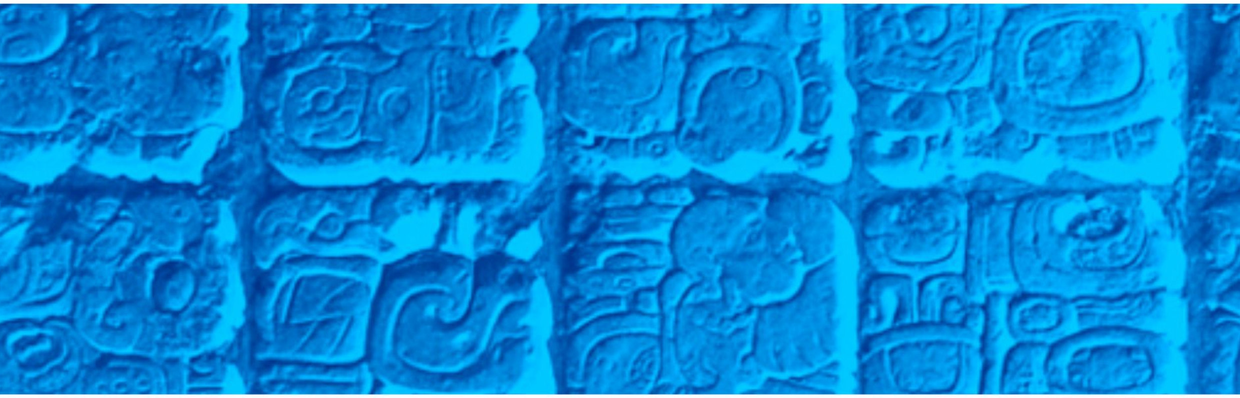


Matemáticas y sus aplicaciones 23

FERNANDO MACÍAS ROMERO
DAVID HERRERA CARRASCO
(coords.)

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Matemáticas y sus aplicaciones 23

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: Ma. Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Dirección General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2024
ISBN: 978-607-5914-57-2

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
www.publicaciones.buap.mx

Diseño de portada: Leonardo Ramírez Aparicio

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 23

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Contenido

Presentación 1

Álgebra

Capítulo 1. Módulos cíclicos propios y la propiedad (P) 5
Luis Enrique Pineda Ramírez, César Cejudo Castilla, Alejandro Alvarado García

1 Introducción 5
2 La *propiedad* (P) 6
3 Anillos artinianos y la *propiedad* (P) 12
4 Dualidades 14
5 K-álgebras de Artin y la *propiedad* (P) 25

Análisis Matemático

Capítulo 2. Conjuntos g-cerrados 43
Armando Martínez García

1 Introducción 43
2 Resultados generales 43
3 Conjuntos g-cerrados 50
4 Conjuntos g-cerrados en clases de espacios 61
5 Conjuntos g-abiertos 64

Capítulo 3. Implications, equivalence and special versions of the Arrow's Impossibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem 69

Bolivia Cuevas Otahola, Jesús Alonso Arriaga Hernández, Ramón Pino Pérez, María Monserrat Morín Castillo, José Jacobo Oliveros Oliveros

1 Introduction 69
2 Basic concepts of Impossibility and Manipulability . . . 70
3 Proof of the Equivalence between Arrow's and Gibbard Satterthwaite's theorems 77
4 Miscellany of problems/examples 82
5 Conclusions 89

Probabilidad y Estadística

Capítulo 4. Predicción del precio de la mezcla mexicana de crudo de exportación: modelo discreto vs. modelo continuo 97

Carlos Manuel García Remigio, Ambrosio Ortiz Ramírez

1 Introducción 97
2 Teoría de series de tiempo 100
3 Análisis y discusión de resultados 117
4 Conclusiones 127

Topología

Capítulo 5. Sobre la descomposición scs de un continuo y la construcción del cono topológico 133

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández

1 Introducción 133
2 Preliminares 134
3 Continuos 140
4 Espacios de descomposición 143

Capítulo 6. Algunas técnicas para la construcción de continuos 155
Daniel Domínguez Málaga, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

1 Ejemplos de continuos e intersecciones anidadas 155
2 Descomposición de continuos 166
3 Descomposiciones semi-continuas superiores 171
4 Continuos a partir de descomposiciones 176

Capítulo 7. Límite de conjuntos y teoremas de golpes a la frontera 189
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, José Alberto Ortega Becerril

1 Preliminares 189
2 Introducción 191
3 Límite inferior, límite superior y límite 202
4 Teoremas de convergencia 206
5 Golpes a la frontera 210

Índice de autores 219

Presentación

La Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) colabora activamente, junto con sus estudiantes, en el desarrollo de las «International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA)», una tradición que se ha llevado a cabo durante 20 años, celebrándose anualmente. En este evento, contamos con la participación de destacados matemáticos de nivel internacional. Esta es la razón que motiva la edición del libro que tienen en sus manos. La base fundamental ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso, emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es el amor por la Matemáticas lo que ha dado origen a este ejemplar, el cual nos brinda la sabiduría necesaria para compartir parte de nuestras actividades diarias.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo con las áreas temáticas correspondientes. Dichos capítulos han pasado por un riguroso proceso de arbitraje.

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, gentileza, dedicación y labor científica. Agradecemos profundamente a Leonardo Ramírez Aparicio por su apoyo en la edición de esta obra, y a Kevin Águila Méndez por el apoyo técnico en la edición de esta obra 23.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Álgebra

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 1

Módulos cíclicos propios y la propiedad $(\boldsymbol{P})$

Luis Enrique Pineda Ramírez[1], César Cejudo Castilla[1], Alejandro Alvarado García[2]
[1]FCFM, BUAP; [2]Facultad de Ciencias, UNAM

Resumen

En este capítulo se estudia de manera breve la estructura de anillos R que satisfacen la *propiedad* (P), es decir, de aquellos anillos R que satisfacen la condición de que sus R-módulos izquierdos cíclicos propios (R-módulos izquierdos cíclicos que no son isomorfos al módulo $_RR$) son imágenes homomorfas de R-módulos izquierdos inyectivos. El objetivo es exhibir que, para un anillo R, satisfacer la *propiedad* (P) es equivalente a ser cuasi-Frobenius, siempre que R sea una K-álgebra de Artin.

1 Introducción

A lo largo del actual capítulo, R denotará a un anillo asociativo con identidad. Los R-módulos se considerarán izquierdos, a no ser que explícitamente se diga lo contrario. Si M es un módulo, entonces $E(M)$ denota a su cápsula inyectiva, $zoc(M)$ denota al zoclo de M, $rad(M)$ denota al radical de M (en el caso de R, su radical es denotado por $J(R)$), $Le(M)$ denota a la longitud de M (en el sentido de existencia de series de composición en M), y si $N \leq M$, entonces $N \leq_{es} M$ denota que N es esencial en M y $N << M$ denota que N es superfluo en M. Además, R-Mod (Mod-R) denota a la categoría de R-módulos izquierdos (derechos) y R-*mod* (*mod*-R) denota a la categoría de R-módulos izquierdos (derechos) finitamente generados. El morfismo identidad en M es denotado por 1_M y, en general, los morfismos inclusión son denotados por ι. Un resultado conocido dentro de la teoría de módulos es que todo R-módulo se puede sumergir (además, esencialmente) en un R-módulo inyectivo, sin embargo, no siempre ocurre que todo R-módulo es imagen homomorfa (cociente) de algún R-módulo inyectivo. De hecho, los anillos que cumplen la propiedad de que todos sus módulos son imágenes homomorfas de módulos inyectivos son precisamente los anillos cuasi-Frobenius. Tal caracterización de los anillos cuasi-Frobenius lleva a preguntarse qué sucede cuando esto se restringe a los módulos cíclicos propios, es decir, preguntarse qué clases de anillos pueden ser caracterizadas por la propiedad de que sus módulos cíclicos propios son imágenes homomorfas de módulos inyectivos. En 2021, se publicó un artículo [8] de Elif Tuğçe Meriç llamado "When proper cyclics are homomorphic image of injectives" en el cual se estudian anillos R con la propiedad de que los R-módulos cíclicos propios son imágenes homomorfas de R-módulos inyectivos, siendo este trabajo la principal referencia para los resultados presentados en este capítulo, pues explicar estos con mayor profundidad es uno de los principales objetivos de este trabajo. Inicialmente, en la Sección 2 se definirá la *propiedad* (P) y se presentarán algunas primeras consecuencias de tal definición. En la Sección 3 se exhibirá un ejemplo importante de un anillo artiniano izquierdo que satisface (P) pero no es cuasi-Frobenius. En la Sección 4 se desarrollarán algunos resultados auxiliares sobre dualidades entre ciertas categorías de módulos, los cuales serán de suma importancia para la demostración del teorema principal del capítulo. Finalmente, en la Sección 5, se establecerá que para una K-álgebra de Artin es equivalente ser cuasi-Frobenius y satisfacer la *propiedad* (P).

2 La *propiedad* (P)

Un anillo R es cuasi-Frobenius (es decir, autoinyectivo izquierdo y noetheriano izquierdo) si y solo si los R-módulos son imágenes homomorfas de R-módulos inyectivos. Para demostrar este resultado se enuncia el siguiente teorema cuya demostración se puede consultar en [5, Teorema 13.6.1]:

Teorema 2.1 (Faith-Walker)**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(1) R es cuasi-Frobenius.

(2) Todo R-módulo izquierdo (derecho) proyectivo es inyectivo.

(3) Todo R-módulo izquierdo (derecho) inyectivo es proyectivo.

Corolario 2.2. *R es cuasi-Frobenius si y solo si los R-módulos son imágenes homomorfas de R-módulos inyectivos.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Dado que todo R-módulo libre es proyectivo y todo R-módulo proyectivo es inyectivo (Teorema 2.1), entonces todo R-módulo es cociente de un inyectivo ya que todo R-módulo es cociente de un módulo libre.
[$\Leftarrow$] Sea P un R-módulo proyectivo. Entonces, por hipótesis, $P \cong I/H$ con I un módulo inyectivo y $H \leq I$. Se sigue que I/H es proyectivo, lo cual implica que H es sumando directo de I y por ende existe $L \leq I$ tal que $H \oplus L = I$. Entonces $L \cong I/H \cong P$, de ahí que P es inyectivo ya que L lo es. Por lo tanto, todo R-módulo proyectivo es inyectivo, es decir, por el Teorema 2.1, R es cuasi-Frobenius. □

Definición 2.3. *Se dice que el R-módulo C es **cíclico propio** si C es cíclico y no es isomorfo a ${}_RR$.*

Inspirados en el Corolario 2.2, restringiendo la hipótesis a los módulos cíclicos propios, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.4. *Decimos que R satisface **propiedad (P)** si cada R-módulo izquierdo es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo. A menudo solo decimos que R satisface (P).*

Definición 2.5. *Sean M y N R-módulos. Se dice que M es N-**subinyectivo** si para cada morfismo $f : N \longrightarrow M$ existe un morfismo $\bar{f} : E(N) \longrightarrow M$ tal que $\bar{f}|_N = f$.*

Proposición 2.6. *Si N es un módulo proyectivo, entonces cada imagen homomorfa de un módulo N-subinyectivo es N-subinyectivo.*

Demostración. Supongamos que N es un módulo proyectivo y sean M un módulo N-subinyectivo, $g : M \longrightarrow X$ un epimorfismo y $f : N \longrightarrow X$ un morfismo. Dado que N es proyectivo, entonces existe un morfismo $h : N \longrightarrow M$ tal que $gh = f$. Como M es N-subinyectivo, entonces h se puede extender a un morfismo $\bar{h} : E(N) \longrightarrow M$. Entonces $g\bar{h} : E(N) \longrightarrow X$ cumple que para cada $n \in N$, $g\bar{h}(n) = g(\bar{h}(n)) = g(h(n)) = (gh)(n) = f(n)$. Por lo tanto $g\bar{h}|_N = f$, es decir, X es N-subinyectivo. □

Lema 2.7. *R satisface (P) si y solo si todo R-módulo cíclico propio es ${}_RR$-subinyectivo.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que R satisface (P) y sea C un R-módulo cíclico propio. Entonces C es la imagen homomorfa de algún módulo inyectivo E. Sea $f : {}_RR \longrightarrow E$ un morfismo. Como E es inyectivo, existe un morfismo $g : E({}_RR) \longrightarrow E$ tal que $g|_R = f$, es decir, g hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} {}_RR \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & E({}_RR) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ E. & \end{tikzcd}$$

Entonces, E es R-subinyectivo. Ya que ${}_RR$ es proyectivo y C es imagen homomorfa de E, entonces, por la Proposición 2.6, se sigue que C es ${}_RR$-subinyectivo.

