bustamante González, José Daniel Torres Campos</i>	
1	Introduction 37
2	Auxiliary results 38
3	Expansion of Dirichlet kernels 40
4	Main results 54
Capítulo 3. Operadores morfológicos sobre superficies suaves en \mathbb{R}^n	59
<i>Carlos Guillén-Galván, Carlos Alberto López-Andrade</i>	
1	Introducción 59

2	Morfología Matemática	60
3	Superficies suaves en \mathbb{R}^n	67
4	Morfología sobre superficies suaves en \mathbb{R}^n	73

Probabilidad y Estadística

Capítulo 4. Gestión de riesgos de mercado mediante un portafolio óptimo con opciones barrera down-and-out	83
--	----

María Teresa Verónica Martínez-Palacios, Fernando Brambila-Paz, Anthony Torres-Hernández

1	Introducción	84
2	Descripción del problema y supuestos	87
3	Trayectoria de la riqueza	91
4	Modelo de equilibrio general dinámico estocástico	92
5	Solución mediante programación dinámica estocástica	93
6	Análisis de solución de la EDP de HJB	95
7	Deducción del modelo para valorar la opción de venta barrera knock-out de tipo americana	96
8	Solución óptima del problema de control: Teorema de verificación para la EDP HJB	97
9	Conclusiones	99

Topología

Capítulo 5. Las topologías de Alexandrov y la geometría digital	107
--	-----

Netzahualcoyotl Carlos Castañeda Roldán, José Margarito Hernández Morales

1	Introducción	107
2	Preórdenes	109
3	Topologías de Alexandrov	115
4	Complejos celulares	123

Capítulo 6. Unicidad del n -ésimo producto simétrico para continuos alambrados 139

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

1	Introducción	139
2	Preliminares	140
3	Continuos alambrados	141
4	Algunos resultados	146
5	Unicidad	149
6	Agradecimientos	163

Capítulo 7. El n -ésimo producto simétrico suspensión 165

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio

1	Preliminares	165
2	Definiciones generales	168
3	Ejemplos	171
4	Propiedades en $SF_n(X)$	172
5	Conexidad local, unicoherencia y arco conexidad	176

Índice de autores 183

Presentación

Las «International Conferences On Mathematics and its Applications» (CIMA) han sido una tradición durante ya 20 años, celebrándose anualmente. En este evento, la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) colabora como organizadora junto con sus estudiantes. Contamos con la participación de destacados matemáticos a nivel internacional en estas CIMA. Esta es la razón detrás de la edición del libro que tienen en sus manos.

La felicidad que este libro propone, mediante su divulgación, investigación e intercambio de ideas, es resultado de la generosidad de muchos matemáticos que contribuyeron al «Tenth International Conference on Mathematics and its Applications» (10CIMA, 2023), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de destacadas figuras de diversas universidades, tanto nacionales como extranjeras, tanto en el desarrollo del 10CIMA, 2023 como en su documentación escrita, que se materializa en este libro.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo con las áreas temáticas correspondientes. Dichos capítulos han pasado por un riguroso proceso de arbitraje.

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, gentileza, dedicación y labor científica. Agradecemos profundamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero por su apoyo en la edición de esta obra y a Kevin Águila Méndez por su apoyo técnico en esta obra 22.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Álgebra

Capítulo 1

Una generalización del isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices

José de Jesús Sáez Macegoza, Iván Fernando Vilchis
Montalvo
FCFM, BUAP

Resumen

Los espacios vectoriales sobre un campo dado son estructuras algebraicas muy importantes dentro del álgebra misma y son utilizados en prácticamente todas las áreas de las matemáticas para resolver diferentes tipos de problemas. El atributo principal por el que se miden los espacios vectoriales es la dimensión, la cual sabemos que no es otra cosa que el tamaño de su base. La dimensión sabemos que puede ser finita o infinita, sin embargo, la mayor parte de los resultados que se conocen respecto a este atributo ponen énfasis en espacios vectoriales de dimensión finita. En este trabajo exponemos resultados generalizados acerca de bases y dimensión, con el objetivo de llegar a generalizar el teorema que nos da un isomorfismo entre espacios de matrices y transformaciones lineales.

1 Introducción

Este capítulo está fundamentado en la tesis de licenciatura titulada “*Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales*”, desarrollada por el primer autor bajo la dirección del segundo. Los resultados que aquí se presentan son los necesarios para demostrar una generalización del teorema que nos da un isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices. Dentro de lo que se realiza en este trabajo, destaca lo siguiente:

- Se construye un espacio de funciones con soporte finito a partir de un conjunto no vacío arbitrario pero fijo.

- Se construye un espacio de matrices a partir del producto cartesiano de dos conjuntos fijos pero elegidos de forma arbitraria.
- Se prueban teoremas respecto a base y dimensión con el objetivo de poder elegir bases para nuestros espacios vectoriales.
- Se generalizan los conceptos de base ordenada y representación en coordenadas.
- Finalmente, se prueba el teorema que nos da un isomorfismo entre las matrices y las transformaciones lineales, esto para espacios de dimensión arbitraria.

2 Preliminares

Para efectos de este trabajo consideraremos los números naturales como el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Notación 2.1. *En este capítulo, para indicar que V es un espacio vectorial sobre un campo F , denotaremos ${}_F V$.*

Vamos a iniciar por construir un espacio vectorial a partir de un campo y un conjunto no vacío en general.

Definición 2.2. *Si X es un conjunto no vacío y F es un campo, definimos el conjunto*

$$F^X = \{f \in \mathcal{P}(X \times F) \mid f \text{ es función}\}.$$

Este conjunto es llamado el conjunto de las funciones de X en F .

Teorema 2.3. *Si X es un conjunto no vacío y F es un campo, entonces ${}_F F^X$ es un espacio vectorial, con la suma $+$: $F^X \times F^X \rightarrow F^X$, donde para $f, g \in F^X$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para cada $x \in X$ y el producto por escalar \cdot : $F \times F^X \rightarrow F^X$, donde $(cf)(x) = cf(x)$ para $c \in F$, $f \in F^X$ y toda $x \in X$.*

Demostración. Notemos que la función $\bar{0} : X \rightarrow F$, dada por $\bar{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$, es un elemento de F^X . Veamos que $(F^X, +, \bar{0})$ es un grupo abeliano:

1. Sean $f, g, h \in F^X$, entonces, para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$

es decir, $f + (g + h) = (f + g) + h$, con lo cual establecemos la asociatividad.

2. Sean $f, g \in F^X$, entonces, para $x \in X$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x) \\ &= (g + f)(x) \end{aligned}$$

de ahí que $f + g = g + f$.

3. Sea $f \in F^X$, entonces para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f + \bar{0})(x) &= f(x) + \bar{0}(x) \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

por consiguiente, $f + \bar{0} = f = \bar{0} + f$, por lo que $\bar{0}$ es el neutro aditivo en F^X .

4. Sea $f \in F^X$, definamos $-f : X \rightarrow F$ como $(-f)(x) = -f(x)$, para cada $x \in X$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) + (-f(x)) \\ &= 0 \\ &= \bar{0}(x) \end{aligned}$$

así, $-f$ es el inverso aditivo de f , para cada $f \in F^X$.

Por lo tanto, $(F^X, +, \bar{0})$ es un grupo abeliano.

Vamos a mostrar que el producto por escalar propuesto satisface las propiedades de la definición de espacio vectorial:

1. Sea $f \in F^X$, si $x \in X$, entonces $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$, pues 1 es el neutro multiplicativo en el campo F , de ahí que $1f = f$.
2. Sean $c, d \in F$, $f \in F^X$, entonces, para $x \in X$, $((cd)f)(x) = (cd)f(x) = c(df(x)) = c(df)(x)$. Por consiguiente, $(cd)f = c(df)$.
3. Sean $c, d \in F$, $f \in F^X$, entonces para $x \in X$, $((c+d)f)(x) = (c+d)f(x) = cf(x) + df(x) = (cf)(x) + (df)(x)$, así que $(c+d)f = cf + df$.
4. Sea $c \in F$, $f, g \in F^X$, entonces para $x \in X$, $(c(f+g))(x) = c(f+g)(x) = c(f(x) + g(x)) = cf(x) + cg(x) = (cf)(x) + (cg)(x)$, de ahí que $c(f+g) = cf + cg$.

Por lo tanto, ${}_F F^X$ es un espacio vectorial. □

El siguiente ejemplo nos muestra que a partir de un espacio vectorial podemos construir otro.

Ejemplo 2.4. Consideremos un espacio vectorial ${}_F V$, un conjunto no vacío X y formemos el conjunto $V^X = \{f : X \rightarrow V \mid f \text{ es función}\}$. Definamos en V^X una suma $\dot{+} : V^X \times V^X \rightarrow V^X$ donde para $f, g \in V^X$, $(f \dot{+} g)(x) = f(x) + g(x)$, para cada $x \in X$. Consideremos la función $\bar{0} : X \rightarrow V$, como $\bar{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$. Es claro que $\bar{0} \in V^X$. Definimos en V^X un producto por escalar $\circ : F \times V^X \rightarrow V^X$, donde para $c \in F$ y $f \in V^X$, $(c \circ f)(x) = cf(x)$ para cada $x \in X$. De manera completamente similar al Ejemplo 2.3, se muestra que con las operaciones definidas anteriormente, ${}_F V^X$ es un espacio vectorial.

Una vez que hemos construido el espacio F^X , vamos a mostrar un subespacio de interés que tiene este último y que de hecho será el espacio que utilizaremos para generalizar resultados de representación en coordenadas y matrices.

Notación 2.5. En este capítulo, si ${}_F V$ es un espacio vectorial y W es un subespacio de V , escribiremos $W \leq V$.

Notación 2.6. Para indicar que un conjunto A es finito, escribiremos $|A| < \infty$.

Definición 2.7. Sean F un campo, X un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow F$ una función. Definimos el **soprote** f como

$$\text{sop}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Con lo anterior, definimos el conjunto

$$F^{(X)} = \{f \in F^X \mid |\text{sop}(f)| < \infty\}.$$

Teorema 2.8. Si F es un campo y X un conjunto no vacío, entonces $F^{(X)} \leq F^X$.

Demostración.

- Sean $f, g \in F^{(X)}$, luego $|\text{sop}(f)|, |\text{sop}(g)| < \infty$, veamos que $\text{sop}(f+g) \subseteq \text{sop}(f) \cup \text{sop}(g)$, en efecto, sea $x \in \text{sop}(f+g)$, entonces $(f+g)(x) \neq 0$, esto es $f(x) + g(x) \neq 0$, por lo que $f(x) \neq 0$ ó $g(x) \neq 0$, así que $x \in \text{sop}(f)$ ó $x \in \text{sop}(g)$, es decir, $x \in \text{sop}(f) \cup \text{sop}(g)$. Por lo tanto, $\text{sop}(f+g) \subseteq \text{sop}(f) \cup \text{sop}(g)$, entonces $|\text{sop}(f+g)| \leq |\text{sop}(f) \cup \text{sop}(g)|$ y dado que $\text{sop}(f)$ y $\text{sop}(g)$ son finitos se tiene que $\text{sop}(f) \cup \text{sop}(g)$ es finito, lo cual nos obliga a concluir que $\text{sop}(f+g)$ es finito. Por lo tanto $f+g \in F^{(X)}$.
- Sabemos que $\bar{0} : X \rightarrow F$ definida por $\bar{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$, es el elemento neutro en F^X , además $\text{sop}(\bar{0}) = \emptyset$, por lo que $\text{sop}(\bar{0})$ es finito, así que $\bar{0} \in F^{(X)}$.
- Sean $a \in F$, $f \in F^{(X)}$, entonces para $x \notin \text{sop}(f)$ se tiene que $f(x) = 0$ y por tanto $af(x) = 0$, es decir, $(af)(x) = 0$, para $x \notin \text{sop}(f)$, además, si $a = 0$, entonces $af = \bar{0}$. Finalmente, si $a \neq 0$, entonces $\text{sop}(af) = \text{sop}(f)$, pues para cada $x \in \text{sop}(f)$, $af(x) \neq 0$, es decir, $(af)(x) \neq 0$, por lo que $\text{sop}(af)$ es finito, en consecuencia $af \in F^{(X)}$.

Por lo tanto, $F^{(X)} \leq F^X$. □

Espacio generalizado de matrices

A partir del Teorema 2.3, vamos a construir un espacio generalizado de matrices. Para esto es importante recordar que de acuerdo con el Axioma de elección, a cada conjunto se le puede asociar un cardinal y todos los conjuntos que tengan asociado tal cardinal son equipotentes. Para más detalles sobre esto el lector puede consultar [3].

Por el argumento anterior, lo que hagamos con conjuntos cualesquiera lo estaremos haciendo con todos los conjuntos equipotentes a éstos.

Consideremos conjuntos no vacíos I , J y F un campo. Como $I \times J$ es un conjunto no vacío, por el Teorema 2.3, se tiene que $F^{I \times J}$ es un espacio vectorial, con las operaciones definidas como $(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$ y $(cA)(i, j) = cA(i, j)$, para cada $A, B \in F^{I \times J}$, $c \in F$, $(i, j) \in I \times J$. Nosotros estaríamos tentados a definir a $F^{I \times J}$ como el espacio de matrices de $I \times J$. Sin embargo, si bien es cierto que las operaciones de suma y producto por escalar funcionan bastante bien, al querer definir un producto análogo al que se define para matrices de dimensiones finitas, tendríamos dificultades, pues podríamos tener sumas de una infinidad de elementos no cero del campo, lo cuál no tiene sentido. Antes de continuar construyendo esta generalización de espacios de matrices, vamos a ponernos un poco de acuerdo con la notación.

Notación 2.9. Si $A \in F^{I \times J}$, como para cada $(i, j) \in I \times J$, $A(i, j) \in F$, entonces denotaremos $A(i, j) = a_{ij}$, donde $a_{ij} \in F$, para cada $(i, j) \in I \times J$. Denotaremos A como $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$. Más aún, siempre que sea claro los conjuntos I y J que se utilizan, denotaremos solamente $A = (a_{ij})$.

Continuando con nuestra construcción, si $A \in F^{I \times J}$, entonces para cada $j \in J$, podemos definir la función $A(, j) : I \rightarrow F$, como $A(, j)(i) = a_{ij}$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{M}_{I \times J}(F) = \{A \in F^{I \times J} \mid |\text{sop}(A(, j))| < \infty, \text{ para cada } j \in J\}.$$

Notemos que si $A, B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $c \in F$, para cada $j \in J$, en realidad $A(, j), B(, j) \in F^{(I)}$, pero sabemos que $F^{(I)} \leq F^I$, por lo que $A(, j) + B(, j) \in F^{(I)}$ y $cA(, j) \in F^{(I)}$, de esta manera se concluye que $A + B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $cA \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$. Además, es claro que la función $\bar{0} : I \times J \rightarrow F$, definida por $\bar{0}(i, j) = 0$ para cada $(i, j) \in I \times J$, satisface que $\text{sop}(\bar{0}(, j))$ es finito, para cada $j \in J$, por lo que $\bar{0} \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}_{I \times J}(F) \leq$

$F^{I \times J}$ y consecuentemente, $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ es un espacio vectorial sobre el campo F . A este nuevo espacio, le damos un nombre en la siguiente definición.

Definición 2.10. Sean I, J conjuntos no vacíos y F un campo. El espacio vectorial $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ es llamado **el espacio de las matrices $I \times J$ con coeficientes en F** .

Una vez que tenemos definido este nuevo espacio de matrices, vamos a definir para una matriz de este estilo sus filas y columnas.

Definición 2.11. Sean I, J conjuntos no vacíos y $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$.

- Para cada $i \in I$, definimos la i -ésima fila de A como la función $A(i, \) : J \rightarrow F$, dada por $A(i, \)(j) = a_{ij}$, para cada $j \in J$.
- Para cada $j \in J$, definimos la columna j -ésima de A como la función $A(\ , j) : I \rightarrow F$, dada por $A(\ , j)(i) = a_{ij}$, para cada $i \in I$.

Es importante mencionar que cuando los conjuntos I y J son finitos, estaríamos hablando de los espacios de matrices finitas ya conocidos. También, de acuerdo a nuestra definición, las columnas de nuestras matrices son finitas, dejando la posibilidad de que las filas sean infinitas.

Vamos a definir un producto en este espacio de matrices. Consideremos I, J y K conjuntos no vacíos. Si $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, proponemos el producto de A con B como $(AB)(i, k) = \sum_{j \in J} a_{ij}b_{jk}$, para cada $i \in I, k \in K$. Ahora, para $k \in K$, como $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, entonces $\text{sop}(B(\ , k)) = J_0$, con $J_0 \subseteq J$ un conjunto finito. Notemos que si $j \notin J_0$, entonces $a_{ij}b_{jk} = 0$, por lo que en realidad $(AB)(i, k) = \sum_{j \in J_0} a_{ij}b_{jk}$, para cada $i \in I, k \in K$. De esta manera, la suma anterior es finita. Ahora, si $i \in \text{sop}((AB)(\ , k))$, entonces $(AB)(i, k) \neq 0$, esto es $\sum_{j \in J_0} a_{ij}b_{jk} \neq 0$, por consiguiente existe $j_0 \in J_0$ tal que $a_{ij_0}b_{j_0k} \neq 0$, pero $b_{j_0k} \neq 0$, ya que $j_0 \in \text{sop}(B(\ , k))$, así que $a_{ij_0} \neq 0$, esto es, $i \in \text{sop}(A(\ , j_0))$. De esta manera, $\text{sop}((AB)(\ , k)) \subseteq \bigcup_{j \in J_0} \text{sop}(A(\ , j))$, pero $\bigcup_{j \in J_0} \text{sop}(A(\ , j))$ es un conjunto finito, pues es la unión finita de conjuntos finitos, lo que nos lleva a concluir que $\text{sop}((AB)(\ , k))$ es finito, esto para cada $k \in K$. De esta manera $AB \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$ y por lo tanto nuestra propuesta tiene sentido.

Definición 2.12 (Producto de matrices). Sean F un campo, I, J, K conjuntos no vacíos, $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$. Definimos el producto de

A con B como la matriz $AB \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$, definida por

$$(AB)(i, k) = \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk}$$

para cada $i \in I$, $k \in K$. **No está de más mencionar que por construcción, la última suma es un elemento del campo.**

En la siguiente proposición se exhibe que este producto satisface las mismas propiedades que el producto conocido para matrices finitas.

Proposición 2.13 (Propiedades del producto de matrices). *Sean I , J , K , L conjuntos no vacíos, $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, $C \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, $D \in \mathcal{M}_{K \times L}(F)$ y $\alpha \in F$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $A(B + C) = AB + AC$.
2. $A(BD) = (AB)D$.
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Demostración.

1. Como $B, C \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, entonces $B + C \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, en consecuencia $A(B + C) \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$. De igual forma, $AB, AC \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$, por lo que $AB + AC \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$. De aquí concluimos que las matrices de ambos lados están definidas en los mismos conjuntos, ahora veamos que son iguales en cada pareja $(i, k) \in I \times K$, en efecto

$$\begin{aligned} (A(B + C))(i, k) &= \sum_{j \in J} A(i, j)(B + C)(j, k) \\ &= \sum_{j \in J} (a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})) \\ &= \sum_{j \in J} (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) \\ &= \sum_{j \in J} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j \in J} a_{ij}c_{jk} \\ &= (AB)(i, k) + (AC)(i, k) \end{aligned}$$

esto sucede para cada $i \in I$, $k \in K$, por lo que $A(B + C) = AB + AC$.

2. Como $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, $D \in \mathcal{M}_{K \times L}(F)$, entonces $BD \in \mathcal{M}_{J \times L}(F)$, pero $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, así que $A(BD) \in \mathcal{M}_{I \times L}(F)$. Por otro lado, como $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, entonces $AB \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$ y como $D \in \mathcal{M}_{K \times L}(F)$, entonces $(AB)D \in \mathcal{M}_{I \times L}(F)$. Así, hemos visto que en ambos lados de la igualdad tenemos matrices definidas en los mismos conjuntos. Ahora, falta ver que son iguales en cada elemento de su dominio, en efecto, sea $i \in I$, $l \in L$, entonces, desarrollando el lado izquierdo de nuestra igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
 (A(BD))(i, l) &= \sum_{j \in J} A(i, j)(BD)(j, l) & (I) \\
 &= \sum_{j \in J} \left(a_{ij} \left(\sum_{k \in K} b_{jk} d_{kl} \right) \right) \\
 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} d_{kl}.
 \end{aligned}$$

Si ahora desarrollamos el lado derecho de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 ((AB)D)(i, l) &= \sum_{k \in K} (AB)(i, k)D(k, l) & (II) \\
 &= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} \right) d_{kl} \\
 &= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} a_{ij} b_{jk} d_{kl} \\
 &= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} a_{ij} b_{jk} d_{kl}.
 \end{aligned}$$

Comparando (I) y (II), tenemos que $(A(BD))(i, l) = ((AB)D)(i, l)$, para cada $i \in I$, $l \in L$. Por lo tanto, $A(BD) = (AB)D$.

3. Veamos que $(\alpha A)B = A(\alpha B)$:

$$\begin{aligned}
 ((\alpha A)B)(i, k) &= \sum_{j \in J} (\alpha A)(i, j)B(j, k) \\
 &= \sum_{j \in J} \alpha a_{ij} b_{jk} \\
 &= \sum_{j \in J} a_{ij} (\alpha b_{jk}) \\
 &= \sum_{j \in J} A(i, j)(\alpha B)(j, k) \\
 &= (A(\alpha B))(i, k).
 \end{aligned}$$

Como lo anterior sucede para cada $i \in I, k \in K$, tenemos que $(\alpha A)B = A(\alpha B)$. De manera similar se muestra que $(\alpha A)B = \alpha(AB)$.

□

Así las cosas, este producto de matrices se comporta igual de bien que el conocido para matrices finitas. De hecho, las matrices finitas se pueden considerar un caso particular de las que nosotros proponemos, considerando $I = m$ y $J = n$, donde $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (Recordemos que los números naturales se pueden considerar como conjuntos, esto se puede consultar en [3]). Si tenemos un campo F y consideramos las clases

$$\text{Fin}(\text{Mat}_F) = \{\mathcal{M}_{m \times n}(F) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

y

$$\text{Mat}_F = \{\mathcal{M}_{I \times J}(F) \mid I \text{ y } J \text{ conjuntos no vacíos}\}$$

se cumple que $\text{Fin}(\text{Mat}_F) \subseteq \text{Mat}_F$ y la contención claramente es propia.

3 Bases y dimensión

En esta sección vamos a exponer generalizaciones de los resultados con respecto a base y dimensión de espacios vectoriales. Es importante mencionar que para que estos resultados tengan sentido estamos asumiendo en todo momento el Axioma de elección. El desarrollo de estos resultados se fundamenta principalmente en dos teoremas de la teoría de conjuntos, los cuales se enuncian a continuación.

Teorema 3.1 (Lema de Zorn). *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene al menos un elemento máximo.*

Teorema 3.2 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein). *Sean A y B conjuntos. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Empezaremos por recordar la definición de base y equivalencias que se utilizarán para el desarrollo de los resultados que se exponen.

Notación 3.3. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial y X es un subconjunto de V , para denotar al subespacio generado por X escribiremos $\langle X \rangle$.*

Definición 3.4 (Conjunto generador). *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Decimos que S genera a V , si $\langle S \rangle = V$. En tal caso también se dice que S es un conjunto generador de V .*

Observación 3.5. *Dado que $V \subseteq V$ y $\langle V \rangle = V$, entonces V es un conjunto generador de V , por lo que se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos generadores.*

De igual forma, dado que \emptyset es l.i en cualquier espacio vectorial ${}_FV$, se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos l.i.

Notación 3.6. *Para un espacio vectorial ${}_FV$, denotamos:*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(V) &= \{L \subseteq V \mid L \text{ es l.i}\}. \\ \mathcal{G}(V) &= \{G \subseteq V \mid G \text{ genera a } V\}.\end{aligned}$$

Por la Observación 3.5, ambas familias son no vacías.

Definición 3.7. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo F , $B \subseteq V$. Decimos que B es una base para V si B es linealmente independiente y genera a V .*

Teorema 3.8 (Caracterización de las bases). *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial. Son equivalentes para $B \subseteq V$:*

1. B es base de V .
2. B es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$.

3. B es un elemento mínimo en $\mathcal{G}(V)$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2.: Supongamos que B es base de V . Claramente, $B \in \mathcal{I}(V)$. Veamos que es máximo, supongamos que $B \subsetneq B'$, luego, existe $x \in V$ tal que $x \in B'$ y $x \notin B$, como $\langle B \rangle = V$, entonces $B \cup \{x\}$ es l.d, ya que $x \in V = \langle B \rangle = \langle (B \cup \{x\}) \setminus \{x\} \rangle$, pero $B \cup \{x\} \subseteq B'$, con $B \cup \{x\}$ l.d, por consiguiente B' es l.d, de ahí que $B' \notin \mathcal{I}(V)$ y así queda establecida la maximalidad de B en $\mathcal{I}(V)$.

2. \Rightarrow 3.: Supongamos que B es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$, luego $B \in \mathcal{I}(V)$. Primero veamos que $V = \langle B \rangle$, es claro que $\langle B \rangle \leq V$. Ahora, sea $x \in V$, entonces $x \in B$ ó $x \notin B$. Si $x \in B$, como $B \subseteq \langle B \rangle$, trivialmente se tiene que $x \in \langle B \rangle$. Si $x \notin B$, entonces $B \subsetneq B \cup \{x\}$, pero B es máximo en $\mathcal{I}(V)$, así que $B \cup \{x\}$ es l.d, luego existe una combinación lineal $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} x = 0$, con $a_i \in F$, $x_i \in B$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \dots, n+1\}$, si $a_{n+1} = 0$, entonces $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, pero esto es absurdo ya que B es l.i, de ahí que $a_{n+1} \neq 0$, en consecuencia $x = \sum_{i=1}^n (-a_{n+1}^{-1} a_i) x_i$, con lo que $x \in \langle B \rangle$. Por lo tanto, de cualquier manera $V \leq \langle B \rangle$, por consiguiente, $V = \langle B \rangle$, es decir, $B \in \mathcal{G}(V)$.

Ahora, falta ver que B es mínimo en $\mathcal{G}(V)$, en efecto sea $B' \subsetneq B$, luego existe $x \in V$ tal que $x \in B$ y $x \notin B'$, así $B' \cup \{x\} \subseteq B$, como B es l.i, tenemos que $B' \cup \{x\}$ es l.i, luego, para cada $y \in B' \cup \{x\}$, tenemos que $\langle B' \cup \{x\} \setminus \{y\} \rangle \subsetneq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, en particular, $\langle B' \cup \{x\} \setminus \{x\} \rangle \subsetneq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, es decir, $\langle B' \rangle \subsetneq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, luego, como $B' \subseteq B' \cup \{x\} \subseteq B$, entonces $\langle B' \rangle \subsetneq \langle B' \cup \{x\} \rangle \leq \langle B \rangle = V$, con lo que $\langle B' \rangle \subsetneq V$, esto es $B' \notin \mathcal{G}(V)$, con lo que se establece la minimalidad de B en $\mathcal{G}(V)$.

3. \Rightarrow 1.: Dado que B es mínimo en $\mathcal{G}(V)$, se tiene que $V = \langle B \rangle$. Ahora, como B es un generador mínimo, para cada $x \in B$, $\langle B \setminus \{x\} \rangle \subsetneq V = \langle B \rangle$, lo que implica que B es l.i. \square

A continuación exponemos un teorema y un corolario que tienen que ver con la existencia de bases.

Teorema 3.9. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, L un conjunto l.i en V y G un conjunto generador de V tales que $L \subseteq G$. Entonces existe una base B tal que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Demostración. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado (Γ, \subseteq) , donde

$$\Gamma = \{X \in \mathcal{I}(V) \mid L \subseteq X \subseteq G\}.$$

Dado que por hipótesis $L \in \Gamma$, tenemos que $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ una cadena contenida en Γ y consideremos $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Notemos que para cada $i \in I$, $C_i \subseteq C$, lo que implica que C es una cota superior para \mathcal{C} . Nos falta ver que $C \in \Gamma$. Primero observemos que para cada $i \in I$, $L \subseteq C_i \subseteq G$, por lo que $L \subseteq C \subseteq G$. Ahora mostremos que C es l.i en V , para eso tomemos un subconjunto finito $H = \{x_1, \dots, x_n\}$ contenido en C , entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $i_j \in I$ tal que $x_j \in C_{i_j}$. Dado que \mathcal{C} es una cadena, también lo es $\{C_{i_j}\}_{j=1}^n$, en consecuencia, existe $N \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\bigcup_{j=1}^n C_{i_j} = C_{i_N}$. Obsérvese que $H \subseteq \bigcup_{j=1}^n C_{i_j} = C_{i_N}$, por consiguiente, $H \subseteq C_{i_N}$ y como C_{i_N} es l.i en V , también H debe ser l.i en V , de ahí que C es l.i en V , concluyendo que $C \in \Gamma$. Así las cosas, hemos mostrado que toda cadena contenida en Γ tiene una cota superior en Γ , por el Lema de Zorn, Γ tiene un elemento máximo, digamos B . De la definición de Γ se tiene que B es l.i y $L \subseteq B \subseteq G$. Para mostrar que B es base de V necesitamos exhibir que $V = \langle B \rangle$. En efecto, si $\langle B \rangle \not\leq V$, como $V = \langle G \rangle$, $G \not\subseteq \langle B \rangle$, de lo contrario, $V = \langle G \rangle \leq \langle B \rangle \leq V$, lo que implicaría que $V = \langle B \rangle$, en contra de nuestra suposición. Luego, existe $y \in G$ tal que $y \notin \langle B \rangle$, dado que B es l.i, se tiene que $B \cup \{y\}$ es l.i en V , además, $L \subseteq B \subseteq B \cup \{y\} \subseteq G$. Así, se tiene que $B \cup \{y\} \in \Gamma$ con $B \subsetneq B \cup \{y\}$, contradiciendo la maximalidad de B en Γ . Por lo tanto, $V = \langle B \rangle$ y así B es una base de V con las condiciones buscadas. \square

Corolario 3.10.

1. *Todo espacio vectorial tiene base.*
2. *Todo conjunto l.i en un espacio vectorial está contenido en una base de V .*
3. *Todo conjunto generador contiene una base.*

Demostración. Sea ${}_F V$ un espacio vectorial.

1. Aplicando el Teorema 3.9 a $L = \emptyset$ y $G = V$ se obtiene la base deseada.
2. Si S es un conjunto l.i en V , se aplica el Teorema 3.9 a $L = S$ y $G = V$.
3. Si G' es un conjunto generador de V , se aplica el Teorema 3.9 a $L = \emptyset$ y $G = G'$.

\square

Vamos a generalizar el teorema de reemplazo para cualquier espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita).

Teorema 3.11 (Teorema de reemplazo). *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, B una base de V y S un conjunto l.i en V . Entonces existe $S' \subseteq B$ tal que $S \cup S'$ es base de V .*

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{A} = \{T \subseteq B \mid S \cup T \in \mathcal{I}(V)\}$$

ordenada por inclusión de conjuntos. Notemos que $\emptyset \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ una cadena y $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Notemos que $C_i \subseteq C$ para cada $i \in I$, por lo que C es una cota superior para \mathcal{C} . Mostremos que $C \in \mathcal{A}$, para eso tomemos un conjunto finito $H = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \subseteq S \cup C$, donde $x_i \in S$, $y_j \in C$, para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Luego, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe $i_j \in I$ tal que $y_j \in C_{i_j}$. Como \mathcal{C} es una cadena, también lo es $\{C_{i_j}\}_{j=1}^m$, por consiguiente, existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\{y_j\}_{j=1}^m \subseteq C_k$, lo cual implica que $H \subseteq S \cup C_k$. Dado que $S \cup C_k$ es l.i, H es l.i y por tanto $S \cup C$ es l.i, de donde se concluye que $C \in \mathcal{A}$. Por el Lema de Zorn, \mathcal{A} tiene un elemento máximo, digamos S' . Así las cosas, $S \cup S'$ es l.i en V , para ver que es base nos resta ver que $\langle S \cup S' \rangle = V$. Si $\langle S \cup S' \rangle \subsetneq V$, como $V = \langle B \rangle$, existe $x \in B$ tal que $x \notin \langle S \cup S' \rangle$, lo que implica que $S \cup (S' \cup \{x\})$ es l.i, por tanto, $S' \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ con $S' \subsetneq S' \cup \{x\}$, lo que contradice la maximalidad de S' . Por lo tanto, $S \cup S'$ genera a V , con lo que se establece que $S \cup S'$ es base de V . \square

Observación 3.12. *Del teorema anterior podemos deducir que si ${}_F V$ es un espacio vectorial y $S \subseteq V$ es l.i, existe $S' \subseteq V$ tal que $S \cap S' = \emptyset$ y $S \cup S'$ es base de V .*

Definición 3.13 (Suma directa). *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, W y K subespacios de V . Decimos que V es suma directa de W y K si $V = W + K$ y $W \cap K = \{0\}$. Además, se dice que W es un complemento de K y que K es un complemento de W .*

Debido a la existencia de bases se tiene que todo subespacio tiene un complemento.

Teorema 3.14. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, $W \leq V$. Entonces existe $W' \leq V$ tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración. Como $W \leq V$, en particular es espacio vectorial, por el Corolario 3.10, existe $S \subseteq W$ tal que S es base de W . Ahora, como S es l.i en W y $W \subseteq V$, entonces, S es l.i en V , luego, existe $S' \subseteq V$ tal que $S \cap S' = \emptyset$ y $S \cup S'$ es base de V . Consideremos $W' = \langle S' \rangle$. Vamos a mostrar que $V = W \oplus W'$, veamos primero que $V = W + W'$, en efecto, $V = \langle S \cup S' \rangle = \langle S \rangle + \langle S' \rangle = W + W'$. De lo anterior, tenemos que $V = W + W'$. Finalmente, vamos a demostrar que $W \cap W' = \{0\}$. Supongamos que $x \in W \cap W'$, luego, $x \in \langle S \rangle$ y $x \in \langle S' \rangle$, así, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i \in F$, $x_i \in S$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $x = \sum_{j=1}^m b_j y_j$ con $a_j \in F$, $y_j \in S'$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, entonces, $0 = x - x = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{j=1}^m b_j y_j$, con $x_i, y_j \in S \cup S'$, pero como $S \cup S'$ es l.i, entonces $a_i = 0$, $b_j = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, con lo que $x = 0$. Por lo tanto, $V = W \oplus W'$. \square

Es conocido para espacios vectoriales de dimensión finita que todas las bases tienen el mismo número de vectores y a tal número común le llamamos la dimensión del espacio. El siguiente teorema establece que en el caso general, todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad.

Notación 3.15. *Si A, B son conjuntos y $f : A \rightarrow B$ es una función inyectiva, podemos denotar $f : A \mapsto B$. La notación antes mencionada indicará que la función es inyectiva, aún cuando no se diga en palabras.*

Si $A \subseteq B$, para denotar la función inclusión $\iota : A \rightarrow B$, definida por $\iota(a) = a$, para cada $a \in A$, se escribirá simplemente $A \hookrightarrow B$. Dicha notación se referirá a la inclusión, aún cuando no se diga explícitamente.

Teorema 3.16. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, A y B bases de V . Entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$Q = \{ (I_x, F_x) \mid I_x \subseteq A, F_x : I_x \mapsto B, (B \setminus [F_x(I_x)]) \overset{\circ}{\cup} I_x \text{ es l.i en } V \}.$$

Es importante comentar que Q es una familia de parejas (I_x, F_x) , donde $I_x \subseteq A$, $F_x : I_x \rightarrow B$ es una función inyectiva. Se pide que $B \setminus [F_x(I_x)]$ sea ajeno con I_x y su unión sea l.i en V . De manera conjuntista, a B le quitamos la imagen de I_x bajo F_x y la reemplazamos por I_x .

Definamos la relación \leq en Q de la siguiente manera: $(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ si y solo si $I_x \subseteq I_y$ y $F_{y|I_x} = F_x$, para cada $(I_x, F_x), (I_y, F_y) \in Q$. Veamos que (Q, \leq) es un COPO:

Reflexividad: Sea $(I_x, F_x) \in Q$, luego $I_x \subseteq I_x$ y $F_{x|I_x} = F_x$, por lo que $(I_x, F_x) \leq (I_x, F_x)$.

Antisimetría: Sean $(I_x, F_x), (I_y, F_y) \in Q$ y supongamos que $(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ y $(I_y, F_y) \leq (I_x, F_x)$, luego $I_x \subseteq I_y$ y $I_y \subseteq I_x$, entonces $I_x = I_y$. Además, $F_{y|I_x} = F_x$ y $F_{x|I_y} = F_y$, entonces $F_x = F_{x|I_x} = F_{x|I_y} = F_y$. Por lo tanto $I_x = I_y$ y $F_x = F_y$, es decir, $(I_x, F_x) = (I_y, F_y)$.

Transitividad: Sean $(I_x, F_x), (I_y, F_y), (I_z, F_z) \in Q$, supongamos que $(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ y $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, entonces $I_x \subseteq I_y$ y $I_y \subseteq I_z$, por transitividad $I_x \subseteq I_z$, además $F_{y|I_x} = F_x$ y $F_{z|I_y} = F_y$, observemos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} I_z & \xrightarrow{F_z} & B \\ \uparrow \iota & \nearrow F_y & \\ I_y & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I_y & \xrightarrow{F_y} & B \\ \uparrow \iota & \nearrow F_x & \\ I_x & & \end{array}$$

así, tenemos que $F_{z|I_x} = (F_{z|I_y})|_{I_x} = F_{y|I_x} = F_x$. De ahí que $I_x \subseteq I_z$ y $F_{z|I_x} = F_x$, es decir, $(I_x, F_x) \leq (I_z, F_z)$.

Por lo tanto, (Q, \leq) es un COPO.

Ahora bien, tenemos que $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset : \emptyset \rightarrow B$ es inyectiva por vacuidad y $B = [B \setminus \emptyset(\emptyset)] \dot{\cup} \emptyset$ es l.i, dado que B es base de V , por consiguiente $(\emptyset, \emptyset) \in Q$, con lo cual se tiene que $Q \neq \emptyset$.

Consideremos un conjunto no vacío X y $\Gamma = \{(I_x, F_x)\}_{x \in X}$ una cadena de Q . Definamos la función

$$\begin{aligned} F : \bigcup_{x \in X} I_x &\rightarrow B \\ v &\mapsto F_y(v), \text{ si } v \in I_y. \end{aligned}$$

En primera instancia, vamos a mostrar que F está bien definida, para eso, supongamos que $v \in I_y$ y $v \in I_z$, con $(I_y, F_y), (I_z, F_z) \in \Gamma$, como Γ es una

cadena, entonces $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$ ó $(I_z, F_z) \leq (I_y, F_y)$; sin pérdida de generalidad supongamos que $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, entonces $I_y \subseteq I_z$, por lo que $v \in I_z$, entonces $F_z(v) = F_{z|I_y}(v) = F_y(v)$, así, hemos mostrado que F está bien definida. Vamos a ver que F es inyectiva, en efecto, si $v, w \in \bigcup_{x \in X} I_x$, con $v \neq w$, entonces $v \in I_y$ y $w \in I_z$, para algunos $y, z \in X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, así $I_y \subseteq I_z$ y en consecuencia, $v, w \in I_z$. Además, $F(v) = F_y(v) = F_z(v) \neq F_z(w) = F(w)$, puesto que F_z es inyectiva.

Ahora, vamos a exhibir que $[B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)] \cup (\bigcup_{x \in X} I_x)$ es l.i en V , en efecto, sabemos que

$$\begin{aligned} \left[B \setminus F \left(\bigcup_{x \in X} I_x \right) \right] \cup \left(\bigcup_{x \in X} I_x \right) &= \left[B \setminus \left(\bigcup_{x \in X} F(I_x) \right) \right] \cup \left(\bigcup_{x \in X} I_x \right) \\ &= \left[\bigcap_{x \in X} (B \setminus F(I_x)) \right] \cup \left(\bigcup_{x \in X} I_x \right) \end{aligned}$$

así, si $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \bigcap_{x \in X} (B \setminus F(I_x))$ y $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq \bigcup_{x \in X} I_x$, entonces $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq I_y$, para algún $y \in X$, ya que Γ es una cadena y $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B \setminus F(I_y)$, así tenemos que $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\} \subseteq (B \setminus F(I_y)) \cup I_y$, el cual es l.i, por lo que $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ es l.i. Así las cosas, hemos mostrado que cualquier subconjunto finito de $[B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)] \cup (\bigcup_{x \in X} I_x)$ es l.i, por lo tanto, $[B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)] \cup (\bigcup_{x \in X} I_x)$ es l.i. Finalmente, vamos a ver que $B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)$ y $\bigcup_{x \in X} I_x$ son conjuntos ajenos, en efecto, supongamos que existe $v \in [B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)] \cap (\bigcup_{x \in X} I_x)$, entonces $v \in \bigcap_{x \in X} (B \setminus F(I_x))$ y $v \in I_x$, para algún $x \in X$, con lo que $v \in (B \setminus F(I_x)) \cap I_x$, para algún $x \in X$, pero esto es absurdo pues para cada $x \in X$, $(B \setminus F(I_x)) \cap I_x = \emptyset$. Por lo tanto, $B \setminus F(\bigcup_{x \in X} I_x)$ y $\bigcup_{x \in X} I_x$ son ajenos.

Con todo lo anterior, tenemos que $(\bigcup_{x \in X} I_x, F) \in Q$, además es una cota superior para Γ , ya que para cada $x \in X$, $I_x \subseteq \bigcup_{x \in X} I_x$ y $F|_{I_x} = F_x$, es decir, para cada $(I_x, F_x) \in \Gamma$, $(I_x, F_x) \leq (\bigcup_{x \in X} I_x, F)$. Por el Lema de Zorn, Q tiene un elemento máximo, digamos (M, g) . En particular, $g : M \rightarrow B$ es una función inyectiva y $(B \setminus g(M)) \dot{\cup} M$ es l.i en V .

Vamos a demostrar que $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$, supongamos que no es así, entonces existe $v \in V$ tal que $v \in B \setminus g(M)$ y $A \setminus M \neq \emptyset$, entonces $(B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \dot{\cup} M$ es l.i en V , ya que $(B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \dot{\cup} M \subseteq (B \setminus g(M)) \dot{\cup} M$ y $(B \setminus g(M)) \dot{\cup} M$ es l.i. Además, $\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \dot{\cup} M \rangle \neq V$,

pues de no ser así, tendríamos que $v \in \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$ y por consiguiente, $(B \setminus g(M)) \circ M$ sería l.i.d, lo cual es absurdo. Más aún, $A \setminus M \not\subseteq \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$, pues si $A \setminus M \subseteq \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$, tendríamos que $A = (A \setminus M) \cup M \subseteq \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$, así, tendríamos que $V = \langle A \rangle \subseteq \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$, por lo que

$$V = \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle,$$

lo cual mostramos que no es posible. Así las cosas,

$$A \setminus M \not\subseteq \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle,$$

por lo que existe $w \in V$ tal que $w \in A \setminus M$ y $w \notin \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$. Consideremos $\overline{M} = M \cup \{w\}$ y definamos $\overline{g} : \overline{M} \rightarrow B$ por $\overline{g}(w) = v$ y $\overline{g}(m) = g(m)$ para $m \in M$. Es claro que \overline{g} es inyectiva. Veamos que $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, en efecto, $[B \setminus \overline{g}(\overline{M})] \cup \overline{M} = [B \setminus (g(M) \cup \{v\})] \cup (M \cup \{w\})$, el cual es l.i, ya que $v, w \notin \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$. Además, $B \setminus (g(M) \cup \{v\})$ y $M \cup \{w\}$ son ajenos, de otra manera $w \in \langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \circ M \rangle$, lo que es absurdo. Por consiguiente, $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, además, $M \subsetneq \overline{M}$ y en consecuencia $(M, g) \preceq (\overline{M}, \overline{g})$, pero esto contradice la maximalidad de (M, g) en Q . Por lo tanto, $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$. Analicemos cada caso. Si $A \setminus M = \emptyset$, entonces $A \subseteq M \subseteq A$, así $A = M$ y $(B \setminus g(A)) \circ A$ es l.i en V , pero A es l.i máximo, pues es base de V , entonces $B \setminus g(A) = \emptyset$, consecuentemente $B = g(A)$, lo que implica que $g : A \rightarrow B$ es una biyección y por lo tanto $|A| = |B|$. Si $B \setminus g(M) = \emptyset$, entonces $B \subseteq g(M) \subseteq B$, es decir, $B = g(M)$, entonces $g : M \rightarrow B$ es suprayectiva, con lo que $|A| \geq |M| \geq |B|$, por transitividad, $|A| \geq |B|$. Tomando una familia de parejas con las mismas características que Q , pero ahora considerando subconjuntos de B y realizando el mismo razonamiento tendríamos que $|B| \geq |A|$, aplicando el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, tenemos que $|A| = |B|$. \square

Definición 3.17 (Dimensión de un espacio vectorial). *Si ${}_F V$ es un espacio vectorial, definimos la **dimensión de V** como $|B|$, donde B es una base de V .*

En el siguiente ejemplo vamos a calcular la dimensión de nuestro espacio $F^{(X)}$.