[$\Leftarrow$] Supongamos que todo R-módulo cíclico propio es R-subinyectivo. Entonces, para cada cíclico propio $C = Rx$, el epimorfismo

$$\begin{aligned} \sigma\colon {}_RR &\to C \\ r &\mapsto rx \end{aligned}$$

se puede extender a un morfismo $\bar{\sigma} : E({}_RR) \longrightarrow C$. Dado que σ es epimorfismo, entonces $\bar{\sigma}$ también lo es y así C es imagen homomorfa del R-módulo inyectivo $E({}_RR)$. Por lo tanto, R satisface (P). $\square$

El siguiente lema nos da una útil descomposición de los módulos cíclicos propios, pero para ello será necesaria la siguiente definición:

Definición 2.8. *Sea M un R-módulo.*

(1) Un elemento $m \in M$ se dice que es un ***elemento singular*** *de M si el ideal izquierdo $ann_\ell(m) := \{r \in R | rm = 0\}$ es esencial en ${}_RR$. El conjunto de todos los elementos singulares de M es denotado por $Z(M)$.*

(2) Decimos que M es un módulo ***singular*** *si $Z(M) = M$.*

(3) Se dice que M es un módulo ***no-singular*** *si $Z(M) = 0$. En particular, decimos que R es un anillo* ***no-singular izquierdo*** *si $Z({}_RR) = 0$.*

Obsérvese que si $N \leq M$, entonces $Z(N) = N \cap Z(M)$. Además, $Z(Z(M)) = Z(M)$. Entonces se tiene que submódulos de módulos singulares son singulares y submódulos de módulos no-singulares son no-singulares.

Lema 2.9. *Si R es un anillo que satisface (P), entonces todo R-módulo cíclico propio es suma directa de un módulo singular y un módulo inyectivo.*

Demostración. Sea C un R-módulo cíclico propio. Dado que R satisface (P), existe un módulo inyectivo E y un epimorfismo $f : E \longrightarrow C$. Si A es una clausura esencial de $Kerf$ en E (es decir, A es un elemento máximo del conjunto $\{N \leq E | Kerf \leq_{es} N\}$, donde la demostración de la existencia de A es una consecuencia del lema de Zorn y se puede consultar en [9, Teorema 1.1.3]), entonces A es un sumando directo de E (ya que, por definición de A, no existe $U \leq E$ tal que $A \lneq U$ y $A \leq_{es} U$, es decir, A es un módulo cerrado en E y como E es inyectivo entonces E coincide con su cápsula inyectiva y por (3) de la Proposición 6.32 de [7] se tiene que A es sumando directo de E). Entonces existe $B \leq E$ tal que $E = A \oplus B$. Consideremos la función $\varphi : A \oplus B \longrightarrow (A/Kerf) \oplus B$ definida por $\varphi(a + b) = (a + Kerf, b)$. Entonces φ es un morfismo de R-módulos que evidentemente es suprayectivo. Es claro que $Kerf \leq Ker\varphi$ (pues $Kerf \leq A$) y si $x = a + b \in Ker\varphi$, con $a \in A$ y $b \in B$, entonces $(0 + Kerf, 0) = \varphi(x) = (a + Kerf, b)$, lo cual implica que $b = 0$ y $x = a \in Kerf$. Por lo tanto $Ker\varphi = Kerf$ y, por el primer teorema de isomorfismos, $(A \oplus B)/Kerf = (A \oplus B)/Ker\varphi \cong (A/Kerf) \oplus B$. Además, como f es epimorfismo, entonces $C \cong E/Kerf$, donde $E/Kerf = (A \oplus B)/Kerf \cong (A/Kerf) \oplus B$. Por la definición de A se tiene que $Kerf \leq_{es} A$, así que $A/Kerf$ es un módulo singular (ver [7, Ejemplos 7.6-(3)]). Además, B es inyectivo ya que es un sumando directo de E. Ya que $C \cong (A/Kerf) \oplus B$, se concluye que C es suma directa de un módulo singular y un módulo inyectivo. □

Corolario 2.10. *Si R es un anillo que satisface (P), entonces todo R-módulo simple proyectivo es inyectivo.*

Demostración. Sea C un R-módulo simple proyectivo. Entonces $Z(C) \neq C$ (ver [3, Proposición 1.24]) y, dado que C es simple, se sigue que $Z(C) = 0$, es decir, C es no-singular. Por otro lado, C es cíclico por ser simple y cumple uno (y solo uno) de los siguientes dos casos:

1. Si C es isomorfo a $_RR$, entonces $_RR$ es simple. Se sigue que $_RR$ es inyectivo (todo módulo sobre un anillo semisimple es inyectivo, [5, Corolario 8.2.2]) y por lo tanto C también lo es.

2. Si C no es isomorfo a ${}_RR$, entonces C es cíclico propio y, por el Lema 2.9, $C = S \oplus E$ donde S es un módulo singular y E es un módulo inyectivo. Como C es no-singular, entonces S es no-singular (recordar que $Z(S) = S \cap Z(C)$), lo cual implica que $S = 0$ (pues S es, simultáneamente, un módulo singular y no-singular). Entonces $C = E$ y se concluye que C es inyectivo.

$\square$

Corolario 2.11. *Sea R un anillo no-singular izquierdo que satisface (P). Entonces cada ideal izquierdo simple de R es inyectivo.*

Demostración. Sea S un ideal izquierdo simple de R. Dado que ${}_RR$ es no-singular, entonces S es no-singular y se sigue que S es proyectivo ([3, Corolario 1.25]). Por el Corolario 2.10, se concluye que S es inyectivo. $\square$

Lema 2.12. *Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Si existen ideales izquierdos A y B de R tales que ${}_RR = A \oplus B$, entonces A ó B es semisimple y el otro es isomorfo a ${}_RR$.*

Demostración. Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Además, supongamos que existen $A, B \leq_R R$ tales que ${}_RR = A \oplus B$. La demostración se hará en los siguientes dos pasos:
Paso 1. Vamos a demostrar que si alguno de A y B no es semisimple entonces el otro es inyectivo. Supongamos que A no es semisimple. Entonces existe un submódulo propio A' de A que no es un sumando directo de A. Nótese que ${}_RR/A'$ no es un módulo proyectivo, ya que en caso contrario se tendría que A' es sumando directo de ${}_RR$ y existiría $B' \leq_R R$ tal que ${}_RR = A' \oplus B'$, luego, por la ley modular, $A = A \cap R = A \cap (A' \oplus B') = A' \oplus (B' \cap A)$ lo que contradice que A' no es sumando directo de A. Entonces ${}_RR/A'$ no es isomorfo a ${}_RR$, es decir, R/A' es cíclico propio. Por el Lema 2.7, ${}_RR/A'$ es ${}_RR$-subinyectivo y en consecuencia el epimorfismo natural $\nu : {}_RR \longrightarrow {}_RR/A'$ se puede extender a un morfismo $\bar{\nu} : E({}_RR) \longrightarrow {}_RR/A'$ que también es epimorfismo ya que ν lo es. Ahora, como ${}_RR/A' = (A \oplus B)/A' \cong (A/A') \oplus B$ (donde el isomorfismo $(A \oplus B)/A' \cong (A/A') \oplus B$ se puede demostrar de manera análoga a como se demostró el isomorfismo $(A \oplus B)/Kerf \cong (A/Kerf) \oplus B$ en la demostración del Lema 2.9), entonces existe un epimorfismo $\varphi : {}_RR/A' \longrightarrow B$. Se sigue que el epimorfismo $\varphi\bar{\nu} : E({}_RR) \longrightarrow B$ se escinde (es decir, $Ker(\varphi\bar{\nu})$ es sumando directo de $E({}_RR)$) ya que B es proyectivo por ser sumando directo de ${}_RR$.

Entonces $E({}_RR) = Ker(\varphi\bar{\nu}) \oplus N$ para algún $N \leq E({}_RR)$. Por el primer teorema de isomorfismos, $B \cong E({}_RR)/Ker(\varphi\bar{\nu}) \cong N$. Así, B es inyectivo por ser isomorfo a N que es un sumando directo del módulo inyectivo $E({}_RR)$.
Paso 2. Ahora vamos a concluir que alguno de A y B es semisimple y el otro isomorfo a ${}_RR$. Nótese que alguno de A y B debe ser semisimple pues, en caso contrario, si A y B no son semisimples entonces el *Paso 1* implica que A y B son inyectivos y en consecuencia ${}_RR = A \oplus B$ es inyectivo, pero esto contradice a la hipótesis de que R no es autoinyectivo izquierdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que A es semisimple. Resta demostrar que B es isomorfo a ${}_RR$. Supongamos que B no es isomorfo a ${}_RR$ y lleguemos a una contradicción. Como $B \cong R/A$, entonces B es cíclico y como B no es isomorfo a ${}_RR$ se sigue que B es cíclico propio y debe ser la imagen homomorfa de algún módulo inyectivo E, así que existe un epimorfismo $f : E \longrightarrow B$. Dado que B es proyectivo (por ser sumando directo de ${}_RR$), entonces existe $H \leq E$ tal que $E = Kerf \oplus H$ y, por el primer teorema de isomorfismos, se tiene que $B \cong E/Kerf \cong H$. Entonces B es inyectivo por ser isomorfo a un sumando directo de E. Nótese que A también es cíclico propio ya que $A \cong_R R/B$, y A no puede ser isomorfo a ${}_RR$ pues, $A \cong_R R$ implica que ${}_RR$ sería semisimple y en consecuencia sería autoinyectivo izquierdo, pero esto contradice nuestra hipótesis sobre R. Ahora, como A es semisimple y proyectivo, entonces $Z(A)$ es semisimple y proyectivo (pues $Z(A)$ es un sumando directo de A). Si $Z(A) \neq 0$, entonces existe $S \leq Z(A)$ tal que S es simple. Obsérvese que S es singular y proyectivo (pues $Z(A)$ es semisimple, singular y proyectivo), lo cual no es posible (ver [3, Proposición 1.24]). Por lo tanto, $Z(A) = 0$, es decir, A es no-singular. Por el Lema 2.9, $A = N \oplus T$ con N singular y T inyectivo. Entonces N es no-singular (pues A es no-singular) y singular simultáneamente, de ahí que $N = 0$ y en consecuencia A es inyectivo. Dado que ${}_RR = A \oplus B$, donde A y B son inyectivos, entonces se tiene que ${}_RR$ es inyectivo, pero esto contradice la hipótesis de que R no es autoinyectivo izquierdo. Por lo tanto, B es isomorfo a ${}_RR$. □

Corolario 2.13. *Si R satisface (P) y no es autoinyectivo izquierdo, entonces todo ideal izquierdo inyectivo de R es semisimple.*

Demostración. Supongamos que R no es autoinyectivo izquierdo y que satisface (P). Sea I un ideal izquierdo inyectivo de R. Entonces, de la inyectividad de I se sigue que existe un ideal izquierdo J tal que ${}_RR = I \oplus J$. El Lema 2.12

implica que I es semisimple o isomorfo a ${}_RR$. Como R no es autoinyectivo izquierdo, I no es isomorfo a ${}_RR$. Por lo tanto, I es semisimple. $\square$

3 Anillos artinianos y la *propiedad* (P)

Esta sección tiene como objetivo exhibir un ejemplo de un anillo artiniano izquierdo que satisface (P) pero que no es cuasi-Frobenius. Para ello, a continuación se enuncia un teorema dentro de la clase de los anillos artinianos izquierdos, el cual caracteriza a los anillos que satisfacen la *propiedad* (P).

Teorema 3.1. *Supongamos que R es artiniano izquierdo. Entonces R satisface (P) si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*
(i) R es un anillo cuasi-Frobenius;
(ii) R es un anillo local tal que $J(R) = Z({}_RR)$ y

(a) $zoc({}_RR)$ es simple y ${}_RR/zoc({}_RR)$ es sumando directo de $E({}_RR)/zoc({}_RR)$, o

(b) $zoc({}_RR)$ es suma directa de dos módulos simples, y para cada ideal izquierdo simple $S \leq_R R$, se tiene que ${}_RR/S$ es inyectivo.

La demostración del Teorema 3.1 es considerablemente larga, sin embargo, si es de interés encontrarla de manera explícita se puede consultar en [9]. El siguiente ejemplo muestra la existencia de anillos R artinianos izquierdos, de cadena izquierdos (es decir, los ideales izquierdos de R están totalmente ordenados por la inclusión) tales que no son artinianos derechos y $zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. Estos tipos de anillos son usados para el Ejemplo 3.3, el cual es el motivo principal de esta sección.

Ejemplo 3.2. *Sea K un campo que contiene un subcampo L con la propiedad de que $dim_L K = \infty$ (la dimensión es de espacio vectorial) y tales que existe un isomorfismo de campos $\varphi : K \longrightarrow L$ (por ejemplo, $K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, ...)$ y $L = \mathbb{Q}(x_2, x_3, ...)$). Definimos un anillo $R = K \times K$ con las operaciones*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ y } (x, y)(x', y') = (\varphi(y')x + x'y, yy').$$

Entonces, haciendo los respectivos cálculos, se tiene que R es un anillo con neutros $(0, 0)$ y $(0, 1)$ para la suma y el producto, respectivamente. Ahora veamos que R tiene exactamente tres ideales izquierdos. Sea $0 \neq (x_0, y_0) \in R$ arbitrario pero fijo y sea $z := (x_0, y_0)$. Entonces tenemos los siguientes dos casos:

(i) *Supongamos que* $y_0 \neq 0$. *Se sigue que existen inversos multiplicativos* y_0^{-1} *y* $\varphi(y_0)^{-1}$ *en* K *de* y_0 *y* $\varphi(y_0)$, *respectivamente. Entonces* $(-\varphi(y_0)^{-1} x_0\ y_0^{-1}, y_0^{-1})(x_0, y_0) = (0, 1)$. *Por lo tanto,* Rz *contiene al neutro multiplicativo de* R, *de ahí que* $Rz =_R R$.

(ii) *Supongamos que* $y_0 = 0$. *Se sigue que* $x_0 \neq 0$ *y si* $(x, y) \in R$, *entonces* $(x, y)(x_0, y_0) = (x_0 y, 0) \in K \times \{0\} \leq_R R$. *Así,* $Rz \leq K \times \{0\}$. *A la inversa, si* $(x, 0) \in K \times \{0\}$, *entonces* $(x, x_0^{-1}x)(x_0, y_0) = (x, 0)$. *Entonces* $(x, 0) \in Rz$. *Por lo tanto* $K \times \{0\} = Rz$.

Dado que para cada $I \leq_R R$, $I = \sum_{m \in I} Rm$, *entonces de (i) y (ii) se sigue que los únicos ideales izquierdos de* R *son* $\{0\}$, $K \times \{0\}$ *y* ${}_RR$. *Veamos que* $K \times \{0\} = zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. *Como* R *tiene exactamente tres ideales izquierdos, es claro que* $K \times \{0\} = J(R) = zoc({}_RR)$. *Como* $R \neq 0$, *entonces* $Z({}_RR) \lneq_R R$ *(*$1 \notin Z({}_RR)$ *ya que* $ann_\ell(1) = \{0\}$ *y* $\{0\}$ *no es esencial en* ${}_RR$*). Si* $a := (1, 0) \in K \times \{0\}$, *entonces* $a^2 = (0, 0)$, *así que* $a \in ann_\ell(a)$. *Como* $a \neq (0, 0)$, *entonces* $ann_\ell(a) \neq \{(0, 0)\}$ *y* $ann_\ell(a) \neq_R R$, *es decir,* $ann_\ell(a) = K \times \{0\}$, *donde* $K \times \{0\} \leq_{es} {}_RR$ *(pues* R *solo tiene tres ideales izquierdos). Por lo tanto,* $(0, 0) \neq a \in Z({}_RR) \lneq_R R$, *de ahí que* $K \times \{0\} = Z({}_RR)$. *Entonces, hemos demostrado que* R *es artiniano izquierdo, de cadena izquierdo y* $zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. *Finalmente mostremos que* R *no es artiniano derecho. Para cada* $(x, y) \in R$, *se tiene que* $(x, y) \in ann_r(a) = ann_r((1, 0)) \Leftrightarrow (1, 0)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (\varphi(y)1 + x0, 0y) = (\varphi(y), 0) = (0, 0) \Leftrightarrow \varphi(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ *(donde* $ann_r(a) := \{r \in R | ar = 0\}$*). Entonces,* $K \times \{0\} = ann_r(a)$. *Ahora, para cada* $z \in K$, *sea* $\bar{z} := (z, 0) \in R$, *entonces* $\bar{z}R = \{(z, 0)(x, y) | (x, y) \in R\} = \{(\varphi(y)z, 0) | y \in K\} = \{(zl, 0) | l \in L\}$ *(donde la esta última igualdad se debe a que, en particular,* φ *es suprayectivo). Entonces, como L-módulos, se tiene que* $\bar{z}R \cong zL$. *Por otro lado, si* $ann_r(a)$ *es finitamente generado como R-módulo derecho, entonces existen* $z_1, ..., z_n \in K$ *tales que cada* $z_i \neq 0$ *y si* $\bar{z}_i := (z_i, 0)$, *entonces* $ann_r(a) = \bar{z}_1 R + ... + \bar{z}_n R$ *(recordar que* $ann_r(a) = K \times \{0\}$, *por ello los* $\bar{z}_i$ *tienen esa forma). Como se vio antes,* $\bar{z}_i R \cong z_i L$ *como L-módulos, así que para* $i = 1, ..., n$, *existen isomorfismos de L-módulos* $\lambda_i : z_i L \longrightarrow \bar{z}_i R$, *lo cual implica que existe un epimorfismo de L-módulos* $\lambda : \bigoplus_{i=1}^{n} z_i L \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i R$ *definido por* $\lambda(z_1 l_1, ..., z_n l_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z_i l_i)$. *Dado que* $\bigoplus_{i=1}^{n} z_i L \cong L^n$ *como L-módulos* *y* $\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i R = ann_r(a)$*, de* λ *se sigue que existe un epimorfismo de* L*-módulos* $L^n \twoheadrightarrow ann_r(a)$*, lo cual implica que* $ann_r(a) = K \times \{0\}$ *es finitamente generado como* L*-módulo. Pero* $K \cong K \times \{0\}$ *como* L*-módulos, entonces* K *es finitamente generado como* L*-módulo, pero esto contradice la hipótesis de que* $dim_L K = \infty$*. Por lo tanto,* $ann_r(a)$ *no es finitamente generado como* R*-módulo derecho, lo cual implica que* R *no es noetheriano derecho y en consecuencia no es artiniano derecho (pues todo anillo artiniano derecho es noetheriano derecho).*

4 Dualidades

En esta sección se abordan resultados auxiliares, pero de vital importancia, para la demostración del teorema principal de la siguiente sección (Teorema 5.17), los cuales son sobre dualidades entre ciertas categorías de módulos. Es prudente indicar que la notación de transformaciones naturales es tomada de [4], aunque suele ser una notación estándar.

Definición 4.1. *Una subcategoría* $\mathcal{A}$ *de una categoría* $\mathcal{B}$ *se dice que es una* ***subcategoría plena*** *si para cada* $M, N \in Ob(\mathcal{A})$ *(donde* $Ob(\mathcal{A})$ *denota a la clase de objetos de* $\mathcal{A}$*), se cumple que* $hom_{\mathcal{A}}(M, N) = hom_{\mathcal{B}}(M, N)$*.*

Definición 4.2. *Sean* C *y* $\mathcal{D}$ *subcategorías plenas de* R*-Mod y* S*-Mod, respectivamente. Se dice que el funtor covariante (o contravariante)* $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *es* ***aditivo*** *si para cada* $M, N \in Ob(\mathcal{C})$*, y para cada par de morfismos* $f, g : M \longrightarrow N$*, se cumple que*

$$T(f + g) = T(f) + T(g).$$

La definición de funtor aditivo es más general, sin embargo, los funtores aditivos que se considerarán en la sección son solo como en la Definición 4.2.

Definición 4.3. *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *categorías y* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *y* $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ *funtores contravariantes. Se dice que el par* (F, G) *es una* ***dualidad*** *entre* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *si* $GF \cong 1_{\mathcal{A}}$ *y* $FG \cong 1_{\mathcal{B}}$ *(*$1_{\mathcal{A}}$ *y* $1_{\mathcal{B}}$ *son funtores identidad).*

Observación 4.4. *Sean* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *subcategorías plenas de* R*-Mod y Mod-*S*,*

Es muy importante destacar que en el resto de la sección se utilizará constantemente la notación dada en la Observación 4.4.

Proposición 4.5. *Sean* $F : {}_R\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ *y* $G : \mathcal{D}_S \longrightarrow {}_R\mathcal{C}$ *funtores contravariantes aditivos tales que son una dualidad entre las respectivas subcategorías plenas* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *de* R*-Mod y Mod-*S*. Entonces para cada* $M_1, M_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ *y cada* $N_1, N_2 \in Ob(\mathcal{D}_S)$*,*

$$\begin{aligned} F_{M_1,M_2} \colon Hom_R(M_1, M_2) &\to Hom_S(F(M_2), F(M_1)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{N_1,N_2} \colon Hom_R(N_1, N_2) &\to Hom_S(G(N_2), G(N_1)) \\ g &\mapsto G(g) \end{aligned}$$

son isomorfismos de grupos abelianos. Además, $F(f)$ *es un monomorfismo (epimorfismo) en* $\mathcal{D}_S$ *si y solo si* f *es epimorfismo (monomorfismo) en* ${}_R\mathcal{C}$*. Análogamente,* $G(g)$ *es monomorfismo (epimorfismo) en* ${}_R\mathcal{C}$ *si y solo si* g *es epimorfismo (monomorfismo) en* $\mathcal{D}_S$*.*

La demostración de la Proposición 4.5 se puede consultar en [1, Proposición 23.3] o en [9, Proposición 4.2.5]. El siguiente lema es bastante técnico, pero muy importante para resultados posteriores, por lo que solo es enunciado, sin embargo, su prueba se puede consultar en [1, Lema 23.4] o en [9, Lema 4.2.6].

Lema 4.6. *Sean* $F : {}_R\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ *y* $G : \mathcal{D}_S \longrightarrow_R \mathcal{C}$ *funtores contravariantes aditivos tales que son una dualidad entre las subcategorías plenas* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *de* R*-Mod y Mod-*S*, respectivamente. Entonces con la notación de la Observación 4.4, los morfismos*

$$\alpha_{M,N} : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

$$\beta_{M,N} : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$

son isomorfismos de grupos abelianos. Además, si $M_1, M_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ *y* $N_1, N_2 \in Ob(\mathcal{D}_S)$*, entonces para cada*

$$\gamma \in Hom_S(N_1, F(M_1)),\ \delta \in Hom_S(F(M_2), N_2)$$

$$\bar{\gamma} \in Hom_R(M_1, G(N_1)),\ \bar{\delta} \in Hom_R(G(N_2), M_2)$$

$$f \in Hom_R(M_2, M_1),\ g \in Hom_S(N_2, N_1)$$

se cumplen las siguientes identidades: (1) $\alpha_{M_2,N_2}(F(f)\gamma g) = G(g)\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)f$*. (2)* $\beta_{M_1,N_1}(g\delta F(f)) = f\beta_{M_2,N_2}(\delta)G(g)$*. (3)* $\alpha^{-1}_{M_2,N_2}(G(g)\bar{\gamma}f) = F(f)\alpha^{-1}_{M_1,N_1}(\bar{\gamma})g$*. (4)* $\beta^{-1}_{M_1,N_1}(f\bar{\delta}G(g)) = g\beta^{-1}_{M_2,N_2}(\bar{\delta})F(f)$*. Finalmente,* $\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)$ *es monomorfismo (epimorfismo) en* ${}_R\mathcal{C}$ *si y solo si* γ *es epimorfismo (monomorfismo) en* $\mathcal{D}_S$ *y* $\beta_{M_2,N_2}(\delta)$ *es monomorfismo (epimorfismo) en* ${}_R\mathcal{C}$ *si y solo si* δ *es epimorfismo (monomorfismo) en* $\mathcal{D}_S$*.*

Notación. Sean M y N módulos tales que $N \leq M$. En los siguientes resultados del capítulo frecuentemente se usará la siguiente notación:

- $\nu_{M/N}$ denotará al epimorfismo natural $M \twoheadrightarrow M/N$.
- $\iota_{N\leq M}$ denotará al morfismo inclusión $N \hookrightarrow M$.

Proposición 4.7. *Sea* (F, G) *una dualidad entre las subcategorías plenas* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *de* R*-Mod y Mod-*S*, respectivamente, con* F *y* G *aditivos, donde las clases* $Ob({}_R\mathcal{C})$ *y* $Ob(\mathcal{D}_S)$ *son cerradas bajo submódulos, los monomorfismos y epimorfismos en* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *son también monomorfismos y epimorfismos, respectivamente, en* R*-Mod y Mod-*S*. Ahora, supongamos que* $M_1, M_2, M_3 \in Ob({}_R\mathcal{C})$*. Entonces una sucesión*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si la sucesión

$$0 \longrightarrow F(M_3) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \xrightarrow{F(f)} F(M_1) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Se tomará la notación de la Observación 4.4. [⇒] Supongamos que $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Por la Proposición 4.5, $F(f)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$ y $F(g)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$ (pues f es monomorfismo en R-Mod, así que en particular es monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. Similarmente, g es epimorfismo en R-Mod, así que en particular es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$), así que de la hipótesis se sigue que $F(f)$ es suprayectivo y $F(g)$ inyectivo. Resta demostrar en esta implicación que $KerF(f) = ImF(g)$. Obsérvese que $0 = F(0) = F(gf) = F(f)F(g)$ (donde $F(0) = 0$ es consecuencia de que F es aditivo), entonces $ImF(g) \leq KerF(f)$. Ahora, sea

$N = KerF(f)$. Entonces la composición de morfismos $F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}$ es igual al morfismo 0, de ahí que

$$\alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}) = \alpha_{M_1,N}(0) := G(0)\eta_{M_1}^{-1} = 0\eta_{M_1}^{-1} = 0 \tag{1}$$

(nótese que, por definición, para que los subíndices de $\alpha_{M_1,N}$ tengan sentido, se debe tener que el primer subíndice es objeto de ${}_R\mathcal{C}$ y el segundo de $\mathcal{D}_S$, donde $M_1 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y como $F(M_2) \in Ob(\mathcal{D}_S)$ y $N \leq F(M_2)$, la hipótesis de que $Ob(\mathcal{D}_S)$ es cerrada bajo submódulos implica que $N \in Ob(\mathcal{D}_S)$, así que no hay problema con los subíndices de $\alpha_{M_1,N}$) y, por la identidad (1) del Lema 4.6,

$$\begin{aligned} \alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}) = \alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}1_N) &= G(1_N)\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f \\ &= 1_{G(N)}\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f \\ &= \alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f. \end{aligned} \tag{2}$$