Ejemplo 3.18. Consideremos un campo F y X un conjunto no vacío. Recordemos que $F^{(X)} = \{f \in F^X \mid \text{sop}(f) \mid < \infty\}$. Vamos a ver que $\dim(F^{(X)}) = |X|$, consideremos la función

$$\begin{aligned} \delta : X &\rightarrow F^{(X)} \\ x &\mapsto \delta_x \end{aligned}$$

donde $\delta_x : X \rightarrow F$ se define por $\delta_x(x) = 1$ y $\delta_x(y) = 0$, si $y \neq x$. Veamos primero que $\delta : X \rightarrow F^{(X)}$ es inyectiva, en efecto, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, si $\delta(x) = \delta(y)$, entonces $1 = \delta_x(x) = \delta_y(x) = 0$, es decir, $1 = 0$, lo cual es absurdo dado que F es campo, así que $\delta(x) \neq \delta(y)$. Por lo tanto $\delta : X \rightarrow F^{(X)}$ es inyectiva, además $\text{Im}(\delta) = \{\delta_x\}_{x \in X}$, por lo que $\delta : X \rightarrow \{\delta_x\}_{x \in X}$ ya es una función biyectiva. Ahora, por simplicidad denotemos $B = \text{Im}(\delta) = \{\delta_x\}_{x \in X}$, demostremos que B es una base de $F^{(X)}$:

- B es l.i: Supongamos que $\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} = \bar{0}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $\delta_{x_i} \in B$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos las siguientes igualdades:

$$c_j = c_j \delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} \right) (x_j) = \bar{0}(x_j) = 0$$

es decir, $c_j = 0$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, B es l.i en $F^{(X)}$.

- B genera a $F^{(X)}$: Sea $f \in F^{(X)}$. Si $f = \bar{0}$ es inmediato, así que podemos suponer que $f \neq \bar{0}$, entonces $\text{sop}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$ para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, por lo que $f(x_j) = c_j$ con $c_j \neq 0$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Veamos que $f = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}$, en efecto, si $x \notin \text{sop}(f)$ la igualdad se ve de forma inmediata. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, ($x_j \in \text{sop}(f)$), tenemos lo siguiente:

$$f(x_j) = c_j = c_j \delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} \right) (x_j)$$

Así las cosas, tenemos que para cada $x \in X$, $f(x) = (\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i})(x)$, de ahí que $f = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}$. De esta manera queda demostrado que B genera a $F^{(X)}$.

De lo anterior tenemos que $\dim(F^{(X)}) = |B| = |X|$. De esta manera se tiene que $\dim(F^{(X)}) = \kappa$, donde κ es el cardinal asociado a X , el cual puede ser

finito o infinito, en otras palabras la dimensión de $F^{(X)}$ depende del cardinal de X .

En la siguiente definición generalizamos el concepto de base ordenada.

Definición 3.19 (Base ordenada). *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial. Si B es una base de V , I es un conjunto no vacío y $\sigma : I \rightarrow B$ es una función biyectiva, decimos que la terna $\overline{B} = (B, I, \sigma)$ es **base ordenada para V** .*

Ejemplo 3.20. *Consideremos un campo F y el espacio vectorial de los polinomios $F[x]$. Sabemos que $B = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $F[x]$. Es fácil ver que*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} &\rightarrow B \\ n &\rightarrow x^n \end{aligned}$$

es una función biyectiva, por lo tanto la terna $\overline{B} = (B, \mathbb{N}, \sigma)$ es una base ordenada para $F[x]$.

4 Transformaciones lineales e isomorfismos

Vamos a iniciar esta sección exponiendo la propiedad universal de las bases, que es una herramienta muy importante para definir transformaciones lineales.

Notación 4.1. *Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones, la composición $g \circ f : A \rightarrow C$ la denotaremos por gf , es decir, $g \circ f = gf$.*

Teorema 4.2 (Propiedad universal de las bases). *Sean ${}_F V$ un espacio vectorial y $B = \{x_i\}_{i \in I} \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. B es base de V .
2. Para cada espacio vectorial ${}_F W$ y para cada función $f : B \rightarrow W$, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $T|_B = f$. Lo anterior lo podemos resumir diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \iota & \nearrow T & \\ V & & \end{array}$$

conmuta.

Demostración.

1. \Rightarrow 2.: Supongamos que B es base de V . Sea ${}_F W$ un espacio vectorial y $f : B \rightarrow W$ una función. Luego, cada $x \in V$ tiene una única representación $v = \sum_{i \in I} a_{i_x} x_i$, con $a_{i_x} \in F$ y $a_{i_x} = 0$ para casi toda $i \in I$. Lo anterior nos permite definir la función:

$$T : \quad V \quad \rightarrow \quad W \\ \sum_{i \in I} a_{i_x} x_i = x \quad \mapsto \quad \sum_{i \in I} a_{i_x} f(x_i).$$

Vamos a ver que T es una transformación lineal, en efecto, sean $c \in F$, $x, y \in V$, luego,

$$\begin{aligned} T(x + cy) &= T\left(\sum_{i \in I} a_{i_x} x_i + c \sum_{i \in I} a_{i_y} x_i\right) = T\left(\sum_{i \in I} (a_{i_x} + ca_{i_y}) x_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} (a_{i_x} + ca_{i_y}) f(x_i) = \sum_{i \in I} a_{i_x} f(x_i) + \sum_{i \in I} (ca_{i_y}) f(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} a_{i_x} f(x_i) + c \sum_{i \in I} a_{i_y} f(x_i) = T\left(\sum_{i \in I} a_{i_x} x_i\right) + cT\left(\sum_{i \in I} a_{i_y} x_i\right) \\ &= T(x) + cT(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal. Ahora, si $x_i \in B$, entonces $x_i = 1 \cdot x_i$, así, $T|_B(x_i) = T(x_i) = T(1 \cdot x_i) = 1 \cdot f(x_i) = f(x_i)$, con lo que se tiene que $T|_B = f$.

Finalmente, probaremos la unicidad, para eso, supongamos que existe otra transformación lineal $U : V \rightarrow W$ tal que $U|_B = f$, veamos que $U = T$, en efecto, sea $x \in V$, luego, $x = \sum_{i \in I} a_{i_x} x_i$, con $a_{i_x} \in F$, con $a_{i_x} = 0$ para casi toda $i \in I$. Entonces, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} U(x) &= U\left(\sum_{i \in I} a_{i_x} x_i\right) = \sum_{i \in I} a_{i_x} U(x_i) = \sum_{i \in I} a_{i_x} f(x_i) = T\left(\sum_{i \in I} a_{i_x} x_i\right) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

Así las cosas tenemos que $U = T$ y de esta manera se establece la unicidad. 2) \Rightarrow 1): Supongamos que para cada espacio vectorial ${}_F W$ y para cada función

$f : B \rightarrow W$, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $T|_B = f$. Debemos mostrar que B es base de V . Primero veamos que B es l.i. Si B es l.d, existe $x \in B$ tal que $x \in \langle B \setminus \{x\} \rangle$. Sabemos que el campo F es un espacio vectorial sobre sí mismo, por lo que podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : B &\rightarrow F \\ x &\mapsto 1 \\ x \neq y &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow F$ tal que $T|_B = f$. Ahora, como $x \in \langle B \setminus \{x\} \rangle$, entonces $x = \sum_{i \in I} a_{i_x} x_i$, con $x_i \neq x$, $a_{i_x} \in F$ y $a_{i_x} = 0$ para casi toda $i \in I$. Así, tenemos que

$$1 = f(x) = T(x) = T\left(\sum_{i \in I} a_{i_x} x_i\right) = \sum_{i=1} a_{i_x} T(x_i) = \sum_{i=1} a_{i_x} f(x_i) = 0.$$

Así, $1 = 0$, lo cual es absurdo debido a que F es campo. Por lo tanto, B es l.i.

Ahora, demostremos que $V = \langle B \rangle$. En efecto, si $\langle B \rangle \subsetneq V$, por el Teorema 3.14, existe $\{0\} \neq W \leq V$ tal que $V = \langle B \rangle \oplus W$. Consideremos la función inclusión $B \hookrightarrow V$. Ahora, la función $S : V = \langle B \rangle \oplus W \rightarrow V$, definida por $S(x + w) = x$, con $x \in \langle B \rangle, w \in W$, es una transformación lineal tal que $S|_B = \iota$. Además, la función $Id_V : V \rightarrow V$ también es lineal y cumple que $Id_V|_B = \iota$. Como $\langle B \rangle \subsetneq V$, existe $y \in V$ tal que $y \notin \langle B \rangle$, así que $y = x + w$, con $x \in \langle B \rangle$ y $w \in W \setminus \langle B \rangle$, por consiguiente $S(x) = x \neq y = Id_V(y)$. Así las cosas, la función inclusión $B \hookrightarrow V$ tiene dos transformaciones lineales distintas con la propiedad enunciada en 2), lo cual no es posible por hipótesis. Por lo tanto, $V = \langle B \rangle$. Así las cosas, B es base de V . \square

Observación 4.3. *De lo anterior, se concluye que si ${}_F V, {}_F W$ son espacios vectoriales y B una base de V , entonces, $|\text{Hom}_F(V, W)| = |W^B|$.*

Vamos a dar la definición de isomorfismo que utilizaremos en el desarrollo de nuestros resultados.

Definición 4.4 (Isomorfismo). *Sean ${}_F V$ y ${}_F W$ espacios vectoriales. Un isomorfismo entre V y W es una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ biyectiva. Cuando existe un isomorfismo entre V y W , se dice que V y W son isomorfos y se denota $V \cong W$.*

Observación 4.5. *Un isomorfismo manda bases en bases.*

Teorema 4.6. *Sean ${}_F V$ y ${}_F W$ espacios vectoriales. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $V \cong W$.
2. $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2.: Supongamos que $V \cong W$, luego existe un isomorfismo $T : V \rightarrow W$. Sea B una base de V , luego, $T(B)$ es una base de W , además, $T|_B^{T(B)} : B \rightarrow T(B)$ es una función biyectiva. Así, $\dim(V) = |B| = |T(B)| = \dim(W)$.

2. \Rightarrow 1.: Supongamos que $\dim(V) = \dim(W)$. Por el Corolario 3.10, sabemos que todo espacio vectorial tiene base y por el Teorema 3.16, todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad, por consiguiente podemos considerar bases cualesquiera de nuestros espacios. Sea B una base de V y C una base de W , por hipótesis existe una función biyectiva $f : B \rightarrow C$, por ser f biyectiva tiene inversa $f^{-1} : C \rightarrow B$. Por la propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $T|_B = f$ y existe una única transformación lineal $S : W \rightarrow V$ tal que $S|_C = f^{-1}$. Es fácil ver que $(ST)|_B = id_B$ y $(TS)|_C = id_C$, luego, $ST = id_V$ y $TS = id_W$, de ahí que $T : V \rightarrow W$ es un isomorfismo y en consecuencia $V \cong W$. \square

Corolario 4.7. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial. Entonces $V \cong F^{(X)}$, para algún conjunto X .*

Demostración. Como V es un espacio vectorial, por el Corolario 3.10, existe $B \subseteq V$ tal que B es base de V . Así, tenemos que $\dim(V) = |B|$ y por lo realizado en el Ejemplo 3.18, se tiene que $\dim(F^{(B)}) = |B|$, en consecuencia $\dim(V) = |B| = \dim(F^{(B)})$, aplicando el teorema anterior tenemos que $V \cong F^{(B)}$. \square

Esto último nos permite concluir que si X es un conjunto y F es un campo, entonces podemos definir la clase de isomorfismo de $F^{(X)}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}(F^{(X)}) = \{V \in \mathbf{Vec}_F \mid \dim(V) = |X|\}.$$

Esto último nos dice que hay tantos espacios vectoriales como cardinales haya, ya que recordemos que el Axioma de Elección nos permite asignarle a cada

conjunto un cardinal. De aquí podemos concluir que hay una correspondencia biyectiva entre la clase de los cardinales y la clase de los espacios vectoriales sobre un campo F dado, por lo que ambas clases son equipotentes, es decir, $|\mathbf{Card}| = |\mathbf{Vec}_F|$.

5 Generalización del isomorfismo entre matrices y transformaciones lineales

Finalmente, llegamos al tema principal de este capítulo, que es la generalización del isomorfismo entre las transformaciones lineales y las matrices. En esta sección, vamos a suponer que todas las bases de nuestros espacios vectoriales están ordenadas respecto a algún conjunto I no vacío (de hecho es posible hacerlo). Así, si ${}_F V$ es un espacio vectorial y B es una base de V , supondremos que $B = (x_i)_{i \in I}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, esto para cada $i, j \in I$. Como V y $F^{(I)}$ tienen la misma dimensión, a saber $|I|$, entonces $V \cong F^{(I)}$. Vamos a hacer explícito tal isomorfismo. Consideremos la función:

$$\begin{aligned} \delta : B &\rightarrow F^{(I)} \\ x_i &\mapsto \delta_i \end{aligned}$$

donde $\delta_i : I \rightarrow F$ se define como en el Ejemplo 3.18. Aplicando la propiedad universal de las bases a δ , existe una única transformación lineal $\Phi_B : V \rightarrow F^{(I)}$ tal que $\Phi_B|_B = \delta$. Ahora, si $v \in V$, entonces $v = \sum_{i \in I} c_{i_v} x_i$, con $c_{i_v} \in F$ y $c_{i_v} = 0$ para casi toda $i \in I$. De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_B(v) &= \Phi_B \left(\sum_{i \in I} c_{i_v} x_i \right) \\ &= \sum_{i \in I} c_{i_v} \Phi_B(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} c_{i_v} \delta_i \end{aligned}$$

Así, para cada $i \in I$, $\Phi_B(v)(i) = c_i$.

Vamos a ver que $\Phi_B : V \rightarrow F^{(I)}$ es un isomorfismo:

- **(Inyectividad:)** Sea $v \in \ker(\Phi_B)$, entonces $\Phi_B(v) = \bar{0}$. Como B es base de V , $v = \sum_{i \in I} c_{i_v} x_i$, con $c_i \in F$ y $c_{i_v} = 0$ para casi toda $i \in I$.

Como $\Phi_B(v)(i) = 0$, para cada $i \in I$, entonces $c_{i_v} = 0$ para cada $i \in I$ y así $v = 0$.

- **(Suprayectividad:)** Sea $f \in F^{(I)}$, entonces, $f = \sum_{i \in I} a_{i_f} \delta_i$, con $a_{i_f} \in F$ y $a_{i_f} = 0$ para casi toda $i \in I$. Si elegimos $v = \sum_{i \in I} a_{i_f} x_i \in V$, tenemos que $\Phi_B(v) = f$.

Por lo tanto, $\Phi_B : V \rightarrow F^{(I)}$ es un isomorfismo. Además, $\Phi_B^{-1} : F^{(I)} \rightarrow V$ es tal que $\Phi_B^{-1}(\delta_i) = x_i$, para cada $i \in I$.

A partir de lo anterior, estamos en posibilidades de generalizar el concepto de representación en coordenadas.

Definición 5.1 (Representación en coordenadas). *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, $B = (x_i)_{i \in I}$ una base ordenada de B y $\Phi_B : V \rightarrow F^{(I)}$ definida como antes. Para cada $v \in V$, $\Phi_B(v)$ se llama la representación en coordenadas de v en la base B , donde si $v = \sum_{i \in I} c_{i_v} x_i$, con $c_{i_v} \in F$ y $c_{i_v} = 0$ para casi toda $i \in I$, entonces $\Phi_B(v)(i) = c_i$. $\Phi_B(v)$ se denota como $[v]_B$.*

Ejemplo 5.2. *Consideremos F un campo y $F[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes en F con la base ordenada $B = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $p(x) \in F[x]$ es un polinomio de grado n , con n un número natural, entonces $p(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i$, donde $a_n \neq 0$ y $a_i = 0$ para cada $i > n$. La representación en coordenadas de $p(x)$ en la base B es $[p(x)]_B$, donde $[p(x)]_B(i) = a_i$.*

Definición 5.3. *Sea F un campo e I un conjunto no vacío. Definimos la base canónica de $F^{(I)}$ como la base ordenada $B = (\delta_i)_{i \in I}$.*

Observación 5.4. *Si F es un campo, I es un conjunto no vacío y $h \in F^{(I)}$, entonces podemos considerar a h como una matriz de $I \times 1$, donde $1 = \{0\}$, incluso podemos considerar cualquier conjunto de un solo elemento, así que podemos pensar que $h(i) = h(i, 0)$, para cada $i \in I$, de esta manera $\text{sop}(h(\cdot, 0))$ es finito y nuestra afirmación es correcta. Para no complicar la notación consideraremos $h(i, 0) = h(i)$, para cada $i \in I$.*

Consideremos I, J conjuntos no vacíos y un campo F . Si $T : F^{(J)} \rightarrow F^{(I)}$ es una transformación lineal y $f \in F^{(J)}$, como $(\delta_j)_{j \in J}$ es base de $F^{(J)}$, entonces $f = \sum_{j \in J} c_j \delta_j$. Recordemos que esta suma es finita, pero se denota sobre toda $j \in J$ para tomar en cuenta los coeficientes cero, que sabemos que son casi todos salvo una cantidad finita de ellos. Luego, $T(f) = T\left(\sum_{j \in J} c_j \delta_j\right) = \sum_{j \in J} c_j T(\delta_j)$. Esto nos motiva a introducir la siguiente definición.

Definición 5.5. Sean I, J conjuntos, F un campo y $T : F^{(J)} \rightarrow F^{(I)}$ una transformación lineal. Definimos a la matriz de T como la matriz $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ tal que para cada $j \in J$, $A(\cdot, j) = T(\delta_j)$.

Ahora, la intención es poder definir la representación matricial de una transformación lineal, para esto consideremos ${}_F V, {}_F W$ espacios vectoriales, $B = (x_j)_{j \in J}$ una base ordenada de V , $C = (y_i)_{i \in I}$ una base ordenada de W y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C \\ F^{(J)} & \xrightarrow{\Phi_C T \Phi_B^{-1}} & F^{(I)} \end{array}$$

es conmutativo, de esta manera introducimos la siguiente definición.

Definición 5.6 (La matriz de una transformación lineal). Sean ${}_F V, {}_F W$ espacios vectoriales, $B = (x_j)_{j \in J}$ una base ordenada de V , $C = (y_i)_{i \in I}$ una base ordenada de W y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. La representación matricial de T respecto a las bases B y C se define como la matriz de $\Phi_C T \Phi_B^{-1} : F^{(J)} \rightarrow F^{(I)}$ y se denota como $[T]_B^C$.

Observemos que para $j \in J$, tenemos lo siguiente:

$$(\Phi_C T \Phi_B^{-1})(\delta_j) = (\Phi_C T)((\Phi_B^{-1})(\delta_j)) = (\Phi_C T)(x_j) = \Phi_C(T(x_j)) = [T(x_j)]_C.$$

De esta manera concluimos que la j -ésima columna de $[T]_B^C$ es la representación en coordenadas de $T(x_j)$, para cada $j \in J$, más aún, $[T]_B^C(i, j) = [T(x_j)]_C(i)$, para cada $i \in I$, es decir, el ij -ésimo coeficiente de $[T]_B^C$ es la i -ésima coordenada de $[T(x_j)]_C$, esto para cada $i \in I, j \in J$.

Ejemplo 5.7. Consideremos el espacio vectorial ${}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]$ con la base ordenada $B = (1, x, x^2, \dots) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y el operador lineal derivación $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la n -ésima columna de $[D]_B^B$ es $[D(x^n)]_B$, donde $[D(x^n)]_B(n-1) = n$ y $[D(x^n)]_B(i) = 0$ para $i \in \mathbb{N} \setminus \{n-1\}$. La columna 0 de esta matriz es $\bar{0}$. Lo anterior se puede representar como el arreglo infinito

numerable

$$[D]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Notemos que el soporte de las columnas de la “matriz” anterior es finito.

Finalmente, probaremos la generalización del teorema de isomorfismo entre las matrices y las transformaciones lineales.

Teorema 5.8. Sean I, J conjuntos no vacíos, ${}_F V$ un espacio vectorial de dimensión $|J|$ y ${}_F W$ un espacio vectorial de dimensión $|I|$. Entonces $\text{Hom}_F(V, W) \cong \mathcal{M}_{I \times J}(F)$.

Demostración. Consideremos $B = (x_j)_{j \in J}$ una base ordenada de V y $C = (y_i)_{i \in I}$ una base ordenada de W . Definamos:

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \mathcal{M}_{I \times J}(F) \\ T &\mapsto [T]_B^C. \end{aligned}$$

Es claro que Ψ está bien definida.

- **Φ es una transformación lineal:** Sean $T, U \in \text{Hom}(V, W)$ y $c \in F$. Debemos mostrar que $\Psi(T + cU) = \Psi(T) + c\Psi(U)$, como $\Psi(T + cU), \Psi(T) + c\Psi(U) \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, debemos checar la igualdad en cada $(i, j) \in I \times J$. Sea $(i, j) \in I \times J$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi(T + cU)(i, j) &= [T + cU]_B^C(i, j) \\ &= [(T + cU)(x_j)]_C(i) \\ &= [T(x_j) + cU(x_j)]_C(i) \\ &= ([T(x_j)]_C + c[U(x_j)]_C)(i) \\ &= [T(x_j)]_C(i) + c[U(x_j)]_C(i) \\ &= [T]_B^C(i, j) + c[U]_B^C(i, j) \\ &= \Psi(T)(i, j) + c\Psi(U)(i, j) \end{aligned}$$

con lo que concluimos que $\Psi(T + cU) = \Psi(T) + c\Psi(U)$ y así queda establecida la linealidad.

- **Ψ es inyectiva:** Sea $T \in Ker(\Psi)$, entonces $\Psi(T) = \bar{0}$, donde $\bar{0} : I \times J \rightarrow F$ está definida por $\bar{0}(i, j) = 0$, para cada $i \in I, j \in J$. Como $\Psi(T) = [T]_B^C$, entonces $[T]_B^C(i, j) = 0$, para cada $i \in I, j \in J$, así para cada $j \in J, [T(x_j)]_C(i) = 0$, para cada $i \in I$, de esta manera todos los coeficientes de la combinación lineal de $T(x_j)$ en la base C son ceros, lo que implica que $T(x_j) = 0$ y esto sucede para cada $j \in J$. Así las cosas tenemos que T se anula en todos los elementos de la base, lo que implica que $T = \bar{0}$ (la transformación lineal cero). Por lo tanto $Ker(\Psi) = \{\bar{0}\}$.
- **Ψ es suprayectiva:** Sea $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$, luego, para cada $j \in J$, $sop(A(\cdot, j))$ es finito, esto nos permite definir la función:

$$\begin{aligned} f : B &\rightarrow W \\ x_j &\mapsto \sum_{i \in I} A(i, j)y_i \end{aligned}$$

Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $T(x_j) = f(x_j) = \sum_{i \in I} A(i, j)y_i$, para cada $j \in J$. De esta manera tenemos que $A = [T]_B^C = \Psi(T)$.

Por lo tanto $\Psi : Hom(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ es un isomorfismo y por tal razón $Hom(V, W) \cong \mathcal{M}_{I \times J}(F)$. \square

6 Conclusiones

De acuerdo a lo desarrollado en este trabajo, hemos observado lo siguiente:

- Por lo menos a nivel teórico es posible construir un espacio de matrices generalizado que tiene el mismo comportamiento que el espacio de matrices finitas ya conocido, incluso definiendo una multiplicación en éste.
- Una vez construido el espacio de matrices mencionado en el punto anterior, se cumple el teorema de isomorfismo entre matrices y transformaciones lineales sin ningún problema.
- Sería de interés investigar si los resultados que se conocen para dimensión finita, tales como diagonalización, formas canónicas, entre otras, se cumplen en este espacio de matrices que hemos introducido.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo así como a los editores por brindar la oportunidad de participar.

Referencias

- [1] Alejandro Bravo Mojica, Hugo Rincón Mejía, Cesar Rincón Orta. (2006). *Álgebra superior*, Primera edición. México: Facultad de ciencias, UNAM.
- [2] Hugo Alberto Rincón Mejía. (2006). *Álgebra lineal*, Segunda edición. México: Facultad de ciencias, UNAM.
- [3] Fernando Hernández Hernández. (2003). *Teoría de conjuntos, una introducción*, Segunda edición. México: Sociedad matemática mexicana.
- [4] Jonathan S. Golan. (2007). *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Second edition. USA: Springer.
- [5] Joseph J. Rotman. (2008). *An introduction to homological algebra*, Second edition. New York, USA: Springer.
- [6] José de Jesús Sáez Macegoza. (2023). *Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales*. Tesis de licenciatura. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jsjesussaez@gmail.com

vilchis.f@gmail.com

Análisis Matemático

Capítulo 2

Some powers of Dirichlet kernel

Jorge Bustamante, José Daniel Torres Campos
FCFM, BUAP

Abstract

Some powers of the Dirichlet kernel are used to construct discrete linear operators for the approximation of continuous periodic functions.

1 Introduction

Let \mathbb{T}_n be the family of all trigonometric polynomial of degree non greater than n and $C_{2\pi}$ the space of 2π -periodic continuous functions f with the norm $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}$. We denote by $C_{2\pi}^r$ the space of r -times continuously differentiable functions in $f \in C_{2\pi}$. For $f \in C_{2\pi}^r$ we set $D^r f = f^{(r)}$.

In [2] the first author explained several reasons to construct discrete operators for the uniform approximation of continuous functions and provided a new construction by using powers of the Dirichlet kernel. In this work we present another construction.

Throughout the chapter we use the following notations. For $r, n \in \mathbb{N}$ and $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_{r,k} = \frac{2k\pi}{(r+1)}, \quad u(n) = 3n^2 + 3n + 1, \quad R(n) = 3n^2 + 3n + 1 - \frac{n(n+1)}{3} \quad (1)$$

$$s(n) = (2n+1)^2 + (3n^2 + 3n + 1) + R(n), \quad \text{and} \quad C_n = \frac{(2n+1)^3}{s(n)(6n+1)}. \quad (2)$$

The Dirichlet kernel is given by (see [4, p. 42])

$$D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx), \quad (3)$$

We also set

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{1}{2n+1} D_n(x)$$

for the normalized Dirichlet kernel. It is known that $|D_n(x)| \leq 2n+1$ and equality holds if $x=0$. That is the reason why we prefer the normalization given by $\mathcal{D}_n(x)$.

Let \mathbb{T}_n denote the class of all trigonometric polynomials of degree non greater than n . That is $T \in \mathbb{T}_n$ if and only if

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) = \sum_{k=0}^n A_k(T, x), \quad (4)$$

where $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

For $n \in \mathbb{N}$ and $f \in C_{2\pi}$, in this chapter we study the polynomial operators defined by

$$Q_{4n}(f, x) = C_n \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) \left(\left(\mathcal{D}_n^2 + \mathcal{D}_n^3 + \mathcal{D}_n^4 \right) (x - x_{6n,k}) \right). \quad (5)$$

We will prove in Section 4 that

$$\|Q_{4n}^2(f) - 2Q_{4n}(f) + f\| \leq \frac{12}{3} E_n(f) + \frac{1}{12} \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad (6)$$

where $E_n(f)$ is the best approximation (see (9) below) and

$$\omega_2(f, t) = \sup_{|h| \leq t} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|.$$

For our approach we need explicit expressions of $Q_{4n}^2 T - 2Q_{4n} T + T$, where $T \in \mathbb{T}_n$. This will be accomplished in Section 3. Section 2 contains the known results which are needed.

Related results can be seen in [1], [6], and [7].

2 Auxiliary results

Recall that, for $n \in \mathbb{N}$, the Fejér kernel of degree n is defined by (see [4, p. 43])

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \cos(kx).$$

It is known that $F_n(x) \geq 0$.

For $f \in C_{2\pi}$ the associated Fejér operator is defined by

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt.$$

The following quadrature formula is known.

Proposition 2.1. ([5, p. 20]) *If $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ and $T \in \mathbb{T}_n$, then*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T(x+x_{n,k}).$$

If T is given by (4), the conjugate of T is defined by

$$\tilde{T}(x) = \sum_{k=1}^n (-b_k \cos(kx) + a_k \sin(kx)). \quad (7)$$

Some equations related with the conjugate polynomials are presented in Lemmas 2.3 and 2.2.

Lemma 2.2. (see [2, Lemma 2.3]) *If $n \in \mathbb{N}$, σ_n is the Fejér operator, $T \in \mathbb{T}_n$ and \tilde{T} is the conjugate of T , then*

$$D\tilde{T} = (n+1)(I - \sigma_n)T \quad \text{and} \quad D^3\tilde{T} = (n+1)(I - \sigma_n)(D^2T).$$

Lemma 2.3. (see [2]) *If $T \in \mathbb{T}_n$ is given by (4) and $W = D\tilde{T}$, then*

$$D\tilde{T} = \sum_{j=1}^n jA_j(T), \quad D^2T = -\sum_{j=1}^n j^2A_j(T),$$

$$D\widetilde{W} = -D^2(T) \quad \text{and} \quad D(\widetilde{D^2T}) = D^3\tilde{T}.$$

Proposition 2.4. (see [2, Prop. 2.2]) *If $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}$, and $T \in \mathbb{T}_n$, then*

$$\frac{1}{n^r} \|D^r T\| \leq \frac{1}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \|f - T_n\|. \quad (8)$$

We will use Proposition 2.4 in the case when T is the polynomial of the best approximation for f in \mathbb{T}_n . It is known that, for every $f \in C_{2\pi}$ and $n \in \mathbb{N}_0$, there exists a unique polynomial $T \in \mathbb{T}_n$ (called the polynomial of the best approximation) such that

$$E_n(f) = \inf_{T_n \in \mathbb{T}_n} \|T_n - f\| = \|T - f\|. \quad (9)$$

We remark that the estimate for $\|D^3T\|$ was not included in the reference given below, but it can be obtained with similar arguments.

Proposition 2.5. (see [2, Prop. 2.3]) *If $f \in C_{2\pi}$, $T \in \mathbb{T}_n$ and $E_n(f) = \|T - f\|$, then*

$$\begin{aligned} \|D^2T\| &\leq n^2 \left(\frac{1}{4} \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n} \right) + E_n(f) \right), & \|D^3T\| &\leq n^3 \left(\frac{1}{4} \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n} \right) + E_n(f) \right), \\ \|D^3\tilde{T}\| &\leq 2n^2(n+1) \left(\frac{1}{4} \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n} \right) + E_n(f) \right) \end{aligned}$$

and

$$\|D^4T\| \leq n^4 \left(\frac{1}{4} \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n} \right) + E_n(f) \right).$$

3 Expansion of Dirichlet kernels

Since, for $m \in \mathbb{N}$, D_n^m is an even trigonometric polynomial of degree nm , there are unique real numbers $\varrho_{n,m}(k)$, $0 \leq k \leq mn$, such that

$$D_n^m(x) = \sum_{k=0}^{mn} \varrho_{n,m}(k) \cos(kx). \quad (10)$$

Using the identity

$$D_n^{m+1}(x) = \left(\sum_{k=0}^{mn} \varrho_{n,m}(k) \cos(kx) \right) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right)$$

we know that the coefficients $\varrho_{n,m+1}(k)$ may be given in terms of $\varrho_{n,m}(k)$, but the computations require a lot of work. We begin with $\varrho_{n,2}(i)$.

Lemma 3.1. ([2]) For each $n \in \mathbb{N}$, one has

$$D_n^2(x) = 2n + 1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} (2n + 1 - k) \cos(kx).$$

That is, $\varrho_{n,2}(0) = 2n + 1$ and $\varrho_{n,2}(k) = 2(2n + 1 - k)$, for $1 \leq k \leq 2n$ (see (10)).

The proofs of next results follow by elementary arguments with the help of some trigonometric identities.

Throughout this work an empty sum is considered as zero.

Lemma 3.2. If $n \geq 1$ and $a(k) = \varrho_{n,2}(k)$ for $0 \leq k \leq 2n$, then

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a(k) \sum_{i=1}^n \cos((i-k)x) &= \sum_{k=1}^n a(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) \\ &\quad + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k) \cos(mx) \right). \end{aligned}$$

Proof. Notice that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a(k) \sum_{i=1}^n \cos((i-k)x) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{2n} a(k) \cos((i-k)x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i a(k) \cos((i-k)x) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i+1}^{2n} a(k) \cos((k-i)x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=0}^{i-1} a(i-m) \cos(mx) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^{2n-i} a(i+m) \cos(mx) \right). \end{aligned}$$

(i) If $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^2 a(k) \sum_{i=1}^1 \cos((i-k)x) = a(0) + a(2) \cos(x)$$

and this coincides with the announced equation (recall that an empty sum is considered as zero).

(ii) Assume $n > 1$. In this case

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=0}^{i-1} a(i-m) \cos(mx) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^{2n-i} a(i+m) \cos(mx) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{i=m+1}^n a(i-m) \right) \cos(mx) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^{n-1} a(i+m) \cos(mx) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=n}^{2n-i} a(i+m) \cos(mx) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{i=m+1}^n a(i-m) \right) \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a(i+m) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{i=1}^{2n-m} a(i+m) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k) \cos(mx) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n a(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k) \cos(mx) \right).
\end{aligned}$$

This yields the announced equality. □

Lemma 3.3. *If $n \in \mathbb{N}$ and $a_k = \varrho_{n,2}(k)$ for $0 \leq k \leq 2n$, then*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} a_k \left(\sum_{i=1}^n \cos((i+k)x) \right) &= \sum_{m=2}^n \left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&+ \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx).
\end{aligned}$$

Proof. We consider the following identities

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} a(k) \left(\sum_{i=1}^n \cos((i+k)x) \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{2n} a(k) \cos((i+k)x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=i+1}^{2n+i} a(m-i) \cos(mx) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{m=i+1}^{n+1} + \sum_{m=n+2}^{2n} + \sum_{m=2n+1}^{2n+i} \right) a(m-i) \cos(mx) \right\} \\
&= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a(m-i) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n} \left(\sum_{i=1}^n a(m-i) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{i=m-2n}^n a(m-i) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{m=2}^n \left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx).
\end{aligned}$$

The proof is over. □

Proposition 3.4. *If $n \geq 2$, the polynomial $D_n^3(x)$ can be written as*

$$D_n^3(x) = \sum_{k=0}^n \varrho_{n,2}(k) + \sum_{m=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) \varrho_{n,2}(k) \right\} \cos(mx)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} \varrho_{n,2}(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} \varrho_{n,2}(k) \right) \cos(mx) \\
& + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(7n^2 + 3n + 2 - 4nm - 3m + m^2 \right) \cos(mx).
\end{aligned}$$

where, for $0 \leq k \leq 2n$, the coefficients $\varrho_{n,2}(k)$ where given in Proposition 3.1.

Proof. It follows from Lemmas 3.2 and 3.3 that

$$\begin{aligned}
D_n^3(x) &= D_n^2(x)D_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} a(k) \cos(kx) \right) \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos(ix) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{2n} a(m) \cos(mx) + 2 \sum_{k=0}^{2n} a(k) \left(\sum_{i=1}^n \cos(ix) \cos(kx) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{2n} a(m) \cos(mx) + 2a(0) \sum_{i=1}^n \cos(ix) + 2 \sum_{k=1}^{2n} a(k) \sum_{i=1}^n \cos(ix) \cos(kx) \\
&= a(0) + \sum_{m=1}^n (2a(0) + a(m)) \cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} a(m) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2n} a(k) \sum_{i=1}^n \left(\cos((i-k)x) + \cos((i+k)x) \right) \\
&= a(0) + \sum_{m=1}^n (2a(0) + a(m)) \cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} a(m) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n a(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) a(k) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2}^n \left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n a(k) + \left(2a(0) + a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k) + \sum_{k=2}^{n+1} a(k) \right) \cos(x) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{n-1} \left(2a(0) + a(m) + \sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) + \sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \left(2a(0) + a(m) + \sum_{k=m+1}^{2n} a(k) + \sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(nx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \left(a(m) + \sum_{k=m+1}^{2n} a(k) + \sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \left(a(2n) + \sum_{k=n}^{2n-1} a(k) \right) \cos(2nx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{k=0}^n a(k) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a(k) + \sum_{k=0}^{n+1} a(k) \right) \cos(x) \\
&\quad + \sum_{m=2}^n \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) a(k) \right\} \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{k=0}^n a(k) + \sum_{m=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) a(k) \right\} \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx).
\end{aligned}$$

□

Using Lemma 3.1 we can derived Theorem 3.5.

Theorem 3.5. *If $n \geq 2$, the third power $D_n^3(x)$ of the Dirichlet admits the following representation*

$$D_n^3(x) = 3n^2 + 3n + 1 + 2 \sum_{k=1}^n (3n^2 + 3n + 1 - k^2) \cos(kx)$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{k=n+1}^{2n} \left(4n^2 - 2nk + 4n - k + 1 \right) \cos(kx) \\
& + \sum_{k=2n+1}^{3n} \left(7n^2 + 3n + 2 - 4nk - 3k + k^2 \right) \cos(kx).
\end{aligned}$$

Proof. As before we set $a_k = \varrho_{n,2}(k)$ para $0 \leq k \leq 2n$

Recall that

$$\varrho_{n,2}(k) = \begin{cases} 2n + 1, & \text{if } k = 0, \\ 2(2n + 1 - k), & \text{if } 1 \leq k \leq 2n. \end{cases} \quad (11)$$

We should compute four sums.

(i) Taking into account (11) we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a(k) &= \sum_{k=0}^n \varrho_{n,2}(k) = 2n + 1 + 2 \sum_{k=1}^n (2n + 1 - k) \\
&= 4n^2 + 4n + 1 - n^2 - n = 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

This gives us an expression for the first sum in Proposition 3.4.

(ii) For the second sum one has

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) a(k) &= 2(2n + 1) + 2 \sum_{k=1}^{n-m} (2n + 1 - k) + 2 \sum_{k=1}^{n+m} (2n + 1 - k) \\
&= 2(2n + 1)(1 + n - m + n + m) \\
&\quad - (n - m)(n - m + 1) - (n + m)(n + m + 1) \\
&= 2(2n + 1)^2 - (n - m)^2 - (n - m) - (n + m)^2 - (n + m) \\
&= 8n^2 + 8n + 2 - n^2 + 2mn - m^2 - n^2 - 2nm - m^2 - 2n \\
&= 6n^2 + 6n + 2 - 2m^2 = 2(3n^2 + 3n + 1 - m^2).
\end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) \varrho_{n,2}(k) \right\} \cos(mx) = 2 \sum_{m=1}^n \left(3n^2 + 3n + 1 - m^2 \right) \cos(mx).$$

(iii) First we note that

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m-n}^{n+m} \varrho_{n,2}(k) &= \left(\sum_{k=1}^{n+m} - \sum_{k=1}^{m-n-1} \right) \varrho_{n,2}(k) \\
 &= 2 \left(\sum_{k=1}^{n+m} - \sum_{k=1}^{m-n-1} \right) (2n+1-k) \\
 &= 2 \left((2n+1)(n+m) - (n+m)(n+m+1) \right. \\
 &\quad \left. - (2n+1)(m-n-1) + (m-n-1)(m-n) \right) \\
 &= 8n^2 - 4nm + 8n - 2m + 2.
 \end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} \varrho_{n,2}(k) \right) \cos(mx) = 2 \sum_{m=n+1}^{2n} \left(4n^2 - 2nm + 4n - m + 1 \right) \cos(mx).$$

(iv) Finally,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m-n}^{2n} \varrho_{n,2}(k) &= 2 \sum_{k=m-n}^{2n} (2n+1-k) \\
 &= 2(2n+1)(3n-m+1) - 2 \sum_{k=1}^{2n} k + 2 \sum_{k=1}^{m-n-1} k \\
 &= 2(2n+1)(3n-m+1) - (2n)(2n+1) + (m-n-1)(n+m) \\
 &= 7n^2 + 3n + 2 - 4nm - 3m + m^2.
 \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} \varrho_{n,2}(k) \right) \cos(mx) \\
 = \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(7n^2 + 3n + 2 - 4nm - 3m + m^2 \right) \cos(mx).
 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.6 and Lemma 3.7 can be proved with the ideas given in the proof of Lemma 3.2 and Proposition 3.4. In [8] the reader can find detailed the proofs.

Proposition 3.6. *If $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, and D_n^4 is given as in (10), then*

$$D_n^4(x) = \sum_{k=0}^n \varrho_{n,3}(k) + \sum_{m=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) \varrho_{n,3}(k) \right\} \cos(mx) \\ + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} \varrho_{n,3}(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{4n} \left(\sum_{k=m-n}^{3n} \varrho_{n,3}(k) \right) \cos(mx).$$

Lemma 3.7. *If $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, and D_n^4 is given as in (10), then*

$$\varrho_{n,4}(0) = (2n + 1)R(n),$$

and

$$\varrho_{n,4}(k) = 2(2n + 1)(R(n) - k^2), \quad \text{for } 1 \leq k \leq n,$$

where $R(n)$ is given by (1).

Several arguments can be simplified if we use the following auxiliary operators:

$$M_{6n,2}(f, x) = \frac{1}{(2n + 1)(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^2(x - x_{6n,k}), \quad (12)$$

$$M_{6n,3}(f, x) = \frac{1}{u(n)(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^3(x - x_{6n,k}), \quad (13)$$

and

$$M_{6n,4}(f, x) = \frac{1}{(2n + 1)R(n)} \frac{1}{(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^4(x - x_{6n,k}). \quad (14)$$

Let us show that Q_{4n} can be written as an especial linear combination of the operators introduced above.