De (4.4) y (4.5) se sigue que $\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f = 0$ y por ende

$$Kerg = Imf \leq Ker(\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})). \tag{3}$$

Por hipótesis g es suprayectiva, así que existe un morfismo $h : M_3 \longrightarrow G(N)$ tal que el siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r, "\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})"] \arrow[d, "g"'] & G(N) \\
M_3 \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta (ver [5, Teorema 3.4.7]). Entonces $\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)}) = hg$ implica

$$\begin{aligned} \iota_{N\leq F(M_2)} = \alpha_{M_2,N}^{-1}(hg) = \alpha_{M_2,N}^{-1}(1_{G(N)}hg) &= \alpha_{M_2,N}^{-1}(G(1_N)hg) \\ &\overset{*}{=} F(g)\alpha_{M_3,N}^{-1}(h)1_N \\ &= F(g)\alpha_{M_3,N}^{-1}(h), \end{aligned} \tag{4}$$

donde la igualdad señalada con * se debe a la identidad (3) del Lema 4.6. Entonces, de (4.7) se tiene que

$$KerF(f) =: N = Im(\iota_{N\leq F(M_2)}) = Im(F(g)\alpha^{-1}_{M_3,N}(h)) \leq ImF(g).$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que la sucesión

$$0 \to F(M_3) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \xrightarrow{F(f)} F(M_1) \to 0 \tag{5}$$

es exacta. De manera similar a lo realizado en "[$\Rightarrow$]", al suponer que la sucesión en (4.8) es exacta entonces se tiene que la sucesión

$$0 \to GF(M_1) \xrightarrow{GF(f)} GF(M_2) \xrightarrow{GF(g)} GF(M_3) \to 0$$

es exacta. De la naturalidad del isomorfismo natural $\eta : GF \longrightarrow 1_{_R\mathcal{C}}$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & GF(M_1) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "\eta_{M_1}"'] & GF(M_2) \arrow[r, "GF(g)"] \arrow[d, "\eta_{M_2}"] & GF(M_3) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M_3}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M_3 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Dado que la fila superior de (4.9) es exacta y cada η_{M_i} con $i = 1, 2, 3$, es isomorfismo, entonces la fila inferior de (4.9) es exacta, es decir, la sucesión $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ es exacta. □

Lema 4.8. *Sean $_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S, respectivamente, tales que las clases $Ob(_R\mathcal{C})$ y $Ob(\mathcal{D}_S)$ son cerradas bajo submódulos, cerradas bajo cocientes y los monomorfismos y epimorfismos en $_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ son también monomorfismos y epimorfismo en R-Mod y Mod-S, respectivamente. Si (F, G) es una dualidad entre $_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ con F y G aditivos, entonces para cada $M \in Ob(_R\mathcal{C})$, la retícula de submódulos de M y la retícula de submódulos de $F(M)$ son anti-isomorfas. De manera análoga, se tiene que para cada $N \in Ob(\mathcal{D}_S)$, la retícula de submódulos de N y la retícula de submódulos de $G(N)$ son anti-isomorfas.*

Demostración. Para la demostración se adoptarán las notaciones de la Observación 4.4 y de la Proposición 4.5. Sea $M \in Ob(_R\mathcal{C})$. Recordar que $\mathscr{L}(_RM)$ y $\mathscr{L}(F(M)_S)$ denotan a las retículas de submódulos de M y de $F(M)$, respectivamente. Vamos a demostrar que existe una función invertible de $\mathscr{L}(_RM)$

a $\mathscr{L}(F(M)_S)$ que invierte el orden, cuya inversa también invierte el orden. Definimos la función

$$\begin{aligned} \Lambda_M \colon \mathscr{L}({}_RM) &\to \mathscr{L}(F(M)_S) \\ X &\mapsto Ker(F(\iota_{X\leq M})). \end{aligned}$$

Sean $X_1, X_2 \leq M$ tales que $X_2 \leq X_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_M(X_1) = KerF(\iota_{X_1\leq M}) \leq Ker(F(\iota_{X_2\leq X_1})F(\iota_{X_1\leq M})) = KerF(\iota_{X_1\leq M}\iota_{X_2\leq X_1}) \\ = KerF(\iota_{X_2\leq M}) = \Lambda_M(X_2) \end{aligned}$$

(donde es oportuno hacer notar que la hipótesis de que $Ob({}_R\mathcal{C})$ es cerrada bajo submódulos es clave, pues implica que $X_1, X_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y por ende tienen sentido expresiones como $F(\iota_{X_2\leq X_1})$). Por lo tanto Λ_M invierte orden. Ahora, definimos la función

$$\begin{aligned} \Gamma_M \colon \mathscr{L}(F(M)_S) &\to \mathscr{L}({}_RM) \\ N &\mapsto Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})). \end{aligned}$$

Sean $N_1, N_2 \leq F(M)$ tales que $N_2 \leq N_1$. Entonces
$\Gamma_M(N_1) = Ker(\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)})) \leq Ker(G(\iota_{N_2\leq N_1})\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)}))$

$$= Ker(G(\iota_{N_2\leq N_1})\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)})1_M) \overset{*}{=} Ker(\alpha_{M,N_2}(F(1_M)\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1}))$$

$$= Ker(\alpha_{M,N_2}(1_{F(M)}\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1})) = Ker(\alpha_{M,N_2}(\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1}))$$

$$= Ker(\alpha_{M,N_2}(\iota_{N_2\leq F(M)})) = \Gamma_M(N_2),$$

donde la igualdad señalada con * se debe a la identidad (1) del Lema 4.6. Por lo tanto, Γ_M invierte orden. Ahora sean $X \leq M$ y $N := \Lambda_M(X)$. Dado que $\nu_{M/X}$ es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (pues lo es en R-Mod), entonces $F(\nu_{M/X})$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$ (Proposición 4.5) y por hipótesis es monomorfismo en Mod-S, así que si $h := F(\nu_{M/X})|^{ImF(\nu_{M/X})}$ entonces h es isomorfismo y el triángulo

$$\begin{tikzcd} F(M/X) \arrow[r, "F(\nu_{M/X})"] \arrow[dr, "h"'] & F(M) \\ & ImF(\nu_{M/X}) \arrow[u, "\iota_{ImF(\nu_{M/X})\leq F(M)}"'] \end{tikzcd} \tag{7}$$

conmuta (recordar que $\iota_{ImF(\nu_{M/X})\leq F(M)}$ es el morfismo inclusión). Dado que $0 \to X \xrightarrow{\iota_{X\leq M}} M \xrightarrow{\nu_{M/X}} M/X \to 0$ es una sucesión exacta, entonces, por la Proposición 4.7, $0 \to F(M/X) \xrightarrow{F(\nu_{M/X})} F(M) \xrightarrow{F(\iota_{X\leq M})} F(X) \to 0$ es exacta, de ahí que $ImF(\nu_{M/X}) = KerF(\iota_{X\leq M}) =: N$ y el diagrama (4.10) se puede ver como

$$\begin{tikzcd} F(M/X) \arrow[r, "F(\nu_{M/X})"] \arrow[dr, "h"'] & F(M) \\ & N. \arrow[u, "\iota_{N\leq F(M)}"'] \end{tikzcd} \tag{8}$$

Ahora, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &G(h)\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)}) = G(h)\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})1_M \overset{*}{=} \alpha_{M,F(M/X)}(F(1_M)\iota_{N\leq F(M)}h) \\ &= \alpha_{M,F(M/X)}(1_{F(M)}\iota_{N\leq F(M)}h) = \alpha_{M,F(M/X)}(\iota_{N\leq F(M)}h) \overset{**}{=} \alpha_{M,F(M/X)}(F(\nu_{M/X})) \\ &= \alpha_{M,F(M/X)}(F(\nu_{M/X})1_{F(M/X)}1_{F(M/X)}) \overset{*}{=} G(1_{F(M/X)})\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X} \\ &= 1_{GF(M/X)}\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X} = \alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X}, \end{aligned} \tag{9}$$

donde las igualdades señaladas con * se deben a la identidad (1) del Lema 4.6 y la igualdad señalada con ** se debe al triángulo conmutativo de (4.11). Dado que h es isomorfismo (en R-Mod y por ende en ${}_R\mathcal{C}$) entonces $G(h)$ es isomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (y por tanto es isomorfismo en R-Mod). Por el Lema 4.6, $\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})$ es bimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (es decir, epimorfismo y monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$) ya que $1_{F(M/X)}$ es monomorfismo y epimorfismo en $\mathcal{D}_S$, entonces la hipótesis implica que $\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})$ es bimorfismo en R-Mod, es decir, es isomorfismo en R-Mod (y por ende también en ${}_R\mathcal{C}$). Entonces

$$\begin{gathered} Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})) \overset{*}{=} Ker(G(h)\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})) \overset{**}{=} \\ Ker(\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X}) \overset{*}{=} Ker\nu_{M/X} = X, \end{gathered}$$

donde las igualdades señaladas con * se deben, respectivamente, a que $G(h)$ y $\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})$ son isomorfismos, mientras que la igualdad señalada con ** se debe a (4.12). Por lo tanto,

$$\Gamma_M\Lambda_M(X) = \Gamma_M(N) = Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})) = X. \tag{10}$$

Ahora, sean $N \leq F(M)$ y $X := \Gamma_M(N)$. Dado que $\iota_{N\leq F(M)}$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$, entonces $\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})$ es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (Lema 4.6) y por hipótesis es epimorfismo en R-Mod. Por el primer teorema de isomorfismos, existe un isomorfismo $\gamma : M/X \longrightarrow G(N)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})"] \arrow[d, "\nu_{M/X}"'] & G(N) \\ M/X \arrow[ur, dashed, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \tag{11}$$

conmuta. Entonces, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &\iota_{N\leq F(M)} \overset{*}{=} \alpha^{-1}_{M,N}(\gamma\nu_{M/X}) = \alpha^{-1}_{M,N}(1_{G(N)}\gamma\nu_{M/X}) = \alpha^{-1}_{M,N}(G(1_N)\gamma\nu_{M/X}) \\ &\overset{**}{=} F(\nu_{M/X})\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma)1_N = F(\nu_{M/X})\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma), \end{aligned} \tag{12}$$

donde la igualdad señalada con * se debe a (4.14) y la igualdad señalada con ** se debe a la identidad (3) del Lema 4.6. Como $\gamma = \alpha_{M/X,N}(\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma))$ con γ isomorfismo (en particular, γ es monomorfismo y epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$), entonces el Lema 4.6 implica que $\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma)$ es bimorfismo (monomorfismo y epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ y entonces por hipótesis es isomorfismo en R-Mod, entonces de (4.15) se sigue que $Im(\iota_{N\leq F(M)}) = Im(F(\nu_{M/X})\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma)) = ImF(\nu_{M/X})$. Por la Proposición 4.7,

$$0 \to F(M/X) \xrightarrow{F(\nu_{M/X})} F(M) \xrightarrow{F(\iota_{X\leq M})} F(X) \to 0$$

es una sucesión exacta, así que $KerF(\iota_{X\leq M}) = ImF(\nu_{M/X})$. Entonces

$$\Lambda_M\Gamma_M(N) = \Lambda_M(X) := KerF(\iota_{X\leq M}) = ImF(\nu_{M/X}) = Im(\iota_{N\leq F(M)}) = N. \tag{13}$$

De (4.13) y (4.16) se sigue que Λ_M es biyectiva y su inversa es Γ_M. Como Λ_M y Γ_M invierten orden, se concluye que Λ_M es un anti-isomorfismo de retículas. $\square$

Corolario 4.9. *Supongamos que tenemos las hipótesis del Lema 4.8. Entonces, para cada $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$, M es de longitud finita si y solo si $F(M)$ es* *de longitud finita. Además, $Le(M) = Le(F(M))$. Por otro lado, M es inescindible si y solo si $F(M)$ es inescindible. Tales afirmaciones son válidas si consideramos a $N \in Ob(\mathcal{D}_S)$ en lugar de M y a G en lugar de F.*

Demostración. Sea $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$. Por el Lema 4.8, $\mathscr{L}({}_RM)$ y $\mathscr{L}(F(M)_S)$ son anti-isomorfas, así que

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq ... \leq M_n = M$$

es una serie de composición en M si y solo si, bajo la notación del Lema 4.8,

$$0 = \Lambda_M(M) = \Lambda_M(M_n) \leq \Lambda_M(M_{n-1}) \leq ... \leq \Lambda_M(M_0) = \Lambda_M(0) = F(M)$$

es una serie de composición en $F(M)$ (nótese que, en efecto, $0 = \Lambda_M(M)$, pues $\Lambda_M(M) = Ker(F(\iota_{M\leq M})) = Ker(F(1_M)) = Ker(1_{F(M)}) = 0$; además, $F(\iota_{0\leq M}) : F(M) \longrightarrow F(0)$, donde $F(0) = 0$ ya que F aditivo, así que $\Lambda_M(0) := KerF(\iota_{0\leq M}) = F(M)$), de ahí que M es de longitud finita si y solo si $F(M)$ es de longitud finita y se cumple que $Le(M) = Le(F(M))$. Por otro lado, M no es inescindible si y solo si $\mathscr{L}({}_RM)$ tiene una subretícula de la forma

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
M_1 \arrow[dr] & & M_2 \arrow[dl] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y esto ocurre si y solo si