Proposition 3.8. *For each $n \geq 2$, we have that*

$$s(n)Q_{4n}(f, x) = (2n + 1)^2 M_{6n,2}(f, x) + u(n)M_{6n,3}(f, x) + R(n)M_{6n,4}(f, x).$$

Proof. It is sufficient to see that

$$\begin{aligned} & s(n)Q_{4n}(f, x) \\ &= \frac{(2n + 1)^3}{(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) \left(\frac{D_n^2(x - x_{6n,k})}{(2n + 1)^2} + \frac{D_n^3(x - x_{6n,k})}{(2n + 1)^3} + \frac{D_n^4(x - x_{6n,k})}{(2n + 1)^4} \right) \\ &= \frac{(2n + 1)}{(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^2(x - x_{6n,k}) + \frac{1}{(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^3(x - x_{6n,k}) \\ &\quad + \frac{1}{(2n + 1)(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^4(x - x_{6n,k}) \\ &= (2n + 1)^2 M_{6n,2}(f, x) + u(n)M_{6n,3}(f, x) + R(n)M_{6n,4}(f, x). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 3.9. *If $n \geq 2$, $T \in \mathbb{T}_n$ and $M_{6n,2}$ is given by (12), then*

$$M_{6n,2}(T, x) = T(x) - \frac{D\tilde{T}(x)}{(2n + 1)}, \quad M_{6n,2}(D^2T) = D^2(T) - \frac{D^3(\tilde{T})}{(2n + 1)}$$

and

$$M_{6n,2}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) + \frac{D^2(T)}{2n + 1}.$$

Proof. If $T \in \mathbb{T}_n$, then $TD_n^2 \in \mathbb{T}_{3n} \subset \mathbb{T}_{6n}$. Taking into account Proposition 2.1, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{(6n + 1)} \sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k}) D_n^2(x - x_{6n,k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t) D_n^2(x - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x + s) D_n^2(s) ds. \end{aligned}$$

If T is given as in (4), then

$$\begin{aligned}
T(x+t) &= a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j(x+t)) + b_j \sin(j(x+t))) \\
&= a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \left(\cos(jx) \cos(jt) - \sin(jx) \sin(jt) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n b_j \left(\sin(jx) \cos(jt) + \cos(jx) \sin(jt) \right) \\
&= a_0 + \sum_{j=1}^n A_j(T, x) \cos(jt) + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j(T, x) \sin(jt).
\end{aligned}$$

It follows from Lemma 2.3 (recall that D_n^2 is an even trigonometric polynomial) and Lemma 3.1 that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t) D_n^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{j=1}^n A_j(T, x) \cos(jt) \right) D_n^2(t) dt \\
&= a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) dt + \sum_{j=1}^n A_j(T, x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) D_n^2(t) dt \\
&= a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) dt + \sum_{j=1}^n A_j(T, x) \frac{1}{2} \varrho_{n,2}(j) \\
&= a_0(2n+1) + \sum_{j=1}^n A_j(T, x)(2n+1-j) \\
&= (2n+1)T(x) - \sum_{j=1}^n j A_j(T, x) = (2n+1)T(x) - D\tilde{T}(x).
\end{aligned}$$

Therefore

$$\frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k}) D_n^2(x - x_{6n,k}) = T(x) - \frac{1}{2n+1} D\tilde{T}(x).$$

On the other hand, since the previous equation holds for any $\in \mathbb{T}_n$ and $D^2(T), D(\tilde{T}) \in \mathbb{T}_n$, taking into account Lemma 2.3, one has

$$M_{6n,2}(D^2T) = D^2(T) - \frac{1}{(2n+1)}D(\widetilde{D^2(T)}) = D^2(T) - \frac{1}{(2n+1)}D^3(\tilde{T})$$

and

$$M_{6n,2}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) - \frac{1}{(2n+1)}D(\widetilde{D(\tilde{T})}) = D(\tilde{T}) + \frac{D^2(T)}{2n+1}. \quad \square$$

Proposition 3.10. *If $n \geq 2$, $T \in \mathbb{T}_n$, and $M_{6n,3}$ is given by (13), then*

$$M_{6n,3}(T, x) = T(x) + \frac{D^2T(x)}{u(n)}, \quad M_{6n,3}(D^2T) = D^2(T) + \frac{D^4(T)}{u(n)}$$

and

$$M_{6n,3}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{u(n)}.$$

Proof. The proof is similar to the one in Proposition 3.9, but we use Theorem 3.5. In fact

$$\begin{aligned} \frac{1}{(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k}) D_n^3(x - x_{6n,k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t) D_n^3(t) dt. \\ &= a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^3(t) dt + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_j(T, x) \cos(jt) D_n^3(t) dt \\ &= (3n^2 + 3n + 1) + \sum_{j=1}^n (3n^2 + 3n + 1 - j^2) A_j(T, x) \\ &= u(n)T(x) + D^2(T, x). \end{aligned}$$

Therefore

$$M_{5n,3}(T, x) = T(x) + \frac{1}{u(n)}D^2(T, x).$$

Hence

$$M_{6n,3}(D^2T) = D^2(T) + \frac{D^4(T)}{u(n)}$$

and

$$M_{6n,3}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) + \frac{D^2(D(\tilde{T}))}{u(n)} = D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{u(n)}. \quad \square$$

Proposition 3.11. *If $n \geq 2$, $T \in \mathbb{T}_{2n}$, and $M_{6n,4}$ is given by (14), then*

$$M_{6n,4}(T, x) = T(x) + \frac{1}{R(n)}D^2T(x), \quad M_{6n,4}(D^2T) = D^2(T) + \frac{D^4(T)}{R(n)}$$

and

$$M_{6n,4}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{R(n)}.$$

Proof. The first assertion follows from the identities

$$\begin{aligned} \frac{1}{(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k}) D_n^4(x - x_{5n,k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t) D_n^4(t) dt. \\ &= a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^4(t) dt + \sum_{j=1}^n \frac{A_j(T, x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) D_n^4(t) dt \\ &= a_0(2n+1)R(n) + \sum_{j=1}^n A_j(T, x)(2n+1)(R(n) - k^2) \\ &= R(n)(2n+1)T(x) + (2n+1)D^2(T, x) \end{aligned}$$

where we use Lemma 3.7. Hence

$$M_{6n,4}(T, x) = T(x) + \frac{1}{R(n)}D^2(T, x).$$

From this we obtain

$$M_{6n,4}(D^2T) = D^2(T) + \frac{D^4(T)}{R(n)}$$

and

$$M_{6n,4}(D(\tilde{T})) = D(\tilde{T}) + \frac{D^2(D(\tilde{T}))}{R(n)} = D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{R(n)}. \quad \square$$

Proposition 3.12. *If $n \geq 2$, Q_{4n} is given by (5) and $T \in \mathbb{T}_n$, then*

$$Q_{4n}T - T = -\frac{(2n+1)}{s(n)}D\tilde{T} + \frac{2}{s(n)}D^2T.$$

Proof. It follows from Propositions 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11 that

$$\begin{aligned}
 s(n)Q_{4n}(T, x) &= (2n + 1)^2 M_{5n,2}(T, x) + u(n)M_{5n,3}(T, x) + R(n)M_{5n,4}(T, x) \\
 &= (2n + 1)^2 \left(T(x) - \frac{1}{(2n + 1)} D\tilde{T}(x) \right) \\
 &\quad + u(n) \left(T(x) + \frac{1}{u(n)} D^2 T(x) \right) + R(n) \left(T(x) + \frac{1}{R(n)} D^2 T(x) \right) \\
 &= \left((2n + 1)^2 + u(n) + R(n) \right) T(x) - (2n + 1) D\tilde{T}(x) + 2D^2 T(x) \\
 &= s(n)T(x) - (2n + 1) D\tilde{T}(x) + 2D^2 T(x).
 \end{aligned}$$

It is sufficient to prove the result. \square

For an operator Q we set $Q^2(f) = Q(Q(f))$.

Proposition 3.13. *If $n \in \mathbb{N}$, Q_{4n} is defined by (5) and $T \in \mathbb{T}_n$, then*

$$Q_{4n}^2 T - 2Q_{4n} T + T = -\frac{(2n + 1)^2}{s^2(n)} D^2 T + \frac{2(2n + 1)}{s^2(n)} \left(D^3 T - D^3 \tilde{T} \right) + \frac{4D^4(T)}{s^2(n)}.$$

Proof. We set $W = D\tilde{T}$ and $Z_n(T) = 2D^2 T - (2n + 1)W$. If we write Proposition 3.12 in the form $Q_{4n} T = T + Z_n(T)/s(n)$, from Propositions 3.9, 3.10 and 3.11 we obtain

$$\begin{aligned}
 Q_{4n}^2 T &= Q_{4n}(Q_{4n} T) = \frac{(2n + 1)^2}{s(n)} M_{6n,2} \left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)} \right) \\
 &\quad + \frac{u(n)}{s(n)} M_{4n,3} \left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)} \right) + \frac{R(n)}{s(n)} M_{6n,4} \left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)} \right) \\
 &= Q_{4n} T + \frac{(2n + 1)^2}{s^2(n)} M_{6n,2} \left(Z_n(T) \right) + \frac{u(n)}{s^2(n)} M_{4n,3} \left(Z_n(T) \right) \\
 &\quad + \frac{R(n)}{s^2(n)} M_{6n,4} \left(Z_n(T) \right) \\
 &= Q_{4n} T + \frac{(2n + 1)^2}{s^2(n)} \left(2D^2(T) - \frac{2D^3(\tilde{T})}{(2n + 1)} - (2n + 1) \left(D(\tilde{T}) + \frac{D^2(T)}{2n + 1} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u(n)}{s^2(n)} \left(2D^2(T) + \frac{2D^4(T)}{u(n)} - (2n+1) \left(D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{u(n)} \right) \right) \\
& + \frac{R(n)}{s^2(n)} \left(2D^2(T) + \frac{2D^4(T)}{R(n)} - (2n+1) \left(D(\tilde{T}) - \frac{D^3(T)}{R(n)} \right) \right) \\
= & Q_{4n}T + \frac{2D^2T}{s(n)} - \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3\tilde{T} - \frac{(2n+1)}{s(n)} D(\tilde{T}) \\
& - \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T + \frac{4D^4(T)}{s^2(n)} + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3T.
\end{aligned}$$

We conclude that

$$\begin{aligned}
Q_{4n}^2(T) - 2Q_{4n}(T) + T &= (Q_{4n}^2(T) - Q_{4n}(T)) + (T - Q_{4n}(T)) \\
&= \frac{2D^2T}{s(n)} - \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3\tilde{T} - \frac{(2n+1)}{s(n)} D(\tilde{T}) - \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T \\
&\quad + \frac{4D^4(T)}{s^2(n)} + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3T + \frac{(2n+1)}{s(n)} D\tilde{T} - \frac{2}{s(n)} D^2T \\
&= -\frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} (D^3T - D^3\tilde{T}) + \frac{4D^4(T)}{s^2(n)}. \quad \square
\end{aligned}$$

4 Main results

First we determine the norm of the operators Q_{4n} in the space of the continuous functions.

Proposition 4.1. *For each $n \geq 2$ one has*

$$Q_{4n}(1, x) = 1.$$

Proof. It is a consequence of Proposition 3.12, because $D\tilde{T} = D^2T = 0$ if T is the constant function. \square

Recall that a linear operator $L : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ is positive if, for each $x \in [-\pi, \pi]$ and any $f \in C_{2\pi}$, $L(f, x) \geq 0$ whenever $f(x) \geq 0$.

Proposition 4.2. *If $n \geq 2$, the operator Q_{4n} defined by (5) is positive. Moreover, if $f \in C_{2\pi}$, then*

$$\|Q_{4n}(f)\| \leq \|f\| \quad \text{and} \quad \|Q_{4n}^2(f) - 2Q_{4n}(f) + f\| \leq 4\|f\|.$$

Proof. Since $|\mathcal{D}_n(x)| \leq 1$ for $x \in [-\pi, \pi]$, $1 + \mathcal{D}_n(x) \geq 0$. Hence

$$\mathcal{D}_n^4(x) + \mathcal{D}_n^3(x) + \mathcal{D}_n^2(x) = \mathcal{D}_n^2(x)(\mathcal{D}_n^2(x) + \mathcal{D}_n(x) + 1) \geq \mathcal{D}_n^2(x)\mathcal{D}_n^2(x) \geq 0.$$

It is sufficient to verify that Q_{4n} is a positive operator. The other assertions follows by standard arguments of theory of positive linear operators. \square

Theorem 4.3. *If $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), Q_{4n} is defined by (5), and $f \in C_{2\pi}$, then*

$$\|Q_{4n}^2(f) - 2Q_{4n}(f) + f\| \leq \frac{12}{3}E_n(f) + \frac{1}{12}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Proof. Fix $f \in C_{2\pi}$ and, for each $n \in \mathbb{N}$, let $T_n \in \mathbb{T}_n$ be the polynomial of the best approximation for f in \mathbb{T}_n (see (9)).

Notice that

$$s(n) = \frac{1}{3}\left(29n^2 + 29n + 9\right).$$

If we set $H_n(f) = Q_{4n}^2(f) - 2Q_{4n}(f)$. Taking into account Propositions 4.2, 3.13, and 2.5 one has

$$\begin{aligned} \|H_n(f) + f\| &= \|H_n(f - T_n) + f - T_n + H_n(T_n) + T_n\| \\ &\leq 4\|f - T_n\| + \|H_n(T_n) + T_n\| \\ &\leq 4E_n(f) + \frac{(2n+1)^2\|D^2T\| + 2(2n+1)\left(\|D^3T\| + \|D^3\tilde{T}\|\right) + 4\|D^4T\|}{s^2(n)} \\ &\leq 4E_n(f) + \frac{n^2(2n+1)^2 + 2n^3(2n+1) + 4n^2(2n+1)(n+1) + 4n^4}{s^2(n)} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right) \\ &= 4E_n(f) + \frac{n^2(20n^2 + 18n + 5)}{s^2(n)} \times \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right). \end{aligned}$$

Taking into account that

$$\begin{aligned} \frac{n^2(20n^2 + 18n + 5)}{s^2(n)} &\leq 9 \frac{n^2(20n^2 + 18n + 5)}{(27n^2 + 27n)^2} = \frac{1}{3} \frac{(20n^2 + 18n + 5)}{27(n+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \frac{(27n^2 + 54n + 27)}{27(n+1)^2} = \frac{1}{3} \frac{(n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^2} \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

we conclude that

$$\begin{aligned} \|Q_{4n}^2(f) - 2Q_{4n}(f) + f\| &\leq 4E_n(f) + \frac{1}{12}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{3}E_n(f) \\ &= \frac{12}{3}E_n(f) + \frac{1}{12}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Acknowledgment.

The authors thank the referee for his/her careful reading of the manuscript.

Bibliography

- [1] R. Bojanic and O. Shisha, *Approximation of continuous, periodic functions by discrete linear positive operators*, J. Approximation Theory 11 (1974), 231–235.
- [2] J. Bustamante, *Powers of Dirichlet kernels and approximation by discrete linear operators I: direct results*, Constructive Math. Anal., 5 (2) (2022), 105–118.
- [3] J. Bustamante and L. Flores-de-Jesús, *Strong converse inequalities and quantitative Voronovskaya-type theorems for trigonometric Fejér sums*, Constr. Math. Anal., 3 (2) (2020), 53–63.
- [4] P. L. Butzer, and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, New-York and London, 1971.
- [5] R. DeVore, *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Lecture Notes in Mathematics No. 293, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, 1972.
- [6] O. Kiss and P. Vértesi, *On a new interpolation process* (in Russian), Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 10 (1967), 117–128.
- [7] R. B. Saxena and K. B. Srivastava, *On interpolation operators* (I), Anal. Numér. Théor. Approx. 7 (2) (1978), 211–223.

- [8] J. D. Torres Campos, *Potencias del Núcleo de Dirichlet y Aproximación*, Master Thesis, Puebla, Mexico, 2024.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

`jbusta@fcfm.buap.mx`

`jose.torrescam@alumno.buap.mx`

Capítulo 3

Operadores morfológicos sobre superficies suaves en \mathbb{R}^n

Carlos Guillén-Galván, Carlos Alberto López-Andrade
FCFM, BUAP

Resumen

Se presentan los conceptos y propiedades principales de los operadores morfológicos dilatación-erosión y abertura-cerradura sobre superficies Euclidianas. Como estos operadores son generalizaciones de los operadores clásicos sobre el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n se muestran los operadores morfológicos definidos sobre retículas completas, en particular sobre las retículas $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ y $(Fun(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}), \leq)$.

1 Introducción

Existe una diversidad de problemas que requieren de reconocer patrones o formas en una imagen, problemas como la detección del fenómeno de mitosis en imágenes médicas, el análisis de imágenes satelitales, la eliminación de ruido y el de segmentación de imágenes entre otros.

Los operadores morfológicos clásicos son utilizados ampliamente en el procesamiento digital de imágenes soportadas sobre espacios Euclidianos o el espacio \mathbb{Z}^2 . En el desarrollo de la teoría se ha buscado ampliar el espectro de las aplicaciones considerando imágenes sobre espacios más generales como retículas ó espacios con grupos de simetría no conmutativos [10, 5]. En particular la teoría morfológica clásica ha sido ampliamente estudiada sobre las retículas $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \subseteq)$ y $(Fun(\mathbb{R}^2, \overline{\mathbb{R}}), \leq)$.

Para imágenes sobre superficies en \mathbb{R}^n e incluso sobre variedades de Riemann hay especial atención en el desarrollo de la teoría morfológica [1, 9, 2].

La intención principal en el presente trabajo es establecer los fundamentos de los operadores morfológicos sobre superficies suaves arbitrarias en \mathbb{R}^n con

el objetivo a futuro de dar una formulación en términos algebraicos de las propiedades de invarianza que satisfacen los operadores morfológicos presentados aquí.

En la sección 2, se presentan las definiciones y propiedades algebraicas de los principales operadores y filtros morfológicos. En la sección 3, se recuerdan los conceptos de superficie suave en \mathbb{R}^n , transporte paralelo y mapeo exponencial. Estos conceptos sustentan la sección 4. Finalmente en la sección 4 se presentan los principales operadores y filtros sobre una superficie suave arbitraria en \mathbb{R}^n .

2 Morfología Matemática

Los conceptos de invarianza son fundamentales en el procesamiento digital de imágenes y por ende en la morfología matemática.

Un *espacio homogéneo* es un par (M, T) donde M es un conjunto y T es un grupo de transformaciones invertibles transitivas sobre M . Un grupo T de transformaciones sobre M es *transitivo* si para cualesquiera $p, q \in M$, existe $t \in T$ tal que $t(p) = q$, si t es único, T es llamado *simplemente transitivo*. Si $f, g \in T$, fg denota la composición $f \circ g$, también si $x \in M$, se acostumbra denotar $gx = g(x)$. El *estabilizador* de $x \in M$ es definido como el conjunto

$$Stab_T(x) = \{g \in T : gx = x\}.$$

Una *retícula completa* (E, \leq) es un conjunto E dotado con una relación de orden parcial \leq tal que cualquier subconjunto P de E tiene supremo $(\bigvee P)$ e ínfimo $(\bigwedge P)$, ambos pertenecientes a E .

Consideremos la retícula completa $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ donde $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto potencia de E . Los operadores $\psi, \psi^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, son *duales* si para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ se cumple $\psi(E - X) = \psi^*(X)$.

Decimos que un operador $\Psi : E \rightarrow E$ es:

- *creciente* si $\forall x, y \in E : x \leq y \Rightarrow \Psi(x) \leq \Psi(y)$,
- *extensivo* si $\forall x \in E, x \leq \Psi(x)$,
- *anti-extensivo* si $\forall x \in E, \Psi(x) \leq x$,

- *idempotente* si $\forall x \in E, \Psi^2(x) = \Psi(x)$,
- una *apertura* si Ψ es creciente, anti-extensivo e idempotente,
- una *cerradura* si Ψ es creciente, extensivo e idempotente.

Sean \mathcal{L} y \mathcal{M} dos retículas completas, $\{x_i\}_{i \in I}$ una familia en \mathcal{L} , un mapeo

$$\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$$

es

- una *dilatación* si

$$\bigvee \psi(x_i) = \psi(\bigvee x_i),$$

y es

- una *erosión* si

$$\bigwedge \psi(x_i) = \psi(\bigwedge x_i).$$

Se pueden definir familias de operadores a través de un parámetro B en una familia de conjuntos o funciones en \mathcal{L} , el parámetro B es llamado *elemento o función estructural* dependiendo si B es un conjunto o una función. Por ejemplo, si \mathcal{L} y \mathcal{M} son la retícula completa $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ y B es un elemento estructural, el mapeo $\delta_B : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, definido por

$$\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_b \tag{1}$$

donde $X_p = \{x + p : x \in X\}$, es una dilatación, en efecto, esto se sigue de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\delta_B\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) &= \bigcup_{p \in B} \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)_p \\
&= \bigcup_{p \in B} \{x + p : x \in \bigcup_{i \in I} X_i\} \\
&= \bigcup_{p \in B} \{x + p : \text{para algún } i \in I, x \in X_i\} \\
&= \{x + p : \text{para algún } i \in I, x \in X_i, \text{ y para algún } p \in B\} \\
&= \bigcup_{i \in I} \{x + p : x \in X_i, \text{ para algún } p \in B\} \\
&= \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{p \in B} (X_i)_p\right) \\
&= \bigcup_{i \in I} \delta_B(X_i).
\end{aligned}$$

Observe que la igualdad

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} B_x, \quad (2)$$

se sigue de:

$$\begin{aligned}
\delta_B(X) &= \bigcup_{b \in B} X_b \\
&= \bigcup_{b \in B} \{x + b : x \in X\} \\
&= \{x + b : x \in X, b \in B\} \\
&= \bigcup_{x \in X} \{b + x : b \in B\} \\
&= \bigcup_{x \in X} B_x.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que el mapeo $\varepsilon_B : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}, \quad (3)$$

es una erosión. También observe que

$$\varepsilon_B(X) = \{p \in \mathbb{R}^n : B_p \subseteq X\},$$

esta igualdad se sigue de la siguiente cadena de bicondicionales.

$$\begin{aligned} z \in \bigcap_{b \in B} X_{-b} &\iff \forall b \in B, z \in X_{-b} \\ &\iff \forall b \in B, \exists x \in X : z = x - b \\ &\iff \forall b \in B, \exists x \in X : z + b = x \\ &\iff B_z \subseteq X \text{ para } z \in \mathbb{R}^n \\ &\iff z \in \{p \in \mathbb{R}^n : B_p \subseteq X\}. \end{aligned}$$

La clase de funciones $f : A \rightarrow B$ es denotada por $Fun(A, B)$. Sea $\mathcal{L} = Fun(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$, donde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y el orden \leq sobre \mathcal{L} , definido por

$$f \leq g \text{ si y solo si } \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)$$

(\mathcal{L}, \leq) es una retícula completa. Sea $b \in \mathcal{L}$, Los mapeos $\delta_b, \varepsilon_b \in \mathcal{L}$ definidos por

$$\delta_b(f)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) + b(y - x)\} \quad (4)$$

$$\varepsilon_b(f)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) - b(y + x)\} \quad (5)$$

son una dilatación y una erosión, respectivamente. Veamos que δ_b , es en efecto una dilatación. Para esto, si $\{f_i : i \in I\}$ es una familia de elementos en \mathcal{L} , tenemos

$$\begin{aligned} \delta_b(\bigvee_{i \in I} f_i)(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{(\bigvee_{i \in I} f_i)(y) + b(y - x)\} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\bigvee_{i \in I} (f_i(y) + b(y - x))\} = \bigvee_{i \in I} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{f_i(y) + b(y - x)\} \\ &= \bigvee_{i \in I} \delta_b(f_i)(x). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se cumple por el principio de los supremos iterados. Similarmente se verifica que ε_b es una erosión.

Los operadores $\varepsilon, \delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, forman una *adjunción* (ε, δ) si

$$\forall x \in \mathcal{L}, \forall y \in \mathcal{M}, \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y).$$

Sea (\mathcal{L}, \leq) una retícula completa, un operador creciente ψ sobre \mathcal{L} es

- un *sobrefiltro* si $\psi^2 \geq \psi$;
- un *bajofiltro* si $\psi \geq \psi^2$; o
- un *filtro* si $\psi^2 = \psi$.

Ejemplos básicos de filtros son los operadores *apertura* y *cierre* definidos respectivamente sobre $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ a través del elemento estructural B como sigue

$$\alpha_B(X) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{B_p : B_p \subseteq X\} \quad (6)$$

$$\beta_B(X) = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^n} \{B_p : X \subseteq B_p\} \quad (7)$$

Se acostumbra denotar $\alpha_B(X) = X \circ B$ y $\beta_B(X) = X \bullet B$. Veamos que

$$\alpha_B(X) = \delta_B(\varepsilon_B(X)) \quad (8)$$

En efecto, esta igualdad se justifica como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_B(\varepsilon_B(X)) &= \bigcup_{p \in B} (\varepsilon_B(X))_p = \bigcup_{p \in B} \{t + p : t \in \varepsilon_B(X)\} \\ &= \bigcup_{p \in B} \{t + p : t \in \mathbb{R}^n, B_t \subseteq X\}. \end{aligned}$$

Veamos por contenciones que

$$H = \bigcup_{p \in B} \{t + p : t \in \mathbb{R}^n, B_t \subseteq X\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^n} \{B_t : B_t \subseteq X\} = T,$$

para este fin tenemos la siguiente cadena de bicondicionales:

$$z \in H \Leftrightarrow z = t + p \text{ para algún } p \in B \text{ y algún } t \in \mathbb{R}^n \text{ con } B_t \subseteq X$$

$$\Leftrightarrow z \in B_t \subseteq X \text{ con } z = p + t, p \in B \text{ y algún } t \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow z \in T.$$

Ahora para verificar que α_B es un filtro vemos primero que es creciente ya que α_B es una composición de operadores crecientes. Para probar la idempotencia, de la definición de α se tiene $\alpha_B(X) \subseteq X$ y usando el hecho de que es creciente

$$\alpha_B^2(X) \subseteq \alpha_B(X)$$

Ahora, claramente se cumple la siguiente contención entre colecciones:

$$\{B_p : B_p \subseteq X\} \subseteq \{B_q : B_q \subseteq \bigcup_{l \in \mathbb{R}^n} \{B_l : B_l \subseteq X\}\},$$

de donde se obtiene

$$\alpha_B(X) \subseteq \alpha_B^2(X).$$

Por lo tanto, α_B es idempotente. En consecuencia α_B es un filtro y de (6) se sigue que α_B es anti-extensivo y así es efectivamente una apertura.

De (7) se cumple la igualdad

$$(\alpha_B(X^c))^c = \beta_{B^c}(X). \quad (9)$$

En efecto, de (6),

$$(\alpha_{B^c}(X^c))^c = \left(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{B_p^c : B_p^c \subseteq X^c\} \right)^c = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^n} \{B_p : X \subseteq B_p\} = \beta_B(X).$$

Veamos que

$$\beta_B(X) = \varepsilon_{\hat{B}}(\delta_{\hat{B}}(X)), \quad (10)$$

donde

$$\hat{B} = (\check{B})^c = (B^c)^\check{} \quad (11)$$

y

$$\check{B} = \{-b : b \in B\} \quad (12)$$

Observe que

$$\hat{B} = \{b : -b \notin B\}. \quad (13)$$

Para la demostración de (10), veamos primero que dados $X, A \in \mathcal{L}$ se cumplen:

$$(\delta_A(X^c))^c = \varepsilon_{\hat{A}}(X) \quad (14)$$

y

$$(\varepsilon_A(X^c))^c = \delta_{\hat{A}}(X) \quad (15)$$

De (1), (12) y del hecho de que $(X_a^c)^c = X_a$, se sigue

$$(\delta_A(X^c))^c = \left(\bigcup_{a \in A} X_a^c \right)^c = \bigcap_{a \in A} X_a = \bigcap_{-a \in A} X_{-a} = \bigcap_{a \in \hat{A}} X_{-a} = \varepsilon_{\hat{A}}(X).$$

La igualdad (15), se sigue de (14) evaluando en X^c y en \hat{A} en vez de X y A , esto es $(\delta_{\hat{A}}(X))^c = \varepsilon_{\hat{\hat{A}}}(X^c)$, aplicando el complemento a ambos miembros de esta igualdad y el hecho de que $\hat{\hat{A}} = A$ se obtiene (15).

De (9), (8), (14) y (15) podemos deducir (10) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \beta_B(X) &= (\alpha_B(X^c))^c = (\delta_{B^c} \varepsilon_{B^c}(X^c))^c = (\delta_{B^c}(\varepsilon_{B^c}(X^c)))^c = \\ &= \varepsilon_{(B^c)^c}((\varepsilon_{B^c}(X^c))^c) = \varepsilon_{(B^c)^c}(\delta_{(B^c)^c}(X)) = \varepsilon_{\hat{B}} \delta_{\hat{B}}(X). \end{aligned}$$

Ahora β_B es creciente ya que de (3), es una composición de operadores crecientes. La idempotencia de β_B se obtiene de (9) como sigue

$$\beta_B(\beta_B(X)) = (\alpha_{B^c}(\beta_B(X)^c))^c = (\alpha_{B^c}(\alpha_{B^c}(X^c)))^c = (\alpha_{B^c}(X^c))^c = \beta_B(X).$$

En la retícula completa $(Fun(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}), \leq)$ los filtros apertura y cerradura se definen también mediante las composiciones de la dilatación y la erosión:

$$\alpha_b(f) = \delta_b \circ \varepsilon_b(f) \text{ y } \beta_b(f) = \varepsilon_b \circ \delta_b(f). \quad (16)$$

En esta retícula podemos observar que los operadores dilatación y erosión son invariantes bajo traslaciones, esto es si $T_{h,\alpha} : Fun(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}) \rightarrow Fun(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ es tal que $T_{h,\alpha}(f)(x) = f(x - h) + \alpha$, entonces

$$\delta_b((T_{h,\alpha})(f)) = \delta_b(f) \text{ y } \varepsilon_b((T_{h,\alpha})(f)) = \varepsilon_b(f).$$

Efectivamente para la dilatación de (4) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta_b((T_{h,\alpha})(f))(x) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{T_{h,\alpha}(f)(y) + b(y - x)\} \\
&= \sup\{f(y - h) + \alpha + b(y - x)\} \\
&= \sup\{f(y - h) + b(y - x)\} + \alpha \\
&= \sup\{f(y - h) + b((y - h) - (x - h))\} + \alpha \\
&= \delta_b(f)(x - h) + \alpha \\
&= T_{h,\alpha}(\delta_b(f))(x).
\end{aligned}$$

De manera similar se sigue que ε_b es invariante bajo traslaciones.

3 Superficies suaves en \mathbb{R}^n

Una *superficie suave de dimensión n* en \mathbb{R}^{n+1} , es un subconjunto no vacío M de \mathbb{R}^{n+1} de la forma $M = f^{-1}(c)$ donde $c \in \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, es una función suave tal que $\nabla f(p) \neq \mathbf{0}$ para todo $p \in M$ (todo punto de M es regular) y U es un abierto en \mathbb{R}^{n+1} . Un *vector* en un punto $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un par $\mathbf{v} = (p, v)$ donde $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n+2}$.

Una *superficie parametrizada* de dimensión n en \mathbb{R}^{n+k} ($k \geq 0$), es un mapeo suave $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ regular ($d_p\varphi$ es no singular para todo $p \in U$), donde U es un conjunto abierto conexo en \mathbb{R}^n . Dado $p \in U$, existe $U_1 \subseteq U$ un conjunto abierto que contiene a p tal que $\varphi(U_1)$ es una superficie en \mathbb{R}^{n+1} de dimensión n [12].

El *espacio tangente* a M en p , denotado por M_p , es el conjunto $[\nabla f(p)]^\perp$ de todos los vectores tangentes a M en p . Una *curva parametrizada* en M , es una función suave $\alpha : I \rightarrow M$, donde I es un intervalo abierto en \mathbb{R} . También, el espacio tangente M_p puede ser visto como el conjunto de vectores velocidad de todas las curvas suaves que pasan a través de p .

$$M_p = \{\dot{\alpha}(0) | \alpha : I \rightarrow M, \text{ es suave, } \alpha(0) = p\}.$$

El conjunto M_p es un subespacio n -dimensional del espacio de todos los vectores en p . El conjunto

$$T(M) = \{(p, w) : p \in M, w \in M_p\}$$

es llamado *haz tangente*. El conjunto $T(M)$ es una superficie de dimensión $2n$ en \mathbb{R}^{2n+2} . Por ejemplo, el haz tangente de la circunferencia unitaria \mathbb{S}^1 es

$$T(\mathbb{S}) = \{(\cos \theta, \sin \theta, -t \sin \theta, t \cos \theta) : (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}\}$$

Una *geodésica* es una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ tal que

$$\ddot{\alpha}(t) \in M_{\alpha(t)}^{\perp}, \quad \forall t \in I,$$

esto es, el vector aceleración es en todo momento ortogonal al plano tangente $M_{\alpha(t)}$. De la definición se sigue que las geodésicas tienen rapidez constante ($\frac{d}{dt} \|\dot{\alpha}\|^2 = 2\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$). Para cada $p \in M$ y $\mathbf{v} \in M_p$ existe una única geodésica maximal α con $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$.

Si el dominio I de la geodésica α es elegido lo más grande posible, α es llamada una *geodésica maximal*.

Un *campo vectorial* sobre $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, es una función

$$\mathbf{F} : U \rightarrow M \times Fun(U, \mathbb{R}^{n+1}),$$

así $\mathbf{F}(p) = (p, F(p))$ donde $F \in Fun(U, \mathbb{R}^{n+1})$. Un campo vectorial \mathbf{F} es *suave* si las funciones componentes de F tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden. Un campo vectorial *tangente a M a lo largo de α* es un campo vectorial a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow M$, $\mathbf{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\mathbf{F}(t) \in M_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$. La *derivada covariante* de \mathbf{F} , es el campo vectorial \mathbf{F}' , que es tangente a M a lo largo de α , es definido por

$$\mathbf{F}'(t) = \dot{\mathbf{F}}(t) - \langle \dot{\mathbf{F}}(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle \mathbf{N}(\alpha(t)), \quad (17)$$

donde \mathbf{N} es un campo vectorial normal unitario. Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica si y solo si la aceleración covariante $(\dot{\alpha})'$ es cero a lo largo de α . En efecto, si α es una geodésica para cada $t \in I$ tenemos

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha})'(t) &= \ddot{\alpha}(t) - \langle \ddot{\alpha}(t), \mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)) \rangle \mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)) = \\ &= \ddot{\alpha}(t) - \langle \ddot{\alpha}(t), \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|} \rangle \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|} = \\ &= \ddot{\alpha}(t) - \langle \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|}, \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|} \rangle \ddot{\alpha}(t) = 0. \end{aligned}$$

Ahora si $(\dot{\alpha})'(t) = 0$ para todo $t \in I$,

$$\ddot{\alpha}(t) = \langle \ddot{\alpha}(t), \mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)) \rangle \mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)) = \lambda(t) \mathbf{N}(\dot{\alpha}(t))$$

de aquí $\ddot{\alpha}(t) \in M_{\alpha(t)}^\perp$, $\forall t \in I$.

Un campo vectorial suave \mathbf{F} a lo largo de α , es llamado *constante* o *Levi Civita paralelo* si $\mathbf{F}' = 0$. Si \mathbf{F} y \mathbf{G} son dos campos vectoriales suaves constantes a lo largo de α , utilizando (17) se puede comprobar que

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle' = \langle \mathbf{F}', \mathbf{G} \rangle + \langle \mathbf{F}, \mathbf{G}' \rangle = 0,$$

de donde $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle$ es constante a lo largo de α , \mathbf{F} y \mathbf{G} tienen longitud constante y el ángulo entre ellos es constante. Dada una superficie de dimensión n y una curva parametrizada, el siguiente teorema establece la existencia y unicidad (con condición inicial) de un campo vectorial paralelo y tangente a la superficie dada.

Teorema 1. Sean M una superficie de dimensión n , $\alpha : I \rightarrow M$ una curva parametrizada, $t_0 \in I$ y $\mathbf{v} \in M_{\alpha(t_0)}$, entonces existe un único campo vectorial \mathbf{F} tangente a M a lo largo de α el cual es paralelo y $\mathbf{F}(t_0) = \mathbf{v}$.

Demostración. Veamos las condiciones que debe cumplir el campo vectorial \mathbf{F} . Para que \mathbf{F} sea un campo vectorial paralelo, se debe cumplir

$$\mathbf{F}' = \mathbf{0}, \quad (18)$$

entonces de (17), (18) y como \mathbf{F} y \mathbf{N} son ortogonales, obtenemos.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \dot{\mathbf{F}} - \langle \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = \dot{\mathbf{F}} - [\langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{N}} \rangle - \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{N}} \rangle] \mathbf{N} = \\ &= \dot{\mathbf{F}} - [\dot{0} - \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{N}} \rangle] \mathbf{N} = \dot{\mathbf{F}} + \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{N}} \rangle \mathbf{N}. \end{aligned}$$

En consecuencia se cumple

$$\dot{\mathbf{F}} = -\langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{N}} \rangle \mathbf{N}. \quad (19)$$

Si $\mathbf{F}(p) = (p, F(p))$ con $F(p) = (y_1(p), \dots, y_{n+1}(p))$, $y_i \in Fun(U, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n+1$, $p \in U$, U abierto en \mathbb{R}^{n+1} . Si $\mathbf{N}(\alpha(t)) = (a_1(t), \dots, a_{n+1}(t))$, tenemos el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{n+1} y_j(t) \dot{a}_j(t) a_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (20)$$

con las condiciones iniciales:

$$y_i(t_0) = v_i, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (21)$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n+1})$. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales existe una única solución $F = (y_1, \dots, y_{n+1})$ del sistema (20) con las condiciones iniciales (21). Ahora veamos que \mathbf{F} es tangente a M a lo largo de α . Para esto $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{N}(\alpha(t))$ deben ser ortogonales para todo $t \in I$. Entonces de la derivada de un producto escalar y de (19) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle + \left\langle \mathbf{F}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle = \\ &= -\left\langle \mathbf{F}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle \langle \mathbf{N}(\alpha(t)), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle + \left\langle \mathbf{F}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle \\ &= -\left\langle \mathbf{F}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle \|\mathbf{N}(\alpha(t))\|^2 + \left\langle \mathbf{F}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{N}(\alpha(t)) \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle$ es constante para todo $t \in I$ y como $\mathbf{v} \in M_{\alpha(t_0)}$,

$$\langle \mathbf{F}(t_0), \mathbf{N}(\alpha(t_0)) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{N}(\alpha(t_0)) \rangle = 0,$$

se sigue que $\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. \square

En el caso de una superficie M de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 , se tiene que un campo vectorial \mathbf{F} es tangente a M a lo largo de una geodésica α si y solo si $\|\mathbf{F}\|$ y el ángulo entre \mathbf{F} y $\dot{\alpha}$ son constantes a lo largo de α .

Como se establece en la siguiente definición el paralelismo puede ser utilizado para transportar vectores tangentes a una superficie de dimensión n de un punto a otro.

Definición 1. Sean $p, q \in M$ y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva parametrizada tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Para $\mathbf{v} \in M_p$ sea \mathbf{F} el único campo vectorial paralelo

a lo largo de α con $\mathbf{F}(a) = \mathbf{v}$. El *transporte paralelo* de p a q es el mapeo $P_\alpha : M_p \rightarrow M_q$ definido por

$$P_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(b).$$

$P_\alpha(\mathbf{v})$ es llamada la *traslación paralela* de \mathbf{v} a lo largo de α a q .

En general el transporte paralelo de p a q depende de la curva α , esto es puede ser que si α y β son dos curvas distintas en M , $P_\alpha(\mathbf{v}) \neq P_\beta(\mathbf{v})$ y como $P_\alpha(\mathbf{v})$ y $P_\beta(\mathbf{v})$ pertenecen al mismo plano tangente M_q , éstas difieren de una rotación al rededor de la normal a M en q . Si un vector en M_p es transportado a lo largo de una curva cerrada que comienza en p y termina en p , entonces se realiza una rotación en M_p . El *grupo de holonomía* en p es el conjunto de rotaciones en M_p generadas por traslación paralela a lo largo de curvas cerradas. Los grupos de holonomía entre diferentes puntos de M son isomorfos. En efecto, si $G[p]$ y $G[q]$ son los grupos de holonomía en p y q respectivamente, entonces la transformación $\psi : G[p] \rightarrow G[q]$ tal que a una rotación de ángulo θ al rededor de la normal a M en p le hace corresponder una rotación de ángulo θ al rededor de la normal a M en q es un isomorfismo entre los grupos $G[p]$ y $G[q]$.

Teorema 2. Sean M una superficie de dimensión \mathbb{R}^{n+1} , $p, q \in M$ y α una curva suave a trozos de p a q , entonces la traslación paralela $P_\alpha : M_p \rightarrow M_q$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales que preserva el producto interno.

Demostración. Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in M_p$, \mathbf{F} y $\hat{\mathbf{F}}$ los únicos campos vectoriales paralelos a lo largo de α con $\mathbf{F}(a) = \mathbf{v}$ y $\hat{\mathbf{F}}(a) = \mathbf{w}$. Veamos que $P_\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = P_\alpha(\mathbf{v}) + P_\alpha(\mathbf{w})$, para esto, se afirma que $\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}}$ es el único campo vectorial paralelo a lo largo de α con $(\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}})(a) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. En efecto, de (17) se sigue que $(\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}})' = \mathbf{F}' + \hat{\mathbf{F}}' = \mathbf{0}$. Además la cerradura de la suma en espacios vectoriales, $\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}}$ es tangente a M a lo largo de α . La unicidad de $\mathbf{F} + \hat{\mathbf{F}}$ se sigue del Teorema 1. Como \mathbf{F} es un campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $\mathbf{F}(a) = \mathbf{v}$ y $\mathbf{G} = \lambda\mathbf{F}$ es un campo vectorial paralelo a \mathbf{F} , se sigue que \mathbf{G} es un campo vectorial paralelo a lo largo de α . También $\mathbf{G}(a) = \lambda\mathbf{F}(a) = \lambda\mathbf{v}$, por unicidad

$$P_\alpha(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{G}(b) = \lambda\mathbf{F}(b) = \lambda P_\alpha(\mathbf{v})$$

La traslación P_α es uno a uno, ya que si $\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \in M_p$ son tales que $P_\alpha(\mathbf{v}) = P_\alpha(\hat{\mathbf{v}})$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{F}(a) = \hat{\mathbf{v}}$, de aquí el núcleo de P_α es $\mathbf{0}$. Como M_p y

M_q tienen la misma dimensión, P_α es sobreyectiva. Si \mathbf{F} y $\hat{\mathbf{F}}$ son campos vectoriales tangentes a M a lo largo de α ambos paralelos tales que $\mathbf{F}(a) = \mathbf{v}$ y $\hat{\mathbf{F}}(a) = \mathbf{w}$, como $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{F}} \rangle$ es constante, entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{F}(a), \hat{\mathbf{F}}(a) \rangle = \langle \mathbf{F}(b), \hat{\mathbf{F}}(b) \rangle = \langle P_\alpha(\mathbf{v}), P_\alpha(\mathbf{w}) \rangle.$$

□

El siguiente objetivo es determinar cómo transportar subconjuntos de M de un punto a otro, para esto es necesario establecer cómo mapear puntos de M en vectores del haz tangente $T(M)$.

En lo que sigue se consideran todas las curvas parametrizadas con respecto a la longitud de arco, de aquí que todas las curvas tienen rapidez unitaria.

Definición 2. Para $\mathbf{v} \in T(M)$, sea $\alpha_{\mathbf{v}}$ la única geodésica maximal con $\dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$. Sea $U = \{\mathbf{v} \in T(M) : 1 \in \text{dom}(\alpha_{\mathbf{v}})\}$. El mapeo

$$\mathbf{Exp} : U \rightarrow M, \quad \mathbf{Exp}(\mathbf{v}) = \alpha_{\mathbf{v}}(1),$$

es llamado *mapeo exponencial* de M . Para $p \in M$, con \mathbf{Exp}_p denotamos el mapeo:

$$\mathbf{Exp}_p : M_p \rightarrow M, \quad \mathbf{Exp}_p(\mathbf{v}) = \mathbf{Exp}(\mathbf{v}).$$

Como las geodésicas tienen rapidez constante, observe que $\mathbf{Exp}_p(\mathbf{v})$ es un punto sobre la única geodésica determinada por \mathbf{v} cuya distancia desde p a lo largo de la geodésica es $\|\mathbf{v}\|$. Para la demostración de esta última afirmación, recordemos que la longitud de la geodésica $\alpha_{\mathbf{v}}$ del punto $p = \alpha_{\mathbf{v}}(0)$ al punto $\alpha_{\mathbf{v}}(1)$ está dada por

$$\text{longitud}(\alpha_{\mathbf{v}}) = \int_0^1 \|\alpha'_{\mathbf{v}}(s)\| ds = \int_0^1 \|\mathbf{v}\| ds = \|\mathbf{v}\|.$$

Teorema 3. ([12]) El mapeo exponencial $\mathbf{Exp} : U \rightarrow M$ de una superficie de dimensión n de \mathbb{R}^{n+1} cumple con las siguientes propiedades

1. U es un conjunto abierto en $T(M)$.

2. Para cada $p \in M$ y $\mathbf{v} \in M_p$, la geodésica maximal $\alpha_{\mathbf{v}}$ con $\dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ está dada por la fórmula $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{Exp}_p(t\mathbf{v})$.
3. Si $\mathbf{v} \in U$ entonces $t\mathbf{v} \in U$ para $0 \leq t \leq 1$.
4. La \mathbf{Exp} es un mapeo suave.
5. Para $p \in M$ existe un conjunto U_p , abierto en M_p y conteniendo a $\mathbf{0} \in M_p$ tal que $U_p \subset U$ y $\mathbf{Exp}|_{U_p}$ es un difeomorfismo de U_p sobre un subconjunto abierto de M que contiene a p .

Del inciso 2 del teorema previo las geodésicas en M a través de p pueden ser descritas como las imágenes bajo \mathbf{Exp} de los rayos $r(t) = t\mathbf{v}$ en M_p .

En el caso de la 2-esfera unitaria \mathbb{S}^2 el mapeo \mathbf{Exp}_p está definido para todo $v \in T_p(\mathbb{S}^2)$. Los puntos p sobre los círculos en $T_p(\mathbb{S}^2)$ de radios $\pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$ son mapeados en puntos q que son los antipolares de los puntos p y los puntos p sobre los círculos en $T_p(\mathbb{S}^2)$ de radios $2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ son mapeados de regreso en p . Si se remueve de \mathbb{S}^2 el punto antipodal de p , entonces $\mathbf{Exp}_p(v)$ está definida solo en el interior de un disco en $T_p(\mathbb{S}^2)$ centrado en el origen y de radio π .

Teorema 4. ([12]) Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, \mathbf{Exp}_p mapea la ϵ -bola $B_\epsilon = \{\mathbf{v} \in M_p : \|\mathbf{v}\| < \epsilon\}$ difeomorficamente sobre un subconjunto abierto U_ϵ de M que contiene a p . Para $q \in U_\epsilon$ la curva $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{Exp}_p(t\mathbf{v})$, $0 \leq t \leq 1$, con $\mathbf{Exp}_p(\mathbf{v}) = q$ es la única geodésica que une p y q , que se encuentra en U_ϵ y tiene la longitud más corta que cualquier otra curva que una a p y q .

4 Morfología sobre superficies suaves en \mathbb{R}^n

Partiendo de M una superficie suave en \mathbb{R}^n , podemos considerar la retícula completa $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ y si definimos de igual manera los operadores δ_B y ε_B dados en la sección 2, varias propiedades de invarianza podrían incumplirse, por ejemplo, las imágenes de subconjuntos de M bajo estos operadores pueden no estar contenidos en $\mathcal{P}(M)$, un subconjunto conexo de M podría tener imagen disconexa bajo estos operadores, estas situaciones se pueden presentar

debido a que los operadores δ_B y ε_B se definen a través de traslaciones que operan sobre \mathbb{R}^n y no sobre la superficie M .