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & F(M) = \Lambda_M(0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Lambda_M(M_1) \arrow[dr] & & \Lambda_M(M_2) \arrow[dl] \\
 & 0 = \Lambda_M(M) &
\end{tikzcd}$$

es una subretícula de $\mathscr{L}(F(M)_S)$, es decir, si y solo si $F(M)$ no es inescindible. $\square$

Proposición 4.10. *Sean ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S, respectivamente. Si (F, G) es una dualidad entre ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ con F y G aditivos, entonces M es inyectivo (resp. proyectivo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(M)$ es proyectivo (resp. inyectivo) en $\mathcal{D}_S$. Similarmente, N es inyectivo (resp. proyectivo) en $\mathcal{D}_S$ si y solo si $G(N)$ es proyectivo (resp. inyectivo) en ${}_R\mathcal{C}$.*

Demostración. Se mostrará que M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$; la afirmación dual se prueba de manera similar. La demostración hará uso de la notación de la Observación 4.4.
[$\Rightarrow$] Supongamos que M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$. Cabe señalar que M no necesariamente es inyectivo en R-Mod. Sean $\lambda : F(M) \longrightarrow N_2$ un morfismo en $\mathcal{D}_S$ y $\alpha : N_1 \longrightarrow N_2$ un epimorfismo en $\mathcal{D}_S$. Por la Proposición 4.5 se tiene que $G(\alpha)$ es un monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$, entonces como M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$ existe un morfismo $\gamma : G(N_1) \longrightarrow M$ tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} G(N_2) \arrow[rr, "G(\alpha)"] \arrow[d, "G(\lambda)"'] & & G(N_1) \arrow[ddll, dashed, "\gamma"] \\ GF(M) \arrow[d, "\eta_M"'] & & \\ M & & \end{tikzcd} \tag{14}$$

donde η_M es un isomorfismo ya que $\eta : GF \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{C}}$ es un isomorfismo natural. Ahora definimos $\rho : G(N_1) \longrightarrow GF(M)$ como $\rho := \eta_M^{-1}\gamma$. De (4.17) obtenemos el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G(N_2) \arrow[r, "G(\alpha)"] \arrow[d, "G(\lambda)"'] & G(N_1) \arrow[dl, "\rho"] \\ GF(M). & \end{tikzcd} \tag{15}$$

Aplicando F a (4.18) se obtiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & FGF(M) \arrow[dl, "F(\rho)"'] \arrow[d, "FG(\lambda)"] \\ FG(N_1) \arrow[r, "FG(\alpha)"'] & FG(N_2). \end{tikzcd} \tag{16}$$

Dado que $\epsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}_S}$ es un isomorfismo natural, se tienen los siguientes dos diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} FGF(M) \arrow[r, "\epsilon_{F(M)}"] \arrow[d, "FG(\lambda)"'] & F(M) \arrow[d, "\lambda"] \\ FG(N_2) \arrow[r, "\epsilon_{N_2}"'] & N_2 \end{tikzcd} \tag{17}$$

$$\begin{tikzcd} FG(N_1) \arrow[r, "\epsilon_{N_1}"] \arrow[d, "FG(\alpha)"'] & N_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ FG(N_2) \arrow[r, "\epsilon_{N_2}"] & N_2. \end{tikzcd} \tag{18}$$

Sea $\beta : F(M) \longrightarrow N_1$ definido como $\beta := \epsilon_{N_1} F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)}$. Entonces de (4.19), (4.20) y (4.21) se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha\beta = \alpha\epsilon_{N_1} F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} &= (\alpha\epsilon_{N_1})F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\epsilon_{N_2} FG(\alpha))F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} \\ &= \epsilon_{N_2}(FG(\alpha)F(\rho))\epsilon^{-1}_{F(M)} = \epsilon_{N_2} FG(\lambda)\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\epsilon_{N_2} FG(\lambda))\epsilon^{-1}_{F(M)} \\ &= (\lambda\epsilon_{F(M)})\epsilon^{-1}_{F(M)} = \lambda, \end{aligned}$$

es decir, se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & F(M) \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\lambda"] \\ N_1 \arrow[r, "\alpha"'] & N_2. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$. Sean $\theta : M_1 \longrightarrow M$ un morfismo en ${}_R\mathcal{C}$ y $\mu : M_1 \longrightarrow M_2$ un monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. Por la Proposición 4.5, se tiene que $F(\mu)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$, entonces como $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$ se sigue que existe un morfismo $\sigma : F(M) \longrightarrow F(M_2)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & F(M) \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "F(\theta)"] \\ F(M_2) \arrow[r, "F(\mu)"'] & F(M_1) \end{tikzcd} \tag{19}$$

conmuta. Aplicando G a (4.22) se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GF(M_1) \arrow[r, "GF(\mu)"] \arrow[d, "GF(\theta)"'] & GF(M_2) \arrow[dl, "G(\sigma)"] \\ GF(M). & \end{tikzcd} \tag{20}$$

Dado que $\eta : GF \longrightarrow 1_{_R\mathcal{C}}$ es un isomorfismo natural, entonces tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} GF(M_1) \arrow[r, "\eta_{M_1}"] \arrow[d, "GF(\theta)"'] & M_1 \arrow[d, "\theta"] \\ GF(M) \arrow[r, "\eta_M"] & M \end{tikzcd} \tag{21}$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\eta_{M_1}^{-1}"] \arrow[d, "\mu"] & GF(M_1) \arrow[d, "GF(\mu)"] \\ M_2 \arrow[r, "\eta_{M_2}^{-1}"] & GF(M_2) \end{tikzcd} \tag{22}$$

Sea $\delta : M_2 \longrightarrow M$ definido como $\delta := \eta_{_M} G(\sigma)\eta_{M_2}^{-1}$. Entonces de (4.23), (4.24) y (4.25) se tiene $\delta\mu = (\eta_{_M} G(\sigma)\eta_{M_2}^{-1})\mu = \eta_{_M} G(\sigma)(\eta_{M_2}^{-1}\mu) = \eta_{_M} G(\sigma)(GF(\mu)\eta_{M_1}^{-1}) = \eta_{_M}(G(\sigma)GF(\mu))\eta_{M_1}^{-1} = \eta_{_M} GF(\theta)\eta_{M_1}^{-1} = (\eta_{_M} GF(\theta))\eta_{M_1}^{-1} = (\theta\eta_{M_1})\eta_{M_1}^{-1} = \theta$, es decir, se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta"'] & M_2 \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$. $\square$

5 K-álgebras de Artin y la *propiedad* (P)

En esta sección se presenta el resultado más importante del capítulo, el cual afirma que los anillos que son K-álgebras de Artin satisfacen (P) si y solo si son cuasi-Frobenius. En el Ejemplo 3.3 se vio que tal equivalencia no es verdadera en general.

Definición 5.1. *Sea K un anillo conmutativo con identidad. El anillo R, junto con un morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, es una* ***$K$-álgebra*** *si el subanillo $\varphi(K)$ de R está contenido en el centro de R.*

La siguiente Proposición no es difícil de demostrar, así que solo se enuncia debido a que será útil en los siguiente resultados.

Proposición 5.2. *Sea R una K-álgebra junto con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$. Entonces todo R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) M es también un K-módulo, con la multiplicación por elementos de K definida de la siguiente manera:*

$$\forall k \in K, \forall m \in M\colon km := \varphi(k)m \text{ (respectivamente para el caso derecho, } km := m\varphi(k)).$$

En consecuencia, todo morfismo de R-módulos izquierdos o derechos es también morfismo de K-módulos.

Definición 5.3. *Sea R, con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, una K-álgebra. Consideremos a R como K-módulo tal como en la Proposición 5.2. Entonces, se dice que R es una* ***K-álgebra de Artin*** *si K es un anillo artiniano y R es un K-módulo finitamente generado.*

Proposición 5.4. *Si R es una K-álgebra de Artin, entonces R es artiniano.*

Demostración. Dado que R es finitamente generado como K-módulo con K artiniano, entonces R es artiniano como K-módulo [5, Corolario 6.1.3]. Por la Proposición 5.2, todo ideal izquierdo y todo ideal derecho de R es un K-módulo, así que cualquier cadena ascendente de ideales izquierdos o de ideales derechos de R es, a su vez, una cadena ascendente de K-submódulos de R que se estaciona por ser R un K-módulo artiniano. Por lo tanto, R es artiniano izquierdo y artiniano derecho, es decir, R es artiniano. □

Observación 5.5. *Si K es un anillo conmutativo artiniano, entonces $K/J(K)$ es un anillo artiniano, así que K es semilocal (ver [6 , Definición 20.1]). Como K es conmutativo, entonces tiene un número finito de ideales máximos (ver [6, Proposición 20.2]). Entonces solo hay un número finito de clases de isomorfismo de K-módulos simples, pues todo K-módulo simple es isomorfo a $K/\mathfrak{M}$ con $\mathfrak{M}$ un ideal máximo de K. Sea $\{T_1, ..., T_n\}$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de los K-módulos* *simples. Como K es artiniano, todo K-módulo no cero inyectivo e inescindible es la cápsula inyectiva de un K-módulo simple y no puede contener más de un K-módulo simple (ver [5, Corolario 6.6.3]). Se sigue que hay un número finito de clases de isomorfismos de K-módulos no cero inyectivos e inescindibles, donde un conjunto de representantes de tales clases de isomorfismo es $\{E(T_1), ..., E(T_n)\}$. Entonces se tiene el siguiente K-módulo inyectivo:*

$$E_K := \bigoplus_{i=1}^{n} E(T_i).$$

Observación 5.6. *A partir de ahora y en el resto de la sección, K denotará a anillo artiniano conmutativo con identidad y R denotará a una K-álgebra de Artin. Además, por el resto del capítulo, se trabajará constantemente con la notación de la Observación 5.5, principalmente con el K-módulo E_K.*

Observación 5.7. *Dado que K es conmutativo, entonces para cada par de K-módulos M y N se tiene que $Hom_K(M, N)$ es un K-módulo, donde $(kf)(m) := f(km)$ para cada $k \in K$, cada $f \in Hom_K(M, N)$ y cada $m \in M$. Entonces para cada K-módulo A se tiene el funtor*

$$Hom_K(A, \_\,) : K\text{-}Mod \longrightarrow K\text{-}Mod$$

y el funtor contravariante

$$Hom_K(\_\,, A) : K\text{-}Mod \longrightarrow K\text{-}Mod,$$

donde se enfatiza que el codominio de tales funtores Hom_K es K-Mod, en lugar de la categoría de grupos abelianos (ver [10, Proposición 2.4]).

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [2, Teorema 3.1]

Teorema 5.8. *Sea X un K-módulo finitamente generado. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *$Hom_K(X, E_K)$ es de longitud finita y $Le(Hom_K(X, E_K)) = Le(X)$.*

(b) *La función $\phi : X \longrightarrow Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ definida por $\phi(a) = \phi_a$ para cada $a \in X$, donde $\phi_a(f) = f(a)$ para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$, es un isomorfismo de K-módulos.*

Lema 5.9. *Sea M un R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) y supongamos que el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$ es el que hace a R una K-álgebra de Artin. Si consideramos a M como un K-módulo como en la Proposición 5.2, entonces M es finitamente generado como R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) si y solo si M es finitamente generado como K-módulo.*

Demostración. Primero, notemos que como R es finitamente generado como K-módulo, entonces $R = \sum_{j=1}^{t} Kr_j$ para algunos $r_1, ..., r_t \in R$. Se demostrará el caso cuando M es un R-módulo izquierdo; la demostración es similar en el caso en el que M es un R-módulo derecho. [$\Rightarrow$] Supongamos que $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$ para algunos $m_1, ..., m_n \in M$. Si $m \in M$, entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in R$ tales que

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i. \tag{23}$$

Se sigue que para cada λ_i, con $i \in \{1, ..., n\}$, existen $k_{i,1}, ..., k_{i,t} \in K$ tales que

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{t} k_{i,j} r_j = \sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j}) r_j. \tag{24}$$

De (5.1) y (5.2) se tiene que $m = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j}) r_j) m_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} (\varphi(k_{i,j}) r_j) m_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j})(r_j m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} k_{i,j}(r_j m_i)$. Por lo tanto, M como K-módulo está generado por el conjunto $\{r_j m_i | i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., t\}$. [$\Leftarrow$] Supongamos que $M = \sum_{i=1}^{n} Km_i$ para algunos $m_1, ..., m_n \in M$. Si $m \in M$, entonces existen $k_1, ..., k_n \in K$ tales que $m = \sum_{i=1}^{n} k_i m_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i) m_i \in \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Por lo tanto $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$, es decir, M es finitamente generado como R-módulo. $\square$

Proposición 5.10. *Sea X un R-módulo izquierdo finitamente generado. Por la Proposición 5.2, X es un K-módulo. Entonces, $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho finitamente generado con la multiplicación por elementos de*

R definida por:

$$\begin{aligned} fr\colon X &\to E_K \\ a &\mapsto f(ra) \end{aligned}$$

para cada $r \in R$ y cada $f \in Hom_K(X, E_K)$.

Demostración. Sean $f \in Hom_K(X, E_K)$ y $r \in R$. Primero vamos a mostrar que $fr \in Hom_K(X, E_K)$. Si $a, b \in X$ y $k \in K$, entonces se tiene lo siguiente:

- $(fr)(a+b) = f(r(a+b)) = f(ra+rb) = f(ra)+f(rb) = (fr)(a)+(fr)(b)$.
- $(fr)(ka) = f(r(ka)) = f(r(\varphi(k)a)) = f((r\varphi(k))a) \overset{*}{=} f((\varphi(k)r)a) = f(\varphi(k)(ra)) = f(k(ra)) = kf(ra) = k(fr)(a)$,

donde la igualdad señalada con * se debe a que, por definición, $\varphi(K)$ está contenido en el centro de R. Por lo tanto, $fr \in Hom_K(X, E_K)$. Ahora veamos que, con la multiplicación por elementos de R propuesta, $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho. Sean $f, g \in Hom_K(X, E_K)$ y $r, s \in R$. Entonces para cada $a \in X$ se cumple lo siguiente:

- $((fr)s)(a) = (fr)(sa) = f(r(sa)) = f((rs)a) = (f(rs))(a)$.
- $(f1_R)(a) = f(1_R a) = f(a)$.
- $(f(r+s))(a) = f((r+s)a) = f(ra+sa) = f(ra) + f(sa) = (fr)(a) + (fs)(a) = (fr+fs)(a)$.
- $((f+g)r)(a) = (f+g)(ra) = f(ra) + g(ra) = (fr)(a) + (gr)(a) = (fr+gr)(a)$.

Por lo tanto $(fr)s = f(rs)$, $f1_R = f$, $f(r+s) = fr + fs$ y $(f+g)r = fr + gr$, así que $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho (pues es fácil ver que $Hom_K(X, E_K)$ es un grupo abeliano). Finalmente, se demostrará que $Hom_K(X, E_K)$ es finitamente generado como R-módulo derecho. Dado que, por hipótesis, X es un R-módulo izquierdo finitamente generado, entonces X es finitamente generado como K-módulo (Lema 5.9). Claramente, como K es conmutativo, $Hom_K(X, E_K)$ tiene una estructura "natural" de K-módulo (si $k \in K$, $f \in Hom_K(X, E_K)$), entonces kf se define por $(kf)(a) = f(ka)$

para cada $a \in X$). Por el Teorema 5.8, $Hom_K(X, E_K)$ con su estructura "natural" de K-módulo es de longitud finita, lo cual implica que, en particular, $Hom_K(X, E_K)$ es noetheriano (como K-módulo), de ahí que $Hom_K(X, E_K)$ con su estructura "natural" de K-módulo es finitamente generado. Sin embargo, como hemos demostrado hasta este punto, $Hom_K(X, E_K)$ tiene estructura de R-módulo derecho, así que por la Proposición 5.2, $Hom_K(X, E_K)$ tiene una estructura de K-módulo que es inducida por el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$. Obsérvese que para $Hom_K(X, E_K)$, su estructura "natural" de K-módulo y su estructura de K-módulo inducida por φ coinciden, pues si $f \in Hom_K(X, E_K)$, $k \in K$ y $a \in X$ entonces se tiene lo siguiente:

- En la estructura "natural" de K-módulo de $Hom_K(X, E_K)$ se tiene que $(kf)(a) = f(ka) = f(\varphi(k)a)$ (pues por la Proposición 5.2, X es K-módulo vía el morfismo $\varphi : K \longrightarrow R$, donde $ka := \varphi(k)a$ para cada $a \in X$ y cada $k \in K$).

- En la estructura de K-módulo de $Hom_K(X, E_K)$ inducida por φ, considerando a $Hom_K(X, E_K)$ como R-módulo derecho con la operación propuesta en el enunciado de esta proposición, se tiene que $(kf)(a) = (f\varphi(k))(a) = f(\varphi(k)a)$.

Por lo tanto, para $Hom_K(X, E_K)$ se tiene que su estructura "natural" de K-módulo y su estructura de K-módulo inducida por φ coinciden. Dado que $Hom_K(X, E_K)$ en su estructura "natural" de K-módulo es finitamente generado, entonces $Hom_K(X, E_K)$ con su estructura de K-módulo inducida por φ es finitamente generado; el Lema 5.9 garantiza que $Hom_K(X, E_K)$ es finitamente generado como R-módulo derecho. $\square$

También se tiene un resultado simétrico al de la Proposición 5.10.

Proposición 5.11. *Sea X un R-módulo derecho finitamente generado. Entonces $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado con la multiplicación por elementos de R definida por:*

$$\begin{aligned} rf\colon X &\to E_K \\ a &\mapsto f(ar), \end{aligned}$$

para cada $r \in R$ y cada $f \in Hom_K(X, E_K)$.

Proposición 5.12. *La categoría R-mod (respectivamente mod-R) es cerrada bajo submódulos y cerrada bajo cocientes. Además, los monomorfismo en R-mod (respectivamente en mod-R) son inyectivos y los epimorfismos en R-mod (respectivamente en mod-R) son suprayectivos.*

Demostración. Sea M un R-módulo izquierdo finitamente generado y $N \leq M$. Por la Proposición 5.4, R es artiniano y en consecuencia es noetheriano, así que M es noetheriano y por ende N es finitamente generado. Es claro que cocientes de módulos finitamente generados son finitamente generados. Ahora, sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ un morfismo de R-módulos izquierdos con M_1 y M_2 finitamente generados. Supongamos que f es monomorfismo en *R-mod* y que $f(x) = f(y)$ con $x, y \in M_1$. Sea $z := x - y$. Consideremos a los morfismos $g_1, g_2 : Rz \longrightarrow M_1$, donde g_1 es el morfismo inclusión y g_2 es el morfismo cero. Entonces, para cada $r \in R$, se tiene que

$$f(g_1(rz)) = f(rz) = rf(z) = rf(x - y) = r0 = 0 = f(0) = f(g_2(rz)),$$

es decir, $fg_1 = fg_2$, lo cual implica que $g_1 = g_2$ (pues f es monomorfismo en R-mod). Se sigue que $z = g_1(z) = g_2(z) = 0$, es decir, $z = 0$, o bien, $x = y$. Ahora supongamos que f es epimorfismo en *R-mod*. Sean $\nu : M_2 \longrightarrow M_2/Imf$ el epimorfismo natural y $\gamma : M_2 \longrightarrow M_2/Imf$ el morfismo cero. Entonces ν y γ son morfismos en *R-mod* tales que $\nu f = 0 = \gamma f$. Por la hipótesis se sigue que $\nu = \gamma$, es decir, $M_2 = Imf$. $\square$

Observación 5.13. *Sea M un módulo inyectivo en R-mod. Como R es artiniano por ser K-álgebra de Artin, entonces R es noetheriano y por ende todo ideal izquierdo no cero I de R es finitamente generado. Entonces para cada morfismo $f : I \longrightarrow M$, donde I es un ideal izquierdo de R, la inyectividad de M en R-mod implica que existe un morfismo $h :_R R \longrightarrow M$ tal que el siguiente triángulo conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & {}_R R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Por el criterio de Baer, M también es inyectivo en R-Mod. Similarmente se tiene que si un módulo es inyectivo en mod-R entonces también es inyectivo en Mod-R.

Ahora, supongamos que P es proyectivo en R-mod. Sean $\beta : B \longrightarrow C$ un epimorfismo en R-Mod y $\psi : P \longrightarrow C$ un morfismo de R-módulos izquierdos. Para algún $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda : R^n \longrightarrow P$ un epimorfismo en R-Mod (que, en particular, debe ser epimorfismo en R-mod), pues P es finitamente generado. Dado que R^n es finitamente generado y P proyectivo en R-mod, entonces existe un morfismo $\gamma : P \longrightarrow R^n$ tal que $\lambda\gamma = 1_P$. Ahora, como R^n es proyectivo en R-Mod, entonces existe $\kappa : R^n \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& R^n \arrow[d, "\lambda"] \arrow[ddl, dashed, "\kappa"'] \\
& P \arrow[d, "\psi"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha : P \longrightarrow B$ definido como $\alpha := \kappa\gamma$. Entonces,

$$\beta\alpha = \beta\kappa\gamma = \psi\lambda\gamma = \psi 1_p = \psi.$$

Por lo tanto, P también es proyectivo en R-Mod.

Observación 5.14. *Se define el siguiente funtor contravariante aditivo: $D_\ell : R\text{-mod} \longrightarrow \text{mod-}R$.*

- *En objetos: $D_\ell(X) = Hom_K(X, E_K)$ para cada $X \in Ob(R\text{-mod})$, donde $Hom_K(X, E_K)$ es R-módulo derecho finitamente generado tal como en la Proposición 5.10.*

- *En morfismos: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en R-mod, entonces $D_\ell(f)$ es el morfismo en mod-R definido de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} D_\ell(f)\colon Hom_K(Y, E_K) &\to Hom_K(X, E_K) \\ h &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Veamos que en efecto $D_\ell(f)$ es un morfismo en mod-R. Sean $r \in R$ y $h \in Hom_K(Y, E_K)$. Entonces, $D_\ell(f)(hr) = (hr)f$ y $(D_\ell(f)(h))r = (hf)r$. Ahora, para cada $x \in X$,

$$((hr)f)(x) = (hr)(f(x)) = h(rf(x)) = h(f(rx)) = (hf)(rx) = ((hf)r)(x).$$

Por lo tanto, $(hr)f = (hf)r$ *y por ende* $D_\ell(f)(hr) = (D_\ell(f)(h))r$*. De manera similar a lo anterior, definimos el siguiente funtor contravariante aditivo:* $D_r : mod\text{-}R \longrightarrow R\text{-}mod$*.*

- *En objetos:* $D_r(X) = Hom_K(X, E_K)$ *para cada* $X \in Ob(mod\text{-}R)$*, donde* $Hom_K(X, E_K)$ *es* R*-módulo izquierdo finitamente generado tal como en la Proposición 5.11.*

- *En morfismos: Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es un morfismo en mod-*R*, entonces*

$$\begin{aligned} D_r(f)\colon Hom_K(Y, E_K) &\to Hom_K(X, E_K) \\ h &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Simétricamente a lo realizado con $D_\ell(f)$ se puede mostrar que $D_r(f)$ es un morfismo en R-*mod*.
La razón de definir a los funtores D_ℓ y D_r es que nos dan una dualidad entre las categorías R-*mod* y *mod*-R, la cual será bastante útil en la prueba del teorema principal de la sección (Teorema 5.17). Esta notación y definición de D_ℓ y D_r se utilizará por el resto de la sección.

Proposición 5.15. *El par de funtores contravariantes* (D_ℓ, D_r) *es una dualidad entre las categorías* R*-mod y mod-*R*.*

Demostración. Veamos que $1_{R\text{-}mod} \cong D_r D_\ell$. Nótese que el funtor (que es covariante por ser la composición de dos contravariantes)

$$D_r D_\ell : R\text{-}mod \longrightarrow R\text{-}mod$$

asigna lo siguiente:

- En objetos: $D_r D_\ell(X) = Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$.

- En morfismos: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en R-*mod*, entonces $D_r D_\ell(f)$ está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_r D_\ell(f)\colon Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) &\to Hom_K(Hom_K(Y, E_K), E_K) \\ g &\mapsto \bar{g} \end{aligned}$$

  donde

$$\begin{aligned} \bar{g}\colon Hom_K(Y, E_K) &\to E_K \\ h &\mapsto g(hf). \end{aligned}$$

Definimos la transformación natural $\eta : 1_{R\text{-}mod} \longrightarrow D_r D_\ell$ como $\eta(X) = \eta_{_X}$ para cada $X \in Ob(R\text{-}mod)$, donde $\eta_{_X}$ es un morfismo en R-*mod* definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta_{_X} \colon X &\to Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \\ a &\mapsto \eta_{_X}(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_{_X}(a) \colon Hom_K(X, E_K) &\to E_K \\ f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Mostremos que, en efecto, $\eta_{_X}$ es morfismo en *R-mod*. Por (b) del Teorema 5.8, se tiene que $\eta_{_X}$ es isomorfismo de K-módulos (recordar que, por el Lema 5.9, X es también un K-módulo finitamente generado), así que para ver que $\eta_{_X}$ es morfismo en R-*mod* resta demostrar que para cada $a \in X$ y cada $r \in R$ se cumple que $\eta_{_X}(ra) = r\eta_{_X}(a)$. Dado que X es un R-módulo izquierdo finitamente generado, entonces, por la Proposición 5.10, $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho finitamente generado tal que si $r \in R$ y $f \in Hom_K(X, E_K)$ entonces el morfismo de K-módulos $fr : X \longrightarrow E_K$ está definido por $(fr)(a) = f(ra)$ para cada $a \in X$. Por la Proposición 5.11, $Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado tal que si $\alpha \in Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ y $r \in R$ entonces el morfismo $r\alpha : Hom_X(X, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $(r\alpha)(f) = \alpha(fr)$ para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$. Ahora, si $a \in X$ y $r \in R$ entonces $\eta_{_X}(ra), r\eta_{_X}(a) \in Hom_K(Hom_K(X, E_k), E_K)$ y para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$ se cumple que

$$\eta_{_X}(ra)(f) = f(ra) \overset{*}{=} (fr)(a) = \eta_{_X}(a)(fr) \overset{**}{=} (r\eta_{_X}(a))(f) \tag{25}$$

donde la igualdad señalada con * se debe a cómo se le da estructura de R-módulo derecho a $Hom_K(X, E_K)$ en la Proposición 5.10, mientras que la igualdad señalada con ** se debe a cómo se le da estructura de R-módulo izquierdo a $Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ en razón de la Proposición 5.11. Entonces, por (5.3), se tiene que $\eta_{_X}(ra) = r\eta_{_X}(a)$ y en consecuencia $\eta_{_X}$ es morfismo en *R-mod*. Como $\eta_{_X}$ es isomorfismo de K-módulos entonces es una función biyectiva, lo cual implica que $\eta_{_X}$ es isomorfismo de R-módulos. Finalmente, mostremos la naturalidad de η comprobando que para cada morfismo