Resulta natural aprovechar la estructura diferencial de la superficie para definir operadores morfológicos que cumplan con alguna forma de invarianza en la superficie. Puesto que la noción de forma es muy restrictiva para el caso de conjuntos sobre superficies arbitrarias M y como en general no existe ningún grupo que actúe transitivamente sobre M , se busca algún tipo de equivalencia. Utilizando conceptos de la geometría diferencial se da una definición más general del concepto de equivalencia de forma (dos conjuntos X e Y tienen formas equivalentes si existe una acción de grupo g tal que $gX = Y$). En gran parte, la teoría nos lleva a sustituir el grupo de traslaciones por traslaciones paralelas. La idea fundamental de utilizar el transporte paralelo de subconjuntos de M de una localidad a otra es preservar tantas propiedades como sea posible.

Para transportar una vecindad X de un punto $p \in M$ a otro punto $q \in M$, primero se mapea X mediante la inversa de la exponencial al espacio M_p , $Exp_p^{-1}(X)$ (del inciso 5 del Teorema 3 la exponencial es localmente invertible), luego se utiliza la traslación paralela, denotada por P_γ , a lo largo de una curva γ que inicia en p y termina en q ,

$$P_\gamma \circ Exp_p^{-1}(X)$$

(ver la definición 1), finalmente mediante la exponencial Exp_q regresamos a M , obteniendo una vecindad Y de q ;

$$Y = Exp_q \circ P_\gamma \circ Exp_p^{-1}(X) \quad (22)$$

Se denota $Y = \tau_{\gamma pq}(X)$, esto es $\tau_{\gamma pq} = Exp_q \circ P_\gamma \circ Exp_p^{-1}$. La igualdad (22) puede ser representada mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{P_{\gamma pq}} & M_q \\ \text{Exp}_p^{-1} \uparrow & & \downarrow \text{Exp}_q \\ M & \xrightarrow{\tau_{\gamma pq}} & M \end{array} \quad (23)$$

Denotamos con $\mathcal{C}[p, q]$ la colección de todas las curvas sobre M que inician en p y terminan en q .

Si fijamos $p \in M$ y X es una vecindad de p suficientemente pequeña, tenemos que la unión

$$\bigcup_{q \in M} \{\tau_\gamma(X) : \gamma \in \mathcal{C}[p, q]\}$$

cubre a M por una colección infinita de copias difeomorfas de X . Debido al transporte paralelo se puede verificar que se preservan varias propiedades métricas como la longitud y el ángulo entre vectores tangentes. Cuando la superficie M es un plano la transformación τ_γ coincide con una traslación y si M es una esfera τ_γ es una rotación si la región X no contiene el antipodal de p (para que $Exp_p^{-1}(X)$ esté bien definida).

Como hay una correspondencia 1-1 entre vecindades suficientemente pequeñas de $p \in M$ con vecindades de $\mathbf{0} \in M_p$ se toma como elemento estructurante un subconjunto A del espacio tangente M_q para un punto dado $q \in M$.

Se define el operador $\hat{\tau}_p : M_q \rightarrow M_p$ por

$$\hat{\tau}_p(A) = Exp_p P_\gamma(A), \quad (24)$$

donde P_γ es el transporte paralelo de vectores tangentes a lo largo de la curva γ desde el punto q hasta el punto p .

Ahora como la imagen del conjunto X bajo el transporte paralelo desde un punto p al punto q depende en general del camino elegido, la solución dada en [9], es simplemente considerar todos los posibles caminos de p a q . En consecuencia podemos definir la dilatación sobre una superficie M con elemento estructural $B \subset M_w$, para $w \in M$ un elemento fijo elegido arbitrariamente, como sigue: sea el mapeo $\delta_B : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ definido por

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}[w, x]} Exp_x P_\gamma(B). \quad (25)$$

La expresión dada por (25) puede ser reescrita de la siguiente manera. Para todo $x \in M$, se elige una curva particular $\gamma \in \mathcal{C}[w, x]$, entonces

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{s \in \Sigma} \hat{\tau}_x(sB), \quad (26)$$

donde Σ es el grupo de rotaciones alrededor de la normal a w y $\hat{\tau}_x$ está dado por (24) con $p = x$ y $A = sB$. Si hacemos

$$\lambda(x) = \bigcup_{s \in \Sigma} \hat{\tau}_x(sB), \quad (27)$$

donde $\lambda : X \subseteq M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, entonces

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} \lambda(x). \quad (28)$$

De esta forma se verifica que δ_B es una dilatación. En efecto, si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de M , tenemos

$$\delta_B\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in I} X_i} \lambda(x) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in X_i} \lambda(x) = \bigcup_{i \in I} \delta_B(X_i).$$

También observamos que

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{s \in \Sigma} \hat{\tau}_x(sB) = \bigcup_{x \in X} \hat{\tau}_x\left(\bigcup_{s \in \Sigma} sB\right) = \bigcup_{x \in X} \hat{\tau}_x(\bar{A}),$$

donde

$$\bar{A} = \bigcup_{s \in \Sigma} sB. \quad (29)$$

Por lo tanto

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} \hat{\tau}_x(\bar{A}) \quad (30)$$

El conjunto \bar{A} es llamado Σ -*extensión* de B . Un ejemplo de una extensión es el siguiente: si B es un segmento de línea de longitud r que inicia en w , entonces \bar{A} es un disco de radio r y centro en w .

Si \bar{A} es un elemento estructurante Σ -invariante entonces el mapeo

$$\varepsilon_B(X) = \{x \in M : \hat{\tau}_x(\bar{A}) \subseteq X\}, \quad (31)$$

es una erosión, la cual extrae todos los puntos $x \in M$ tal que la traslación paralela de \bar{A} desde w a x encaja en X . Veamos que efectivamente el mapeo $\varepsilon_B : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ es una erosión. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de M , se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\varepsilon_B\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) &= \{x \in M : \hat{\tau}_x(\overline{A}) \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i\} = \\
&= \{x \in M : \hat{\tau}_x(\overline{A}) \subseteq X_i, \text{ para cada } i \in I\} \\
&= \bigcap_{i \in I} \{x \in M : \hat{\tau}_x(\overline{A}) \subseteq X_i\} = \bigcap_{i \in I} \varepsilon_B(X_i).
\end{aligned}$$

La *abertura* puede ser definida para cualquier vecindad B en M_w , como elemento estructurante, de la siguiente manera:

$$\alpha_B(X) = \bigcup_{x \in M} \{\hat{\tau}_x(B) : \hat{\tau}_x(B) \subseteq X\} \quad (32)$$

esto es, como la unión de todas las traslaciones paralelas de B a lo largo de curvas que comienzan en w y que están contenidas en X .

Siguiendo la ecuación (7) de la sección 2 podemos definir la *cerradura* con elemento estructurante B una vecindad en M_w como:

$$\beta_B(X) = \bigcap_{x \in M} \{\hat{\tau}_x(B) : X \subseteq \hat{\tau}_x(B)\}. \quad (33)$$

Ejemplo

Sea M cualquier superficie suave en \mathbb{R}^3 con la métrica inducida de \mathbb{R}^3 y para cualquier $x \in M$, $D_r(x)$ es el disco de radio r y centro en x . Sea el operador $\delta : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ definido por

$$\delta(X) = \bigcup_{x \in X} D_r(x).$$

Veamos que δ es una dilatación. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos de M , entonces

$$\delta\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in I} X_i} D_r(x) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in X_i} D_r(x) = \bigcup_{i \in I} \delta(X_i).$$

La erosión $\varepsilon : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ puede definirse por:

$$\varepsilon(X) = \{x \in \mathbb{R}^3 : D_r(x) \subseteq X\}.$$

La apertura y cierre se pueden definir como

$$\alpha(X) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^3} \{D_r(x) : D_r(x) \subseteq X\}$$

y

$$\beta(X) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^3} \{D_r(x) : X \subseteq D_r(x)\}$$

respectivamente. Como se comentó al inicio de la sección 4, los operadores definidos arriba pueden incumplir varias propiedades de invarianza, por ejemplo si M es la 2-esfera \mathbb{S}^2 la traslación de un subconjunto conexo puede incluso quedar fuera de la esfera o ser desconexo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro por sus valiosos comentarios y sugerencias que contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de nuestro manuscrito.

Bibliografía

- [1] J. Angulo, S. Velasco, Riemmanian Mathematical Morphology, <https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00877144v1>.
- [2] Thomas Bülow, Multiscale Image Processing on the Sphere, L. Van Gool (Ed.): DAGM 2002, LNCS 2449, pp. 609–617, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [3] M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Second Edition, Dover Publications Inc. New York, 2016.
- [4] P. Jackway, M. Deriche, Scale-space properties of the multiscale morphological dilation–Erosion, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence vol XX No Y, 1995.

- [5] H.J.A.M. Heijmans, C. Ronse, The Algebraic Basis of Mathematical Morphology Part I: Dilations and Erosions, Centre for Mathematics and Computer Science, Report AM-R8807, Amsterdam, The Netherlands, 1990.
- [6] S. Lovett, Differential Geometry of Manifolds, 2nd ed. CRC Press Taylor & Francis Group, 2020.
- [7] L. Najman, H. Talbot, Mathematical Morphology, First published 2010 in Great Britain and the United States by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Joel W. Robbin, Dietmar A. Salamon, Introduction to Differential Geometry. Springer Studium Mathematik (Master), 2022.
- [9] J.B.T.M. Roerdink. Manifold shape: from differential geometry to mathematical morphology. In Shape in Picture, NATO ASI F 126, pp. 209–223, Springer, 1994.
- [10] C. Ronse, H. J. A. M. Heijmans, The Algebraic Basis of Mathematical Morphology II. Openings and Closings, CVGIP: Image Understanding Vol. 54, No. I, July, pp. 74-97, 1991.
- [11] E. Sharon, D. Mumford, 2D-Shape Analysis using Conformal Mapping, International Journal of Computer Vision 70(1), 55–75, 2006 Springer ScienceVol.
- [12] J. A. Thorpe, Elementary Topics in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1979.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

cguillen@fcfm.buap.mx
carlos.lopezandrade@correo.buap.mx

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP
Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Probabilidad y Estadística

Capítulo 4

Gestión de riesgos de mercado mediante un portafolio óptimo con opciones barrera down-and-out

María Teresa Verónica Martínez-Palacios¹, Fernando
Brambila-Paz², Anthony Torres-Hernández^{2,3}

¹Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía, Ciudad
de México

²Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias,
Ciudad de México

³Universitat Pompeu Fabra, Departament de Tecnologies de la
Informació i les Comunicacions, Barcelona

mmartinezpa@ipn.mx, fernando.brambila@ciencias.unam.mx,
anthony.torres@ciencias.unam.mx

Resumen

En esta investigación, para lidiar con los riesgos post-pandemia COVID-19 que enfrentan los inversionistas, se construye y resuelve un modelo de Equilibrio General Dinámico Estocástico en el cual un agente económico racional, consumidor e inversionista representativo de una economía pequeña y cerrada, maximiza su utilidad mediante el consumo y rendimientos de su portafolio. Este agente gestiona el riesgo al incluir un derivado opción barrera-americana de venta de tipo knock-out (down and out), que cubre las pérdidas por disminución del precio del subyacente cuando está activa y por el pago de la prima de la opción cuando hay un evento en la barrera, a la vez que evita la insolvencia en todo momento del horizonte temporal.

1 Introducción

Las secuelas post-pandemia aún palpables en los mercados internacionales propician un escenario incierto en el que los agentes económicos precisan de estrategias de inversión y consumo con las que puedan gestionar los riesgos que afrontan a la vez de maximizar su utilidad esperada.

Una estrategia eficiente para abordar el problema es construir un portafolio que incluya productos derivados de nueva generación, porque representan un mecanismo para la gestión de riesgos y realizar su valuación mediante Teoría de Equilibrio General Dinámico Estocástico, ya que es la herramienta teórica apropiada porque induce la optimización requerida de manera dinámica con micro fundamentos y considerando la aleatoriedad de los eventos azarosos presentes en los mercados. La literatura en este tema es amplia, véanse al respecto, los trabajos de Merton (1973) [19]; Cox y Ross (1976) [6]; Cox, Ingersoll y Ross (1985) [7]; Martínez-Palacios, Hernández-Del-Valle, y Ortiz-Ramírez (2019) [16]; Venegas-Martínez y Cruz-Ake (1983) [15], y Sierra (1991) [24], entre otros. Así por ejemplo Martínez-Palacios, Hernández-Del-Valle, y Ortiz-Ramírez (2019) [16] realizan la valuación del instrumento derivado opción asiática-americana de precio strike flotante promedio geométrico y tasa de interés estocástica a partir del proceso de solución de un problema de control óptimo estocástico en el que se ha usado un horizonte temporal estocástico delimitado con una función de tiempo de paro. Es pertinente mencionar una restricción presente, en las otras investigaciones mencionadas y es que su horizonte temporal es determinista.

Un producto derivado es un instrumento financiero cuyo valor deriva de uno o más bienes subyacentes, pudiendo ser este, una acción, una divisa, un bono, otro derivado, un índice o una materia prima, energéticos, transporte y clima, entre otros. Una clasificación muy general se establece de acuerdo a su nivel de regulación y estandarización, lo que determina el mercado en que se comercializa. Así los derivados plan vanilla (o estándar) se comercializan en mercados regulados y estandarizados denominados bolsas de derivados. Entre los derivados más comunes están los futuros, las opciones y los swaps; y los derivados exóticos, los cuales se comercializan por lo general en mercados extrabursátiles también llamados mercados over the counter algunos de estos también se negocian en bolsas de valores.

Los derivados exóticos son contratos contingentes por lo general adapta-

dos y diseñados a la medida de las necesidades de los inversionistas por lo que tienen subyacentes con características específicas. Su clasificación es amplia y variada, algunos de ellos son: derivados sobre electricidad, transporte, climáticos, medioambientales y opciones exóticas, las cuales tienen su propia categorización, y entre las que se encuentran, las opciones compuestas, dependientes de la trayectoria, apalancadas, con pago singular y rainbow, por mencionar solo algunas.

De particular importancia en esta investigación son las opciones vanilla y barrera. Una opción financiera vanilla de compra (venta), es un contrato legal entre dos partes mediante el cual el emisor de dicho contrato se obliga a vender (comprar) un activo subyacente, y el comprador en cambio del pago de la prima o precio de la opción adquiere el derecho, de comprar (vender) dicho activo en un precio llamado precio de ejercicio y en una fecha futura, ambos definidos en el contrato.

La opción barrera es una opción exótica dependiente de la trayectoria, toda vez que el valor de su prima esta ligado al precio del activo subyacente sobre el que esta suscrita y de la trayectoria que siguió durante el horizonte temporal del contrato, de tal forma que alcance el nivel de barrera predeterminado. Se distinguen cuatro tipos de opciones barrera, a saber, Opción Up-and-in (el contrato tiene precio de subyacente menor que la barrera y de alcanzarla, se activa), Opción Down-and-in (el contrato tiene precio del subyacente mayor que la barrera y de alcanzarla, se activa), Opción Up-and-Out (el contrato tiene precio del subyacente menor que la barrera y de alcanzarla, se desactiva) y Opción Down-and-out (el contrato tiene precio del subyacente mayor que la barrera y de alcanzarla, se desactiva). En caso de estar activa, su prima corresponde a la de la opción vanilla y si esta desactiva su prima vale cero.

Los opciones barrera son ampliamente usados porque su prima es menor que la de la opción vanilla, toda vez que su margen de ejercicio está limitado por la barrera; al respecto léanse Merton (1973) [19], quien fue el primero en derivar la fórmula para valuar la opción barrera de compra down-and-out, Rubinstein y Reiner (1991) [24], Wilmott et al. (1994) [26], Heynen y Kat (2000) [10], Ibrahim et al. (2013) [13], Chiarella et al. (2012) [5] y Kou (2007) [14]. Es pertinente mencionar que los esfuerzos en investigación para precios de opciones barreras han considerado diferentes estructuras analíticas en los subyacentes; así por ejemplo Chiarella et al. (2012) hacen valuación numérica de los precios de las opciones barrera cuando el subyacente tiene

volatilidad estocástica conducida por el modelo de raíz cuadrada de Heston, Kou (2007) analiza precios de opciones barrera en el modelo de difusión con saltos e Ibrahim et al. (2013) realizan una extensión de la valuación de las opciones de barrera de compra a las opciones de barrera de compra poderosas cuando el precio del subyacente se eleva a una potencia constante, esto dentro del marco estándar de Black-Scholes [29].

Las funciones tiempo de paro son de uso frecuente y variado en modelación estocástica, por ejemplo, Huyên (2009) [11], Björk (2009) [1], Sethi y Thompson (2000) [25] y Hernández-Lerma (1994) [9] presentan el problema de control óptimo estocástico por consumo-inversión con horizonte temporal aleatorio, definido mediante una función tiempo de paro. También los autores citados incluyen un funcional objetivo tipo Bolza en donde la función tipo Mayer representa legado o herencia, si es que esta no es cancelada por el tiempo de paro. Así mismo los tiempos de paro, han sido un recurso para implementar desde diferentes enfoques teóricos la valuación de opciones exóticas y/o de estilo americano, léanse al respecto Camargo y Suárez (2016) [4], Zhao (2018) [27], Rogers (2002) [21], Bouchard y Warin (2012) [3], Ibáñez y Zapatero (2004) [12], entre otros.

En el marco de las investigaciones referidas en valuación de opciones esta investigación se distingue por: 1) El diseño de un portafolio para gestionar riesgos con opciones barrera-americana del tipo knock-out, mediante micro fundamentos y racionalidad económica. 2) Se establece el modelo de valuación de opciones barrera down and out mediante micro fundamentos y 3) La estrategia de inversión logra que en todo momento que el inversionista sea solvente.

Este trabajo tiene el siguiente orden: en la segunda sección realiza la descripción del problema y supuestos, en la sección tres se muestra analíticamente la trayectoria de la riqueza, en la sección cuatro se establece el modelo de Equilibrio General Dinámico Estocástico por resolver, en la quinta sección se da Solución mediante programación dinámica estocástica al modelo de EGDE, obteniendo la ecuación diferencial parcial (EDP) de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), a partir de la cual se optimizan los controles y se da una función de utilidad tipo HARA por el consumo; en la sexta sección se realiza el Análisis de solución de la EDP de HJB proponiendo una función solución en variables separables para la EDP de HJB. En la sección siete se realiza la deducción del modelo para valorar la opción de venta barrera knock-out de tipo americana; en la octava sección se establece la solución óptima

del problema de control, aplicando el teorema de verificación de la programación dinámica para la EDP HJB, en la sección novena se establecen las conclusiones de este trabajo y en la décima sección se dispone la bibliografía.

2 Descripción del problema y supuestos

Se considera una economía pequeña y cerrada en la que se consume y se produce un solo bien de carácter perecedero, en la que existe un sistema bancario en el que se puede prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo de incumplimiento.

De esta economía se analiza el caso de un agente económico representativo, quien dispone de una riqueza inicial $X(t_0) = x_0$, y tiene el objetivo de maximizar su utilidad por consumo e inversión en portafolio de activos a la vez de no incurrir en endeudamiento, en un horizonte temporal finito, de magnitud estocástica el cual se denota por $[0, T]$. Para tal efecto al agente le es permitido invertir en tres activos:

1. Un principal cuyo valor en $t = 0$ es $M_0 = M(0)$, observe que la razón de cambio en el valor de la inversión es igual al producto de la tasa de interés por el valor actual de la inversión, lo que expresamos mediante el problema de valor inicial:

$$\frac{dM_t}{dt} - rM_t = 0, \quad M_0 = M(0) \quad (1)$$

el cual implica un rendimiento de

$$dR_M \equiv \frac{dM_t}{M_t} = rdt. \quad (2)$$

2. Una acción ordinaria que no paga dividendos durante la vida del contrato, cuya dinámica de precio se modela mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

y tiene rendimientos,

$$dR_S \equiv \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t, \quad (3)$$

donde $0 < \mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}$ representan el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea de S respectivamente (los cuales se consideran constantes en este modelo, para mantener la estructura analítica tratable), y B_t es un proceso markoviano controlado o movimiento browniano, definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}, P)$.

3. Una opción barrera de venta knock-out, de tipo americano, cuya barrera está dada por $B = 0$. Observe que el implemento de este derivado en el portafolio de inversión se ha elegido estratégicamente para cubrir las pérdidas por disminución del precio del activo subyacente cuando está activa, es decir en el periodo $[0, \varphi)$ y porque elimina el pago de la prima de la opción cuando sucede un evento en la barrera. Observe que el precio del derivado opción barrera de venta knock-out, en realidad es función solo del precio del activo subyacente y del tiempo $P_{DO} = P_t(S_t, t)$; porque los demás parámetros r, μ, σ, B, K y T , son constantes y se establecen en el contrato. Para obtener los rendimientos se debe de aplicar el Lema de Itô o teorema fundamental del cálculo estocástico, de lo que se obtiene,

$$dP_{DO} = \left(\frac{\partial P_{DO}}{\partial t} + \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{DO}}{\partial^2 S_t} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} \sigma S_t dV_t, \quad (4)$$

de donde el rendimiento de la opción barrera de venta, está dado por

$$dR_P \equiv \frac{dP_{DO}}{P_{DO}} = \mu_P dt + \sigma_P dV_t, \quad (5)$$

siempre que a partir de (4) se denote a:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \frac{1}{P_{DO}} \left(\frac{\partial P_{DO}}{\partial t} + \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{DO}}{\partial^2 S_t} \sigma^2 S_t^2 \right) \quad y \\ \sigma_P &= \frac{1}{P_{DO}} \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} \sigma S_t. \end{aligned} \quad (6)$$

Se definen mediante α_{1t}, α_{2t} y $1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t}$, las proporciones de riqueza destinadas para inversión en la acción, opción y el principal en un portafolio de

inversión y mediante c se denota a la tasa de consumo. Se supone además que todas las estrategias del portafolio son autofinanciables, lo cual lleva implícito el hecho de continuidad en las operaciones de los mercados financieros y de derivados, que no hay costos por transacción, no hay comisiones a agentes de casa de bolsa, no hay pagos de impuestos a autoridades fiscales y que las ventas en corto son permitidas e ilimitadas.

Lema de Itô para el caso de n movimientos geométricos brownianos

Considere la función $f(x, t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dx_i = \mu_i(x_i, t)dt + \sigma_i(x_i, t)dW_{it}, \quad (7)$$

en donde $dW_{it} \sim N(0, dt)$ es un movimiento browniano o proceso de Wiener. Considere también la siguiente tabla de multiplicación para la diferenciación estocástica,

	dt	dW_{it}	dW_{jt}
dt	0	0	0
dW_{it}	0	dt	$\rho_{ij}dt$
dW_{jt}	0	$\rho_{ij}dt$	dt

Es pertinente observar que en la tabla anterior el coeficiente de correlación $\rho_{ii} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Para establecer el lema de Itô, se realiza expansión en serie de Taylor hasta los términos de segundo orden de $f(x, t)$,

$$\begin{aligned}
df(x, t) &= \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} dx_i \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i^2} dx_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j \right. \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t \partial x_i} dx_i dt \\
&\left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i \partial t} dt dx_i + \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} dt^2 \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

Ahora, se debe sustituir (7) en (8) y aplicar las reglas de multiplicación para la diferenciación estocástica,

$$\begin{aligned}
df(x, t) &= \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} (\mu_i(x_i, t) dt + \sigma_i(x_i, t) dW_{it}) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i^2} (\mu_i(x_i, t) dt + \sigma_i(x_i, t) dW_{it})^2 \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i \right],
\end{aligned}$$

al simplificar,

$$\begin{aligned}
 df(x, t) &= \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} \mu_i(x_i, t) dt \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} \sigma_i(x_i, t) dW_{it} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i^2} \sigma_i^2(x_i, t) dt \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} \sigma_i(x_i, t) \sigma_j(x_j, t) \rho_{ij} dt \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_j(x_j, t) \sigma_i(x_i, t) \rho_{ji} dt,
 \end{aligned}$$

finalmente, se ordenan los términos y se obtiene el lema de Itô en su forma diferencial, también llamado teorema fundamental del cálculo estocástico

$$\begin{aligned}
 df(x, t) &= \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} \mu_i(x_i, t) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_j \partial x_i} \sigma_i(x_i, t) \sigma_j(x_j, t) \rho_{ij} \right] dt \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} \sigma_i(x_i, t) dW_{it}.
 \end{aligned}$$

3 Trayectoria de la riqueza

En este apartado se establece de forma analítica la restricción presupuestal intertemporal del agente representativo;

$$\begin{aligned}
 dX_t &= X_t(1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t})dR_M + X_t\alpha_{1t}dR_S + X_t\alpha_{2t}dR_P - c_t dt \\
 &= X_t \left(r + \alpha_{1t}(\mu - r) + \alpha_{2t}(\mu_P - r) - \frac{c_t}{X_t} \right) dt \\
 &+ X_t(\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_P)dV_t,
 \end{aligned} \tag{9}$$

La cual reescribimos como un proceso markoviano controlado o movimiento geométrico browniano en su forma diferencial:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X dt + \sigma_X dV_t, \quad (10)$$

donde se han sustituido a μ_X y σ_X , por

$$\mu_X = \left(r + \alpha_{1t}(\mu - r) + \alpha_{2t}(\mu_P - r) - \frac{c_t}{X_t} \right) \quad \text{y} \quad \sigma_X = \alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_P. \quad (11)$$

4 Modelo de equilibrio general dinámico estocástico

Debido a que los supuestos de las ventas en corto y el consumo no están limitadas en el modelo, y ante el supuesto de un consumidor-inversor racional, se enfrenta la posibilidad de que el problema degenera y el agente pierda la solvencia, para resolver este problema, matemáticamente se restringe el dominio a $D = [0, T] \times \{X | X > 0\}$ y se define la función

$$\phi = \text{mín} [\text{inf}\{t > 0 | X_t = 0\}, T],$$

la cual induce a que el horizonte temporal del problema sea estocástico.

La utilidad total del agente se representa mediante,

$$E \left[\int_0^T G(c_s, s) ds | G_0 \right]$$

donde G es la función de utilidad por el consumo y G_0 es la información disponible en $t = 0$.

A continuación, se define formalmente el problema de maximización de utilidad como un problema de control óptimo estocástico, en tiempo continuo,

$$\begin{aligned} \text{Maximize}_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t}, c_t} \quad & E \left[\int_0^\phi G(c_s, s) dt | G_0 \right] \\ \text{sujeto a} \quad & dX_t = X_t \mu_X dt + X_t \sigma_X dV_t \\ & X_0 = x_0 \\ & c_t \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

5 Solución mediante programación dinámica estocástica

Para resolver el problema de control óptimo estocástico que modela la toma de decisiones del agente económico se hace uso de programación dinámica estocástica en tiempo continuo. En la práctica se reduce la dimensión del problema a uno determinista mediante la obtención de la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (EDP HJB), a partir de la cual se optimizan los controles y por ende las decisiones óptimas del modelo. Para tal efecto se define la siguiente función de valor,

$$\begin{aligned} J(X, t) &= \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s \leq [t, \phi]} E \left[\int_t^\phi G(c_s, s) ds \middle| \mathcal{G}_t \right] \\ &= \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s \leq [t, \phi]} E \left[\int_t^{t+dt} G(c_s, s) ds + \int_{t+dt}^\phi G(c_s, s) ds \middle| \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Después de aplicar a (13) el teorema del valor medio al primer sumando y la recursividad al segundo sumando, se obtiene:

$$J(X_t, t) = \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} E \{ G(c_t, t) dt + o(dt) + J(X_t + dX_t, t + dt) \middle| \mathcal{G}_t \}$$

Ahora se emplea la expansión en serie de Taylor para el tercer sumando, para obtener:

$$J(X_t, t) = \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} E \{ G(c_t, t) dt + o(dt) + J(X_t, t) + dJ(X_t, t) + o(dt) \middle| \mathcal{G}_t \}$$

consecuentemente,

$$0 = \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} E \{ G(c_t, t) dt + o(dt) + dJ(X_t, t) \middle| \mathcal{G}_t \}$$

debe ahora de aplicarse el lema de Itô a $dJ(X_t, t)$ y hacer la simplificación correspondiente, de lo que resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} E \left\{ G(c_t, t) dt + o(dt) + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \sigma_X dV_t \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right] dt \middle| \mathcal{G}_t \right\}. \end{aligned}$$

A continuación, se obtiene el valor esperado de esta última ecuación. Dado que dV_t sigue una distribución $N(0, dt)$, se elimina el término con el movimiento browniano, lo que conduce a,

$$0 = \max_{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \leq c_t} \left\{ G(c_t, t) dt + o(dt) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 dt \right. \\ \left. + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X dt \right\} \mathcal{G}_t$$

ahora se divide esta expresión entre dt y se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, lo que conduce a la Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$0 = \max_{\substack{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R} \\ 0 \leq c_t}} \left\{ G(c_t, t) + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right\},$$

a la que se imponen las condiciones de frontera congruentes con el tiempo de paro que limita a que el modelo no degenera,

$$\begin{cases} 0 = \max_{\substack{\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \in \mathbb{R} \\ 0 \leq c_s}} \left\{ G(c_t, t) + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right\} \\ J(0, t) = 0, \\ J(X_t, T) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Función de utilidad

Se propone la función de utilidad $G(c_t, t) = e^{-\rho t} Y(c_t) = e^{-\rho t} c^\gamma / \gamma$, donde $Y(c_t)$ se ha elegido tipo HARA, con el propósito de encontrar soluciones analíticas del modelo. Observé que $Y(c_t)$ satisface que,

$$Y'(0) = \frac{c^\gamma}{c} \Big|_{c=0} = \infty,$$

con lo que se obliga al cumplimiento de la hipótesis, de no incurrir en cantidades negativas.

Condiciones de primer orden

Se supone máximo por ser G cóncava y se sustituyen a μ_X , σ_X y $G(c_t, t)$ en la ecuación (14) para obtener,

$$0 = e^{-\rho t} c_t^\gamma + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 (\alpha_{1t} \sigma + \alpha_{2t} \sigma_P)^2 + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t (r + \alpha_{1t} (\mu - r) + \alpha_{2t} (\mu_P - r) - c_t / X_t). \quad (15)$$

Ahora mediante el criterio de primera derivada se optimizan los controles α_{1t} , α_{2t} y c_t ,

$$c_t = \left[\frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} e^{\rho t} \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (16)$$

$$\alpha_{1t} = - \frac{\frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t (\mu - r) + \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma^2 \alpha_{2t} \sigma_P}{\frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma^2}, \quad (17)$$

$$\alpha_{2t} = - \frac{\frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t (\mu_P - r) + \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma^2 \alpha_{1t} \sigma_P}{\frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_P^2}. \quad (18)$$

6 Análisis de solución de la EDP de HJB

Para resolver la EDP HJB es necesario establecer $J(X_t, t)$; dada la naturaleza de la ecuación diferencial sin derivadas cruzadas, se propone a J como un producto de funciones separables en variables, es decir,

$$J(X_t, t) = e^{-\rho t} h(t) \frac{X_t^\gamma}{\gamma}, \quad h(T) = 0, \quad (19)$$

observe que la condición de frontera $h(T) = 0$, se ha impuesto en correspondencia con el tiempo de paro. Dada la función $J(X_t, t)$ propuesta, se obtienen

las derivadas parciales presentes en la ED de HJB,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} &= \frac{X_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} [h'(t) - \rho h(t)], \\ \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} &= X_t^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t), \\ \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} &= (\gamma - 1) X_t^{\gamma-2} e^{-\rho t} h(t). \end{aligned} \tag{20}$$

A continuación, se sustituyen las derivadas obtenidas en (20) en (16), (17) y (18), de donde se obtienen los controles óptimos del problema:

$$\hat{c}_t = X_t h^{1/(\gamma-1)}(t), \tag{21}$$

$$\hat{\alpha}_{1t} = -\frac{(\mu - r) + (\gamma - 1)\sigma\alpha_{2t}\sigma_P}{(\gamma - 1)\sigma^2}, \tag{22}$$

$$\hat{\alpha}_{2t} = -\frac{(\mu_P - r) + (\gamma - 1)\sigma\alpha_{1t}\sigma_P}{(\gamma - 1)\sigma_P^2}. \tag{23}$$

Es pertinente observar que las ecuaciones (22) y (23) forman un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales y que el consumo es lineal en la riqueza.

7 Deducción del modelo para valorar la opción de venta barrera knock-out de tipo americana

A continuación se, se realizan los cambios de variable $\xi = \sigma_P/\sigma$, $\lambda = (\mu - r)/((1 - \gamma)\sigma^2)$ y $\lambda_P = (\mu_P - r)/((1 - \gamma)\sigma_P^2)$, en las ecuaciones (22) y (23), con lo que se establece el sistema,

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{1t} + \xi \hat{\alpha}_{2t} = \lambda, \\ \frac{\hat{\alpha}_{1t}}{\xi} + \hat{\alpha}_{2t} = \lambda_P \end{cases}, \tag{24}$$

cuya ecuación matricial es,

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{1t} \\ \hat{\alpha}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_P \end{pmatrix},$$

se observa a partir de la matriz de coeficientes asociada al sistema de la ecuación (24), que su determinante es cero, lo que implica que hay dependencia lineal entre las ecuaciones de premio al riesgo de mercado de la acción y la opción. Esta dependencia lineal nos permite establecer la siguiente igualdad,

$$\lambda = \xi \lambda_P \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2} = \frac{\sigma_P}{\sigma} \frac{\mu_P - r}{(1 - \gamma)\sigma_P^2},$$

de dónde se deduce que,

$$(\mu - r) \frac{\sigma_P}{\sigma} = (\mu_P - r), \quad (25)$$

al sustituir en (25) a μ_P y σ_P , tal como se han descrito en la ecuación (6), se obtiene la Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden:

$$\frac{\partial P_{DO}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{DO}}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} S_t r - r P_{DO} = 0. \quad (26)$$

La ecuación (26) es el modelo cuya solución permite valorar la opción de venta barrera de tipo knock-out incluida en el portafolio de inversión siempre que esta se encuentre activa, es decir cuando $S_t > B$; y a la que se debe de imponer la condición de frontera valor intrínseco del instrumento derivado, en conjunto con la barrera B . Es decir,

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{DO}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{DO}}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial P_{DO}}{\partial S_t} S_t r - r P_{DO} = 0, \\ P_{DO}(S_t, t) \geq \max\{(K - S_t), 0\}, & \text{si } S_t > B, \\ P_{DO}(S_t, t) = 0, & \text{si } S_t \leq B, \\ t \leq \eta, \end{cases} \quad (27)$$

Con $\eta = \min\{\phi, \hat{\tau}\}$, se define a $\hat{\tau}$ como un tiempo de paro en donde se alcanza el valor máximo de $\max\{(K - S_t), 0\}$.

8 Solución óptima del problema de control: Teorema de verificación para la EDP HJB

Para obtener la solución óptima del problema de control, utilizaremos el teorema de verificación para la programación dinámica, por lo que se requiere

de precisar la expresión analítica de la función $h(t)$ propuesta en la solución de la EDP HJB; ya que con esta será posible verificar que efectivamente (19) resuelve (14) y optimiza los controles que maximizan al sistema propuesto. Para ello, se comienza por suponer la solución de esquina $\hat{\alpha}_{1t} = 0$ y $\hat{\alpha}_{2t} = 1$, que corresponde a las asignaciones óptimas de riqueza en inversión de la acción y la opción de barrera de venta knock-out down and out; esta solución junto con \hat{c}_t , μ_P y σ_P , obtenidas en (21) y (6) respectivamente, se sustituyen en la ecuación (15) y las derivadas parciales en μ_P y σ_P se evalúan en el dinero, es decir, cuando

$$\mu_P|_{S_t=K(t,T)} = \bar{\mu}_P \quad \text{y} \quad \sigma_P|_{S_t=K(t,T)} = \bar{\sigma}_P$$

de lo que se obtiene la ecuación diferencial:

$$0 = X_t^\gamma \left\{ h'(t) + h(t) \left[(-\rho) + \gamma \bar{\mu}_P + \frac{\gamma}{2}(\gamma - 1) \bar{\sigma}_P^2 \right] + (1 - \gamma) h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\}, \quad (28)$$

a la que en congruencia con (14) se debe adjuntar la condición de frontera $h(T) = 0$. Si la ecuación (28) se cumple para todos X_t y t , es necesario encontrar la función $h(t)$ que resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$h'(t) + p(t)h(t) = -q(t)[h(t)]^n, \quad (29)$$

observe que (29) es una ecuación diferencial de tipo Bernoulli que tiene parámetros: $p(t) = (-\rho) + \gamma \bar{\mu}_P + \frac{\gamma}{2}(\gamma - 1) \bar{\sigma}_P^2$, $q(t) = (1 - \gamma)$ y $n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Para resolverla, se transformará en una ecuación diferencial lineal, por lo que se realiza el cambio de variable $\omega(t) = h^{1-n}(t)$, de donde se obtienen a $h(t) = \omega^{1-\gamma}(t)$ y $h'(t) = (1 - \gamma)\omega^{-\gamma}(t)\omega'(t)$, ahora se lleva a cabo la sustitución correspondiente y se multiplica en ambos lados de la ecuación por $(\omega^\gamma(t))/(1 - \gamma)$, para obtener,

$$\omega'(t) + \frac{p(t)}{(1 - \gamma)}\omega(t) = -\frac{q(t)}{(1 - \gamma)}.$$

Al renombrar con $k_1 = \frac{p(t)}{(1-\gamma)}$, se establece el siguiente problema de valor inicial:

$$\omega'(t) + k_1\omega(t) = -1, \quad \omega(T) = 0 \quad (30)$$

El cual se resuelve con el método de Leibnitz o factor integrante, obteniendo qué

$$\omega(t) = -\frac{1}{k_1} \left(1 - e^{k_1(T-t)} \right). \quad (31)$$

Pero a partir de (29) se consiguió a $h(t) = \omega^{1-\gamma}(t)$, de donde finalmente se obtiene que:

$$h(t) = \left[\frac{-1}{k_1} \left(1 - e^{k_1(T-t)} \right) \right]^{1-\gamma}, \quad h(T) = 0. \quad (32)$$

Se ha mostrado que si h está dada por (19) con (32) como solución de (29) y si definimos \hat{c}_t , $\hat{\alpha}_{1t}$ y $\hat{\alpha}_{2t}$ por (21), (22) y (23), entonces h satisface la ecuación diferencial de HJB y \hat{c}_t , $\hat{\alpha}_{1t}$ y $\hat{\alpha}_{2t}$ optimizan el problema de control óptimo estocástico.

9 Conclusiones

En esta investigación en el marco teórico de Equilibrio General Dinámico Estocástico, se diseñó mediante control óptimo estocástico en tiempo continuo un modelo mediante el cual un agente económico representativo racional y averso al riesgo, puede maximizar su utilidad por consumo e inversión en portafolio gestionando simultáneamente los riesgos que enfrenta en los mercados financieros, combinando para ello las herramientas teóricas de optimización dinámica estocástica con la inversión en opciones barrera-americana del tipo knock-out.

Se observa que la ecuación diferencial parcial con que se valuará la opción barrera, corresponde en realidad a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes Merton con que se evalúa la opción europea de compra, y son las condiciones de frontera añadidas las que determinan que el instrumento sea barrera-americana del tipo knock-out.

Es importante mencionar que el implemento de la función tiempo de paro como límite estocástico del horizonte temporal, aunado al evento que desactiva la opción barrera son herramientas que inducen a que el agente económico sea solvente en todo momento y se administren los riesgos de manera general en el modelo limitando las pérdidas potenciales, tanto para el agente económico representativo como para el sistema bancario, toda vez que tanto el consumo como las ventas en corto son permitidas e ilimitadas.

Así mismo se resalta el hecho de haber obtenido mediante micro fundamentos y supuestos de racionalidad económica el sistema de ecuaciones diferenciales (resultante de la programación dinámica) mediante el que se es-

tablece el modelo de valuación de opciones barrera knock-out consistente con el modelo de valuación de opciones de Black-Scholes-Merton.

Además se observa que el implemento de la opción knock-out de venta de tipo americano en el portafolio, gestiona el riesgo que enfrenta el agente económico, por un aparte como seguro del precio del subyacente y por otra ahorra el pago de la prima cuando hay evento en la barrera.

Es pertinente resaltar la importancia de que la estructura algebraica de los supuestos se mantuviera como procesos geométrico browniano en su forma diferencial aunado a la elección de función de utilidad tipo HARA para obtener solución analítica del modelo en el contexto de las teorías de control óptimo estocástico y programación dinámica estocástica en tiempo continuo.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “Optimización de consumo e inversión por gestión de riesgos con opciones barrera-americana knock-out”, con clave SIP-20231576 de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. Apoyada por el proyecto, PAPPIT-IT-101421, UNAM. Asimismo, los autores agradecen a los árbitros sus valiosas observaciones a este trabajo.

Referencias

- [1] Tomas Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Third Edition, Oxford Finance Series, 2009, doi: 10.1093/oso/9780198851615.001.0001.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973, doi: 10.1086/260062, url: <http://www.jstor.org/stable/1831029>.
- [3] Bruno Bouchard and Xavier Warin, *Monte-Carlo Valuation of American Options: Facts and New Algorithms to Improve Existing Methods*, in *Numerical Methods in Finance*, eds. René Carmona, Pierre Del Moral, Peng Hu, and Nadia Oudjane, Springer, Springer Proceedings in Mathematics, vol. 12, 2012, doi: 10.1007/978-3-642-25746-9_7, url: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25746-9_7.

- [4] Ricardo Camargo and Heliodoro Daniel Cruz Suárez, *Un Problema de Paro en Finanzas*, *Journal of Basic Sciences*, vol. 2, no. 5, 2016, doi: 10.19136/jobs.a2n5.1494.
- [5] Carl Chiarella, Boda Kang, and Gunter H. Meyer, *The Evaluation of Barrier Option Prices under Stochastic Volatility*, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 64, no. 6, pp. 2034–2048, 2012, doi: 10.1016/j.camwa.2012.03.103.
- [6] John C. Cox and Stephen A. Ross, *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 145–166, 1976, doi: 10.1016/0304-405X(76)90023-4.
- [7] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, *An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices*, *Econometrica*, vol. 53, no. 2, pp. 363–384, 1985, doi: 10.2307/1911241.
- [8] Nils H. Hakansson, *Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions*, *Econometrica*, vol. 38, no. 5, pp. 587–607, 1970.
- [9] Onésimo Hernández-Lerma, *Lectures on Continuous-Time Markov Control Processes*, Aportaciones Matemáticas 3, Sociedad Matemática Mexicana, 1994.
- [10] Ronald C. Heynen and Harry M. Kat, *Partial Barrier Options*, 2000, Social Science Research Network, url: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=6081.
- [11] Pham Huyên, *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer-Verlag, 2009, doi: 10.1007/978-3-540-89500-8.
- [12] Alfredo Ibáñez and Fernando Zapatero, *Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 39, no. 2, pp. 253–275, 2004, doi: 10.1017/s0022109000003069.
- [13] Siti N. I. Ibrahim, John G. O’Hara, and Nick Constantinou, *Risk-Neutral Valuation of Power Barrier Options*, *Applied Mathematics Letters*, vol. 26, no. 6, pp. 595–600, 2013, doi: 10.1016/j.aml.2012.12.016.

- [14] Steven Kou, *Jump-Diffusion Models for Asset Pricing in Financial Engineering*, in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 2007, pp. 73–116, doi: 10.1016/s0927-0507(07)15002-7.
- [15] John Lehoczy, Suresh Sethi, and Steven Shreve, *Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumption Constraints and Bankruptcy*, *Mathematics of Operations Research*, vol. 8, no. 4, pp. 613–636, 1983.
- [16] María Teresa V. Martínez-Palacios, Adrian Hernández-Del-Valle, and Ambrosio, *On the Pricing of Asian Options with Geometric Average of American Type with Stochastic Interest Rate: A Stochastic Optimal Control Approach*, *Journal of Dynamics & Games*, vol. 6, no. 1, pp. 53–64, 2019, doi: 10.3934/jdg.2019004.
- [17] Teresa Martínez-Palacios, Francisco Venegas-Martínez, and José F. Martínez-Sánchez, *Consumption and portfolio decisions of a rational agent that has access to an American put option on an underlying asset with stochastic volatility*, *International Journal on Pure and Applied Mathematics*, vol. 102, no. 4, pp. 711–732, 2015, doi: 10.12732/ijpam.v102i4.10, url: <http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v102i4.10>.
- [18] Robert C. Merton, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*, *Journal of Economic Theory*, vol. 3, no. 4, pp. 373–413, 1971, doi: 10.1016/0022-0531(71)90038-9.
- [19] Robert C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, no. 1, pp. 141–183, 1973, doi: 10.2307/3003143.
- [20] Robert C. Merton and Paul A. Samuelson, *Continuous-Time finance*, *The Journal Finance*, vol. 46, no. 4, p. 1567, 1991, doi: 10.2307/2328875.
- [21] L. C. G. Rogers, *Monte Carlo valuation of American options*, *Mathematical Finance*, vol. 12, no. 3, pp. 271–286, 2002, doi: 10.1111/1467-9965.02010.
- [22] Teresa Martínez-Palacios and Francisco Venegas-Martínez, *Un modelo macroeconómico con agentes de vida finita y estocástica: cobertura de riesgo de mercado con derivados americanos*,

- Economía: Teoría y Práctica*, vol. 41, 2014, pp. 71–106, url: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=281136882004>.
- [23] Teresa Martínez-Palacios, Arturo Sánchez-Daza, and Francisco Venegas-Martínez, *Valuación de opciones americanas: un enfoque de control óptimo estocástico en un horizonte finito con fecha final aleatoria*, *Análisis Económico*, vol. XXVII, no. 64, 2012, pp. 165–183, url: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41324545008>.
- [24] Mark Rubinstein, *Breaking down the barriers*, *Risk*, vol. 4, 1991, pp. 28–35.
- [25] Suresh Sethi and Gerald L. Thompson, *Optimal Control Theory*, Springer, 2000.
- [26] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, and Sam Howison, *Option pricing: Mathematical models and computation*, 1994, Available at Amazon.com, url: <https://www.amazon.com/Option-pricing-Mathematical-models-computation/dp/0952208202>.
- [27] Jinsha Zhao, *American Option Valuation Methods*, *International Journal of Economics and Finance*, vol. 10, no. 5, p. 1, 2018, doi: 10.5539/ijef.v10n5p1.
- [28] Xin-Jiang He y Sha Lin, *A fractional Black-Scholes model with stochastic volatility and European option pricing*, *Expert Systems with Applications*, vol. 178, p. 114983, 2021, Elsevier.
- [29] A. Torres-Hernandez, F. Brambila-Paz, and C. Torres-Martínez, *Numerical solution using radial basis functions for multidimensional fractional partial differential equations of type Black-Scholes*, *Computational and Applied Mathematics*, vol. 40, pp. 1–25, Springer, 2021, doi: 10.1007/s40314-021-01634-z.
- [30] A. Torres-Hernandez, F. Brambila-Paz, and R. Montufar-Chaveznava, *Acceleration of the order of convergence of a family of fractional fixed-point methods and its implementation in the solution of a nonlinear algebraic system related to hybrid solar receivers*, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 429, p. 127231, Elsevier, 2022. doi: 10.1016/j.amc.2022.127231

¹Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía, Ciudad de México

²Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Ciudad de México

³Universitat Pompeu Fabra, Departament de Tecnologies de la Informació i les Comunicacions, Barcelona

`mmartinezpa@ipn.mx`,

`fernando.brambila@ciencias.unam.mx`,

`anthony.torres@ciencias.unam.mx`

Topología

Capítulo 5

Las topologías de Alexandrov y la geometría digital

Netzahualcoyotl Carlos Castañeda Roldán y José
Margarito Hernández Morales

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Resumen

Este trabajo trata sobre las propiedades básicas de las topologías de Alexandrov y su caracterización en términos de preórdenes. Como aplicación se presenta un método para la representación digital de polígonos y poliedros. Este método se basa en topologías finitas determinadas por una relación de enmarcamiento en un complejo celular abstracto. Cada elemento de estos complejos celulares puede representar a un poliedro completo, o bien a una de sus caras, aristas o vértices. A partir de la relación de enmarcamiento se define una relación de incidencia y otra de conexidad. Nos enfocamos en particular en los espacios cartesianos localmente finitos, que están dados por productos cartesianos de complejos celulares unidimensionales, equivalentes a lo que en teoría de grafos se conoce como trayectorias. En ellos se especifica un sistema de coordenadas que permite definir, por medio de desigualdades, conceptos como semiplano digital, segmento rectilíneo digital y colinealidad estricta.

1 Introducción

La geometría digital es un área extensa, con varias aplicaciones a las ciencias de la computación y que tiene mucho en común con la topología digital. El desarrollo de estos campos de estudio ha estado impulsado principalmente por los problemas que se presentan en el procesamiento de imágenes por computadora. Hay diferentes enfoques que utilizan como modelo al conjunto \mathbb{Z}^2 , o a subconjuntos finitos del mismo, equipados ya sea con relaciones de

adyacencia [19], o bien con estructuras topológicas ([11], [13]). En este trabajo no se pretende presentar un panorama amplio ni una perspectiva histórica de la geometría digital, sino que nos limitamos a exponer algunas partes del enfoque propuesto por Kovalevsky en [13]. De acuerdo a este científico, en el procesamiento de imágenes digitales hay muchos problemas que no se pueden resolver por métodos basados en la geometría euclidiana o en el cálculo. Esta situación es común cuando se tratan de procesar algunos de los detalles finos de la imagen. Por ejemplo, al trabajar con las imágenes digitales no se pueden utilizar los métodos de la geometría diferencial para medir la curvatura de las líneas. Esto se debe a que en la geometría clásica se trabaja con conjuntos infinitos de puntos. En un espacio euclidiano, cualquier segmento de recta, por corto que sea, contiene una infinidad no numerable de puntos distintos. Este hecho contrasta con el caso de las imágenes digitales, ya que cada pantalla de computadora cuenta únicamente con un número finito de píxeles. Esto se conoce como «pérdida de resolución». La geometría clásica carece de herramientas para trabajar con objetos espaciales de dimensión mayor a cero que no estén representados como un conjunto infinito de puntos, sino como un elemento único. Esto es algo muy importante para el análisis de las imágenes de computadora, puesto que la descripción de las figuras geométricas que proporciona la geometría euclidiana resulta, en los procesos digitales, solamente aproximada. La necesidad de caracterizar nociones como cercanía, convergencia y continuidad dentro del contexto finito de una pantalla de computadora, vuelve imperativo el uso de las topologías finitas [18].

En este contexto, Kovalevsky nos presenta un concepto de geometría que se desarrolla en ciertos complejos celulares abstractos localmente finitos [13], que son una clase especial de espacios T_0 de Alexandrov ([1], [3]). En un tipo particular de estos complejos celulares se introduce un sistema de coordenadas discretas sin hacer uso de conceptos métricos ni de un producto escalar. A partir de estas coordenadas discretas, se definen los conceptos de semiplano digital, línea digital, colinealidad y convexidad. La noción clásica de mapeos continuos se generaliza a mapeos que preservan la conectividad y que son aplicables a espacios localmente finitos. También se introduce un nuevo concepto de n -isomorfismo con el objetivo de estimar cuantitativamente las desviaciones que presentan, con respecto a estos isomorfismos, las diversas transformaciones geométricas que se usan en el procesamiento computacional de imágenes digitales.

Los ejemplos que presenta Kovalevsky en [13] son espacios finitos. Todas

las topologías definidas en conjuntos finitos son un caso particular de topologías de Alexandrov ([3], [18]). Estas topologías tienen varias propiedades interesantes, ya que están estrechamente ligadas a los conceptos de la teoría del orden. Kovalevsky define una topología sobre los complejos celulares abstractos a partir de una relación muy específica entre sus elementos, llamada *relación de enmarcamiento*. Esta relación tiene una interpretación geométrica muy intuitiva. Como veremos, la forma en que se define la topología de los complejos celulares a partir de la relación de enmarcamiento, es representativa de una de las formas más generales que hay para definir topologías de Alexandrov. Sin embargo, en su artículo, Kovalevsky no hace mención alguna de las topologías de Alexandrov. En este capítulo tomamos la oportunidad para exponer algunas de las propiedades básicas de estas topologías, su conexión con los conceptos de la teoría del orden y la aplicación práctica que hace de ellas Kovalevsky en el procesamiento de imágenes digitales. Esperamos que este trabajo despierte el interés del lector por los temas aquí tratados.

2 Preórdenes

Un concepto básico en cuanto a preórdenes es el de la reflexividad de relaciones. Denotamos como Δ_X a la relación de identidad en X , que también se conoce como la **diagonal** sobre X . Se dice que una relación R en un conjunto X es **reflexiva** si $\Delta_X \subseteq R$. Otro concepto fundamental es el de la transitividad. Si S y T son relaciones en X , su **composición** $T \circ S$ es el conjunto de parejas (x, z) para las que existe un elemento $y \in X$ tal que $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in T$. La notación $T \circ S$ es consistente con la que se utiliza normalmente para la composición de funciones. Una relación R es **transitiva** si $R \circ R \subseteq R$. Para indicar la composición iterada de una relación consigo misma se utilizan exponentes. Esto es, $R^1 = R$ y $R^{n+1} = R \circ R^n$ para $n \in \mathbb{N}$. La relación **inversa** de S se denota como S^{-1} y consiste de aquellas parejas (x, y) tales que $(y, x) \in S$. Un **preorden** sobre un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva definida en X . Se acostumbra denotar un preorden con el símbolo \leq , o bien con la letra P . Nótese que P^{-1} , su relación inversa, también es un preorden, al que llamamos el **preorden dual** de P . Cuando se representa un preorden con el símbolo \leq , su dual se indica con \geq . Esto significa que $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$. Si \leq es un preorden en X , a la pareja (X, \leq) se le llama **conjunto preordenado**. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos

conjuntos preordenados (X, \leq) y (Y, \preceq) se llama **monótona** si preserva el orden, es decir si $x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$ para todo $x, y \in X$. Dada una familia de preórdenes $\{P_i\}_{i \in I}$ definidos sobre el mismo conjunto X , su intersección $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ también es un preorden sobre X .

Lema 2.1 ([15]). *Sean X un conjunto no vacío y $R \subseteq X \times X$. La relación $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup \Delta_X)^n$ coincide con la intersección de todos los preórdenes en X que contienen a R .*

Demostración. Claramente R^* es reflexiva. Sean $x, y, z \in X$ y supóngase que $(x, y), (y, z) \in R^*$. Hay enteros positivos n, m tales que $(x, y) \in (R \cup \Delta_X)^n$ y $(y, z) \in (R \cup \Delta_X)^m$. Por lo tanto existen $x_0, \dots, x_{n+m} \in X$ tales que $x_0 = x, x_n = y, x_{n+m} = z$, con $(x_i, x_{i+1}) \in R \cup \Delta_X$ para $0 \leq i < n + m$. Esto implica que $(x, z) \in (R \cup \Delta_X)^{n+m} \subseteq R^*$, obteniéndose la transitividad. De tal manera que R^* es un preorden que contiene a R . Sea P un preorden en X que contiene a R y tomemos $(x, y) \in R^*$. Similarmente al argumento anterior, existen $x_0, \dots, x_n \in X$, con $x_0 = x, x_n = y$ y $(x_i, x_{i+1}) \in R \cup \Delta_X$ para $0 \leq i < n$. Como $R \subseteq P$ y P es un preorden, cada pareja $(x_i, x_{i+1}) \in P$, de modo que $(x, y) \in P$. Esto muestra que $R^* \subseteq P$ y se obtiene el resultado. \square

La relación R^* definida arriba es el mínimo preorden que contiene a R y se llama la **cerradura reflexiva y transitiva** de R . Si $c \in X$ y A es un subconjunto no vacío de X , se dice que c es **cota superior** de A cuando $a \leq c$ para toda $a \in A$. Cuando se cumple la desigualdad inversa, $c \leq a$, para toda $a \in A$, entonces c se llama **cota inferior** de A . Un elemento $s \in X$ se llama **supremo** de A si cumple (i) s es cota superior de A y (ii) para cualquier c cota superior de A se tiene $s \leq c$. Similarmente, si s es cota inferior de A y se tiene $s \geq c$ para cualquier c cota inferior de A , se dice que s es **ínfimo** de A . Una familia no vacía de elementos de X , $F = \{x_i\}_{i \in I}$, se llama **dirigida** si, para cualesquiera $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que x_k es cota superior de $\{x_i, x_j\}$ [9]. Como todo subconjunto $D \subseteq X$ se puede considerar como una familia (indexándose a sí mismo mediante la inclusión), la definición anterior describe también lo que es un **subconjunto dirigido** de un conjunto preordenado. De manera obvia, esto incluye al concepto usual de **conjunto dirigido** [7]. Claramente, un conjunto preordenado puede tener subconjuntos dirigidos sin ser él mismo dirigido, como se puede ver considerando el ejemplo siguiente. Sea \leq el orden usual de los enteros y sea P la relación en \mathbb{Z} dada por $P = R \cup S$, donde $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \leq \min\{0, n\}\}$

y $S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \equiv n \pmod{2} \text{ y } 1 \leq m \leq n\}$. La relación P es un preorden en \mathbb{Z} y el conjunto preordenado (\mathbb{Z}, P) no es dirigido pero los pares positivos, los impares positivos y los enteros no negativos son subconjuntos dirigidos de \mathbb{Z} en el preorden P .

Un **orden parcial** es un preorden que además es antisimétrico, es decir, cumple con $(a \leq b \text{ y } b \leq a) \Rightarrow a = b$, para $a, b \in X$. Si \preceq es un preorden en X , entonces la relación \simeq dada por $\{(a, b) \mid a \preceq b \text{ y } b \preceq a\}$, es una relación de equivalencia y la relación \leq definida entre las clases de equivalencia de X mediante $[a]_{\simeq} \leq [b]_{\simeq} \Leftrightarrow a \preceq b$, es un orden parcial en el conjunto cociente X/\simeq . Dado un orden parcial \leq en un conjunto X , la pareja (X, \leq) se conoce como conjunto **parcialmente ordenado**. La intersección de una familia de órdenes parciales sobre un mismo conjunto, también es un orden parcial sobre ese conjunto. De hecho, si $\{P_i\}_{i \in I}$ es una familia de preórdenes sobre un conjunto X y alguno de ellos es un orden parcial, entonces $\bigcap_{i \in I} P_i$ es un orden parcial en X . Por la antisimetría de \leq , los subconjuntos no vacíos de un conjunto parcialmente ordenado no pueden tener ni más de un supremo ni más de un ínfimo. Esto contrasta con el caso de los preórdenes en general, donde un subconjunto dado puede tener múltiples supremos o múltiples ínfimos. En un orden parcial, la notación $a < b$ (resp., $a > b$) significa que $a \neq b$ y $a \leq b$ (resp., $a \geq b$). Es posible definir, dado un conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) , una relación en X que captura la idea de que un elemento de X sea un «superior inmediato» de otro en el orden parcial. Si $a, b \in X$, se dice que a **cubre** a b [5] si $a > b$ y no hay ningún $x \in X$ que cumpla $a > x > b$. Esta relación se utilizará en la sección 4.

Si (X, τ) es un espacio topológico y (X, \leq) es un conjunto preordenado, se dice que la terna (X, τ, \leq) es un **espacio topológico preordenado** [16]. En caso de que \leq sea un orden parcial y su gráfica $G(\leq) = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ sea un subconjunto cerrado de $X \times X$, entonces se dice que la terna (X, τ, \leq) es un **espacio topológico ordenado** [8]. Cuando el espacio (X, τ) es conexo y en cada subconjunto de tres puntos $Y \subseteq X$ existe $y \in Y$ con la propiedad de que Y intersecta a dos componentes conexas de $X \setminus \{y\}$, entonces se dice que (X, τ) es un **espacio topológico ordenado conexo** ([11], [12]), también conocido como **COTS**, por sus siglas en inglés.

Definición 2.2 ([18] Conjuntos superiores y conjuntos inferiores). *Si \leq es un preorden en un conjunto X y $A \subseteq X$, entonces el **conjunto superior** de A se define como $\uparrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A : a \leq x\}$. Similarmente, el **conjunto***

inferior de A está dado por $\downarrow A = \{x \in X \mid \exists a \in A : x \leq a\}$.

Con esto podemos definir los conceptos siguientes.

Definición 2.3 ([18] Subconjuntos crecientes, decrecientes y convexos). *Dados un preorden \leq en un conjunto X y un subconjunto A de X , entonces A se llama **creciente** si $A = \uparrow A$, **decreciente** si $A = \downarrow A$ y **convexo** si $A = \uparrow A \cap \downarrow A$.*

Veamos ahora algunas propiedades de los conjuntos crecientes. Los conjuntos decrecientes del preorden \leq son precisamente los conjuntos crecientes del preorden dual (\geq) y por esto, tienen propiedades muy semejantes a las de los conjuntos crecientes, de modo que no es necesario enunciarlas explícitamente. Claramente se tiene $\uparrow \emptyset = \emptyset$ y $\uparrow X = X$, así que \emptyset y X son crecientes. Además, como \leq es reflexiva y transitiva, resulta que $A \subseteq \uparrow A$ y que $\uparrow(\uparrow A) = \uparrow A$ para todo $A \subseteq X$. El resultado siguiente tiene una consecuencia importante.

Lema 2.4. *Si (X, \leq) es un conjunto preordenado y $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos crecientes de X , entonces:*

- 1) $\uparrow(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (\uparrow A_i)$.
- 2) $\uparrow(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (\uparrow A_i)$.

De esto se concluye que, tanto las uniones arbitrarias como las intersecciones arbitrarias de conjuntos crecientes, son crecientes. Aunado a la observación anterior al lema 2.4, esto implica que la colección de conjuntos crecientes de X forma una topología en X . Esta topología, $\{A \subseteq X \mid A = \uparrow A\}$, se llama la topología **de Alexandrov** [9] asociada al preorden \leq y la denotamos aquí como α_{\leq} . Los conjuntos decrecientes de \leq son los abiertos de α_{\geq} , la topología de Alexandrov asociada al preorden dual. Más aún, es fácil comprobar que un conjunto es creciente si y sólo si su complemento es decreciente, y viceversa. Esto significa que los cerrados en α_{\leq} son los abiertos de α_{\geq} . Como es de esperarse, dados dos conjuntos preordenados (X, \leq) y (Y, \preceq) , si α_{\leq} y α_{\preceq} son las topologías de Alexandrov asociadas a \leq y a \preceq respectivamente, entonces las funciones continuas de (X, α_{\leq}) a (Y, α_{\preceq}) coinciden exactamente con las funciones monótonas de (X, \leq) a (Y, \preceq) .

El preorden \leq determina otra topología en X (no necesariamente distinta de α_{\leq}), mediante la subbase $\Gamma = \{X \setminus \downarrow x \mid x \in X\}$, donde la notación $\downarrow x$

se usa como abreviatura de $\downarrow \{x\}$. La topología generada por Γ se llama la topología **superior** [9] asociada al preorden \leq y la denotamos aquí como σ_{\leq} . Es sencillo ver que la familia $\beta = \{X \setminus \downarrow F \mid F \subseteq X, F \text{ finito}\}$ es una base de σ_{\leq} . Nótese que α_{\leq} es más fina que σ_{\leq} . En efecto, como los elementos de la base β son conjuntos crecientes, pertenecen a α_{\leq} y esto implica $\sigma_{\leq} \subseteq \alpha_{\leq}$.

Consideremos algunos ejemplos sencillos. Tanto la topología de Alexandrov $\alpha_{X \times X}$, como la topología superior $\sigma_{X \times X}$, asociadas al preorden total $X \times X$, coinciden con la topología indiscreta. En cambio, si el preorden es la relación de identidad, entonces α_{Δ_X} es la topología discreta mientras que σ_{Δ_X} es la topología cofinita (aquella formada por los complementos de los subconjuntos finitos del espacio). En el caso de (\mathbb{R}, \leq) , la recta real con su orden usual, la topología superior σ_{\leq} tiene como elementos a \emptyset , \mathbb{R} y a los intervalos de la forma (r, ∞) , con $r \in \mathbb{R}$, mientras que los abiertos en la topología de Alexandrov α_{\leq} son todos los abiertos de σ_{\leq} y además los intervalos de la forma $[r, \infty)$, con $r \in \mathbb{R}$.

Sin entrar en detalles, cabe mencionar aquí también a la topología **de Scott** [9], otra topología en X asociada al preorden \leq y que denotamos como \mathcal{S}_{\leq} . El estudio de esta topología tiene sus orígenes en la teoría de dominios, una rama de las ciencias de la computación. Los abiertos en la topología de Scott son aquellos conjuntos crecientes U del preorden \leq tales que, si $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ es una familia dirigida que tiene algún supremo en U , entonces existe alguna $i \in I$ con $x_i \in U$. Como todos los abiertos de \mathcal{S}_{\leq} son conjuntos crecientes de \leq , esta topología es más gruesa que α_{\leq} .

Hemos visto que a partir de un preorden dado en un conjunto X se pueden obtener diferentes topologías definidas sobre ese mismo conjunto. Veamos ahora un ejemplo importante en la dirección opuesta, un preorden que se define canónicamente a partir de una topología dada. Recordemos que si (X, τ) es un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$, la cerradura de A se denota por clA y el símbolo $\mathcal{N}^0(x)$ representa al conjunto de todas las vecindades abiertas de x , mientras que $N(x)$ es la intersección de todas ellas.

Definición 2.5 (El preorden de especialización de una topología). *Dado un espacio topológico (X, τ) , su **preorden de especialización**, denotado por \leq_{τ} , se define mediante $x \leq_{\tau} y \Leftrightarrow x \in cl\{y\}$, para todo $x, y \in X$.*

Una consecuencia inmediata de esta definición es que, con respecto al preorden de especialización, se tiene $\downarrow y = cl\{y\}$ para toda $y \in X$ [9]. Se puede observar también lo que sucede cuando el preorden \leq_{τ} es un orden

parcial. Tal cosa pasa si y sólo si ningún par de puntos $x \neq y \in X$ son comparables simultáneamente. En otras palabras, o bien $x \notin cl\{y\}$, o bien $y \notin cl\{x\}$. Esto significa que existe un abierto $U \in \tau$ que contiene a uno de estos puntos pero no al otro, es decir, equivale a que el espacio (X, τ) sea un espacio T_0 [4]. Por otro lado, (X, τ) es T_1 si y sólo si, dados cualesquiera dos puntos $x \neq y \in X$, hay dos abiertos A, B que cumplen con $x \in A \setminus B$ y con $y \in B \setminus A$. Esto es lo mismo que afirmar que $x \notin cl\{y\}$ y que $y \notin cl\{x\}$, lo que es equivalente a que el preorden \leq_τ coincida con Δ_X , la relación de identidad. El preorden de especialización tiene las caracterizaciones siguientes.

Lema 2.6. Sean (X, τ) un espacio topológico y β una subbase de τ . Dados $x, y \in X$, las condiciones siguientes son equivalentes:

- (i) $x \leq_\tau y$, (ii) $cl\{x\} \subseteq cl\{y\}$, (iii) $\mathcal{N}^0(x) \subseteq \mathcal{N}^0(y)$, (iv) $N(y) \subseteq N(x)$,
- (v) para todo $U \in \beta, x \in U \Rightarrow y \in U$.

Demostración. Probemos primero la equivalencia de los primeros cuatro incisos. Si $z \in cl\{x\}$ y C es un cerrado que contiene a y , entonces C debe contener a x y por lo tanto, también a z . De modo que (i) implica (ii). Si A es una vecindad abierta de x , entonces $X \setminus A$ es un cerrado al que x no pertenece, así que y tampoco y se tiene $y \in A$. Esto prueba que (ii) implica (iii). Suponiendo (iii) tenemos (iv), ya que $N(y) = \bigcap \mathcal{N}^0(y) \subseteq \bigcap \mathcal{N}^0(x) = N(x)$. Considerando de nuevo a un cerrado C que contenga a y , su complemento es un abierto al que y no pertenece y, como $y \in N(y) \subseteq N(x) = \bigcap \mathcal{N}^0(x)$, se sigue que $x \in C$, con lo que se muestra que (iv) implica (i). La equivalencia de (iii) y (v) es obvia. □

Resaltamos ahora dos propiedades más del preorden de especialización.

Lema 2.7 ([9]). *Dada cualquier topología, sus abiertos son conjuntos crecientes y sus cerrados son conjuntos decrecientes en el preorden de especialización.*

Demostración. Sean X un conjunto no vacío, τ una topología en X , A un abierto y $x \in X$. Si $x \in \uparrow A$, hay un punto $a \in A$ tal que $a \leq_\tau x$. Como A pertenece a $\mathcal{N}^0(a)$, por el lema 2.6, $A \in \mathcal{N}^0(x)$, así que $x \in A$ y esto implica que A es un conjunto creciente de \leq_τ . Ahora, como todo cerrado es el complemento de un abierto y los abiertos son conjuntos crecientes, los cerrados son decrecientes. □

Proposición 2.8 ([9]). *Sea (X, P) un conjunto preordenado y sea \mathcal{T}_P el conjunto de todas las topologías en X que tienen a P como su preorden de especialización. Si α y σ son la topología de Alexandrov y la topología superior asociadas a P , respectivamente, entonces:*

i) $\alpha, \sigma \in \mathcal{T}_P$,

ii) *Dada cualquier $\tau \in \mathcal{T}_P$, α es más fina y σ es más gruesa que τ .*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y denotemos por \leq_α y \leq_σ a los preórdenes de especialización de α y de σ , respectivamente. Nótese que $(x, y) \in P$ es equivalente a $y \in \uparrow x$, mientras que $x \leq_\alpha y$ equivale a $\mathcal{N}_\alpha^0(x) \subseteq \mathcal{N}_\alpha^0(y)$. Como $\uparrow x \in \alpha$ y además, para todo $A \subseteq X$, $x \in A \in \alpha$ implica $\uparrow x \subseteq A$, se tiene que \leq_α coincide con P .

Si $x \leq_\sigma y$, se tiene $\mathcal{N}_\sigma^0(x) \subseteq \mathcal{N}_\sigma^0(y)$. Como $y \notin X \setminus \downarrow y \in \sigma$, entonces $x \notin X \setminus \downarrow y$ y por tanto $(x, y) \in P$. Ahora supongamos que $(x, y) \in P$. Si $U \in \mathcal{N}_\sigma^0(x)$, hay un subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $x \in X \setminus \downarrow F \subseteq U$. Dado que $x \notin \downarrow F$, se tiene $y \notin \downarrow F$ y por lo tanto $y \in X \setminus \downarrow F \subseteq U$, así que $U \in \mathcal{N}_\sigma^0(y)$. Esto implica $x \leq_\sigma y$, así que P coincide con \leq_σ .

Dada una topología $\tau \in \mathcal{T}_P$ se tiene, para todo $x \in X$,

$$\downarrow x = \{u \in X \mid (u, x) \in P\} = \{u \in X \mid u \leq_\tau x\} = \text{cl}_\tau \{x\}.$$

Así vemos que todos los conjuntos de la forma $\downarrow x$ son cerrados en τ y por lo tanto la subbase $\{X \setminus \downarrow x \mid x \in X\} \subseteq \tau$, así que σ es más gruesa que τ .

Ahora, si $A \in \tau$, por el lema 2.7, A es un conjunto creciente en \leq_τ , que coincide con P , así que A también es creciente con respecto a P y esto significa que $A \in \alpha$, de modo que α es más fina que τ . \square

3 Topologías de Alexandrov

El concepto de lo que ahora conocemos como *espacios de Alexandrov*, originalmente lo introdujo el matemático ruso Pavel Alexandrov en 1937, con el nombre de «espacios discretos» [1]. De acuerdo a Arenas [3], en la década de los años 1980-90 aumentó el interés en estos espacios, debido a la creciente importancia de las topologías digitales.

Definición 3.1 ([3] [22] Topología de Alexandrov). *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la topología τ se llama **de Alexandrov** si es cerrada bajo intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos.*

Si la topología τ es de Alexandrov, entonces a (X, τ) se le llama **espacio de Alexandrov**. Como consecuencia del segundo inciso del lema 2.4, todas las topologías de Alexandrov asociadas a un preorden son topologías de Alexandrov en el sentido de la definición 3.1. Claramente, todas las topologías definidas sobre un conjunto finito de puntos son de Alexandrov y este caso particular es el más importante para las aplicaciones. Incluso si el conjunto X es infinito pero τ tiene solamente un número finito de abiertos, el espacio (X, τ) es de Alexandrov. Nótese, sin embargo, que las topologías de Alexandrov pueden tener una cardinalidad arbitrariamente grande. Esto es evidente si consideramos que la topología discreta siempre es de Alexandrov. Por cierto, ésta es la única topología de Alexandrov que puede ser T_1 [4]. Esto es consecuencia de que en un espacio de Alexandrov, las uniones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas y de que en un espacio T_1 todos los puntos son cerrados. Observemos también que, si la topología cofinita en un conjunto X es de Alexandrov, entonces las uniones arbitrarias de subconjuntos finitos son finitas y por lo tanto X es finito. Así que la topología cofinita en un conjunto infinito nunca es de Alexandrov.

Las topologías de Alexandrov tienen varias caracterizaciones. Por ejemplo, Goubault, en un ejercicio dentro de la sección 4.2 de su libro [9], las llama *topologías discretas en el sentido de Alexandrov* (Alexandroff-discrete) y pide probar que coinciden con aquellas dadas por los conjuntos crecientes de algún preorden. En cambio, Arenas [3] las define como aquellas en las que cada punto tiene una vecindad mínima. Por su parte, Amor, Lazaar, Richmond y Sabri (2022) [2], las presentan como topologías tales que su colección de conjuntos cerrados también es una topología. A causa de esto último, los espacios de Alexandrov se pueden considerar como un ejemplo muy natural de espacios **bitopológicos**. Estos espacios se definen formalmente como una terna (X, τ, σ) donde tanto τ como σ son topologías en X [12]. Veamos ahora en detalle dos de las equivalencias mencionadas.

Proposición 3.2. *Dado un espacio topológico (X, τ) , las condiciones siguientes son equivalentes,*

- (i) (X, τ) es un espacio de Alexandrov,

- (ii) Los conjuntos cerrados en (X, τ) forman una topología en X ,
- (iii) Todo punto $x \in X$ tiene una vecindad mínima [22].

Demostración. La equivalencia de (i) y (ii) es trivial. Si τ es de Alexandrov y $x \in X$, se tiene $N(x) = \bigcap \mathcal{N}^0(x) \in \tau$, así que $N(x)$ es la vecindad mínima de x . Supongamos ahora que cada punto x tiene una vecindad mínima U_x . Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos y sea A su intersección. Podemos suponer $A \neq \emptyset$ y tomar cualquier $a \in A$. Se sigue que $U_a \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, de modo que $U_a \subseteq A$. Esto implica $A = \bigcup_{a \in A} U_a \in \tau$. \square

Como se ve en el lema siguiente, una clase de topologías de Alexandrov que incluye propiamente a las finitas es la de los espacios *localmente finitos*. Un espacio topológico se llama **localmente finito** [17] si cada punto está contenido en un abierto finito.

Lema 3.3. [17] *Todo espacio (X, τ) localmente finito es de Alexandrov.*

Demostración. Si $x \in X$, existe un abierto finito V que contiene a x . Dado cualquier abierto A , se tiene que $A \cap V$ es un abierto finito contenido en V . Por tanto, $N(x) = \bigcap \mathcal{N}^0(x) = \bigcap \{A \cap V \mid x \in A \in \tau\}$ es abierto ya que es una intersección finita de abiertos. Así, vemos que cada punto tiene una vecindad mínima y se sigue que (X, τ) es de Alexandrov. \square

Proposición 3.4. [22] *Si (X, τ) es un espacio de Alexandrov, entonces la familia $\mathcal{B} = \{N(x) \mid x \in X\}$ es base de τ y cualquier base de τ contiene a \mathcal{B} .*

Demostración. Como τ es de Alexandrov, $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Dado un abierto A , se tiene $A = \bigcup \{N(x) \mid x \in A\}$, de modo que \mathcal{B} es base de τ . Si γ es una base de τ y $x \in X$, entonces existe $G \in \gamma$ tal que $x \in G \subseteq N(x)$. Por tanto $G = N(x)$, así que $\mathcal{B} \subseteq \gamma$. \square

El ejemplo siguiente muestra que la condición de tener una base mínima única, establecida como necesaria en la proposición 3.4, no es suficiente para que una topología sea de Alexandrov. Sea $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y sea τ el conjunto $\{\emptyset\} \cup \{X \cap [0, 1/n] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\emptyset, X \in \tau$. Si $A, B \in \tau$ y son no vacíos, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $A = X \cap [0, 1/m]$ y $B = X \cap [0, 1/n]$. Se tiene que $A \cap B = A$ o bien $A \cap B = B$ dependiendo de qué desigualdad se cumpla, $m \leq n$ o bien $n \leq m$. Sea $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$. Para cada $i \in I$ hay un número $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i = X \cap [0, 1/n_i]$. Tomando $k = \min \{n_i \mid i \in I\}$,

vemos que $\bigcup_{i \in I} A_i = X \cap [0, 1/k] \in \tau$. De este modo se comprueba que τ es una topología en X . Consideremos ahora una base β de τ . Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $B \in \beta$ con $1/n \in B \subseteq X \cap [0, 1/n]$ y por lo tanto $B = X \cap [0, 1/n]$. Esto muestra que $\tau \setminus \{\emptyset\} \subseteq \beta$, así que $\tau \setminus \{\emptyset\}$ es la única base mínima de τ . Sin embargo, τ no es de Alexandrov, ya que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \cap [0, 1/n]) = \{0\} \notin \tau$.

A continuación se da un par de condiciones que resulta suficiente para asegurar que una familia de subconjuntos de un conjunto dado sea base de una topología de Alexandrov en ese conjunto.

Proposición 3.5. *Sea $X \neq \emptyset$. Si $\mathcal{B} = \{U_x\}_{x \in X}$ es una familia de subconjuntos de X que cumple, para todo $x, y \in X$, (i) $x \in U_x$, (ii) $x \in U_y \Rightarrow U_x \subseteq U_y$, entonces \mathcal{B} es base de una topología de Alexandrov en X .*

Demostración. Si $x, y, z \in X$, con $z \in U_x \cap U_y$, se tiene $z \in U_z \subseteq U_x \cap U_y$, así que \mathcal{B} es base de una topología τ en X . Si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ y $A = \bigcap_{i \in I} A_i$, podemos suponer que $A \neq \emptyset$. Dado $a \in A$ y cualquier $i \in I$, hay algún $x_i \in X$ tal que $a \in U_{x_i} \subseteq A_i$ y esto implica $U_a \subseteq U_{x_i} \subseteq A_i$ para toda $i \in I$, de donde se sigue $U_a \subseteq A$, por lo que $A = \bigcup \{U_a \mid a \in A\} \in \tau$. Esto nos muestra que τ es de Alexandrov. □

Lema 3.6. *Sean $X \neq \emptyset$ y P un preorden definido en X . Si α_P es la topología de Alexandrov dada por los conjuntos crecientes de P , entonces, para cada $x \in X$ se tiene (i) $N(x) = P(x)$ y (ii) $cl \{x\} = P^{-1}(x)$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Se tiene $x \in N(x) \in \alpha_P$ y de esto se sigue que $P(x) \subseteq P(N(x)) \subseteq N(x)$. Como P es un preorden, $P(P(x)) \subseteq P(x)$, así que $P(x) \in \alpha_P$ y esto implica $N(x) \subseteq P(x)$, por lo que $N(x) = P(x)$. Para comprobar la segunda parte recordemos que, por la proposición 2.8, P es el preorden de especialización de α_P , de modo que se tienen las equivalencias $y \in cl \{x\} \Leftrightarrow (y, x) \in P \Leftrightarrow y \in P^{-1}(x)$. □

Antes de enunciar el siguiente lema, recordemos las nociones de espacios R_0 y R_1 [6]. Se dice que un espacio topológico es R_0 si todo abierto contiene a la cerradura de cada uno de sus puntos. El espacio se llama R_1 si todo par de puntos con cerraduras distintas están separados por vecindades ajenas. Es sencillo comprobar que todo espacio R_1 es R_0 .

Lema 3.7. *Si el espacio (X, τ) es de Alexandrov, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

- (i) (X, τ) es R_0 ,
- (ii) Todo abierto es un cerrado,
- (iii) (X, τ) es R_1 .

Demostración. Sea (X, τ) un espacio de Alexandrov. Supongamos que también es R_0 . Si $x \in X$, entonces $N(x) \in \tau$. Dado cualquier $a \in N(x)$, como el espacio es R_0 , se tiene $cl\{a\} \subseteq N(x)$. Por tanto, como τ es de Alexandrov, $N(x) = \bigcup \{cl\{a\} \mid a \in N(x)\}$ es un cerrado. Como $\{N(x) \mid x \in X\}$ es base de τ , todo abierto es un cerrado y así vemos que (i) implica (ii). Si todo abierto es un cerrado, entonces todo cerrado es un abierto. Sean $x, y \in X$ y supongamos que $x \in cl\{y\}$ pero $y \notin cl\{x\}$. Hay un cerrado C que contiene a x y que no contiene a y . Por la hipótesis, $X \setminus C$ también es cerrado. Como $y \in X \setminus C$, tenemos $x \in X \setminus C$ pero esto es una contradicción. De lo anterior se concluye que $x \in cl\{y\} \Rightarrow y \in cl\{x\}$ y, por simetría, $x \in cl\{y\} \Leftrightarrow y \in cl\{x\}$. De esto se sigue que, o bien $cl\{x\} = cl\{y\}$, o bien $cl\{x\} \cap cl\{y\} = \emptyset$. Como todo cerrado es un abierto, lo último nos dice que (X, τ) es R_1 y con esto se verifica que (ii) implica (iii). El ciclo de implicaciones se completa observando que todo espacio R_1 es R_0 . \square

El caso al que se refiere el resultado anterior se puede ilustrar en forma sencilla tomando como ejemplo al conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y a la topología dada por $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$. El preorden de especialización de esta topología es $\Delta_X \cup \{(a, b), (b, a)\}$ y sus vecindades mínimas son $N(a) = N(b) = \{a, b\}$, $N(c) = \{c\}$, $N(d) = \{d\}$. Es fácil comprobar directamente que τ es R_0 y R_1 , que sus ocho abiertos son también cerrados y que τ no es T_0 . Otro ejemplo aún más simple del mismo caso es la topología indiscreta en cualquier conjunto que tenga al menos dos puntos. Veamos ahora más ejemplos de topologías de Alexandrov.

Ejemplo 3.8. [18] Sea X un conjunto no vacío y sea $S \subseteq X$. Los tres conjuntos siguientes son topologías de Alexandrov en X .

- $Super(S) = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid S \subseteq A\}$.
- $Sub(S) = \{X\} \cup \{A \subseteq X \mid A \subseteq S\}$.
- $Ajeno(S) = \{X\} \cup \{A \subseteq X \mid A \cap S = \emptyset\} = Sub(X \setminus S)$.

Ejemplo 3.9 ([10], [12] La línea de Khalimsky). En \mathbb{Z} , el conjunto de los enteros, la familia $\mathcal{S} = \{\{2n-1, 2n, 2n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es una subbase que genera a la base $\mathcal{B} = \{\{2n+1\}, \{2n-1, 2n, 2n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. El espacio (\mathbb{Z}, τ) , donde τ es la topología generada por \mathcal{B} , se conoce como la línea de Khalimsky. Este espacio ocupa un lugar importante en la literatura referente

a la topología digital. En [10], Bahrampour y Honari caracterizan a la línea de Khalimsky como el único (hasta homeomorfismo) espacio de puntos de corte que es irreducible.

Ejemplo 3.10 (Topologías basadas en una partición). Sea X no vacío y sea $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ una partición de X . Entonces la topología que tiene como base a \mathcal{B} es de Alexandrov. Aquí la vecindad mínima de un punto x es el bloque B_i que contiene a x . Este tipo de topologías, siempre y cuando al menos un bloque de la partición tenga más de un punto, son R_1 pero no son T_0 .

El ejemplo anterior está muy relacionado con el siguiente.

Ejemplo 3.11 (Todas las preimágenes de una función). Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y hacemos $\tau = \{f^{-1}(B) \mid B \subseteq Y\}$, entonces τ es una topología de Alexandrov, por las propiedades de las preimágenes.

Ejemplo 3.12 ([18] Abiertos que contienen a su preimagen). Si se tiene una función $f : X \rightarrow X$ y se toma $\tau = \{A \subseteq X \mid f^{-1}(A) \subseteq A\}$, entonces τ es de Alexandrov. De forma equivalente, se puede describir a τ diciendo que sus cerrados son los subconjuntos $C \subseteq X$ tales que $f(C) \subseteq C$. Las topologías que se pueden definir de esta manera a partir de una función son llamadas topologías **primales** [2], o bien **funcionalmente Alexandrov** [20]. Las topologías primales son una clase propia de las topologías de Alexandrov, como se puede apreciar considerando la topología $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$ definida sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Esta topología no es primal. Tampoco la topología de la línea de Khalimsky (ejemplo 3.9) es primal. Shirazi y Golestani [20] dan una caracterización de los espacios primales mediante tres condiciones expresadas en términos de vecindades mínimas.

La clase anterior está contenida dentro de la siguiente.

Ejemplo 3.13 (Abiertos que contienen a su imagen bajo una relación). Dado un conjunto X no vacío y una relación $R \subseteq X \times X$, el conjunto $\tau_R = \{A \subseteq X \mid R(A) \subseteq A\}$ es una topología de Alexandrov en X .

Es claro que τ_R es más fina que τ_S si $R \subseteq S$. La implicación en sentido inverso no es válida ya que, haciendo $Q = R \circ R$, resulta que τ_Q es más fina que τ_R , aún cuando Q no esté contenida en R . Sin embargo, dado el caso de que R sea reflexiva, se tiene $\tau_Q = \tau_R$. Definiendo S como $R \cup \Delta_X$, también se obtiene una igualdad, $\tau_S = \tau_R$. Por otra parte, los cerrados de τ_R

son precisamente los abiertos de $\tau_{R^{-1}}$, ya que, para todo $A \subseteq X$, $R(A) \subseteq A$ es equivalente a $R^{-1}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$. Es por esta razón que los cerrados de las topologías primales (ejemplo 3.12) se pueden caracterizar mediante la condición $f(C) \subseteq C$. Si se toma $R = \Delta_X$, entonces τ_R es la topología discreta. En cambio, con $R = X \times X$ resulta que τ_R es la indiscreta. Haciendo referencia al ejemplo 3.8, con la relación $R = X \times S$ se obtiene $\tau_R = Super(S)$, mientras que $R = (X \setminus S) \times X$ produce $\tau_R = Sub(S)$. La relación $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m \text{ es par y } |m - n| = 1\}$ da como resultado la topología de la línea de Khalimsky (ejemplo 3.9). Con respecto al ejemplo 3.11, en el que $f : X \rightarrow Y$ es una función, se puede comprobar fácilmente que $\tau = \{f^{-1}(B) \mid B \subseteq Y\} = \tau_R$, donde R es la relación en X dada por $R = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$. Nótese que esta relación es de equivalencia y por lo tanto define una partición $\mathcal{B} = \{f^{-1}(u) \mid u \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$. Esta partición es base de τ_R , lo que nos muestra que los ejemplos 3.10 y 3.11 son prácticamente equivalentes, ya que una partición siempre coincide con la inducida por la función canónica que va del conjunto al conjunto cociente.

Cuando se utilizan relaciones para especificar topologías de Alexandrov conforme al formato del ejemplo 3.13, los preórdenes juegan un papel especial. En primer lugar podemos observar que todas las topologías de Alexandrov asociadas a un preorden (formadas por los conjuntos crecientes del mismo, tal y como se las definió en la sección 2), siguen dicho formato ya que α_{\leq} coincide exactamente con τ_R si se toma a la relación R como el preorden \leq . En segundo lugar, cualquier topología que se pueda expresar como τ_R para alguna relación R en X , se puede obtener de la misma forma utilizando un preorden, como lo muestra el resultado siguiente.

Lema 3.14. *Si $X \neq \emptyset$ y R es una relación en X , entonces el preorden R^* , la cerradura reflexiva y transitiva de R (ver Lema 2.1), genera la misma topología que R .*

Demostración. Como $R \subseteq R^*$, si $A \subseteq X$ cumple $R^*(A) \subseteq A$, se sigue que $R(A) \subseteq A$ y τ_R es más fina que τ_{R^*} . Supongamos ahora que $R(A) \subseteq A$. En vista de que $R^*(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(R \cup \Delta_X)^n(A)]$, usaremos inducción para comprobar que $(R \cup \Delta_X)^n(A) \subseteq A$ es válido para toda $n \in \mathbb{N}$. La base de la inducción es clara. Si $(R \cup \Delta_X)^n(A) \subseteq A$ y se da $b \in (R \cup \Delta_X)^{n+1}(A)$, entonces existen $x_0, \dots, x_{n+1} \in X$ tales que $x_0 \in A$, $x_{n+1} = b$ y $(x_i, x_{i+1}) \in R \cup \Delta_X$ para cada $0 \leq i \leq n$. Por la hipótesis de inducción, $x_n \in A$. Como $(x_n, b) \in R$

o bien $x_n = b$, se sigue $b \in R(A) \cup A \subseteq A$. Por lo tanto $(R \cup \Delta_X)^{n+1}(A) \subseteq A$, lo que implica $R^*(A) \subseteq A$, así que $\tau_{R^*} = \tau_R$. \square

En tercer lugar, mediante la formulación del ejemplo 3.13 se puede expresar a cualquier topología de Alexandrov a partir de su propio preorden de especialización, como se verá en seguida. En el lema 2.7 se mostró que los abiertos de una topología arbitraria son conjuntos crecientes en su preorden de especialización. El recíproco es falso en general. Cualquier topología T_1 en un conjunto X tiene como preorden de especialización a Δ_X , la diagonal. Todo subconjunto de X es creciente en este preorden, así que, si la topología no es la discreta, no todos los conjuntos crecientes serán abiertos. Un ejemplo más concreto es la topología superior σ del conjunto preordenado (\mathbb{R}, \leq) . Esta topología es T_0 pero no es T_1 ni es de Alexandrov. Aquí, los conjuntos de la forma $[r, \infty)$, con $r \in \mathbb{R}$, son crecientes pero no pertenecen a σ . Para las topologías de Alexandrov tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15. *Si τ es una topología de Alexandrov, entonces todos los conjuntos crecientes de su preorden de especialización pertenecen a τ .*

Demostración. Sean, (X, τ) un espacio de Alexandrov, \leq su preorden de especialización y A un conjunto creciente de \leq . Dados $a \in A$ y $x \in N(a)$, como $N(a) \in \tau$, se tiene $N(x) \subseteq N(a)$. Por el lema 2.6, $a \leq x$. Como A es creciente, $x \in A$, lo que implica $N(a) \subseteq A$, así que $A = \bigcup \{N(a) \mid a \in A\} \in \tau$. \square

El lema 2.7 junto con la proposición 3.15 implican el siguiente resultado.