$f : X \longrightarrow Y$ en *R-mod* se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \arrow[d, "D_r D_\ell(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & Hom_K(Hom_K(Y, E_K), E_K). \end{tikzcd} \tag{26}$$

Sea $a \in X$. Entonces el morfismo $\eta_X(a) : Hom_K(X, E_K) \longrightarrow E_K$ en *K-mod* está definido por $\eta_X(a)(g) = g(a)$ para cada $g \in Hom_K(X, E_K)$. Luego, $D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)) : Hom_K(Y, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por

$$(D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)))(h) = \eta_X(a)(hf) = (hf)(a)$$

para cada $h \in Hom_K(Y, E_K)$ (recordar que al principio de esta demostración se hizo notar lo que asigna en morfismos el funtor $D_r D_\ell$). Por otro lado, $f(a) \in Y$, así que $\eta_Y(f(a)) : Hom_K(Y, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $\eta_Y(f(a))(h) = h(f(a))$. Por lo tanto, para cada $a \in X$ se tiene que $D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)) = \eta_Y(f(a))$, es decir, el diagrama en (5.4) conmuta. Por lo tanto, η es un isomorfismo natural y se concluye que $1_{R\text{-}mod} \cong D_r D_\ell$. Ahora, definimos la transformación natural $\epsilon : 1_{mod\text{-}R} \longrightarrow D_\ell D_r$ como $\epsilon(X) = \epsilon_X$ para cada $X \in mod\text{-}R$, donde

$$\begin{aligned} \epsilon_X : X &\to Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \\ a &\mapsto \epsilon_X(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \epsilon_X(a) \colon Hom_K(X, E_K) &\to E_K \\ f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Similarmente a lo que se hizo con η, con un argumento simétrico se tiene que ϵ es un isomorfismo natural, lo cual implica que $1_{mod\text{-}R} \cong D_\ell D_r$. Por lo tanto, el par de funtores contravariantes (D_ℓ, D_r) es una dualidad entre las categorías *R-mod* y *mod-R*. $\square$

Lema 5.16. *Sea R una K-álgebra de Artin y supongamos que R no es cuasi-Frobenius. Si R satisface (P) entonces $zoc({}_R R)$ es simple ó $zoc(R_R)$ es simple.*

Demostración. Sea R una K-álgebra de Artin tal que no es un anillo cuasi-Frobenius pero satisface (P). Supongamos que $zoc({}_RR)$ no es simple y mostremos que $zoc(R_R)$ es simple. Por el Teorema 3.1, R es local y existen S_1 y S_2 ideales izquierdos simples de R tales que $zoc({}_RR) = S_1 \oplus S_2$ y ${}_RR/S_1$ es un R-módulo izquierdo inyectivo. Si ${}_RR/S_1 = (A/S_1) \oplus (B/S_1)$ para algunos $A, B \leq_R R$, entonces $A + B =_R R$ y por ende $1 = a + b$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$, lo cual implica que a ó b es unidad de R (ya que R es local). Así $A =_R R$ ó $B =_R R$, de ahí que ${}_RR/S_1$ es un R-módulo izquierdo inescindible. Dado que ${}_RR/S_1$ es inyectivo e inescindible no cero, entonces ${}_RR/S_1$ es cápsula inyectiva de su submódulo $(S_1 \oplus S_2)/S_1$ (ver [5, Teorema 6.6.2]), donde $(S_1 \oplus S_2)/S_1 \cong S_2$. Ahora, supongamos que $I \neq 0$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado inescindible que es inyectivo en R-*mod*. Por la Observación 5.13 se tiene que I es también inyectivo en R-Mod, así que como ${}_RR$ es artiniano, I es la cápsula inyectiva de algún R-módulo izquierdo simple S (ver [5, Corolario 6.6.3]). Como R es local, entonces todos los R-módulos izquierdos simples son isomorfos entre sí (ya que todos los R-módulos izquierdos simples son isomorfos a ${}_RR/J(R)$), de ahí que $S \cong (S_1 \oplus S_2)/S_1$ y en consecuencia sus cápsulas inyectivas son isomorfas, es decir, $I \cong_R R/S_1$. Por lo tanto, ${}_RR/S_1$ es el único inyectivo inescindible no cero (salvo isomorfismo) en R-*mod*. Ahora, ${}_RR$ es proyectivo y, por ser local, es inescindible. Supongamos que $P \neq 0$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado inescindible que es proyectivo en R-*mod*. Dado que R es local y P también es proyectivo en R-Mod (ver Observación 5.13), entonces P es libre (ver [1, Corolario 26.7]), lo cual implica que $P \cong R^n$ para algún entero positivo n (pues P es libre finitamente generado). Como P es inescindible se sigue que $n = 1$, es decir, $P \cong_R R$. Por lo tanto, ${}_RR$ es el único proyectivo inescindible no cero (salvo isomorfismo) en R-*mod*. Obsérvese que $D_\ell({}_RR) \neq 0$ pues, en caso contrario, si $D_\ell({}_RR) = 0$ entonces $D_rD_\ell({}_RR) = D_r(0)$, donde $D_r(0) = 0$ por ser un funtor aditivo y $D_rD_\ell({}_RR) \cong_R R$ ya que $D_rD_\ell \cong 1_{R\text{-}mod}$, es decir, se tendría que ${}_RR \cong 0$, lo cual no es posible pues $R \neq 0$. En general, similarmente se puede mostrar que $D_\ell(M) = 0$ si y solo si $M = 0$ para cada $M \in Ob(R\text{-}mod)$; además $D_r(N) = 0$ si y solo si $N = 0$, para cada $N \in Ob(mod\text{-}R)$. Por la Proposición 5.12, la dualidad (D_ℓ, D_r) entre R-*mod* y *mod*-R satisface las hipótesis del Lema 4.8 y por ende el Corolario 4.9 implica que $D_\ell({}_RR)$ es inescindible y, por la Proposición 4.10, es inyectivo en *mod*-R. Nótese que $D_\ell({}_RR)$ es el único (salvo isomorfismo) inyectivo inescindible no cero en *mod*-R, ya que si H es inyectivo inescindible no cero en *mod*-R entonces, por el Corolario 4.9 y por la Proposición 4.10, $D_r(H)$ es proyectivo inescindible no cero en R-*mod*, lo cual implica que $D_r(H) \cong_R R$ (pues ya se mostró que $_RR$ es el único proyectivo inescindible en R-*mod*) y por ende $D_\ell(_RR) \cong D_\ell D_r(H) \cong H$, donde $D_\ell D_r(H) \cong H$ se debe a que $D_\ell D_r \cong 1_{mod\text{-}R}$. Dado que $0 \neq D_\ell(_RR)$ es inyectivo inescindible en *mod*-R entonces, por la Observación 5.13, es inyectivo inescindible en Mod-R. Dado que R_R es artiniano, entonces $D_\ell(_RR)$ es la cápsula inyectiva de algún R-módulo derecho simple (ver [5, Corolario 6.6.3]) y como todos los R-módulos derechos simples son isomorfos al R-módulo derecho $R_R/J(R)$ (ya que R es local), entonces $D_\ell(_RR) \cong E(R_R/J(R))$. Por otro lado, por el Corolario 4.9 y por la Proposición 4.10, $D_\ell(_RR/S_1)$ es proyectivo inescindible no cero en *mod*-R y es único (salvo isomorfismo) con esta propiedad en *mod*-R, pues si L es proyectivo inescindible no cero en *mod*-R, entonces, nuevamente por el Corolario 4.9 y por la Proposición 4.10, $D_r(L)$ es inyectivo inescindible no cero en R-*mod* y por ende $D_r(L) \cong_R R/S_1$ (previamente en la demostración ya se vio que $_RR/S_1$ es el único inyectivo inescindible, salvo isomorfismo, en R-*mod*), así que $D_\ell(_RR/S_1) \cong D_\ell D_r(L) \cong L$, donde el segundo isomorfismo se sigue de que $D_\ell D_r \cong 1_{mod\text{-}R}$. Entonces, dado que R_R es proyectivo inescindible (es inescindible por ser local) en *mod*-R, se tiene que $D_\ell(_RR/S_1) \cong R_R$. Si $\nu :_R R \longrightarrow_R R/S_1$ es el epimorfismo natural, entonces, por la Proposición 4.5, $D_\ell(\nu) : D_\ell(_RR/S_1) \longrightarrow D_\ell(_RR)$ es un monomorfismo en *mod*-R y es inyectivo por la Proposición 5.12. De los isomorfismos $D_\ell(_RR/S_1) \cong R_R$, $D_\ell(_RR) \cong E(R_R/J(R))$ y del morfismo inyectivo $D_\ell(\nu) : D_\ell(_RR/S_1) \longrightarrow D_\ell(_RR)$ se tiene que debe existir un morfismo inyectivo de R-módulos derechos $\alpha : R_R \longrightarrow E(R_R/J(R))$. Además, $zoc(E(R_R/J(R))) = zoc(R_R/J(R)) = R_R/J(R)$, donde $R_R/J(R)$ es simple por ser R local (recordar que, en general, el zoclo de un módulo coincide con el zoclo de su cápsula inyectiva). Dado que $\alpha(zoc(R_R)) \leq zoc(E(R_R/J(R)) = R_R/J(R)$, se sigue que $\alpha(zoc(R_R)) = 0$ o bien $\alpha(zoc(R_R)) = R_R/J(R)$ (pues $R_R/J(R)$ es simple). Ya que α es morfismo inyectivo, $\alpha(zoc(R_R)) = 0$ implica que $zoc(R_R) = 0$, lo cual no es posible (ya que, por ser artiniano, R tiene un al menos un ideal derecho simple). Entonces debe ocurrir que $zoc(R_R) = R_R/J(R)$, es decir, $zoc(R_R)$ es simple. □

Teorema 5.17. *Una K-álgebra de Artin R satisface (P) si y solo si R es cuasi-Frobenius.*

Demostración. [$\Leftarrow$] Si R es cuasi-Frobenius entonces, en particular, R es autoinyectivo izquierdo y en consecuencia satisface (P) (pues todos los R-módulos

cíclicos son cociente de ${}_RR$).
[$\Rightarrow$] (Por contradicción.) Sea R, junto con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, una K-álgebra de Artin que satisface (P) pero que no es cuasi-Frobenius. Como R es artiniano, entonces R no es autoinyectivo izquierdo ni autoinyectivo derecho (en caso contrario R sería cuasi-Frobenius). Por el Lema 5.16, $zoc(R_R)$ es simple ó $zoc({}_RR)$ es simple. Supongamos que $zoc(R_R)$ es un R-módulo derecho simple. Como R es artiniano, todos los ideales derechos no cero de R contienen un ideal simple, de ahí que $zoc(R_R)$ está contenido en todos los ideales derechos no cero de R y en consecuencia $zoc(R_R) \leq_{es} R_R$. Entonces $E(zoc(R_R)) = E(R_R)$ (ya que $zoc(R_R) \leq_{es} R_R \leq_{es} E(R_R)$ implica que $zoc(R_R) \leq_{es} E(R_R)$), lo cual implica que $E(R_R)$ es inescindible (ver [5, Corolario 6.6.3-(a)]). Por el Teorema 3.1 se tiene que R es local, entonces ${}_RR$ es proyectivo inescindible y, por el Corolario 4.9 y por la Proposición 4.10, $D_\ell({}_RR)$ es inyectivo inescindible no cero en *mod*-R y en consecuencia, por la Observación 5.13, también es inyectivo inescindible en Mod-R. Dado que R es local, todos los R-módulos derechos simples son isomorfos entre sí (ya que todo R-módulo derecho simple es isomorfo a $R_R/J(R)$) y, como R es artiniano, cada R-módulo derecho inyectivo inescindible no cero es cápsula inyectiva de algún R-módulo derecho simple (ver [5, Corolario 6.6.3]), así que todos los R-módulos derechos inyectivos inescindibles no cero son isomorfos entre sí. Así, $D_\ell({}_RR) \cong E(R_R)$ ya que ambos R-módulos derechos son no cero inyectivos e inescindibles. Entonces existe un monomorfismo de R-módulos derechos $f : R_R \longrightarrow D_\ell({}_RR)$. También se tiene que f es monomorfismo de K-módulos, pues f es inyectiva y si $k \in K$ y $a \in R$ entonces $f(ka) = f(a\varphi(k)) = f(a)\varphi(k) = kf(a)$, donde la primera y la última igualdad se deben a cómo se define la estructura de K-módulo en R_R y $D_\ell({}_RR)$, respectivamente, en razón de la Proposición 5.2. Nótese que, por la Proposición 5.2, ${}_RR$ y R_R tienen estructura de K-módulo que es inducida por φ, sin embargo, son el mismo K-módulo, pues ${}_RR$ yR_R obviamente son el mismo conjunto y para cada $x \in R$ y $k \in K$ se tiene que

$$kx = \varphi(k)x \quad \text{ y } \quad kx = x\varphi(x),$$

donde la primera igualdad es como se define kx en el K-módulo ${}_RR$ y la segunda igualdad es como se define kx en el K-módulo R_R (ver Proposición 5.2), pero $\varphi(k)x = x\varphi(k)$ ya que, por definición, $\varphi(K)$ está contenido en el centro de R. Por lo inmediato anterior, R_R y ${}_RR$ son el mismo K-módulo y por ende sus longitudes de K-módulo coinciden, es decir, $Le(R_R) = Le({}_RR)$

(nótese que todo K-módulo finitamente generado es un K-módulo artiniano y noetheriano, ya que K es artiniano y por ende también noetheriano, es decir, todo K-módulo finitamente generado tiene longitud finita, así que ${}_RR$ como K-módulo tiene longitud finita ya que es finitamente generado como K-módulo por el Lema 5.9), donde por (a) del Teorema 5.8 se tiene que $Le({}_RR) = Le(Hom_K({}_RR, E_K)) = Le(D_\ell({}_RR))$, lo cual implica que f es isomorfismo de K-módulos (pues f es monomorfismo de K-módulos y las longitudes de K-módulo de su dominio y codominio coinciden), así que f es biyectiva y por ende también es isomorfismo de R-módulos derechos. Entonces $R_R \cong D_\ell({}_RR) \cong E(R_R)$, pero esto contradice que R no es autoinyectivo derecho. Simétricamente se llega a una contradicción si $zoc({}_RR)$ es simple. □

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo invertido en la revisión de este trabajo así como a los editores por brindar este espacio de colaboración.