Corolario 3.16. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandrov y \leq_τ es el preorden de especialización de τ , entonces*

- (i) *la colección de los conjuntos crecientes de \leq_τ es igual a τ ,*
- (ii) *la colección de los conjuntos decrecientes de \leq_τ coincide con la colección de los conjuntos cerrados en τ .*

En la proposición 2.8 se probó que el preorden de especialización \leq_α de la topología de Alexandrov $\alpha = \{A \subseteq X \mid A = \uparrow A\}$ asociada al preorden P , coincide con P . Ese resultado se puede considerar como dual del corolario 3.16. Finalizamos esta sección con los dos lemas siguientes.

Lema 3.17. *Si P y Q son preórdenes en X y tienen los mismos conjuntos crecientes (es decir, $\tau_P = \tau_Q$), entonces $P = Q$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Por el lema 3.6, $P(x) = N_{\tau_P}(x) = N_{\tau_Q}(x) = Q(x)$. Esto implica que $(x, y) \in P \Leftrightarrow (x, y) \in Q$. \square

Lema 3.18. *Si τ y σ son topologías de Alexandrov en un mismo conjunto X y tienen el mismo preorden de especialización ($\leq_\tau = \leq_\sigma$), entonces $\tau = \sigma$.*

Demostración. Para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene la siguiente cadena de equivalencias: $y \in N_\tau(x) \Leftrightarrow N_\tau(y) \subseteq N_\tau(x) \Leftrightarrow x \leq_\tau y \Leftrightarrow x \leq_\sigma y \Leftrightarrow N_\sigma(y) \subseteq N_\sigma(x) \Leftrightarrow y \in N_\sigma(x)$. Esto significa que las vecindades mínimas de cada punto $x \in X$ son las mismas tanto en τ como en σ , de modo que ambas topologías son iguales. \square

Los resultados anteriores significan que hay una biyección entre los preórdenes y las topologías de Alexandrov definidos sobre un mismo conjunto.

4 Complejos celulares

Kovalevsky, en [13], presenta un concepto de geometría digital utilizando unos espacios llamados «complejos celulares abstractos» [21]. Intuitivamente, los elementos de estos espacios pueden representar, por ejemplo, en el caso particular de un poliedro, al poliedro mismo, a alguna de sus caras, a una de sus aristas o a un vértice. Se considera a cada uno de estos objetos geométricos como un elemento individual o «celda» del complejo celular, en vez de considerarlo como un subconjunto de puntos dentro del espacio euclideo. Los complejos celulares abstractos están dotados de una topología de Alexandrov que es T_0 y que se puede definir, mediante la formulación del ejemplo 3.13, a partir de una relación de «enmarcamiento» entre los objetos geométricos representados por los elementos del complejo celular. En la relación mencionada, los vértices no están enmarcadas por ningún otro objeto. Cada arista está enmarcada por sus vértices extremos. Cada cara está enmarcada tanto por las aristas como por los vértices que forman su perímetro. Por último, las caras solamente enmarcan al poliedro mismo, mientras que el poliedro no enmarca a ningún elemento. Estas ideas se pueden extender a objetos geométricos similares de dimensiones superiores. En lo que sigue, el símbolo \mathbb{N}_0 representa a los enteros no negativos.

Definición 4.1 ([13] Complejos celulares abstractos). *Un complejo celular abstracto sobre un conjunto no vacío X es una terna $C = (X, E, d)$ tal que*

- $E \subseteq X \times X$ es una relación antisimétrica, irreflexiva y transitiva.
- $d : X \rightarrow \mathbb{N}_0$ es una función que cumple $(x, y) \in E \Rightarrow d(x) < d(y)$.

A E se le llama la relación de **enmarcamiento** de C y a d se le conoce como la función de **dimensión** de C . Si $d(x) = n$, entonces a x se le llama una **n -celda**. C se llama **n -dimensional** si $\max\{d(x) \mid x \in X\} = n$.

Observemos que, aunque la relación de enmarcamiento es irreflexiva, la relación $E' = E \cup \Delta_X$ es un orden parcial. La topología de un complejo celular abstracto $C = (X, E, d)$, se define [13] como $\tau_E = \{A \subseteq X \mid E(A) \subseteq A\}$. En el caso general del ejemplo 3.13, se vio que esta topología es de Alexandrov. Además, es una topología T_0 , ya que E' es un orden parcial y $\tau_E = \tau_{E'}$, como se mencionó a continuación del ejemplo 3.13.

Se dice que el complejo celular $C = (X, E, d)$ es **finito** si X es finito. Por otra parte, Kovalevsky [13] lo llama *localmente finito* si $E(x) \cup E^{-1}(x)$ es finito para toda $x \in X$. Esta acepción del término «localmente finito» que usa Kovalevsky para los complejos celulares, es más fuerte que el significado usual del mismo término [17], utilizado para espacios topológicos en general y que pide únicamente que cada punto esté contenido en un abierto finito. El ejemplo siguiente ilustra la diferencia entre estos dos conceptos. Tomemos al conjunto $X = \mathbb{Z} \cup \{\pi\}$ con las relaciones V y W dadas por $V = \{(2n, 2n - 1), (2n, 2n + 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $W = \mathbb{Z} \times \{\pi\}$ y consideremos a la relación $E = V \cup W$. Si $(x, y) \in E$, entonces, o bien $y = \pi$ y x es un entero, o bien y es un impar y x es un par. Con esto vemos que E es irreflexiva y antisimétrica. Si $n \in \mathbb{Z}$ y $(2n, x) \in E$, entonces x es impar, mientras que $(2n + 1, x) \in E$ implica $x = \pi$. Además $\mathbb{Z} \times \{\pi\} \subseteq E$. Por lo tanto, E es transitiva. Esto nos dice que E es una relación de enmarcamiento en X . Es fácil ver que la función $d : X \rightarrow \mathbb{N}_0$, definida mediante $d(\pi) = 2$, $d(2n + 1) = 1$ y $d(2n) = 0$, para $n \in \mathbb{Z}$, es una función de dimensión, por lo que (X, E, d) es un complejo celular abstracto. Dado $n \in \mathbb{Z}$, los conjuntos finitos $A_n = \{2n - 1, 2n, 2n + 1, \pi\}$ y $B_n = \{2n + 1, \pi\}$ son crecientes en el orden parcial E' , ya que $E(A_n) \subseteq A_n$ y $E(B_n) \subseteq B_n$. Además, $E\{\pi\} = \emptyset \subseteq \{\pi\}$. Con esto tenemos $2n \in A_n$, $2n + 1 \in B_n$, $\pi \in \{\pi\}$ y $A_n, B_n, \{\pi\} \in \tau_E$, por lo que cada punto $x \in X$ está contenido en un abierto finito y esto implica que el espacio (X, τ_E) es localmente finito en el sentido convencional [17]. Sin embargo, el complejo celular (X, E, d) no es localmente finito en el sentido más riguroso de Kovalevsky, ya que $E^{-1}(\pi) = \mathbb{Z}$, que es infinito.

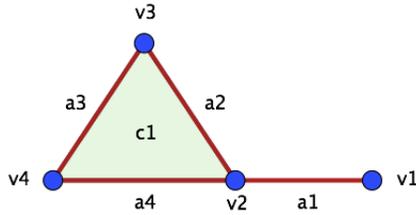


Figura 1: Complejo celular abstracto con 4 puntos, 4 aristas y una cara.

Ejemplo 4.2. En la figura 1 se muestra un complejo celular (X, E, d) finito y bidimensional, donde $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, a_1, a_2, a_3, a_4, c_1\}$ y la relación de enmarcamiento E consiste de las once parejas: $(v_1, a_1), (v_2, a_1), (v_2, a_2), (v_2, a_4), (v_3, a_2), (v_3, a_3), (v_4, a_3), (v_4, a_4), (a_2, c_1), (a_3, c_1), (a_4, c_1)$. La función de dimensión es $d(c_1) = 2, d(a_i) = 1, d(v_i) = 0$, para $1 \leq i \leq 4$.

La figura 1 se puede considerar como un primer paso en la digitalización del objeto geométrico que nos muestra, en este caso un triángulo que comparte un vértice con un segmento de recta exterior. Sin embargo, para ilustrar con mayor claridad la estructura del orden parcial E' , es mejor utilizar otro tipo de imagen.

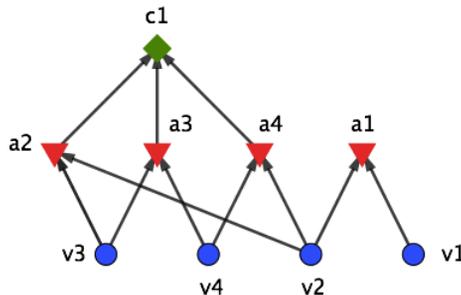


Figura 2: Diagrama de Hasse del orden parcial E' .

En un orden parcial finito, la relación « a cubre a b », tal y como se definió al principio de la sección 2, contiene suficiente información para recuperar, a

partir de ella, el orden parcial original, ya que éste es la cerradura transitiva y reflexiva de la relación de cobertura. Esto no es necesariamente cierto en el caso infinito. Adicionalmente, en el caso finito, la relación de cobertura proporciona una representación gráfica de su orden parcial, conocida como **diagrama de Hasse** [5]. En estos diagramas, cada elemento del conjunto X se indica con un pequeño círculo o polígono, dispuestos de tal manera que a ocupe una posición más alta que b si sucede que $a > b$. El diagrama se completa trazando un segmento rectilíneo entre a y b en cada instancia donde a cubra a b . La figura 2 es el diagrama de Hasse correspondiente al complejo celular abstracto de la figura 1.

En la tabla 1 se muestran las vecindades mínimas y las cerraduras de cada celda x en la topología τ_E del complejo celular.

x	$N(x)$	$cl \{x\}$
c_1	$\{c_1\}$	$\{v_2, v_3, v_4, a_2, a_3, a_4, c_1\}$
a_1	$\{a_1\}$	$\{v_1, v_2, a_1\}$
a_2	$\{a_2, c_1\}$	$\{v_2, v_3, a_2\}$
a_3	$\{a_3, c_1\}$	$\{v_3, v_4, a_3\}$
a_4	$\{a_4, c_1\}$	$\{v_2, v_4, a_4\}$
v_1	$\{v_1, a_1\}$	$\{v_1\}$
v_2	$\{v_2, a_1, a_2, a_4, c_1\}$	$\{v_2\}$
v_3	$\{v_3, a_2, a_3, c_1\}$	$\{v_3\}$
v_4	$\{v_4, a_3, a_4, c_1\}$	$\{v_4\}$

Cuadro 1: Vecindades mínimas y cerraduras.

Proposición 4.3 ([14]). *Toda topología finita T_0 coincide con la de un complejo celular abstracto.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico T_0 finito. Como τ es T_0 , su preorden de especialización \leq_τ , es un orden parcial. Por lo tanto la relación $E = \leq_\tau \setminus \Delta_X$ es irreflexiva, antisimétrica y transitiva. Por el lema 3.14 y el corolario 3.16, se tiene $\tau_E = \tau$. Sea $d : X \rightarrow \mathbb{N}_0$ la función dada por $d(x) = |E^{-1}(x)|$, para $x \in X$. Si $(x, y) \in E$, entonces $x \in E^{-1}(y)$ y, como E es transitiva, $E^{-1}(x) \subseteq E^{-1}(y)$. Como E es irreflexiva, se sigue que $d(x) =$

$|E^{-1}(x)| < [E^{-1}(y)] = d(y)$, lo que implica que d es una función de dimensión y la terna (X, E, d) es un complejo celular abstracto con τ como su topología inducida. \square

Definición 4.4 ([13] Subcomplejo celular). *Si $C = (X, E, d)$ y $D = (Y, F, h)$ son complejos celulares abstractos, se dice que D es un **subcomplejo celular** de C cuando se cumplen las condiciones (i) $Y \subseteq X$, (ii) $F = E \cap (Y \times Y)$ y (iii) $h = d|_Y$.*

Esto significa que es posible determinar completamente a un subcomplejo celular $D = (Y, F, h)$ mediante el subconjunto $Y \subseteq X$ de las celdas que le pertenecen, puesto que la relación de enmarcamiento en el subcomplejo D , así como la función de dimensión deben ser las restricciones de E y de d al subconjunto Y . En el caso del complejo celular del ejemplo 4.2, que cuenta con nueve celdas, se tiene un total de 511 subcomplejos celulares, incluyéndolo a él mismo. Las figuras 3 y 4 muestran, respectivamente, el diagrama de Hasse y las vecindades mínimas correspondientes al subcomplejo celular de la línea de Khalimsky determinado por el subconjunto $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$.

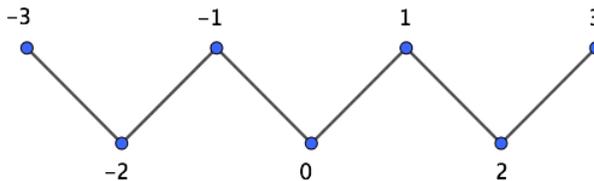


Figura 3: Diagrama de Hasse de un subcomplejo de la línea de Khalimsky.

Definición 4.5 ([13] \mathcal{E} -isomorfismo entre complejos celulares). *Dos complejos celulares abstractos (X, E, d) y (Y, F, h) se llaman **\mathcal{E} -isomorfos** si existe una biyección $g : X \rightarrow Y$ tal que $(a, b) \in E \Leftrightarrow (g(a), g(b)) \in F$.*

Si $g : X \rightarrow Y$ es un \mathcal{E} -isomorfismo entre los complejos celulares (X, E, d) y (Y, F, h) , entonces g es un homeomorfismo entre los espacios topológicos (X, τ_E) y (Y, τ_F) . A partir de la relación de enmarcamiento E en un complejo celular, se define la **relación de incidencia** como $I = \Delta_X \cup E \cup E^{-1}$. Esta es la mínima relación reflexiva y simétrica que contiene a E . De esta manera,

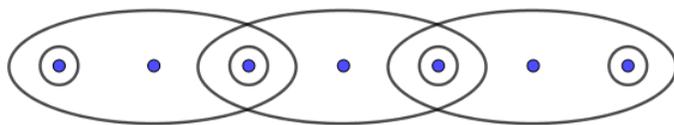


Figura 4: Vecindades mínimas en el complejo celular de la figura 3.

cada celda es incidente consigo misma y con las celdas que la enmarcan, así como con aquellas a las que ella enmarca. La relación de incidencia no es necesariamente transitiva. La cerradura transitiva de I es una relación de equivalencia. Se denota por K y se conoce como la **relación de conexidad** del complejo celular. Las **componentes conexas** de C son las clases de equivalencia de K . Un complejo celular se llama **conexo** cuando su relación de conexidad tiene una única clase de equivalencia.

El operador frontera se define de la misma forma que en cualquier espacio topológico. Dado que las topologías de los complejos celulares son de Alexandrov, la frontera FrA de un subconjunto A se puede expresar en términos de vecindades mínimas, como el conjunto de puntos $x \in X$ tales que $N(x)$ intersecta tanto a A como a su complemento. Un concepto relacionado con el de frontera es el de *borde*. Si A es un subcomplejo k -dimensional de C , se define a ∂A , el **borde** de A , como la cerradura del conjunto de todas aquellas celdas $(k - 1)$ -dimensionales de X que enmarcan exactamente a una celda k -dimensional de A . Para ilustrar la diferencia entre los operadores *borde* y *frontera*, consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.6. *En la figura 5 se muestra un complejo celular $C = (X, E, d)$, así como uno de sus subcomplejos, dado por un subconjunto $A \subseteq X$. El complejo C tiene once celdas, dadas por $X = \{v_1, \dots, v_4, a_1, \dots, a_5, c_1, c_2\}$, mientras que $A = \{a_1, a_4, c_1, c_2\}$. La función d está dada por $d(c_i) = 2$, $d(a_i) = 1$, $d(v_i) = 0$, para los valores pertinentes en el rango $1 \leq i \leq 5$. La relación de enmarcamiento E consta en total de 22 parejas ordenadas y el diagrama de Hasse correspondiente al orden parcial E' se muestra en la figura 6.*

Nótese que el subcomplejo A es bidimensional, ya que $d(c_1) = d(c_2) = 2$ es la dimensión máxima de las cuatro celdas pertenecientes a A . Aplicando



Figura 5: Complejo celular C con 11 celdas y subcomplejo A de 4 celdas.

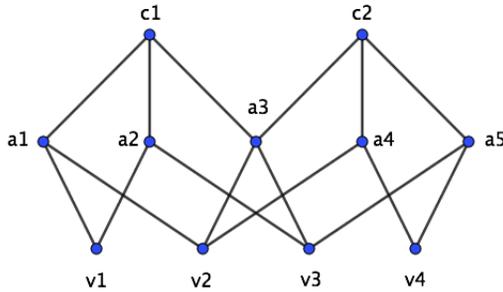


Figura 6: Diagrama de Hasse del complejo celular C del ejemplo 4.6.

las definiciones dadas arriba para los operadores *frontera* y *borde* se obtienen los resultados mostrados en la figura 7 para los subcomplejos FrA y ∂A . Las aristas correspondientes se muestran sin etiquetas.

Las fronteras de los subcomplejos de un complejo n -dimensional C no pueden contener celdas n -dimensionales ya que n es la dimensión máxima y las celdas n -dimensionales no enmarcan a ninguna otra celda. Esto implica que la vecindad mínima de cualquier celda n -dimensional c es el conjunto singular $\{c\}$, que no puede intersectar a la vez a un subcomplejo y a su complemento.

La geometría digital que desarrolla Kovalevsky se puede considerar como una imitación finita de la geometría cartesiana. Para lograr esto se define un tipo especial de complejo celular que va a representar, intuitivamente, a objetos geométricos tales como líneas, rectángulos, paralelepípedos y, en general, a productos cartesianos de segmentos rectilíneos de longitud entera.



Figura 7: Subcomplejos FrA y ∂A del subcomplejo A del ejemplo 4.6.

Se empieza por definir las *líneas numéricas finitas* como un tipo especial de complejo celular dotado además de coordenadas.

Definición 4.7 ([13] Líneas numéricas finitas). *Dada una longitud entera positiva n , se define a L_n , la **línea numérica finita** de longitud n , como $L_n = (X_n, E_n, d_n, c_n)$, donde*

- $X_n = \{0, 1, \dots, 2n\}$,
- $E_n = \{(2k, 2k + 1)\}_{k=0}^{n-1} \cup \{(2k, 2k - 1)\}_{k=1}^n$,
- $d_n(j) = j \bmod 2$, para $j \in X_n$,
- $c_n(j) = j/2$, para $j \in X_n$.

De esta forma, los elementos de una línea numérica de longitud n son los primeros $2n + 1$ enteros no negativos, donde los números pares representan vértices y tienen dimensión cero, mientras que los números impares representan aristas y su dimensión es uno. La coordenada que se le asigna a cada elemento de la línea numérica es igual a su mitad. Con esto se logra que la distancia entre vértices consecutivos sea la unidad y que cada elemento tenga una coordenada igual a la del punto medio del objeto geométrico que representa si se considera a la línea como parte de un eje cartesiano, con su primer vértice situado en el origen de un espacio euclideo. En esta línea numérica finita cada número par enmarca tanto al impar siguiente como al anterior. Esto se ilustra con el siguiente diagrama para el caso $n = 4$.

$$0 \rightarrow 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 6 \rightarrow 7 \leftarrow 8$$

Mediante el diagrama anterior se puede apreciar que la línea numérica finita de longitud n es \mathcal{E} -isomorfa al subcomplejo celular de la línea de Khalimsky (ejemplo 3.9) dada por el conjunto de enteros $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 2n\}$.

Definición 4.8 ([13] Complejos celulares cartesianos). *Dado $m \in \mathbb{N}$ y dadas m líneas numéricas finitas, L_{n_1}, \dots, L_{n_m} , cada una de longitud n_i , y tal que $L_{n_i} = (X_{n_i}, E_{n_i}, d_{n_i}, c_{n_i})$, para $1 \leq i \leq m$, se define el complejo celular cartesiano*

$$C = (X, E, d, c) = \prod_{i=1}^m L_{n_i}$$

mediante

- $X = \prod_{i=1}^m X_{n_i}$
- $(u, v) = ((u_i), (v_i)) \in E$ si y solo si, $(u_i, v_i) \in I_{n_i}$ y $d_{n_i}(u_i) \leq d_{n_i}(v_i)$, para $1 \leq i \leq m$.
- $d(u) = d((u_i)) = \sum_{i=1}^m d_{n_i}(u_i)$
- $c(u) = (c_{n_i}(u_i)) = (c_{n_1}(u_1), \dots, c_{n_m}(u_m))$

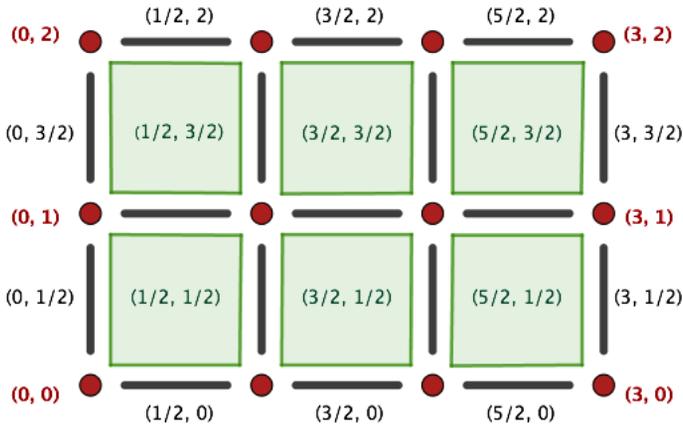


Figura 8: Coordenadas en el complejo celular cartesiano $L_3 \times L_2$.

En la definición 4.8, I_{n_i} representa a la relación de incidencia correspondiente a la línea L_{n_i} . Como se muestra en la figura 8, en el complejo cartesiano C todas las componentes de los vectores de coordenadas correspondientes a 0-celdas (vértices) son números enteros, mientras que todas las componentes de los vectores de coordenadas correspondientes a m-celdas son números racionales no enteros. En un complejo cartesiano bidimensional, a las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas se les llama puntos, segmentos y pixeles, respectivamente.

Definición 4.9 ([13] Regiones y regiones sólidas). *Una **región** de un complejo celular abstracto es un subconjunto abierto y conexo del espacio. Dentro de un complejo n-dimensional, una región A se llama **sólida** si para cada celda $x \in X \setminus A$, su vecindad mínima $N(x)$ contiene alguna n-celda de $X \setminus A$.*

Para ilustrar estos conceptos, en la figura 9 se muestra un complejo celular \mathcal{E} -isomorfo a $L_3 \times L_1$. La única diferencia son las etiquetas, por simplicidad visual y para abreviar la notación.

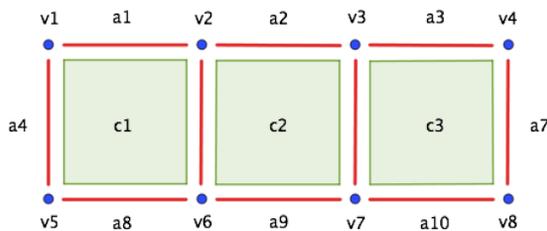


Figura 9: Complejo \mathcal{E} -isomorfo al complejo celular cartesiano $L_3 \times L_1$.

Dentro del complejo celular bidimensional C de la figura 9, el subconjunto $\{c_1, c_2\}$ no es una región ya que es abierto pero no es conexo. El subconjunto $\{v_2, v_5, v_6, v_7, a_5, a_8, a_9\}$ tampoco es una región porque, aunque es conexo, no es abierto. El subconjunto $\{a_5, c_1, c_2\}$ sí es una región pero no es sólida, ya que $c_3 \notin N(a_4) = \{a_4, c_1\}$. En cambio, el subconjunto $\{v_1, v_2, v_5, v_6, a_1, a_2, a_4, a_5, a_8, a_9, c_1, c_2\}$ sí es una región sólida.

Definición 4.10 ([13] Semiplanos digitales). *En un complejo cartesiano de dimensión 2, un **semiplano digital** es una región sólida tal que sus pixeles están determinados por una desigualdad lineal sobre sus coordenadas. Un **segmento rectilíneo digital** es un subconjunto conexo de la frontera de un*

semiplano digital y un subconjunto digital convexo es una intersección no vacía de semiplanos digitales.

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, la desigualdad $a(\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}) + b(\lfloor y \rfloor + \frac{1}{2}) + c > 0$ proporciona la imagen del semiplano digital correspondiente a la desigualdad $ax + by + c > 0$. En la figura 10 se muestra una porción de cualquier semiplano digital determinado por los valores $a = 2$ y $b = -5$, con $c \in \mathbb{R}$.

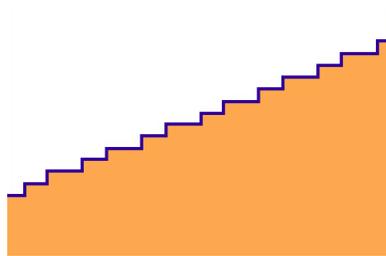


Figura 10: Semiplano digital correspondiente a $2x - 5y + c > 0$.

Si A, B y C son puntos (0-celdas) de un complejo celular cartesiano, con coordenadas (x_a, y_a) , (x_b, y_b) y (x_c, y_c) respectivamente, se dice que C es **estrictamente colineal** con A y B si

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) = (x_c - x_b)(y_b - y_a).$$

Se dice que C está *a la derecha* del par de puntos A y B si

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) < (x_c - x_b)(y_b - y_a),$$

mientras que C está *a la izquierda* del par de puntos A y B si

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) > (x_c - x_b)(y_b - y_a).$$

Los discos digitales se definen de manera similar a los semiplanos digitales..

Definición 4.11 ([13] Discos digitales). *Un disco digital en un complejo cartesiano bidimensional, es una región sólida tal que sus pixeles están dados por una desigualdad de la forma*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

donde a y b son las coordenadas del centro y r es el radio. Un **arco circular digital** es un subconjunto conexo de la frontera de un disco digital.

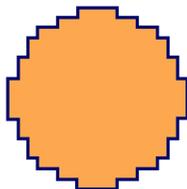


Figura 11: Disco digital correspondiente a $x^2 + y^2 < 75$.

Definición 4.12 ([13] La distancia en los complejos celulares cartesianos). *Dado que los complejos celulares cartesianos están dotados de coordenadas, esto permite definir en ellos una métrica utilizando la misma fórmula con la que se define la distancia euclídeana en \mathbb{R}^n .*

$$D(u, v) = D((u_i), (v_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$$

Sin embargo, con esta métrica, la mínima distancia positiva en un complejo celular cartesiano es igual a $1/2$ y, por lo tanto, la topología que induce esta métrica en dichos espacios es la topología discreta, no la topología de Alexandrov inducida por la relación de enmarcamiento, que es la que se usa para definir la conexidad en los complejos celulares.

Con frecuencia, las imágenes digitales que representan gráficas de funciones entre intervalos reales requieren columnas verticales de dos o más píxeles en las partes de la gráfica donde la pendiente de la función es muy elevada. Esto hace preferible utilizar relaciones en vez de funciones para definir el concepto de mapeo entre complejos celulares abstractos.

Definición 4.13 ([13] Mapeos entre complejos celulares). *Si $C_1 = (X, E_1, d_1)$ y $C_2 = (Y, E_2, d_2)$ son complejos celulares abstractos, un **mapeo** $F : C_1 \rightarrow C_2$ es una relación $F \subseteq X \times Y$ que contiene al menos una pareja (x, y) para cada celda $x \in X$. Un mapeo $F : C_1 \rightarrow C_2$ se llama **continuo** si, dado $A \subseteq Y$ abierto en C_2 , su preimagen $F^{-1}(A)$ es abierta en C_1 . Se dice que $F : C_1 \rightarrow C_2$ **preserva la conectividad** cuando $F(A)$ es conexo en C_2 para todo $A \subseteq X$ que sea conexo en C_1 .*

En la figura 12 se muestra un mapeo $F : L_5 \rightarrow L_5$ que se puede usar

para dar una representación digital de la función $f(x) = 6 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq 5$. El mapeo F consta de 15 celdas pertenecientes a $L_5 \times L_5$.

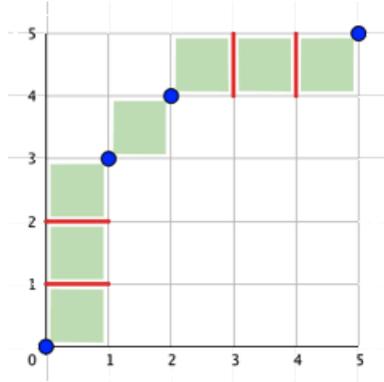


Figura 12: Mapeo $F : L_5 \rightarrow L_5$ representando a una función.

Las coordenadas de las celdas del mapeo F son las siguientes.

Celdas	Coordenadas
Puntos	$(0, 0), (1, 3), (2, 4), (5, 5)$.
Segmentos	$\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(3, \frac{9}{2}\right), \left(4, \frac{9}{2}\right)$.
Pixeles	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Cuadro 2: El mapeo F dado como conjunto de parejas ordenadas.

Al modificar imágenes digitales mediante transformaciones tales como rotaciones, es posible introducir algunas distorsiones en la imagen resultante con respecto a la original. El concepto de *n-isomorfismo*, que se define a continuación, tiene por objetivo dar una forma aproximada de cuantificar la magnitud de este tipo de distorsiones. Para esto, se necesita establecer primero el concepto de *vecindad n-ésima* de una celda. Dado que la topología de un complejo celular (X, E, d) es de Alexandrov, tiene sentido hablar no solamente de la vecindad mínima $N(x)$ de un punto $x \in X$, sino también de la vecindad mínima de un subconjunto $A \subseteq X$, a la que denotamos similarmente por $N(A)$. Con esta notación podemos enunciar la definición siguiente.

Definición 4.14 ([13] Vecindad n -ésima de una celda). Sea (X, E, d) un complejo celular abstracto. Si $c \in X$ y $n \in \mathbb{N}_0$, la **vecindad n -ésima** de c , denotada por $U_n(c)$, se define por inducción, como $U_n(c) = N(c)$ para $n = 0$ y $U_{n+1}(c) = N(\text{cl } U_n(c))$ para $n > 0$.

Definición 4.15 ([13] n -isomorfismo). Sea $F : C_1 \rightarrow C_2$ un mapeo entre dos complejos celulares finitos y sea $n \in \mathbb{N}$. El mapeo F se llama **n -isomorfismo** si para cualesquiera $(x, a), (y, b) \in F$ se cumplen, (i) $y \in U_0(x) \Rightarrow b \in U_n(a)$ y (ii) $b \in U_0(a) \Rightarrow y \in U_n(x)$.

La idea intuitiva es que un n -isomorfismo no debe, por una parte, separar demasiado (en el codominio) a las imágenes de celdas que estén muy cercanas en el dominio. Por otra parte, tampoco debe acercarse demasiado (en el codominio) a las imágenes de celdas que están muy alejadas en el dominio.

Agradecimiento

Los autores le agradecemos al árbitro por haber realizado una revisión bastante minuciosa de este trabajo, contribuyendo con sus valiosas observaciones a una mayor claridad del mismo y preservando así la alta calidad de esta serie de publicaciones Matemáticas y sus Aplicaciones.

Bibliografía

- [1] P. Alexandroff, *Diskrete Räume. Mat. Sb. (N.S.)*, 2(44), Number 3 :501-518, 1937.
- [2] A. B. Amor, S. Lazaar, T. Richmond y H. Sabri, *k-primal spaces. Topology Appl.*, 309, 2022.
- [3] F. G. Arenas, *Alexandroff spaces. Acta Math. Univ. Comenian.*, 68(1): 17-25, 1999.
- [4] W. Asness, *A brief overview of Alexandrov spaces*. The University of Chicago Mathematics REU, mayo de 2018.
- [5] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. Colloquium Publications, Volume XXV. Revised edition. American Mathematical Society, New York, 1948.

- [6] A. S. Davis. *Indexed Systems of Neighborhoods for General Topological Spaces*. *Amer. Math. Monthly*, 68(9): 886–893, 1961.
- [7] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [8] P. Fletcher y W. F. Lindgren. *Quasi-uniform spaces*. Marcel Dekker, Inc., 1982.
- [9] J. Goubault-Larrecq. *Non-Hausdorff topology and domain theory*. New Mathematical Monographs, 22. First edition. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 2013.
- [10] B. Honari y Y. Bahrampour. *Cut-point spaces*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(9): 2797–2803, 1999.
- [11] E. Khalimsky, R. Kopperman y P. R. Meyer. *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*. *Topology Appl.*, 36: 1–17, 1990.
- [12] R. D. Kopperman y R. G. Wilson. *Finite approximation of compact Hausdorff spaces*. *Topology Proc.*, 22: 175–200, 1997.
- [13] V. A. Kovalevsky. *Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes*. Proceedings of the Third International Colloquium "Discrete Geometry for Computer Imagery" (DGCI'93), pp. 259–284, University of Strasbourg, France, 1993.
- [14] V. A. Kovalevsky. *Finite topology as applied to image analysis*. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(2): 141–161, 1989.
- [15] R. Lidl y G. Pilz. *Applied abstract algebra*. Undergraduate texts in Mathematics. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.
- [16] E. Minguzzi. *Quasi-pseudo-metrization of topological preordered spaces*. *Topology Appl.*, 159: 2888–2898, 2012.
- [17] F. Nakaoka y N. Oda. *Some applications of minimal open sets*. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 27: Article ID 784531, 2001.
- [18] T. A. Richmond. *General Topology: an introduction*. De Gruyter Textbook. De Gruyter, 2020.

-
- [19] A. Rosenfeld. *Digital Topology. Amer. Math. Monthly*, 86(8): 621–630, 1979.
- [20] F. Shirazi y N. Golestani. *Functional Alexandroff Spaces. Hacet. J. Math. Stat.*, 40(4): 515–522, 2011.
- [21] E. Steinitz. *Beiträge zur Analysis situs. Sitzungsberichte der Berliner Mathematische Gesellschaft*, 7: 29–49, 1908.
- [22] R. E. Stong, *Finite topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc.*, 123: 325–340, 1966.

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Carretera a Acatlima, km 2.5, Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69000.

numeronatural@gs.utm.mx [Castañeda Roldán N. C.]

jmhm@mixteco.utm.mx [Hernández Morales J. M.]

Capítulo 6

Unicidad del n -ésimo producto simétrico para continuos alambrados

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera
Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se estudia la unicidad del n -ésimo producto simétrico, para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$; para la clase de los continuos alambrados.

1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dado un continuo X , un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos de X . Los hiperespacios que se estudian en este trabajo son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es un cerrado de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

La familia 2^X es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de X , y $C_1(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X . Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n -ésimo producto simétrico de X y fue introducido en 1931, por K. Borsuk y S. M. Ulam [2]. Note que, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X , y se puede ver que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

Dado un continuo X , sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$. Decimos que un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$, si para cualquier continuo Y tal

que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . Una clase de continuos C tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ si para cada continuo $X \in C$, se tiene que X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$.

En la sección 3, se expone el concepto de continuo alambrado y se dan algunos ejemplos. En la sección 4, se enuncian y prueban, algunos resultados que serán de utilidad para probar la unicidad. En la sección 5, se prueba que los continuos alambrados tienen n -ésimo producto simétrico único, véase Teorema 5.7.

2 Preliminares

Dado un continuo X denotaremos por d a la métrica de X . Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en a y de radio ε , se denota por $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Para cualquier $A \subset X$ y $\delta > 0$ definimos la **nube** de radio δ alrededor de A , como $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \delta)$. La métrica d en X induce una métrica en 2^X , que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$.

Teorema 2.1. [9, Teorema 4.2] *Sea X un continuo. La función H es una métrica para 2^X .*

Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff H . Dado un continuo X , en [7, Corolario 14.10] se prueba que $(2^X, H)$ es un continuo. Decimos que $X \approx Y$ cuando X es homeomorfo a Y . En este trabajo \mathbb{R}^n se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

Sean X un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ y A_1, \dots, A_r subconjuntos no vacíos de X . El **vietórico** de A_1, \dots, A_r , denotado por $\langle A_1, \dots, A_r \rangle_n$ es el conjunto $\langle A_1, \dots, A_r \rangle \cap F_n(X)$, donde $\langle A_1, \dots, A_r \rangle$ es el conjunto

$$\left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

Teorema 2.2. [9, Teorema 4.5] *Si X es un continuo con una topología τ , entonces la colección $\{\langle S_1, \dots, S_r \rangle_{n2^X} : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}\}$, es una base para la topología para 2^X .*

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 2.2 es conocida como la **topología de Vietoris**. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$ y $U_1, \dots, U_m \subset X$. Definimos

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap F_n(X).$$

Lema 2.3. *Sea X un espacio topológico localmente conexo. Si C es una componente de X , entonces C es localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in C$ y V un subconjunto abierto de X tal que $x \in V \cap C$. Como X es localmente conexo, existe U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U \subset V$. Note que $x \in U \cap C$, esto implica que $U \cup C$ es conexo, por ende $U \subset C$, así existe un subconjunto U abierto y conexo de C tal que $x \in U \subset V \cap C$. Por lo tanto, C es localmente conexo. \square

Lema 2.4. *[4, Lema 1] Sean X un continuo y C_1, \dots, C_m subconjuntos conexos de X . Si $m \leq n$, entonces el conjunto $\langle C_1, \dots, C_m \rangle$ es un subconjunto conexo de $F_n(X)$.*

Sea $\mathcal{F}(X) = \{A \subset X : A \text{ es finito}\}$, es claro que $\mathcal{F}(X) \subset 2^X$, por lo que podemos considerarlo con las métrica de Hausdorff.

Lema 2.5. *[12, Lema 2.2] Sea X un espacio métrico y compacto. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(X)$ es compacto y localmente conexo. Entonces $\cup \mathcal{M} \subset X$ es compacto y localmente conexo.*

3 Continuos alambrados

En esta sección se presenta el concepto de continuo alambrado, exponiendo algunos ejemplos. También, se prueba que $\langle I \rangle_n$ es arco conexo, cuando I es un subintervalo de \mathbb{R} , véase Teorema 3.5.

Definición 3.1. *Sea X un continuo. Un **alambre** en X es un subconjunto α de X tal que α es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ o S^1 y α es una componente de un subconjunto abierto de X .*

El siguiente Teorema es de utilidad en repetidas ocasiones en este trabajo, se enuncia a continuación y es conocido como el Teorema de golpes en la frontera.

Teorema 3.2. [9, Teorema 5.6] Si X es un continuo, E un subconjunto propio no vacío de X y K una componente de E , entonces $\text{cl}_X(K) \cap \text{Fr}_X(E) \neq \emptyset$.

Note que, esto implica que $\text{cl}_X(K) \cap \text{cl}_X(X - E) \neq \emptyset$. Con el Teorema 3.2 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Sean X es un continuo y α un alambre en X . Si α es compacto, entonces $\alpha = X$.

Demostración. Sea α un alambre compacto en X , es decir, α es homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 , note que α es cerrado en X . Por ser un alambre, existe un subconjunto abierto U de X tal que α es una componente de U . Probaremos que $U = X$, ya que esto implica que α es una componente de X y como X es conexo, se tendría que $X = \alpha$. Supongamos que $U \neq X$, es decir, U es un subconjunto propio de X . Por el Teorema 3.2, se cumple que $\text{cl}_X(\alpha) \cap \text{Fr}_X(U) \neq \emptyset$, es decir, $\alpha \cap \text{Fr}_X(U) \neq \emptyset$. Dado que U es abierto, se cumple que $\text{Fr}_X(U) \subset (X - U)$, esto implica que $\alpha \cap (X - U) \neq \emptyset$, lo cual es imposible ya que $\alpha \subset U$. Por lo tanto, $U = X$ y así $\alpha = X$. \square

Corolario 3.4. Si un alambre α en un continuo X es homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 , entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Para lo que resta del capítulo, por lo anterior y por el Teorema (donde diga que para el arco y la curva cerrada si es rígido), consideramos que X no es un arco o una curva cerrada simple, es decir, los alambres en X siempre serán homeomorfos a $(0, 1)$ y $[0, 1)$.

Teorema 3.5. Sean X un continuo, $I \subset X$ homeomorfo a un subintervalo de \mathbb{R} y $n \in \mathbb{N}$. Si $A, B \in \langle I \rangle_n$ y $|A| = |B| = m$, con $m \leq n$ entonces existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \langle I \rangle_n$ que cumple lo siguiente:

- $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,
- $|\alpha(t)| = m$ para toda $t \in [0, 1]$.

Demostración. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Sean $C \subset \mathbb{R}$ un subintervalo y $g : C \rightarrow I$ un homeomorfismo. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean $r_{ai}, r_{bi} \in C$ tales que $g(r_{ai}) = a_i$ y $g(r_{bi}) = b_i$. Podemos suponer sin perder generalidad, que $r_{ai} < r_{aj}$ y $r_{bi} < r_{bj}$ cuando $i < j$.

Sea $T_i \subset C$ el intervalo con puntos extremos r_{a_i} y r_{b_i} . Definimos, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, la función $f_i : [0, 1] \rightarrow T_i$ tal que $f_i(t) = tr_{b_i} + (1-t)r_{a_i}$.

Note que, si $r_{a_i} = r_{b_i}$, entonces f_i es una función constante. En cualquier caso, f_i es una función continua. Dados $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ con $i \neq j$ y $t \in [0, 1]$, veamos que $f_i(t) \neq f_j(t)$. Supongamos que $f_i(t) = f_j(t)$, note que $t \notin \{0, 1\}$. Podemos suponer que $j > i$, luego se cumple que $r_{a_j} > r_{a_i}$ y $r_{b_j} > r_{b_i}$. Por otro lado, $tr_{b_i} + (1-t)r_{a_i} = tr_{b_j} + (1-t)r_{a_j}$, así que, $t((r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})) = r_{a_i} - r_{a_j}$, como $r_{a_j} \neq r_{a_i}$ entonces $(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j}) \neq 0$ y podemos despejar t , obteniendo

$$t = \frac{r_{a_i} - r_{a_j}}{(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})}.$$

Dado que $0 > r_{a_i} - r_{a_j}$ y $0 < t$ se tiene que $(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j}) < 0$, como $t < 1$ al despejar el denominador de la representación de t se tiene que, $r_{a_i} - r_{a_j} > (r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})$, esto implica que $0 > r_{b_j} - r_{b_i}$, es decir, $r_{b_i} > r_{b_j}$ lo cual es una contradicción.

Si definimos $g_i : [0, 1] \rightarrow I$ por $g_i(t) = (g \circ f_i)(t)$, se cumple que g_i es continua. Consideremos la función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \langle I \rangle_n$ definida por $\alpha(t) = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)\}$ para cada $t \in [0, 1]$. Veamos que α es continua. Sean $t_0 \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$, dado $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ como g_i es continua en t_0 existe $\delta_i > 0$ tal que para cada $t \in (t_0 - \delta_i, t_0 + \delta_i) \cap [0, 1]$, se cumple que $d(g_i(t), g_i(t_0)) < \varepsilon$, esto se cumple para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, dado $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, entonces $d(g_i(t), g_i(t_0)) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Así, $\alpha(t_0) \subset N(\alpha(t), \varepsilon)$ y $\alpha(t) \subset N(\alpha(t_0), \varepsilon)$ para cada $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, esto implica que $H(\alpha(t), \alpha(t_0)) < \varepsilon$, es decir, α es continua en t_0 y por ende es continua en $[0, 1]$.

Note que, $\alpha(0) = \{g_1(0), g_2(0), \dots, g_m(0)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} = A$ y $\alpha(1) = \{g_1(1), g_2(1), \dots, g_m(1)\} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} = B$, además dados $t \in (0, 1)$ y $i \neq j$, se cumple que $f_i(t) \neq f_j(t)$ y como g es un homeomorfismo, entonces $g_i(t) \neq g_j(t)$ esto implica que $|\alpha(t)| = m$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. \square

Corolario 3.6. Sean X un continuo, $I \subset X$ homeomorfo a un subintervalo de \mathbb{R} y $n \in \mathbb{N}$. Si $A, B \in \langle I \rangle_n$ y $|A| = |B| = m$, con $m \leq n$ entonces existe un arco \mathcal{A} contenido en $\langle I \rangle_n$ con puntos extremos A y B ; además si $C \in \mathcal{A}$, entonces $|C| = m$.

Demostración. Por el teorema 3.5 existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \langle I \rangle_n$ que cumple lo siguiente:

- $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,
- $|\alpha(t)| = m$ para toda $t \in [0, 1]$.

Note que todo elemento en $\alpha([0, 1])$ tiene cardinalidad m . Como $[0, 1]$ es localmente conexo y α es continua, entonces se cumple por [9, Teorema 8.18] que $\alpha([0, 1])$ es localmente conexo. Por el Teorema 4.4, $\alpha([0, 1])$ es arco conexo. Así, existe un arco \mathcal{A} en $\alpha([0, 1]) \subset \langle I \rangle_n$ con puntos extremos A, B y si $C \in \mathcal{A}$, entonces $|C| = m$. \square

Definición 3.7. Si X es un continuo, definimos el subconjunto $W(X)$ de X como:

$$W(X) = \bigcup \{ \alpha \subset X : \alpha \text{ es un alambre en } X \}.$$

El continuo X es **alambrado** si $W(X)$ es denso en X , es decir, $\text{cl}_X(W(X)) = X$.

Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, en esta sección se exponen algunos resultados necesarios para este trabajo. Un **ciclo** en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto de X , para algún $a \in J$. Un **arco libre** en X es un arco α en X con puntos extremos p y q tales que $\alpha - \{p, q\}$ es abierto en X . Un **arco libre maximal** en X es un arco libre en X que es maximal, con respecto a la inclusión.

Note que si α es un arco libre en un continuo X , donde a, b son los puntos extremos de α , entonces $\alpha - \{a, b\}$ es un alambre en X . Así, un continuo en el cual la unión de sus arcos libres es denso, es un continuo alambrado.

Por ende, las clases de continuos alambrados contiene a las siguientes clases de continuos: gráficas finitas, dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, casi enrejados, compactaciones del rayo $[0, \infty)$.

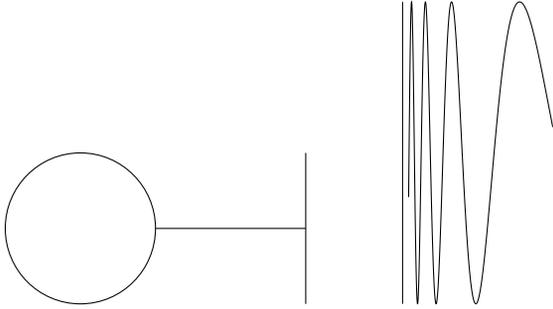


Figura 1: Gráfica finita y compactación de rayo $[0, \infty)$.

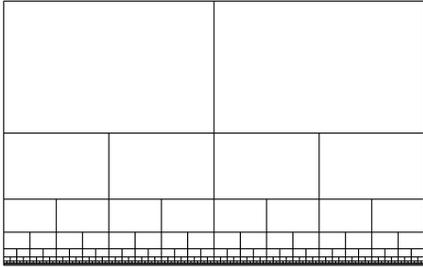


Figura 2: Continuo casi enrejado.

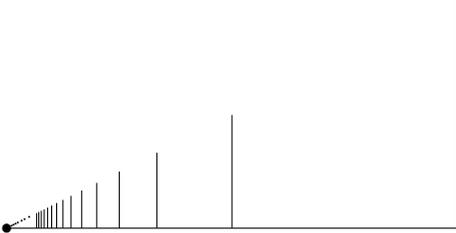


Figura 3: Dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado.

4 Algunos resultados

En esta sección se presentan las pruebas de algunos resultados, que son de ayuda en repetidas ocasiones a lo largo de este trabajo, véase Teorema 4.3 y Teorema 4.7.

Lema 4.1. [5, Lema 2.1] Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{B} un subconjunto conexo de 2^X tal que $\mathcal{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Entonces $\cup \mathcal{B}$ tiene a lo más n componentes.

Lema 4.2. [5, Lema 2.2] Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{B} un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{B} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Entonces $\cup \mathcal{B} \in C_n(X)$.

Lema 4.3. Sean X un continuo y \mathcal{A} un subconjunto conexo de 2^X tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $A_0 = \cup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces

1. A_0 tiene a lo más n componentes,
2. si \mathcal{A} es cerrado en 2^X , entonces $A_0 \in C_n(X)$,
3. para cada $A \in \mathcal{A}$, A interseca a cada componente de A_0 .

Demostración. Las pruebas de 1) y 2) son consecuencia de los Lemas 4.1 y 4.2, respectivamente.

Para 3. de 1. sabemos que A_0 tiene a lo más n componentes. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$ y A_1, \dots, A_m las componentes de A_0 . Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \subset A_0$. Supongamos que A no interseca a todas las componentes de A_0 . Supongamos sin perder generalidad que $A \cap A_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \dots, l\}$ y $A \cap A_i = \emptyset$ para $i \in \{l+1, \dots, m\}$, para algún $l \in \{1, \dots, m-1\}$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{K} = \{C \in \mathcal{A} : C \subset \bigcup_{i=1}^l A_i\}$$

y

$$\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{A} : C \cap (\bigcup_{i=l+1}^m A_i) \neq \emptyset\}.$$

Note que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ya que $A \in \mathcal{K}$. Para ver que \mathcal{L} es no vacío, tomemos $p \in A_{l+1} \subset A_0$, entonces existe $A_p \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_p$, luego $p \in A_p \cap A_{l+1}$. Así, $A_p \in \mathcal{L}$.

Es claro que, $\mathcal{K} \cup \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. Sea $B \in \mathcal{A}$, entonces $B \subset A_0 = \bigcup_{i=1}^l A_i \cup \bigcup_{i=l+1}^m A_i$.

Esto implica que $B \in \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. En la demostración del Lema 4.1 se prueba que $\text{cl}_{2X}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{cl}_{2X}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K} = \emptyset$, es decir, que son separados. Lo cual contradice el hecho de que \mathcal{A} es conexo. Por lo tanto, A intersecta a todas las componentes de A_0 . \square

Los siguientes dos Teoremas son resultados bien conocidos, sobre continuos localmente conexos.

Teorema 4.4. [9, Teorema 8.23] *Todo continuo no degenerado, localmente conexo es arco conexo.*

Teorema 4.5. [9, Teorema 8.26] *Sea X un continuo localmente conexo. Si $U \subset X$ es abierto y conexo, entonces U es arco conexo.*

Un triodo simple es un continuo T que es la unión de tres arcos I_1, I_2 , y I_3 tales que $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \{p\}$, donde p es un punto extremo de cada arco I_i , y $(I_i - \{p\}) \cap (I_j - \{p\}) = \emptyset$, si $i \neq j$. El punto p es llamado el vértice de T .

Lema 4.6. *Sean X un continuo localmente conexo, $p, q, r \in X$ puntos distintos y $\alpha_1 \subset X - \{q\}$, $\alpha_2 \subset X - \{p\}$ arcos cuyos puntos finales son r, p y r, q respectivamente. Si $|\alpha_1 \cap \alpha_2| \geq 2$, entonces X contiene un triodo simple.*

Demostración. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ dos encajes tales que $f(0) = r = g(0)$, $f(1) = p$, $g(1) = q$ y $f([0, 1]) = \alpha_1$, $g([0, 1]) = \alpha_2$. Consideremos $T = \{t \in (0, 1) : f(t) \in \alpha_2\}$, como $|\alpha_1 \cap \alpha_2| \geq 2$ entonces, existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) \in \alpha_2$, por ende $T \neq \emptyset$. Como T es acotado, existe $t_0 = \sup T$. Note que $t_0 \in (0, 1]$.

Veamos que $t_0 \in T$. Supongamos que $t_0 \notin T$. Entonces $f(t_0) \notin \alpha_2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, f(t_0)) \cap \alpha_2 = \emptyset$. Como α_1 es un arco es localmente conexo y dado que $B(\varepsilon, f(t_0)) \cap \alpha_1$ es un subconjunto abierto de α_1 , existe $U \subset B(\varepsilon, f(t_0)) \cap \alpha_1$ abierto, conexo y no degenerado, tal que $f(t_0) \in U$, cabe resaltar que $U \cap \alpha_2 = \emptyset$. Note que $f^{-1}(U) \subset [0, 1]$ es abierto, conexo y no degenerado. Por lo tanto $f^{-1}(U)$ es un subintervalo abierto de $[0, 1]$ tal que

$t_0 \in f^{-1}(U)$. Como $r \notin U$ existen $w, z \in (0, 1]$ tal que $f^{-1}(U)$ es igual a (w, z) o $(w, z]$, en ambos casos, dado que $t_0 = \sup(T)$ existe $t' \in f^{-1}(U) \cap T$, así $f(t') \in U \cap \alpha_2$ lo cual es una contradicción. Por lo que $t_0 \in T$.

Finalmente, podemos tomar $t_1 \in (0, 1)$ tal que $g(t_1) = f(t_0)$. Consideremos los subarcos, $\beta_1 = g([0, t_1])$, $\beta_2 = g([t_1, 1])$ y $\beta_3 = f([t_0, 1])$ contenidos en X , note que $f(t_0)$ es punto extremo de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Del hecho de que g es un encaje y de la de las propiedades de t_0 , se cumple que $\beta_1 \cap \beta_2 \cap \beta_3 = \{f(t_0)\}$, además $(\beta_i - \{f(p_0)\}) \cap (\beta_j - \{f(p_0)\}) = \emptyset$, cuando $i \neq j$. Por lo tanto $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 \subset X$ es un tríodo simple. \square

El siguiente Teorema será de utilidad en la demostración del Teorema 5.2, y es consecuencia de los Teoremas 4.4 y 4.5.

Teorema 4.7. *Sea X un continuo localmente conexo, no degenerado. Si X no contiene un tríodo simple, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Sean $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Supongamos que $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ son conexos, en caso contrario podemos aplicar [9, Teorema 6.6] para encontrar dichos $p, q \in X$. Por el Teorema 4.4 existe $\alpha \subset X$ un arco cuyos puntos finales son p, q . Si $X = \alpha$, entonces X es un arco. Supongamos que $X \neq \alpha$. Tomemos $r \in X - \alpha$, note que $r \neq p$ y $r \neq q$. Como $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ son subconjuntos abiertos y conexos de X , por el Teorema 4.5, existen $\alpha_1 \subset X - \{q\}$ y $\alpha_2 \subset X - \{p\}$ arcos que tienen como puntos finales p, r y q, r , respectivamente.

Como $\alpha \subset X - \{r\}$, por el Lema 4.6, se cumple que $\alpha \cap \alpha_1 = \{p\}$, $\alpha \cap \alpha_2 = \{q\}$ y $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{r\}$. Esto implica que $\beta = \alpha_1 \cup \alpha_2$ es un arco cuyos puntos finales son p, q . De esta manera $S = \alpha \cup \beta$ es la unión de dos arcos tales que $\alpha \cap \beta = \{p, q\}$, es decir, S es una curva cerrada simple. Veamos que $X = S$.

Supongamos que existe $y \in X - S$, por el Teorema 4.5 existe un arco $\gamma \subset X - \{q\}$ con puntos finales p, y . Veamos que $\gamma \cap S = \{p\}$. Como $\alpha \subset X - \{y\}$ y sus puntos finales son p, q , por el Lema 4.6 se debe cumplir que $\gamma \cap \alpha = \{p\}$. Por otro lado, note que $\beta \subset X - \{y\}$ es un arco con puntos finales p, q , por el Lema 4.6, se debe cumplir que $\beta \cap \gamma = \{p\}$. Por ende, $\gamma \cap S = \{p\}$. De lo anterior, $\gamma \cup \alpha \subset X - \{r\}$ es un arco cuyos puntos finales son y, q y $\gamma \cup \alpha_1 \subset X - \{q\}$ es un arco cuyos puntos finales son y, r . Como $\gamma \subset (\gamma \cup \alpha) \cap (\gamma \cup \alpha_1)$, por el Lema 4.6 se debe cumplir que $|\gamma| \leq 1$, lo cual es imposible. Por lo tanto $X = S$. \square

5 Unicidad

En esta sección se estudia la unicidad del n -ésimo producto simétrico, para la clase de los continuos alambrados y $n \geq 4$. Para ello, se prueba que si $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(F_1(X)) = h(F_1(Y))$, cuando X es un continuo alambrado y Y es cualquier continuo, véase Teorema 5.7.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, definamos la siguiente colección de $F_n(X)$.

$$\mathcal{G}_n(X) = \{A \in F_n(X) : \text{existe una vecindad } \mathcal{M} \text{ de } A \text{ en } F_n(X)$$

tal que la componente \mathcal{C} de \mathcal{M} que contiene a A es una n -celda}.

A continuación se exponen propiedades de esta colección.

Lema 5.1. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Para $A \in \mathcal{G}_n(X)$, existe \mathcal{C}_1 , una n -celda, tal que $A \in \mathcal{C}_1 \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$.*

Demostración. Tomemos $A \in \mathcal{G}_n(X)$. Sea \mathcal{M} la vecindad de A en $F_n(X)$ tal que la componente \mathcal{C} de \mathcal{M} que contiene a A es una n -celda. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{C} - \text{Fr}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$, note que $A \in \mathcal{F}$, esto ya que $A \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{C}$, como \mathcal{F} es un subconjunto abierto de \mathcal{C} , podemos tomar \mathcal{C}_1 una n -celda tal que $A \in \text{int}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, se cumple que $\mathcal{F} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$, por lo tanto, $\mathcal{C}_1 \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. \square

Teorema 5.2. *Sean X un continuo y $n \geq 2$. Entonces*

1. $\mathcal{G}_n(X) \subset \{A \in F_n(X) : A \subset W(X)\}$,
2. si $n \geq 4$, entonces $\mathcal{G}_n(X) \subset \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \subset W(X)\}$,
3. $\{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \subset W(X)\} \subset \mathcal{G}_n(X)$.

Demostración. Denotemos por d a la métrica en X .

- (1) Tomemos $A \in \mathcal{G}_n(X)$. Sea \mathcal{M} la vecindad de A en $F_n(X)$ tal que la componente \mathcal{C} de \mathcal{M} que contiene a A es una n -celda. Sea \mathcal{C}_1 la n -celda del Lema 5.1. De la prueba del Lema 5.1 se puede ver que $A \in \text{int}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_H(A, \delta) \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1$. Por las hipótesis que tenemos, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \delta$,

- (a) $B_H(A, 2\varepsilon) \cap F_n(X) \subset \mathcal{M}$,
- (b) $N_{F_n(X)}(\mathcal{C}_1, \varepsilon) \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$ y
- (c) $\varepsilon < \text{diám}(X)$.

Sea \mathcal{C}_0 la componente de $\text{cl}_{F_n(X)}(B_H(A, \varepsilon)) \subset \mathcal{M}$ que contiene a A . Como $\varepsilon < \delta$ se cumple que $\mathcal{C}_0 \subset \text{cl}_{F_n(X)}(B_H(A, \varepsilon)) \subset B_H(A, \delta)$, por (a) se cumple que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$, por ende $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} \cap B_H(A, \delta)$. Así, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$. Sea $E = \cup\{B : B \in \mathcal{C}_1\}$. Como \mathcal{C}_1 es homeomorfo a una n -celda, se cumple que \mathcal{C}_1 es compacto y localmente conexo, luego por el Lema 2.5, E es compacto y localmente conexo. A su vez, como $A \in C_n(X) \cap \mathcal{C}_1$ por el Lema 2.5 se tiene que E tiene a lo más n componentes. Sea $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$, donde $m \leq n$ y E_i son las diferentes componentes de E . Por el Lema 5.1 se cumple que $A \cap E_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Afirmación 1. Cada E_i es no degenerado.

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $a \in A \cap E_i$, consideremos C_a la componente de $B(\frac{\varepsilon}{2}, a)$ que contiene a a . Por el Teorema 3.2 se cumple que $\text{cl}_X(C_a) \cap \text{Fr}_X(B(\frac{\varepsilon}{2}, a)) \neq \emptyset$, esto implica que $C_a \neq \{a\}$, veamos que $C_a \subset E$. Consideremos $\mathcal{C}_a = \{(A - \{a\}) \cup \{x\} : x \in C_a\} \subset F_n(X)$. Note que \mathcal{C}_a es no degenerado, ya que C_a es no degenerado. Además, $A \in \mathcal{C}_a$ y como $C_a \subset B(\frac{\varepsilon}{2}, a)$ se tiene que $\mathcal{C}_a \subset B_H(\varepsilon, A)$. Y por el Lema 2.4 se tiene que \mathcal{C}_a es conexo. Esto implica que $\mathcal{C}_a \subset \mathcal{C}_0$. Dado que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$ y de como de definición \mathcal{C}_a se cumplen las siguientes contenciones, $C_a \subset \cup\{B : B \in \mathcal{C}_a\} \subset E$. Dado que, $E_i \cap C_a \neq \emptyset$ y C_a es un subconjunto conexo de E , se cumple que $C_a \subset E_i$. Como C_a es no degenerado, entonces E_i es no degenerado.

Observación 1. Como E es compacto se cumple que E_i es compacto y por ende es un subcontinuo de X . A su vez, por el Lema 2.3 se cumple que E_i es localmente conexo, esto para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Así, por el Lema 4.4, E_i es arco conexo para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Afirmación 2. E no contiene triodos simples.

Supongamos que E contiene un tríodo simple. Podemos suponer sin perder generalidad que E_1 contiene un tríodo simple $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, con vértice v y cada L_i es un arco. Como $v \in E$, existe $B \in \mathcal{C}_1$ tal

que $v \in B$. Digamos que $B = \{v, b_1, \dots, b_r\}$ con $r \leq n$. Como $B \subset E$ por la Observación 1, para cada $i \in \{2, \dots, r\}$ podemos tomar $\alpha_i \subset E$ un arco tal que, $b_i \in \alpha_i$, $\text{diám}(\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Cortando T se ser necesario, podemos obtener $T_1 \subset T$ un tríodo simple tal que $\text{diám}(T_1) < \varepsilon$ y $T_1 \cap \alpha_i = \emptyset$ para toda $i \in \{2, \dots, r\}$.

Sea $\mathcal{D}_0 = \langle T_1, \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle$. Note que $B \in \mathcal{D}_0 \subset B_H(B, \varepsilon)$. Dado que $B \in \mathcal{C}_1$ y por b), se cumplen las siguientes contenciones $B_H(\varepsilon, B) \subset N_{F_n(X)}(\mathcal{C}_1, \varepsilon) \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$ así, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{M}$. Como $B \in \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, por el Lema 2.4 \mathcal{D}_0 es conexo, esto implica que $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}^*$.

Si $r < n$, tomamos subarcos ajenos por pares $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ tales que $\alpha_i \subset T_1 \cap (L_1 - \{v\})$ para toda $i \in \{r+1, \dots, n\}$. Consideremos $T_0 \subset T_1$ un tríodo simple tal que $T_0 \cap (\bigcup_{i=r+1}^n \alpha_i) = \emptyset$. Si $r = n$, consideremos $T_0 = T_1$.

Tomando $\mathcal{D}_1 = \langle T_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Por (*) se cumple que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}$. Note que $\mathcal{D}_1 \approx T_0 \times [0, 1]^{n-1}$, como \mathcal{C} es homeomorfo a una n -celda, se cumple que $T_0 \times [0, 1]^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ puede ser encajado en una n -celda. Esto contradice el Teorema de la invarianza del Dominio [3, Teorema VI 9]. Por lo tanto E no contiene un tríodo simple.

Tenemos que cada E_i es un subcontinuo localmente conexo, no degenerado, que no contiene un tríodo simple, entonces por el Teorema 4.7 se cumple que E_i es un arco o una curva cerrada simple.

De la prueba de la Afirmación 1, sabemos que para cada $a \in A$, la componente C_a de $B(\frac{\varepsilon}{2}, a)$ es no degenerada y cumple que $C_a \subset E$. Por ende debe existir $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $C_a \subset E_i$. Dado que E_i es un arco o una curva cerrada simple, se tiene que C_a debe ser homeomorfo a $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ o S^1 . Como $B(\frac{\varepsilon}{2}, a)$ es un subconjunto propio de X , por el Teorema 3.2 se cumple que $\text{cl}_X(C_a) \cap \text{Fr}_X(B(\frac{\varepsilon}{2}, a)) \neq \emptyset$, dado que $B(\frac{\varepsilon}{2}, a)$ abierto se tiene que C_a no es cerrado. Por ende C_a solo puede ser homeomorfo a los conjuntos $[0, 1)$, $(0, 1)$. Por lo tanto C_a es un alambre en X , de esto que $a \in W(X)$, es decir, $A \subset W(X)$.

- (2) Sea $A \in \mathcal{G}_n(X)$, tal que $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Por el inciso (1) resta probar que $m = n$. Supongamos que $m < n$. Tomando ε como en la prueba del inciso (1), para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que C_{a_i} es homeomorfo a

los conjuntos $(0, 1)$ o $[0, 1)$, por lo que podemos tomar para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ un arco $\beta_i \subset C_{a_i}$ que cumpla lo siguiente: $a_i \in \beta_i$, $\text{diám}(\beta_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta_i \cap \beta_j \neq \emptyset$ cuando $i \neq j$.

Si $m < n - 1$, tomemos $n - m - 1$ puntos distintos en $\beta_1 - \{a_1\}$. Para cada $j \in \{m + 1, \dots, n - 1\}$ tomemos un arco $\beta_j \subset \beta_1 - \{a_1\}$ tal que $a_j \in \beta_j$, $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$ y $a_1 \notin \bigcup_{j=m+1}^{n-1} \beta_j$. También tomemos

un arco $\beta'_1 \subset \beta_1 - \left(\bigcup_{j=m+1}^{n-1} \beta_j \right)$ tal que $a_i \in \beta'_1$.

Sea $D = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Consideremos $\mathcal{E}_0 = \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ y $\mathcal{E} = \langle \beta'_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1} \rangle$. Es claro que $A \in \mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0$ (si $n - 1 = m$ entonces $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$). Note que $\mathcal{E}_0 \subset B_H(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y por (a) se cumple que $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{M}$. Por el Lema 2.4, \mathcal{E}_0 es conexo, esto implica que $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{C}$ y por ende $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ (***).

Para cada $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, definamos

$$\phi_i : F_2(\beta_i) \times \beta'_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_{i-1} \times \beta_{i+1} \times \dots \times \beta_{n-1} \rightarrow \mathcal{E}$$

por $\phi_i(R, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) = R \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}\}$. Para $i = 1$ definamos

$$\phi_1 : F_2(\beta_2) \times \beta'_1 \times \beta_3 \times \beta_4 \times \dots \times \beta_{n-1} \rightarrow \mathcal{E}$$

por $\phi_i(R, x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}) = R \cup \{x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}\}$. Note que cada ϕ_i es un encaje. Dado que B_i son arcos ajenos dos a dos y como $F_2(B_i)$ es homeomorfo a una 2-celda ([8, Sección 13]), entonces $\text{Im } \phi_i$ es homeomorfo a una n -celda.

Veamos que si $i \neq j$ entonces $\text{Im } \phi_i \cap \text{Im } \phi_j = \mathcal{E} \cap F_{n-1}(X)$. Sea $K \in \mathcal{E} \cap F_{n-1}(X)$, entonces podemos tomar $k_1 \in K \cap \beta'_1$ y $k_s \in K \cap \beta_s$ para $s \in \{2, \dots, n-1\}$. Por la construcción de \mathcal{E} es claro que $K = \{k_1, \dots, k_{n-1}\}$. Si $R_i = \{k_i\}$ y $R_j = \{k_j\}$, se cumple que

$$\phi_i(R_i, k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{n-1}) = \phi_j(R_j, k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_{n-1}) = K$$

Por lo tanto $K \in \text{Im } \phi_i \cap \text{Im } \phi_j$. Sea $K \in \text{Im } \phi_i \cap \text{Im } \phi_j$, entonces $K = R_i \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}\}$ y $K = R_j \cup \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}\}$, donde $R_i \subset \beta_i$ y $R_j \subset \beta_j$. Note que $|K \cap \beta_i| = 1 = |K \cap \beta_j|$ esto por en donde se toma K . De esta manera $|R_i| = 1 = |R_j|$, esto implica que $|K| = n - 1$. 'Por lo tanto se cumple la igualdad.

Como los elementos de \mathcal{E} son arcos ajenos dos a dos, se cumple que $\mathcal{E} \cap F_{n-1}(X)$ es homomorfo a una $(n - 1)$ -celda. Por lo tanto, dado que $n \geq 4$ los conjuntos $\text{Im } \phi_1, \text{Im } \phi_2, \dots, \text{Im } \phi_{n-1}$ son al menos tres n -celdas, que se intersectan en una $(n - 1)$ -celda, esto implica por el Teorema de la invarianza del Dominio [3, Teorema VI 9], que $\bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Im } \phi_i$ no puede ser encajado en una n -celda.

Por (***) y la definición de las funciones ϕ_i , se cumple que $\bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Im } \phi_i \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, como \mathcal{C} es homeomorfo a una n -celda, se llega a una contradicción. Por lo tanto $m = n$.

- (3) Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$ tal que $A \subset W(X)$. Entonces, por la definición de alambre, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sean U_i el subconjunto abierto de X tal que $a_i \in U_i$ y α_i la componente de U_i tal que $a_i \in \alpha_i$ y α_i es homeomorfo a $(0, 1)$ o $[0, 1)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B(2\varepsilon, a_i) \subset U_i$, $\text{diám}(X) > 2\varepsilon$ y $B(2\varepsilon, a_i) \cap B(2\varepsilon, a_j) = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Sea $M_i = \{x \in X : d(x, a_i) \leq \varepsilon\}$, la bola cerrada con centro en a y de radio ε . Tomemos C_i la componente de M_i tal que $a_i \in C_i$. Como M_i es cerrado, entonces C_i es un compacto. Por el Teorema 3.2 se cumple que C_i es no degenerado, ya que $a \in \text{int}_X(M_i)$. Además, dado que $C_i \subset M_i \subset U_i$, se cumple que $C_i \subset \alpha_i$, esto implica que C_i es un arco. Consideremos $\mathcal{M} = \langle M_1, \dots, M_n \rangle$ un subconjunto cerrado de $F_n(X)$ y $\mathcal{C} = \langle C_1, \dots, C_n \rangle$. Note que \mathcal{M} es una vecindad de A en $F_n(X)$ y \mathcal{C} es homeomorfo a una n -celda tal que $A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{M}$.

Veamos que \mathcal{C} es una componente de \mathcal{M} . Sea \mathcal{D} la componente de \mathcal{M} tal que $A \in \mathcal{D}$. Es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Sea $D = \cup\{E : E \in \mathcal{D}\}$, como \mathcal{D} es cerrado por el Lema 4.3, D es un subconjunto compacto de X que tiene a lo más n componentes y cada componente intersecta a A . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea D_i la componente de D tal que $a_i \in D_i$. Entonces,

como cada componente de \mathcal{D} intersecta a A se cumple que $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Veamos que $D \subset \bigcup_{i=1}^n M_i$, sea $p \in D$ existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $p \in E$, entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p \in M_i$, por ende se cumple la contención. Note que $a_i \in D_i \cap M_i$. Como $D_i \subset \bigcup_{i=1}^n M_i$ es conexo y M_1, \dots, M_n son cerrados, disjuntos por pares, entonces $D_i \subset M_i$. Esto implica que $D_i \subset C_i$, esto para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Luego, para cada $E_0 \in \mathcal{D}$, se cumple que $E_0 \subset D \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$, dado que $E_0 \cap D_i \subset E_i \cap C_i$ por el Lema 4.3 se cumple que $E_i \cap C_i \neq \emptyset$, esto implica que $E_0 \subset \mathcal{C}$, así $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, es decir, \mathcal{C} es una componente de \mathcal{M} .

Esto termina la demostración. \square

Observación 5.3. *Del Teorema 5.2, se cumple que $\mathcal{G}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \subset W(X)\}$ cuando $n \geq 4$.*

Lema 5.4. *Si X es un espacio métrico sin puntos aislados y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in U$ arbitrario, digamos $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, para algún $m \leq n$.

Caso 1. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap U$.

Caso 2. Si $m < n$, como U es abierto en $F_n(X)$, existe $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset U$. Podemos hallar $a_{m+1}, \dots, a_n \in B_X(a_1, r)$ distintos de a_1, \dots, a_m . Sea $B = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$. Como $H(A, B) < r$, se tiene que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset U$, y por tanto $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap U$.

Por lo tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$. \square

Corolario 5.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces, X es alambrado si y solo si $\mathcal{G}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Supongamos que X es alambrado. Sea U un subconjunto abierto, no vacío, de $F_n(X)$. Por el Lema 5.4 existe $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in$

$(F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, A) \subset \mathcal{U}$ y $B(\varepsilon, a_i) \cap B(\varepsilon, a_j) = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Como X es alambrado, podemos tomar $x_i \in B(\varepsilon, a_i) \cap W(X)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, por el inciso c) del Teorema 5.2 se cumple que $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{G}_n(X) \cap \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$.

Sea U un subconjunto abierto, no vacío, de X . Entonces $\langle U \rangle$ es un subconjunto abierto, no vacío, de $F_n(X)$. Podemos tomar $A \in \langle U \rangle \cap \mathcal{G}_n(X)$. Por el inciso a) del Teorema 5.2 se cumple que $A \subset W(X)$, entonces $A \subset \mathcal{U} \cap W(X)$. Por ende, $W(X)$ es denso en X . \square

Corolario 5.6. *Sean X, Y continuos y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si existe $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo entonces, X es alambrado si y solo si Y es alambrado.*

Demostración. Supongamos que existe $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo. Como $\mathcal{G}_n(X)$ está definido mediante una propiedad topológica se cumple que

$h(\mathcal{G}_n(X)) = \mathcal{G}_n(Y)$. Si X es alambrado, por el Corolario 5.5 tenemos que $\text{cl}_X(\mathcal{G}_n(X)) = F_n(X)$, entonces

$$\text{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{G}_n(Y)) = \text{cl}_{F_n(Y)}(h(\mathcal{G}_n(X))) = h(\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{G}_n(X))) = h(F_n(X)) = F_n(Y).$$

Así, por el Corolario 5.5 se cumple que Y es alambrado. De forma idéntica se prueba que si Y es alambrado, entonces X es alambrado. \square

Teorema 5.7. *Sean X un continuo alambrado, Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si existe $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo, entonces $h(F_1(X)) = F_1(Y)$.*

Demostración. Por el Corolario 5.6 se cumple que Y es alambrado. Debemos probar que $h(F_1(X)) \subset F_1(Y)$ y $h^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$. Como h es un homeomorfismo y Y es alambrado, basta con probar que $h(F_1(X)) \subset F_1(Y)$. Note que $\text{cl}_{F_n(X)}(F_1(W(X))) = F_1(X)$, por ende, como $F_1(Y)$ es un subconjunto cerrado de $F_n(Y)$, basta probar que $h(F_1(W(X))) \subset F_1(Y)$.

Sea $p \in W(X)$ entonces existe U un subconjunto abierto de X tal que la componente α de U , tal que $p \in \alpha$, es homeomorfa al intervalo $[0, 1)$ o al intervalo $(0, 1)$. Sea $B \in F_n(Y)$ tal que $h(\{p\}) = B$. Supongamos que $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ y veamos que $m = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m)$ son disjuntos por pares, esto implica que $B_H(\varepsilon, B) = \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$. Podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\text{diám}(X) > 2\delta$, $B(2\delta, p) \subset U$ y que además por la continuidad de h se cumple que, $h(B_H(2\delta, \{p\})) \subset B_H(\varepsilon, B)$. Sea β la componente de $B(\delta, p)$ tal que $p \in \beta$. Como $B(\delta, p) \subset U$ entonces $\beta \subset \alpha$. Por el Teorema 3.2 β es no degenerado y no es cerrado. Por ende β es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$ o al intervalo $(0, 1]$. Sea \mathcal{C} la componente de $B_H(\delta, \{p\})$, tal que $\{p\} \in \mathcal{C}$.

Afirmación 1. $\mathcal{C} = \langle \beta \rangle_n$.

Dado que $\{p\} \in \mathcal{C} \cap C_1(X)$ por el Lema 4.3 inciso 1., se cumple que $C = \cup\{D : D \in \mathcal{C}\}$ es un subconjunto conexo de X . Como $\mathcal{C} \subset B_H(\delta, \{p\})$, entonces $C \subset B(\delta, p)$ y dado que $p \in C$, se tiene que $C \subset \beta$. Como β es conexo, entonces $F_1(\beta) = \{\{x\} : x \in \beta\}$ es conexo. Como $\beta \subset B(\delta, p)$, entonces $F_1(\beta) \subset B_H(\delta, \{p\})$, además $\{p\} \in F_1(\beta)$, por ende, $F_1(\beta) \subset \mathcal{C}$. Esto implica que $\beta \subset C$. Por lo tanto, $\beta = C$. Dado $A \in \mathcal{C}$, se cumple que $A \subset C$, así, $A \in \langle \beta \rangle_n$. Luego, $\mathcal{C} \subset \langle \beta \rangle_n$. Finalmente, por el Teorema 2.4, $\langle \beta \rangle_n$ es conexo. Y dado que $\beta \subset B(\delta, p)$, se cumple que $\langle \beta \rangle_n \subset B_H(\delta, \{p\})$. Como $\{p\} \in \langle \beta \rangle_n$, entonces $\langle \beta \rangle_n \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto, se cumple la igualdad.

Como β es homeomorfo a un intervalo de la recta real, como consecuencia del Corolario 3.6, se cumple que $\mathcal{E} = \langle \beta \rangle_n - F_{n-1}(X) \subset \mathcal{C}$ es arco conexo (2). Sea \mathcal{D} la componente de $h(B_H(\delta, \{p\}))$ tal que $B \in \mathcal{D}$. Como h es continua y $h(\{p\}) = B$, se cumple que $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. Por otro lado, como $\{p\} \in h^{-1}(\mathcal{D}) \subset B_H(\delta, \{p\})$ y h^{-1} es continua, se cumple que $h^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$. Por la Observación 5.3 y como $\beta \subset \alpha$, se cumple que $\langle \beta \rangle_n \cap \mathcal{G}_n(X) = \mathcal{E}$ (3). De esto y como h es un homeomorfismo, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_n(Y) = h(\mathcal{C}) \cap h(\mathcal{G}_n(X)) = h(\mathcal{C} \cap \mathcal{G}_n(X)) = h(\langle \beta \rangle_n \cap \mathcal{G}_n(X)) = h(\mathcal{E}).$$

Luego, $\mathcal{D} \cap \mathcal{G}_n(Y)$ es arco conexo.

Dado $E \in \mathcal{E}$, como $h(B_H(\delta, \{p\})) \subset B_H(\varepsilon, B)$ y $\mathcal{E} = \langle \beta \rangle_n \cap \mathcal{G}_n(X)$, se cumple que $h(E) \in B_H(\varepsilon, B) \cap \mathcal{G}_n(Y)$. Por la Observación 5.3, se cumple que $h(E)$ tiene exactamente n puntos y $h(E) \subset W(Y)$; además como $B_H(\varepsilon, B) = \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$, entonces $h(E) \in \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$ (4).

Afirmación 2. $m = 1$ o $m = n$.

Supongamos que $1 < m < n$. Como β es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$ y $p \in \beta$, podemos tomar un $\gamma \subset \beta$ un arco tal que $p \in \gamma$. Fijemos el subconjunto $Q = \{q_1, \dots, q_n\} \subset \gamma$ con exactamente n puntos. Al ser γ un arco, podemos tomar $g : [0, 1] \rightarrow F_n(\gamma)$ una función continua tal que $g(0) = Q$, $g(1) = \{p\}$ y $|g(t)| = n$ para todo $t \in [0, 1)$.

Sea $G = \cup\{h(g(t)) : t \in [0, 1]\} \subset Y$. Note que $h(g([0, 1]))$ es un subconjunto de $\mathcal{F}(X)$, es compacto y localmente conexo. Entonces, por el Lema 2.5 se cumple que $G = \cup h(g([0, 1]))$ es compacto y localmente conexo. Por otro lado, como $h(g([0, 1])) \subset 2^X$ es conexo y $B = h(g(1)) \in h(g([0, 1])) \cap C_m(Y)$, por el Lema 4.3 inciso 3. se cumple que G tiene a lo más m componentes.

Note que para cada $t \in [0, 1)$, se cumple que $g(t) \in \mathcal{E}$, por ende $h(g(t)) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{G}_n(Y)$ (5) y $h(g(t)) \in \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$ para cada $t \in [0, 1)$. Entonces, $G \subset \bigcup_{i=1}^m B(\varepsilon, b_i)$; a su vez, como $B = h(g(1)) \subset G$ se cumple que $G \cap B(\varepsilon, b_i) \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$. Por ende $G \in \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$. Esto implica que G tiene exactamente m componentes, ya que las bolas con centro en b_i y de radio ε son ajenas dos a dos. Más aún, las componentes de G , son los conjuntos $G_i = G \cap B(\varepsilon, b_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. Tenemos dos casos. **Caso 1.** $b_i \in W(Y)$. En este caso, tomemos un alambre β_i tal que $b_i \in \beta_i$. Note que $\beta_i \cap B(\varepsilon, b_i)$ es no degenerado y arco conexo. Podemos considerar $\lambda_i \subset \beta_i \cap B(\varepsilon, b_i)$ un arco, tal que λ_i tiene como un punto extremo a b_i . **Caso 2.** $b_i \notin W(Y)$. Por (5) se cumple que $h(g(0)) \subset G \cap W(Y)$. Dado que $h(g(0)) \in h(g([0, 1]))$ por el Lema 4.3 se cumple que $h(g(0))$ interseca a cada componente de G , es decir, podemos tomar $y \in h(g(0)) \cap G_i \subset G \cap B(\varepsilon, b_i)$. Como G es localmente conexo y compacto, por el Lema 2.3 se cumple que G_i es un continuo localmente conexo. Por el Lema 4.3 inciso 3., se cumple que G_i es no degenerado. Luego, por el Teorema 2.3 se cumple que G_i es arco conexo. Por ende existe $\lambda_i \subset G_i$ un arco con puntos finales y, b_i . Por la Observación 5.3 y (5) se cumple que para cada $t \in [0, 1)$, $h(g(t)) \subset W(Y)$, esto implica que $G - h(g(1)) \subset W(Y)$, es decir, $(G - \{b_1, \dots, b_m\}) \subset W(Y)$.

Si se cumple el primer caso entonces $\lambda_i \subset W(Y)$, así $\lambda_i - \{b_i\} \subset W(Y)$. Si se da el segundo caso, $\lambda_i - \{b_i\} \subset G_i \subset -\{b_i\} \subset (G - \{b_1, \dots, b_m\}) \subset W(Y)$. Esto implica que sin importar que caso se cumple, podemos asegurar que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ que existe un arco $\lambda_i \subset B(\varepsilon, b_i)$ tal que $\lambda_i - \{b_i\} \subset W(Y)$ y b_i es un punto extremo de λ_i .

Como h es un homeomorfismo, se cumple que $h(B_H(\varepsilon, \{p\}))$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que $B \in h(B_H(\varepsilon, \{p\}))$. Por ende existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B \in \langle B(\varepsilon_0, b_1), \dots, B(\varepsilon_0, b_m) \rangle_n \subset h(B_H(\varepsilon, \{p\}))$ y $B(\varepsilon_0, b_i) \subset B(\varepsilon, b_i)$. Tomemos para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda'_i \subset \lambda_i \cap B(\varepsilon_0, b_i)$ un subarco de λ_i que tenga como punto extremo a b_i . Se cumple así que, existen arcos $\lambda'_i \subset B(\varepsilon, b_i)$

tales que $\lambda'_i - \{b_i\} \subset W(Y)$ y b_i es un punto extremo de λ_i ; y además $\langle \lambda'_1, \dots, \lambda'_m \rangle_n \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$.

Veamos que $\langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n \cap (F_n(Y) - F_{n-1}(Y)) \subset h(\mathcal{E}) = \mathcal{D} \cap \mathcal{G}_n(Y)$. Sea $K \in \langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n \cap (F_n(Y) - F_{n-1}(Y))$, entonces por la Observación 5.3, se cumple que $K \in \mathcal{G}_n(Y)$. Como cada λ'_i es un arco, es posible considerar una función continua e inyectiva $\mu : [0, 1] \rightarrow \langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n$ tal que $\mu(0) = K$, $\mu(1) = B$ y para cada $t \in [0, 1]$ se cumpla que $\mu(t) \in \langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n \cap (F_n(Y) - F_{n-1}(Y)) \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$. Por lo tanto, $\text{Im } \mu$ es un subcontinuo de $h(B_H(\delta, \{p\}))$ tal que $B \in \text{Im } \mu$, entonces $\text{Im } \mu \subset \mathcal{D}$, así, $K \in \mathcal{D}$, por ende $K \in \text{Im } \mu \cap \mathcal{G}_n(Y) = h(\mathcal{E})$. Por lo tanto, $\langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n \cap (F_n(Y) - F_{n-1}(Y)) \subset h(\mathcal{E})$ (5).

Obtendremos una contradicción de (2), probando que con lo construido hasta ahora, $h(\mathcal{E})$ no es conexo. Para ello consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{K}_1 = \{K \in h(\mathcal{E}) : K \cap B(\varepsilon, b_1) \text{ tiene exactamente } n - m + 1 \text{ elementos}\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{K \in h(\mathcal{E}) : K \cap \left(\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i)\right) \text{ tiene al menos } m \text{ elementos}\}.$$

Sean $A, B \in \langle \lambda'_1 - \{b_1\}, \dots, \lambda'_m - \{b_m\} \rangle_n$ tales que $|A \cap (\lambda'_1 - \{b_1\})| = n - m + 1$, $|B \cap (\lambda'_1 - \{b_1\})| = n - m$, $|B \cap (\lambda'_2 - \{b_2\})| = 2$, $|A \cap (\lambda'_i - \{b_i\})| = 1$ para toda $i \in \{2, \dots, m\}$ y $|B \cap (\lambda'_j - \{b_j\})| = 1$ para toda $j \in \{3, \dots, m\}$.

Note que $|A \cap B(\varepsilon, b_1)| = |A \cap (\lambda'_1 - \{b_1\})| = n - m + 1$, $|B \cap \left(\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i)\right)| =$

$$|B \cap (\lambda'_2 - \{b_2\})| + \sum_{j=3}^m |B \cap (\lambda'_j - \{b_j\})| = 2 + (m - 2) = m. \text{ Como } |A| = n = |B|,$$

por (5) se cumple que $A \in \mathcal{K}_1$ y $B \in \mathcal{K}_2$. Es decir, \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 son no vacíos.

Veamos ahora que $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$. Sea $K \in \mathcal{K}_i$, como $K \in h(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}_n(Y)$, entonces $|K| = n$, además $|K \cap B(\varepsilon, b_1)| = n - m + 1$, como las bolas $B(\varepsilon, b_i)$

son ajenas dos a dos, entonces $|K \cap \left(\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i)\right)| = m - 1$, por ende $K \notin \mathcal{K}_2$, así $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$.

Ahora veamos que $h(\mathcal{E}) = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Es claro que $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \subset h(\mathbb{E})$. Sea $K \in h(\mathcal{E})$, entonces $K \in \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$ y $|K| = n$. Si $|K \cap (\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i))| \geq$

m , entonces $K \in \mathcal{K}_2$. Si $|K \cap (\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i))| < m$, como $|K \cap B(\varepsilon, b_i)| \geq 1$

para toda $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces $m - 1 \leq |K \cap (\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i))|$. Entonces,

$|K \cap (\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i))| = m - 1$. Como $|K \cap (\bigcup_{i=1}^m B(\varepsilon, b_i))| = n$ y las bolas $B(\varepsilon, b_i)$

son ajenas dos a dos, se cumple que $|K \cap B(\varepsilon, b_1)| + (m - 1) = n$, entonces $|K \cap B(\varepsilon, b_1)| = n - m + 1$, por ende $K \in \mathcal{K}_2$. Por lo tanto, $h(\mathcal{E}) = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

Sea $K \in \mathcal{K}_1$. Supongamos que para todo $r > 0$ se cumple que $B_H(r, K) \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$. Como $K \cap B(\varepsilon, b_1) = \{k_1, \dots, k_{n-m+1}\}$ es finito, podemos tomar $r_0 = \min\{d(x, y) : x, y \in K \cap B(\varepsilon, b_1) \text{ y } x \neq y\}$, note que $r_0 > 0$. Para cada $i \in \{1, \dots, n - m + 1\}$, existe $r_i > 0$ tal que $B(r_i, k_i) \subset B(\varepsilon, b_1)$. Tomemos $R = \min\{r_0, r_1, \dots, r_{n-m+1}\}$. Es claro que, $R > 0$. Entonces $B_H(\frac{R}{2}, K) \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$. Sea $A \in B_H(\frac{R}{2}, K) \cap \mathcal{K}_2$, note que, $A \in h(\mathcal{E})$, por lo que $|A| = n$. Como $K \subset N(\frac{R}{2}, A)$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, n - m + 1\}$ existe $a_i \in A$ tal que $d(k_i, a_i) < \frac{R}{2} < r_i$, entonces $a_i \in B(\frac{R}{2}, k_i) \subset B(r_i, k_i) \subset B(\varepsilon, b_1)$. Como $\frac{R}{2} \leq \frac{r_0}{2}$, entonces $B(\frac{R}{2}, k_i) \cap B(\frac{R}{2}, k_j) = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n - m + 1\}$ con $i \neq j$. Esto implica que $|A \cap B(\varepsilon, b_1)| \geq n - m + 1$, como $A \in \mathcal{K}_2$

entonces $|A \cap (\bigcup_{i=2}^m B(\varepsilon, b_i))| \geq m$. Dado que las bolas $B(\varepsilon, b_i)$ son ajenas dos

a dos, se cumple que $|A \cap (\bigcup_{i=1}^m B(\varepsilon, b_i))| \geq n - m + 1 + m = n + 1$, lo cual

es una contradicción ya que $|A| = n$. Por ende, debe existir $r' > 0$ tal que $B_H(r', K) \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$. Esto implica que $B_H(r', K) \cap h(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}_1$, por lo tanto \mathcal{K}_1 es un subconjunto abierto de $h(\mathcal{E})$.

Tomemos ahora $K \in \mathcal{K}_2$ y supongamos que para todo $r > 0$ se cumple que $B_H(r, K) \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$. Como $K \in \mathcal{K}_2$ existe $j \in \{2, \dots, m\}$ tal que $|K \cap B(\varepsilon, b_j)| \geq 2$. Supongamos que $K \cap B(\varepsilon, b_j) = \{k_1, \dots, k_l\}$, con $l \geq 2$. Tomemos $r_0 = \min\{d(x, y) : x, y \in K \cap B(\varepsilon, b_j) \text{ y } x \neq y\}$, note que $r_0 > 0$. Para cada $i \in \{1, \dots, j\}$, existe $r_i > 0$ tal que $B(r_i, k_i) \subset B(\varepsilon, b_j)$. Tomemos $R = \min\{r_0, r_1, \dots, r_l\}$. Es claro que, $R > 0$. Entonces $B_H(\frac{R}{2}, K) \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$. Sea

$A \in B_H(\frac{R}{2}, K) \cap \mathcal{K}_1$, como $A \in \mathcal{K}_1$ se debe cumplir que $|A \cap B(\varepsilon, b_j)| = 1$. Como $K \subset N(\frac{R}{2}, A)$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ existe $a_i \in A$ tal que $d(k_i, a_i) < \frac{R}{2} < r_i$, entonces $a_i \in B(\frac{R}{2}, k_i) \subset B(r_i, k_i) \subset B(\varepsilon, b_j)$. Como $\frac{R}{2} \leq \frac{r_0}{2}$, entonces $B(\frac{R}{2}, k_s) \cap B(\frac{R}{2}, k_t) = \emptyset$ para todo $s, t \in \{1, \dots, l\}$ con $s \neq t$. Esto implica que $|A \cap B(\varepsilon, b_j)| \geq l \geq 2$, lo cual es una contradicción. Por ende, debe existir $r' > 0$ tal que $B_H(r', K) \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$. Esto implica que $B_H(r', K) \cap h(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}_2$, por lo tanto \mathcal{K}_2 es un subconjunto abierto de $h(\mathcal{E})$. Esto da como resultado una desconexión para $h(\mathcal{E})$, lo cual contradice (2). Por lo tanto $m = 1$ o $m = n$.

Afirmación 3. $m = 1$.

Supongamos que $m = n$. Sea $\beta_0 = \text{cl}_X(\beta)$, es claro que $\beta_0 \subset B(2\delta, p) \subset U$, como $p \in \beta_0$ y β_0 es conexo, entonces $\beta_0 \subset \alpha$. Luego, por (1) se cumple que β_0 es homeomorfo a un arco, entonces $\langle \beta_0 \rangle_n$ es cerrado y por el Lema 2.4 es conexo. Tomemos $M = \cup\{G : G \in h(\langle \beta_0 \rangle_n)\}$. Como $h(\langle \beta_0 \rangle_n) \subset \mathcal{F}(X) \cap 2^X$, es compacto y conexo; y además $B \in h(\langle \beta_0 \rangle_n) \cap C_m(X)$, entonces por los Lemas 2.5 y 4.3 se cumple que M es un subconjunto de X localmente conexo, compacto y tiene a lo más m componentes. Como $\beta_0 \subset B(2\delta, p)$ entonces $h(\beta_0) \subset h(B_H(2\delta, \{p\})) \subset B_H(\varepsilon, B)$. Dado que $B_H(\varepsilon, B) = \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$, se tiene que $M \in \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$ por ende M tiene exactamente m componentes, ya que las bolas con centro en b_i y de radio ε son ajenas dos a dos. Más aún, las componentes de M , son los conjuntos $M_i = M \cap B(\varepsilon, b_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Como M es localmente conexo y compacto, por el Lema 2.3 se cumple que M_i es un continuo localmente conexo. Sea $N = \cup\{S : S \in h(\mathcal{E})\}$. Como $h(\mathcal{E}) \subset 2^X$ es arco conexo y por (4) $h(\mathcal{E}) \subset \langle B(\varepsilon, b_1), \dots, B(\varepsilon, b_m) \rangle_n$ aplicando el Lema 4.3 inciso 1. se cumple que N tiene exactamente m componentes. Note que $h(\mathcal{E}) = h(\langle \beta \rangle_n \cap \mathcal{G}_n(X)) \subset h(\langle \beta_0 \rangle_n)$, así $N \subset M$. Esto implica que las componentes de N son de la forma $N_i = B(\varepsilon, b_i) \cap N$ y $N_i \subset M_i$.

Afirmación 4. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que N_i es abierto en M_i y cada elemento de $y \in N_i$ tiene una vecindad en N_i que es homeomorfa a $[0, 1)$ o $(0, 1)$.

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $y \in N_i = N \cap B(\varepsilon, b_i)$. Como $y \in N$ existe $A_0 \in \mathcal{E}$, tal que $y \in h(A_0)$, por (4) $h(A_0) \in W(Y)$. Por el Lema 4.3 y como $n = m$, entonces $h(A_0) \cap N_i = \{y\}$. Note que $y \in W(Y)$, entonces existe V un subconjunto abierto de Y , tal que la componente θ de V tal que $y \in \theta$ es un alambre, es decir, θ es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Como $\mathcal{E} \subset \mathcal{C} \subset B_H(\delta, \{p\})$, entonces $h(A_0) \in h(B_H(\delta, \{p\}))$. Dado que h es un homeomorfismo y $B_H(\delta, \{p\})$ es

abierto, entonces $h(B_H(\delta, \{p\}))$ es abierto, por tanto existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_H(\delta_1, h(A_0)) \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$. Por otro lado, $y \in S_i \subset B(\varepsilon, b_i)$, así que $y \in V \cap B(\varepsilon, b_i)$, por lo que existe δ_2 tal que $B(\delta_2, y) \subset V \cap B(\varepsilon, b_i)$. Tomemos $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea μ la componente de $B(\delta_0, y)$ tal que $y \in \mu$. Dado que $\mu \subset V$ es un conexo tal que $y \in \mu$, debe ocurrir que $\mu \subset \theta$. Por el Teorema 3.2 se tiene que μ es no degenerado y no es cerrado, por ende μ es homemorfo a $(0, 1)$ o $[0, 1)$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{R} = \{(h(A_0) - \{y\}) \cup \{z\} : z \in \mu\}$. Note que, si $h(A_0) = \{h_1, \dots, h_{i-1}, y, h_{i+1}, \dots, h_n\}$, entonces $\mathcal{R} = \langle \{h_1\}, \dots, \{h_{i-1}\}, \mu, \{h_{i+1}\}, \dots, \{h_n\} \rangle_n$. Luego cada elemento de \mathcal{R} tiene exactamente n elementos, ya que $h_j \in B(\varepsilon, b_j)$ para cada $j \in \{1, \dots, m\} - \{i\}$, y $\mu \subset B(\varepsilon, b_i)$. También, por el Lema 2.4 se cumple que \mathcal{R} es conexo. Como $h(A_0) \subset W(Y)$ y μ es un alambre, se tiene que $\mathcal{R} \subset F_n(W(Y))$. Esto implica, por el Teorema 5.2 inciso 3. que $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_n(Y)$. A su vez, dado que $\mu \subset B(\delta_0, y)$, entonces $\mathcal{R} \subset B_H(\delta_0, h(A_0))$ y como $\delta_0 \leq \delta_1$, entonces $\mathcal{R} \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$. Por lo tanto, $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_n(Y) \cap h(B_H(\delta, \{p\}))$.

Se sigue que $h^{-1}(\mathcal{R})$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{G}_n(X) \cap B_H(\delta, \{p\})$ tal que $A_0 \in h^{-1}(\mathcal{R})$. Como $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, entonces $A_0 \in h^{-1}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{C} \subset B_H(\delta, \{p\})$, ya que \mathcal{C} es la componente de $B_H(\delta, \{p\})$ tal que $\{p\} \in \mathcal{C}$, por ello mismo se debe cumplir que $h^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{C}$. Esto implica, por la Afirmación 1. y por (3), que $h^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{G}_n(X) \cap \mathcal{C} = \mathcal{G}_n(X) \cap \langle \beta \rangle_n = \mathcal{E}$. De esto que, $\mathcal{R} \subset h(\mathcal{E})$. Entonces, para cada $z \in \mu$, existe $A \in \mathcal{E}$ tal que $h(A) = (h(A_0) - \{y\}) \cup \{z\} \subset N$. Dado que $\mu \subset B(\varepsilon, b_i)$ se cumple que $z \in N_i$, por ende $\mu \subset N_i \subset M_i$. Note que, en particular, esto prueba que M_i es no degenerado.

Veamos que μ es una vecindad de y en N_i . Como M_i es localmente conexo y $y \in M_i \cap B(\delta_0, y)$, existe Q un subconjunto de M_i abierto y conexo, tal que $y \in Q \subset M_i \cap B(\delta_0, y)$. Como μ es la componente de $B(\delta_0, y)$, tal que $y \in \mu$, se cumple que $y \in Q \subset \mu \subset N_i \subset M_i$ por lo que μ es una vecindad de y en N_i . Además, para cada $y \in N_i$, existe un abierto en M_i que tiene a y , y se queda contenido en N_i , es decir, N_i es abierto en M_i . Esto termina la prueba de la Afirmación 4.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Probaremos que $b_i \in W(Y)$. Como consecuencia de la Afirmación 4, tenemos N_i es una variedad 1-dimensional. Es decir, cada punto de N_i tiene una vecindad que es homeomorfa a un intervalo de la recta real. Por [6, Teorema 1, pp. 208], se tiene que N_i es homeomorfo a $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ o S^1 . Veamos que $\text{cl}_Y(N_i) = M_i$. Para ello, primero probemos que $\text{cl}_Y(N) = M$. Sean $x \in M$ y $r > 0$. Existe $A \in \langle \beta_0 \rangle_n = \langle \text{cl}_X(\beta) \rangle_n$

tal que $x \in h(A)$. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_l\}$, como h es continua en A , existe $\gamma > 0$ tal que $h(\langle B(\gamma, a_1), \dots, B(\gamma, a_l) \rangle_n) \subset B_H(r, h(A))$. Note que, $a_i \in A \subset \text{cl}_X(\beta)$, entonces $B(\gamma, a_i) \cap \beta \neq \emptyset$. Podemos tomar $a'_i \in B(\gamma, a_i) \cap \beta$. Entonces $A' = \{a_1, \dots, a_l\} \in \langle B(\gamma, a_1), \dots, B(\gamma, a_l) \rangle_n$, por lo que, $\mathcal{U} = \langle B(\gamma, a_1), \dots, B(\gamma, a_l) \rangle_n \cap F_n(\beta)$ es no vacío. Por el Lema 5.4, se cumple que $\mathcal{U} \cap (F_n(\beta) - F_{n-1}(\beta)) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \mathcal{U} \cap (F_n(\beta) - F_{n-1}(\beta))$, note que $E \in \mathcal{E}$, entonces $h(E) \subset N$. Por otro lado, como $E \in \mathcal{U}$ se cumple que $h(E) \in B_H(r, h(A))$, esto implica que $x \in h(A) \subset N(r, h(E))$, es decir, existe $e \in h(E) \subset N$ tal que $d(x, e) < r$, de modo que $B(r, x) \cap N \neq \emptyset$, por lo que $x \in \text{cl}_Y(N)$. Luego, $M = \text{cl}_Y(N) = \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_Y(N_i)$. Como M_i es cerrado, se cumple que $\text{cl}_Y(N_i) \subset M_i$. Supongamos que existe $p \in M_i - \text{cl}_Y(N_i)$, entonces existe $j \neq i$ tal que $p \in \text{cl}_Y(N_j) \subset M_j$, esto implica que $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por ende $\text{cl}_Y(N_i) = M_i$. De esta manera, se cumple que M_i es homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 .

Sea $r_i = \text{diám}(M_i)$, como $M_i \subset B(\varepsilon, b_i)$ entonces $r_i < 2\varepsilon$. Tomemos $\gamma_1 = \frac{r_i}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$. Note que, $M_i \cap (Y - B(\gamma_1, b_i)) \neq \emptyset$. Como $h(B_H(\delta, \{p\}))$ es abierto y $B \in h(B_H(\delta, \{p\}))$ existe $\gamma_2 > 0$ tal que $B_H(\gamma_2, B) \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$. Sea $\gamma_0 = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, es claro que $\gamma_0 < \varepsilon$. Sea D_i la componente de $B(\gamma_0, b_i)$ tal que $b_i \in D_i$. Consideremos $\mathcal{M}_i = \{(B - \{b_i\}) \cup \{z\} : z \in D_i\}$. Note que $\mathcal{M}_i = \langle \{b_1\}, \dots, \{b_{i-1}\}, D_i, \{b_{i+1}\}, \dots, \{b_n\} \rangle_n$, entonces por el Lema 2.4 se cumple que \mathcal{M}_i es conexo. Dado que $D_i \subset B(\gamma_0, b_i)$, entonces $\mathcal{M}_i \subset B_H(\gamma_0, B) \subset h(B_H(\delta, \{p\}))$ y $B \in \mathcal{M}_i$. Esto implica que $h^{-1}(\mathcal{M}_i) \subset B_H(\delta, \{p\})$ es conexo y $\{p\} = h^{-1}(B) \in h^{-1}(\mathcal{M}_i)$, por ende $h^{-1}(\mathcal{M}_i) \subset \mathcal{C}$, ya que \mathcal{C} es la componente. De esta manera, $\mathcal{M}_i \subset h(\mathcal{C})$ y por la Afirmación 1 se tiene que $\mathcal{M}_i \subset h(\mathcal{C}) = h(\langle \beta \rangle_n) \subset h(\langle \beta_0 \rangle_n)$, esto implica que $\cup \mathcal{M}_i \subset M$. Sea $d \in D_i$, por como de define \mathcal{M}_i , es claro que $d \in \cup \mathcal{M}_i$, por ende $d \in M$, es decir, $D_i \subset M$. Como $D_i \subset B(\gamma_0, b_i) \subset B(\varepsilon, b_i)$, se cumple que $D_i \subset M \cap B(\varepsilon, b_i) = M_i$. Como el $\text{diám}(D_i) \leq 2\gamma_0 \leq 2\gamma_1 = \frac{r_i}{2} < \text{diám}(M_i)$, entonces $D_i \neq M_i$. Por el Teorema 3.2 se cumple que D_i no es cerrado y es no degenerado. Por lo tanto D_i es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Esto prueba que D_i es un alambre y por lo tanto $b_i \in W(Y)$. Por ende, $B \subset W(Y)$.

Como $m = n$, por el Teorema 5.2 inciso 3. se cumple que $B \in \mathcal{G}_n(Y)$. Entonces, $\{p\} = h^{-1}(B) \in h^{-1}(\mathcal{G}_n(Y)) = \mathcal{G}_n(X)$, esto contradice el Teorema 5.2 inciso 2. Por lo tanto, $m = 1$, es decir, $h(\{p\}) = \{b\}$. De este modo $h(F_1(W(X))) \subset F_1(Y)$, por lo que $h(F_1(X)) = h(F_2(Y))$.

□

Corolario 5.8. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$. Si X es alambrado entonces, X tiene hiperespacio $F_n(X)$ único.

Corolario 5.9. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$. Si X es alambrado entonces, $F_n(X)$ es rígido.

6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] | D. Curtis, N.T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985) 251–260.
- [2] K. Borsuk, S. Ulam, On symmetric products of topological space, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 37 (1931) 875–882.
- [3] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974, ninth printing.
- [4] J.M. Martínez-Montejano, *Mutual aposyndesis of symmetric products*, Topol. Proc. 24 (1999), 203–213.
- [5] J.J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006) 811–856
- [6] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliff, 1974.
- [7] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New York, Basel (1999).
- [8] A. Illanes, *Models of Hyperspaces*, Topol. Proc. 41 (2013), 39–64.

- [9] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel (1992).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 7

El n -ésimo producto simétrico suspensión

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y
Leonardo Ramírez Aparicio
FCFM, BUAP

Resumen

En 2010, F. Barragán define el n -ésimo producto simétrico suspensión para un continuo X como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, con la topología cociente y lo denota por $SF_n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. En este capítulo veremos que $SF_n(X)$ tiene la propiedad (b) y que $SF_n(X)$ es unicoherente, cuando $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 3$. También, se estudian algunas condiciones necesarias que debe cumplir el continuo X para que su n -ésimo producto simétrico suspensión sea arco conexo.

1 Preliminares

Un **continuo** X es un espacio métrico con más de un punto, conexo y compacto. Un subconjunto Y de X es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto. Dado un continuo X , mientras no se diga lo contrario, denotamos por d a la métrica de X . Además, si $p \in X$, $A \subset X$ y $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ , será denotada por $B_d(\epsilon, p)$. La ϵ -**nube** de A (o la **nube con centro en A y radio $\epsilon > 0$**), es $N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}$. Si A es un subconjunto de X , al interior de A en X lo denotamos como $\text{int}_X(A)$. El conjunto de los números naturales es denotado por \mathbb{N} , así como el conjunto vacío por \emptyset . El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A . Cuando A sea un subconjunto propio de un conjunto B , escribiremos $A \subsetneq B$. Denotamos por \mathbb{R}^n al n -espacio euclidiano y para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, se define su norma como:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.1. Una *n-esfera* es un espacio que es homeomorfo a la esfera *n*-dimensional S^n en \mathbb{R}^{n+1} , donde

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots$$

En este trabajo, la dimensión se considera definida como en [23, (0.44), página 21]. El símbolo \dim será usado para denotar la dimensión. Si $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, escribiremos $\dim(X) < \infty$ y $\dim(X) = \infty$ en otro caso.

Definición 1.2. Sean X un continuo, A un subconjunto no vacío de X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor o igual** que β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|\text{Bd}_X(U)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ en lugar de escribir $\text{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$. Se dice también que A es de **orden** β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) = \beta$, si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$.

Definición 1.3. Sea X un continuo. Un punto x en X es un punto de **ramificación** de X si, $\text{ord}(x, X) > 2$.

Si X es un continuo, denotaremos por:

$$R(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto de ramificación}\},$$

al conjunto de puntos de ramificación de X .

Para un continuo X , consideraremos el siguiente hiperespacio de X :

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado de } X\}.$$

La familia 2^X se le conoce como el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** de X . A este hiperespacio se le dota de la topología de Vietoris:

Definición 1.4. Para un continuo X , la topología de Vietoris para 2^X es la topología más pequeña, τ_V tal que 2^X tiene las siguientes propiedades: (1) $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$, para todo abierto U de X y (2) $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in \tau_V$, para todo cerrado B en X .

Si U_1, \dots, U_m son abiertos de X , entonces

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

es un **básico** para la topología de Vietoris (véase [16, Teorema 1.2]).

Como subespacio de 2^X de un continuo X , para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos a

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\}.$$

que denota el n -ésimo producto simétrico de X . Por lo tanto, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X , y por las definiciones tenemos X es homeomorfo a $F_1(X)$. El concepto de producto simétrico lo introdujeron K. Borsuk y S. M. Ulam en [5]. Ver [16, (0.48), pág. 23] y [23, pág. 6 y 7].

Al hiperespacio 2^X se le considera dotado con la métrica de Hausdorff, inducida por la métrica d de X , con la cual resulta ser un espacio métrico, ver [16, Teorema 2.2]. Esta métrica se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$. Observemos que la restricción de la métrica de Hausdorff a $F_n(X)$ lo hace un espacio métrico.

Definición 1.5. *Dados X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$. El **vietórico** de U_1, U_2, \dots, U_n en $F_n(X)$ está dado de la siguiente manera:*

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_n = \left\{ A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Definición 1.6. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. El **n -ésimo producto simétrico suspensión** del continuo X , denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, con la topología cociente que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un conjunto de un punto.*

El estudio del **n -ésimo hiperespacio producto simétrico suspensión**, se ha abordado en [1], [2], [3], [6], [7], [8], [9], [14], [22].

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, la respectiva función cociente de $SF_n(X)$ se denota por $q_X : F_n(X) \rightarrow SF_n(X)$ y está dada de siguiente manera:

$$q_X(A) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } A \in F_n(X) \setminus F_1(X), \\ F_X & \text{si } A \in F_1(X). \end{cases}$$

Cuando consideramos el espacio cociente $SF_n(X)$, acordamos que $q_X(F_1(X)) = \{F_X\}$. De este modo:

$$SF_n(X) = \{\{A\}: A \in F_n(X) \setminus F_1(X)\} \cup \{F_X\}.$$

Observación 1.7. *Como la función $q_X \upharpoonright_{F_n(X) \setminus F_1(X)}: F_n(X) \setminus F_1(X) \rightarrow SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es biyectiva, continua y abierta, es un homeomorfismo; la denotamos por q_X^* .*

Este trabajo se encuentra dentro del siguiente problema general:

Problema 1.8. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, ¿qué propiedades topológicas cumple $SF_n(X)$?*

En relación al Problema 1, probamos lo siguiente:

(a) Si X es un continuo arco conexo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo. (ver Teorema 5.3).

(b) Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ tiene la propiedad (b). (ver Teorema 5.5).

(c) Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo unicoherente (ver Teorema 5.6).

2 Definiciones generales

Este capítulo tiene como finalidad enlistar algunas de las definiciones que usaremos más adelante.

Definición 2.1. *Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología euclídeana. Sea $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$ un homeomorfismo, decimos que $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos del arco α .*

Definición 2.2. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria con la topología euclídeana.*

Definición 2.3. Un continuo X se dice que es arco conexo, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un arco α en X con extremos x y y .

Definición 2.4. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que V es una **vecindad** de x en X , si V es un subconjunto de X para el cual existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset V$.

Definición 2.5. Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $x \in X$ si para cada vecindad V de x en X , existe U un conjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U \subset V$. Cuando X es **localmente conexo** en cada uno de sus puntos, decimos que es **localmente conexo**.

Definición 2.6. Sean un continuo X y $p, q \in X$. Se dice que X es **aposindético en p con respecto a q** , si existe un subcontinuo K de X tal que $p \in \text{int}_X(K) \subset K \subset X - \{q\}$. Se dice que X es **aposindético en p** si es aposindético en p con respecto a cualquier punto q distinto de p y que es **aposindético** si es aposindético en cualquier punto de X .

Definición 2.7. Sean X, Y dos espacios topológicos e $I = [0, 1]$. Entonces, dos funciones continuas f, g de X a Y se llaman **homotópicas**, si existe una aplicación continua $h: X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$h(x, 0) = f(x) \text{ y } h(x, 1) = g(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Definición 2.8. Un continuo X tiene la **propiedad (b)** siempre que cada función continua de X en el círculo unitario S^1 es homotópica a una función constante.

Definición 2.9. Una función continua entre dos continuos X y Y es llamada **monotona** siempre que la imagen inversa de cada punto y de Y , es un subconjunto conexo de X .

Definición 2.10. Un continuo X es **unicoherente** siempre que para cada par A y B de subcontinuos de X tal que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición 2.11. Sea \mathcal{F} una colección finita de subconjuntos de un continuo X . Entonces X es llamado **finitamente aposindético** si para cada $x \in X$ y cada $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in \text{int}_X(W)$ y $W \cap F = \emptyset$.

Definición 2.12. Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.

Definición 2.13. Un **n -odo simple** es un continuo X que es la unión de n arcos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, con $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, y p es un punto extremo de cada uno de los arcos α_i .

Definición 2.14. Dado un continuo X , denotemos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X . Una clase de continuos \mathcal{C} es **\mathcal{H} -cerrada** si $X \in \mathcal{C}$ y Y es un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{C}$.

Definición 2.15. Sean un continuo X y un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de X , se dice que el continuo X tiene **hiperespacio único** $\mathcal{H}(X)$ si, para cada continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Definición 2.16. Un subconjunto cerrado A de un espacio topológico Y es un **retracto** de Y si, la función identidad Id_A en A tiene una extensión continua a Y . Un espacio normal X es un **retracto absoluto (AR)** si, para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X , se satisface que B es un retracto de Y .

Definición 2.17. Se dice que un continuo X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cualquier función continua $f: X \rightarrow X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Al punto p se le llama punto fijo de f .

Definición 2.18. Sean $I^2 = I \times I$ y $\mathcal{D}_2 = \{(0, 1 - y), (1, y)\} : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1 - x, 0), (x, 1)\} : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y)\} : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. El continuo $(I^2/\mathcal{D}_2, \tau(\mathcal{D}_2))$ se conoce como el **plano proyectivo real** y se denota por $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Definición 2.19. Se dice que un continuo X es **descomponible**, si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$.

Los continuos que no son descomponibles son llamados **indescomponibles**.

Definición 2.20. Un continuo es llamado **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

3 Ejemplos

Exponemos brevemente algunos modelos para el segundo producto simétrico de un continuo X ; esto cuando X es un arco, una curva cerrada simple o un triodo simple. Resaltamos que no siempre se cumple que el n -ésimo producto simétrico de un continuo es homeomorfo a su n -ésimo producto simétrico suspensión.

Ejemplo 3.1. Sea $X = [0, 1]$. En [8, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, (una 2-celda), donde $F_1(X)$ es homeomorfo a el segmento que une el punto $(0,0)$ con el punto $(1,1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda. La Figura 1 ilustra lo dicho.

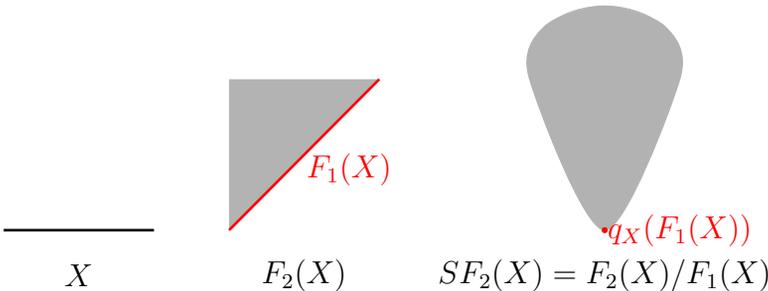


Figura 1: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

Ejemplo 3.2. Sea T el triodo simple. En [8, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(T)$ es el espacio que se muestra en la Figura 2, el cual es una 2-celda D_0 que contiene tres 2-celdas, D_1, D_2 y D_3 , pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto p . Además $F_1(T)$ está contenido en la frontera como variedad de D_1, D_2, D_3 y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$. En la Figura 2 podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio $SF_2(T)$.

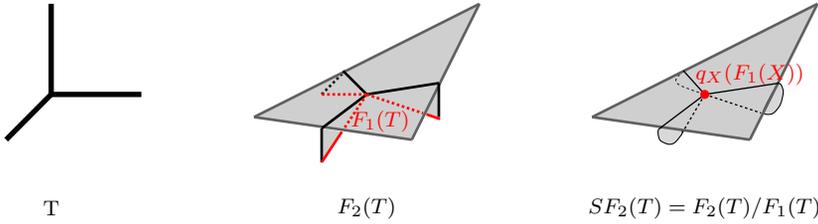


Figura 2: Segundo producto simétrico suspensión del triado simple.

En los Ejemplos 3.1 y 3.2, se dan continuos tales que sus respectivos segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son homeomorfos. Podemos pensar que esto siempre sucede. Sin embargo, en el Ejemplo 3.3 se probó que no siempre pasa eso. Este ejemplo es una de las razones por lo cual es importante el estudio del n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo.

Ejemplo 3.3. Sea S^1 la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen. En [8, pág. 23] se demuestra que un modelo para $F_2(S^1)$ es el espacio conocido como la Banda de Moebius, donde $F_1(S^1)$ es homeomorfo a la frontera como variedad de la Banda de Moebius. Así, al identificar $F_1(S^1)$ a un punto, obtenemos el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Así, $SF_2(S^1)$ es homeomorfo a \mathbb{RP}^2 . El espacio S^1 es un continuo no unicoherente tal que $F_2(S^1)$ no es unicoherente, ver [13] y [15, Teorema 1.6]. Por [25, pág. 197], tenemos que $SF_2(S^1)$ es unicoherente. Por tanto, $F_2(S^1)$ no es homeomorfo a $SF_2(S^1)$.

4 Propiedades en $SF_n(X)$

Esta sección tiene como intención mostrar algunos resultados interesantes que se conocen en la literatura sobre el n -ésimo producto simétrico y el n -ésimo producto simétrico suspensión pero que no demostramos en este capítulo, y solo daremos la referencia respectiva.

Lema 4.1. [10, Lema 6.1] Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$, y sea $A = \{a_1, \dots, a_r\} \in F_n(X)$, donde a_1, \dots, a_r son distintos. Sea U_1, \dots, U_r subconjuntos abiertos ajenos por pares de X tal que $a_i \in U_i$

para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ y $\mathcal{C} \subset \langle U_1, \dots, U_r \rangle_n \cap F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{C}$. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.

- (a) Si \mathcal{C} es un abierto de $F_n(X)$, entonces $\cup \mathcal{C}$ es un abierto de X .
- (b) Si \mathcal{C} es conexo, entonces $(\cup \mathcal{C}) \cap U_i$ es conexo para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Lema 4.2. [19, Lema 2] Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo.

Teorema 4.3. [19, Teorema 4] Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X)$ es colocalmente conexo. En particular, $F_n(X)$ es aposindético.

Teorema 4.4. [18, Teorema 3, Página 230] Cada subconjunto abierto de un espacio localmente conexo es localmente conexo.

Proposición 4.5. [10, Proposición 2.7] Sean Y un espacio topológico de Hausdorff, X un espacio topológico arco conexo y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva, entonces Y es arco conexo.

Teorema 4.6. [20, Teorema 8] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces cada función continua de $F_n(X)$ al círculo unitario S^1 , es homotópica a una función constante.

Lema 4.7. [21, Lema 4.7] Sea X un espacio métrico conexo. Si X tiene la propiedad (b), entonces X es unicoherente.

Corolario 4.8. [4, Corolario 1] Si X es un continuo unicoherente y aposindético, entonces X es finitamente aposindético.

Teorema 4.9. [16, Teorema 12.12] Sea un continuo X . Entonces X , contiene un subcontinuo propio con más de un punto. Más aún, si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$.

Proposición 4.10. [8, Proposición 3.1] Si X es un continuo de dimensión finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ son continuos de dimensión finita.

Lema 4.11. [8, Lema 3.5] Si X es un continuo de dimensión finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ no contienen subconjuntos de dimensión 2 con interior no vacío.

Teorema 4.12. [8, Teorema 4.1] *Si X es un continuo, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ no son homeomorfos a S^2 .*

Teorema 4.13. [8, Teorema 4.2] *Sea X un continuo. Si $n \geq 2$ y $n \neq 3$, entonces $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ no son homeomorfos a S^m , para cada $2 \leq m \leq n$.*

Teorema 4.14. [8, Teorema 4.3] *Sea X un continuo. Los siguientes enunciados se cumplen:*

- (a) *si $n = 1$, entonces $F_n(X)$ es homeomorfo a S^1 si y sólo si X es homeomorfo a S^1 ;*
- (b) *$F_n(X)$ es homeomorfo a S^m , para algún $m \leq n$ si y sólo si $n = 3$ o $n = 1$, y $X = S^1$.*

Lema 4.15. [8, Lema 4.5] *Si T un triodo simple, entonces $F_3(T)$ y $SF_3(T)$ no se pueden encajar en \mathbb{R}^3 .*

Lema 4.16. [8, Lema 4.6] *Si X es homeomorfo a un arco o una curva cerrada simple, entonces $F_3(X)$ no es homeomorfo a $SF_3(X)$.*

Teorema 4.17. [8, Teorema 4.7] *Si X es un continuo, entonces $SF_3(X)$ no es homeomorfo a S^3 .*

Teorema 4.18. [8, Corolario 4.8] *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ no es homeomorfo a S^m , para cada $2 \leq m \leq n$.*

Teorema 4.19. [1, Ejemplo 3.5] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si \mathcal{Q} es el cubo de Hilbert, entonces $SF_n(\mathcal{Q})$ es el cubo de Hilbert.*

Teorema 4.20. [1, Teorema 3.6] *Si X es un retracto absoluto y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Corolario 4.21. [1, Corolario 3.7] *Si X es un retracto absoluto y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Lema 4.22. [1, Lema 4.3] *Sea X un continuo y sean A, B, M subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es desconexo. Si existe una componente K de $A \cap B$ tal que $K \cap M = \emptyset$, entonces el espacio cociente X/M no es unicoherente.*

Teorema 4.23. [1, Teorema 6.2] *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (a) X contiene un arco;
- (b) $F_n(X)$ contiene un arco;
- (c) $SF_n(X)$ contiene un arco.

Observemos que como consecuencia del Teorema 4.23, si X es el pseudo-arco, o X es hereditariamente indescomponible, entonces $SF_n(X)$ no es arco conexo.

El teorema siguiente prueba que el inverso del Teorema 5.3 no es cierto.

Teorema 4.24. [1, Teorema 6.4] *Si X es una compactificación de $[0, \infty)$ con un continuo arco conexo L como residuo, y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo.*

Teorema 4.25. [1, Teorema 6.8] *Sea X un continuo y sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si existen dos diferentes arco componentes cerradas de X , entonces $SF_n(X)$ no es arco conexo.*

Lema 4.26. [7, Lema 5.10] *Sea X una gráfica finita. Si $F_2(X)$ es homeomorfo a $SF_2(X)$, entonces X tiene a lo más un punto de ramificación.*

Teorema 4.27. [7, Teorema 5.11] *Sea X una gráfica finita. Entonces $F_2(X)$ es homeomorfo a $SF_2(X)$ si y sólo si X es un arco o un n -odo simple.*

El siguiente resultado nos dice que la clase de las gráficas finitas cuyo conjunto de puntos de ramificación es distinto del vacío, es SF_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.

Lema 4.28. [14, Lema 3.8] *Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y X y Y continuos tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$. Si $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es una gráfica finita si y sólo si Y es una gráfica finita.*

Teorema 4.29. [14, Teorema 6.5] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es una gráfica finita, entonces X tiene hiperespacio único $SF_n(X)$.*

Lema 4.30. [22, lema 2.4] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Si Y es un continuo localmente conexo y casi enrejado, entonces ninguna vecindad de F_Y en $SF_n(Y)$ puede encajarse en \mathbb{R}^n .*

Lema 4.31. [22, lema 2.4] *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y sea X un continuo.*

- (a) *Si $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n([0, 1])$, entonces X es un arco.*
- (a) *Si $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(S^1)$, entonces X es una curva cerrada simple.*

Se sabe que si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo unicoherente; este resultado fue probado por Franco Barragán en 2010, véase [1, Teorema 4.1]. Por otro lado, la unicoherencia de los productos simétricos se ha estudiado desde 1954, véase [13]. Y se sabe que:

- (a) si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $F_n(X)$ es unicoherente, véase [20, Teorema 8];
- (b) si X es un continuo localmente conexo, entonces $F_2(X)$ es unicoherente si y sólo X es unicoherente (véase [13] y [15, Teorema 1.6]).
- (c) existe un continuo unicoherente X tal que $F_2(X)$ no es unicoherente, véase [6].

Se esperaría el n -ésimo producto simétrico suspensión no es unicoherente para $n = 2$. Sin embargo, en 2015, Enrique Castañeda y Alejandro Illanes probaron el siguiente teorema.

Teorema 4.32. [9, Teorema 2.2] *Si X es un continuo, entonces $SF_2(X)$ es unicoherente.*

5 Conexidad local, unicoherencia y arco conexidad

En esta sección, demostramos algunos de los resultados para el n -ésimo producto simétrico suspensión que se encuentran en [1], [3].

Teorema 5.1. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea $\delta > 0$ tal que $x \in B_d(x, \delta) \subset U$. Como $\{x\}$ es un subcontinuo propio de X y $B_d(x, \delta)$ es un abierto de X , por el Teorema 4.9, existe K un subcontinuo de X tal que $\{x\} \subsetneq K \subset B_d(x, \delta)$. Sea $y \in K$ tal que $x \neq y$. Sea $\epsilon' > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon') \cap B_d(y, \epsilon') = \emptyset$. Sean $A = \{x, y\}$ y $\epsilon < \min\{\delta, \epsilon'\}$. Sean $U_1 = B_d(x, \epsilon)$ y $U_2 = B_d(y, \epsilon)$. Entonces, $\langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$ es un abierto no vacío de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Como $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, existe un abierto y conexo \mathcal{C} de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subset \langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Por el Lema 4.1, $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de X y $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto conexo. Esto implica que, $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in (\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1 \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

Teorema 5.2. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo, por el Lema 4.2, $F_n(X)$ es localmente conexo. Como $q_X(F_n(X)) = SF_n(X)$, por [24, Corolario 8.17], $SF_n(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supongamos que $SF_n(X)$ es localmente conexo, Como $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, por el Teorema 4.4, $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es localmente conexo. Como $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es homeomorfo a $F_n(X) \setminus F_1(X)$, entonces $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo. Así, por el Teorema 5.1, X es localmente conexo. \square

Teorema 5.3. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es arco conexo, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo.*

Demostración. Como X es un continuo arco conexo, $F_n(X)$ es arco conexo. Como q_X es una función continua y sobreyectiva, y X y $SF_n(X)$ son continuos, por la Proposición 4.5 $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo. \square

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 4.25 y [12, Pág. 30].

Corolario 5.4. *Sea X una compactificación de $[0, \infty)$ con un continuo localmente conexo como residuo, y sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo*

Teorema 5.5. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $SF_n(X)$ tiene la propiedad (b).*

Demostración. Por 4.6, $F_n(X)$ tiene la propiedad (b). Como q_X es una función monótona continua, por [18, Teorema 2, Página 434], $SF_n(X)$ tiene la propiedad (b). \square

Como consecuencia del Teorema 5.5 y el Lema 4.7, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo unicoherente.*

Teorema 5.7. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (a) $SF_n(X)$ es aposindético en F_X ;
- (b) Si $\mathcal{A} \in SF_n(X) \setminus \{F_X\}$, entonces $SF_n(X)$ es aposindético en \mathcal{A} respecto a cualquier punto de $SF_n(X) \setminus \{F_X, \mathcal{A}\}$.

Demostración. Probemos (a). Sea $\mathcal{B} \in SF_n(X) \setminus \{F_X\}$. Como $SF_n(X)$ es de Hausdorff, existen Γ y Λ subconjuntos abiertos de $SF_n(X)$ tales que $F_X \in \Gamma$, $\mathcal{B} \in \Lambda$ y $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$. Sea $B \in F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $q_X(B) = \mathcal{B}$. Como q_X es continua, $(q_X)^{-1}(\Lambda)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $B \in (q_X)^{-1}(\Lambda) \subset (q_X)^{-1}(SF_n(X) \setminus \Gamma) \subset (q_X)^{-1}(SF_n(X) \setminus \{F_X\}) = F_n(X) \setminus F_1(X)$. Por el Teorema 4.3, $F_n(X)$ es colocalmente conexo. Como $B \in F_n(X) \setminus F_1(X)$, existe un subconjunto abierto \mathcal{U} de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset (q_X)^{-1}(\Lambda) \subset F_n(X) \setminus F_1(X)$ y $F_n(X) \setminus \mathcal{U}$ es conexo. Luego, \mathcal{U} es un abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$. Por la Observación 1.7, $q_X^*(\mathcal{U})$ es un abierto de $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ y por ende, de $SF_n(X)$. Observemos que, $q_X(F_n(X) \setminus \mathcal{U}) = SF_n(X) \setminus q_X^{(\mathcal{U})}$. Luego, $SF_n(X) \setminus q_X^{(\mathcal{U})}$ es un cerrado y conexo de $SF_n(X)$, entonces $SF_n(X) \setminus q_X(\mathcal{U})$ es un subcontinuo de $SF_n(X)$. Como $F_X \in \Gamma \subset SF_n(X) \setminus \Lambda \subset SF_n(X) \setminus q_X(\mathcal{U})$ y Γ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, así, $F_X \in \text{int}_{SF_n(X)}(SF_n(X) \setminus q_X(\mathcal{U})) \subset SF_n(X) \setminus q_X(\mathcal{U}) \subset SF_n(X) \setminus \{\mathcal{B}\}$. Por lo tanto, $SF_n(X)$ es aposindético en F_X .

Por un argumento similar se demuestra (b). \square

Con ayuda del Teorema 5.7, obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 5.8. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $SF_n(X)$ es aposindético.*

Utilizando el Teorema 5.6, el Teorema 5.8 y el Corolario 4.8, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.9. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $SF_n(X)$ es finitamente aposindético.*

Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo. Sus comentarios valiosos mejoraron significativamente la calidad de este trabajo.

Bibliografía

- [1] Franco Barragán, *On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604
- [2] Franco Barragán, *Induced maps on n -fold symmetric product suspensions*, Topology Appl. 158 (2011), 1192–1205
- [3] Franco Barragán, *Aposyndetic properties of the n -fold symmetric product suspension of a continuum*, Glasnik Math. 49 (2014), no. 1, 179–193.
- [4] Bennett, *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pacific J. Math., 37 (1971), no. 3, 585–589.
- [5] Karol Borsuk y Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875–882.
- [6] Enrique Castañeda-Alvarado, *A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent*, Topology Proc., 23 (1998), Spring, 61–67.
- [7] Enrique Castañeda-Alvarado y Javier Sánchez-Martínez, *On the unicoherence of $F_n(X)$ and $SF_m^n(X)$ of continua*, Topology Proc., 42 (2013), 309–326.

-
- [8] Enrique Castañeda-Alvarado y Javier Sánchez-Martínez, *Spheres, symmetric products, and quotient of hyperspaces of continua*, Tsukuba Journal of Mathematics, 38 (2014), no. 1, 75–84.
- [9] Enrique Castañeda-Alvarado y Alejandro Illanes, *unicoherence of the n th-fold symmetric product suspension of a continuum*, Topology Proceedings, 46 (2015), 29–32.
- [10] Janusz Jerzy Charatonik y Alejandro Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (2006), 811–856.
- [11] Janusz Jerzy Charatonik y Sergio Macías, *Mappings of some hyperspaces*, JP J. Geom. Topol. 4 (1) (2004) 53–80.
- [12] D.W. Curtis, *A hyperspace retraction theorem for a class of half-line compactifications*, Topology Proc., 11 (1986), 29–64.
- [13] Tudor Ganea, *Symmetrische potenzen topologischer räume*, Math. Nachr., 11 (1954), 305–316.
- [14] David Herrera-Carrasco, Antonio Libreros-López y Fernando Macías-Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, Topology Appl., 341 (2024).
- [15] Alejandro Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, 25 (1985), 11–24.
- [16] Alejandro Illanes y Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [17] Alejandro Illanes, *Models of hyperspaces*, Topology Proc., 41 (2013), 39–64.
- [18] Kazimierz Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, 1968.
- [19] Sergio Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proceedings, 22 (1997), 281–296.

- [20] Sergio Macías, *On symmetric products of continua*, Topology and its Applications 92 (1999), 173–182.
- [21] Sergio Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology and its Applications, 109 (2001), 237–256.
- [22] Germán Montero-Rodríguez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías-Romero, *Finite graphs have unique n -fold symmetric product suspension*, Houston Journal Math., 48 (1) (2022) 205–225.
- [23] Sam Bernardo, Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [24] Sam Bernardo, Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [25] Gordon Thomas Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx

Índice de autores

- Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 139
- Brambila-Paz, Fernando, 83
- Bustamante, Jorge, 37
- Castañeda Roldán, Netzahualcoyotl Carlos,
107
- Guillén-Galván, Carlos, 58
- Hernández Morales, José Margarito, 107
- Herrera Carrasco, David, 139, 165
- López-Andrade, Carlos Alberto, 58
- Macías Romero, Fernando, 139, 165
- Martínez-Palacios, María Teresa Verónica, 83
- Ramírez Aparicio, Leonardo, 165
- Sáez Macegoza, José de Jesús, 5
- Torres Campos, José Daniel, 37
- Torres-Hernández, Anthony, 83
- Vilchis Montalvo, Iván Fernando, 5

Matemáticas y sus aplicaciones 22

Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco

16 de octubre de 2024

pdf

6 MB