Bibliografía

[1] Anderson, F., Fuller, K. (1992). *Rings and Categories of Modules (2nd ed)*. New York : Springer.

[2] Auslander, M., Reiten, I., Smalø, S. O. (1995). *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[3] Goodearl, K. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.

[4] Herrlich, H., Strecker, G. (2007). *Cateogory Theory (3rd ed.)*. Bremmen; Manhattan: Herlderman Verlag.

[5] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. New York: Academic Press.

[6] Lam, T. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings* New York: Springer-Verlag.

[7] Lam, T. (1999). *Lectures on Modules and Rings*. New York: Springer.

[8] Meriç, Tuğçe. (2021). *When proper cyclics are homomorphic image of injectives*. Communications in Algebra, 49:1, 151-161, DOI: 10.1080/00927872.2020.1797067.

[9] Pineda, L. (2022). *Cuando los módulos cíclicos propios son imágenes homomorfas de inyectivos* [Tesis de maestría, BUAP]. Repositorio institucional de la BUAP `https://hdl.handle.net/20.500.12371/17983`.

[10] Rotman, J. (2009). *An Introduction to Homological Algebra*. New York: Springer.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
Facultad de Ciencias, UNAM
Investigación Científica, C.U.,
Coyoacán, Ciudad de México. C.P. 04510

luise.pinedaram@alumno.buap.mx
cesarcc@fcfm.buap.mx
aga@ciencias.unam.mx

Análisis Matemático

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 2

Conjuntos g-cerrados

Armando Martínez García
FCFM-BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como objetivo presentar y estudiar algunas propiedades de los conjuntos g-cerrados.

1 Introducción

En la sección 2 daremos los resultados generales necesarios para llevar a buen término este trabajo; en la sección 3 presentamos la definición de conjunto g-cerrado que da título a este trabajo, así como algunas propiedades que satisfacen este tipo de conjuntos, en la sección 4 presentamos el comportamiento de los conjuntos g-cerrados en algunas clases de espacios, finalizaremos este trabajo presentando en la sección 5 la definición de conjunto g-abiertos así como algunas propiedades de estos conjuntos.

2 Resultados generales

En esta sección daremos las definiciones y resultados necesarios para desarrollar este trabajo.

Definición 2.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $A \subset X$ *y* $x \in X$.

(1) A *es un conjunto cerrado si* $X \setminus A \in \tau$.

(2) *La cerradura de* A *es*

$$cl(A) = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$

(3) *El derivado del conjunto A es el conjunto que denotaremos como $d(A)$ es*

$$d(A) = \{x \in X : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$

(4) *El interior de A el cual denotaremos como $int(A)$ es el conjunto*

$$int(A) = \cup\{U \in \tau : U \subset A\}.$$

(5) *El kernel de A el cual denotaremos como es $ker(A)$ es el conjunto*

$$ker(A) = \cap\{U \in \tau : A \subset U\}.$$

Lema 2.2. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) *$A = cl(A)$.*

Demostración. (1) implica (2) Sean $x \in A$ y $U \in \tau$ con $x \in U$, entonces $A \cap U \neq \emptyset$ lo cual implica que $x \in cl(A)$. Por lo tanto, $A \subset cl(A)$.

Ahora si $x \notin A$, entonces $x \in X \setminus A$, es claro que $X \setminus A \in \tau$ y $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$ lo cual implica $x \notin cl(A)$. Por lo tanto, $cl(A) \subset A$. □

Lema 2.3. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, entonces*

(1) *$cl(A) = A \cup d(A)$.*

(2) *Si $O \in \tau$ es tal que $d(A) \subset O$, entonces $d(d(A)) \subset O$.*

Demostración. (1) Es inmediato.

(2) Supongamos que existe $x \in d(d(A))$ tal que $x \notin O$, entonces $x \notin d(A)$ lo cual implica que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $A \cap U \subset \{x\}$. Como $x \in d(d(A))$ implica que existe $y \in d(A) \cap U \cap X \setminus \{x\}$ de donde $y \in O \cap U$, $y \in d(A)$ y $\emptyset \neq A \cap O \cap U \cap X \setminus \{y\} \subset A \cap U \subset \{x\}$, se sigue que $x \in O$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $d(d(A)) \subset O$. □

Lema 2.4. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, entonces*

$$cl(A) = \cap\{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\}.$$

Demostración. Si $x \notin \{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\}$, entonces existe un conjunto cerrado F tal que $x \notin F$ y $A \subset F$. Es claro que $x \in X \setminus F$, $X \setminus F \in \tau$ y $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, lo cual implica que $x \notin cl(A)$. Por lo tanto, $cl(A) \subset \cap\{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\}$.

Si $x \notin cl(A)$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Es claro que $A \subset X \setminus U$, $X \setminus U$ es un conjunto cerrado y $x \notin X \setminus U$ lo cual implica que $x \notin \{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\}$. Por lo tanto, $\{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\} \subset cl(A)$. □

Lema 2.5. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) $A \in \tau$.

(1) $A = int(A)$.

Demostración. Es inmediato. □

Lema 2.6. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, entonces*

$$int(A) = X \setminus cl(X \setminus A).$$

Demostración. Si $x \notin X \setminus cl(X \setminus A)$, entonces $x \in cl(X \setminus A)$ lo cual implica que para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ de donde $x \notin int(A)$. Por lo tanto, $int(A) \subset X \setminus cl(X \setminus A)$.

Ahora sea $x \in X \setminus cl(X \setminus A)$, entonces $x \neq cl(X \setminus A)$ de donde existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \cap (X \setminus A)$ lo cual implica $x \in U \subset A$. Por lo tanto, $X \setminus cl(X \setminus A) \subset int(A)$. □

Definición 2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ y $A \subset Y$ entonces*

(1) *La topología relativa en Y la cual denotaremos como τ_Y es*

$$\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}.$$

(2) *La cerradura de A en Y la cual denotaremos como $cl_Y A)$ es*

$$cl_Y(A) = cl(A) \cap Y.$$

La definición 2.8 incisos (1) y definición 2.10 aparecen en [8, definición 4.1] el inciso (2) aparece en [5, definición 8.1] y el inciso (3) y definición (2.9) aparecen en [6, definición 3.1 y teorema 4.8].

Definición 2.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces*

(1) *X es localmente indiscreto si*

$$U \text{ es un conjunto cerrado para todo } U \in \tau.$$

(2) *X es un espacio topológico simétrico si*

$$x \in cl(\{y\}) \text{ implica } y \in cl(\{x\}) \text{ para todo } x, y \in X.$$

(3) *X es de $Alexandroff$ si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Si (X, τ) es un espacio topológico de $Alexandroff$ consideremos los conjuntos

(1) $M = \{x \in X : x \text{ es elemento maximal de } X\}$.

(1) $m = \{x \in X : x \text{ es elemento minimal de } X\}$.

Definición 2.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico de $Alexandroff$ y $x \in X$, entonces*

(1) *El conjunto $U_x = \{y \in X : x \leq y\}$ es el abierto mínimo que contiene a x.*

(2) *El conjunto $V_x = \{y \in X : y \leq x\}$ satisface que $cl_X\{x\} = V_x$.*

(3) *Si $x \in m$, entonces $cl(\{x\}) = \{x\}$.*

(4) *Si $x \in M$, entonces $U_x = \{x\}$.*

Definición 2.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces*

(1) *X Un espacio topológico es T_D si para todo $x \in X$, existen un conjunto abierto U y un conjunto cerrado F tales que*

$$\{x\} = U \cap F.$$

(2) *X Un espacio topológico es submaximal si*

$$D \text{ es un conjunto abierto para todo conjunto denso } D \text{ de } X.$$

(3) *A es un conjunto localmente cerrado si existen un conjunto abierto U y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que*

$$A = U \cap F.$$

Teorema 2.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *(X, τ) es un espacio topológico T_D.*

(2) *Para todo $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $\{x\} = U \cap cl(\{x\})$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea $x \in X$ como (X, τ) es un espacio topológico T_D existen $U \in \tau$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $\{x\} = U \cap F$.

Como $\{x\} = U \cap F$, entonces $\{x\} \subset U$ y $\{x\} \subset F$ lo cual implica $\{x\} \subset U$ y $\{x\} \subset cl(\{x\})$ de donde se sigue que

$$\{x\} \subset U \cap cl(\{x\}) \subset U \cap F = \{x\}.$$

Por lo tanto,

$$\{x\} = U \cap cl(\{x\}).$$

(2) implica (1) Es inmediato. □

Teorema 2.12. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto localmente cerrado.*

(2) *Existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap cl(A)$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea A un conjunto localmente cerrado.

Como A es un conjunto localmente cerrado de la definición 2.10 existen $U \in \tau$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que $A = U \cap F$ lo cual implica que $A \subset U$ y $A \subset F$, entonces y $A \subset cl(A) \subset F$ de donde

$$A = A \cap U \subset U \cap cl(A) \subset U \cap F = A.$$

Por lo tanto,

$$A = U \cap cl(A).$$

(2) implica (1) Es inmediato. □

Corolario 2.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces*

(1) *Para todo $U \in \tau$, U es localmente cerrado.*

(2) *Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, F es localmente cerrado.*

El teorema 2.14 aparece en [6, teorema 4.5] y el teorema 2.15 aparece en [9].

Teorema 2.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *(X, τ) es un espacio topológico submaximal*

(2) *Para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto localmente cerrado.*

Demostración. (1) implica (2) Sean (X, τ) un espacio topológico *submaximal* y $A \subset X$.

Si $cl(A) = X$, entonces $A \in \tau$ de donde $A = A \cap cl(A)$.

Si $cl(A) \neq X$, entonces $A \cup (X \setminus cl(A))$ es un conjunto denso, de donde

$$A \cup (X \setminus cl(A)) \in \tau \text{ y } A = [A \cup (X \setminus cl(A))] \cap cl(A).$$

Por lo tanto, A es un conjunto localmente cerrado.

(2) implica (1) Sea $A \subset X$ un conjunto denso.

Como A un conjunto denso, entonces $cl(A) = X$ y A es un conjunto localmente cerrado. Aplicando el teorema 2.11 existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap cl(A)$ y como $cl(A) = X$ se tiene que $A = U \cap X = U$ lo cual implica que $A \in \tau$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico *submaximal*. □

Teorema 2.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico de $Alexandroff$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *(X, τ) es un espacio topológico Submaximal.*

(2) *$X = M \cup m$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea (X, τ) un espacio topológico *Submaximal*.

Supongamos que existe $x \in X$ que no es minimal ni maximal, entonces existen $y, z \in X$ tales que $z < x < y$.

Como $x < y$, de la definición 2.10 se tiene $y \in U_x$ lo cual implica $x \in cl(\{y\}) \subset cl(X \setminus \{x\})$. Por lo tanto, el conjunto $D = X \setminus \{x\}$ es denso en X, además es claro que $z \in D$ y como $z < x$ de la Definición 2.10 se tiene $x \in U_z \setminus D$ de donde $z \notin Int(D)$ implica que D no es un conjunto abierto es decir (X, τ) no es un espacio topológico *submaximal*.

(2) implica (1) Sean $X = M \cup m$ y $D \subset X$ un conjunto denso.

Como $D \subset X$ es un conjunto denso, como para todo $x \in M$ de la Definición 2.10 se tiene $U_x = \{x\}$ y $U_x \cap D \neq \emptyset$, que implica $x \in D$, entonces $M \subset D$ y para cada $x \in D \setminus M$ existe $y_x \in X$ tal que $x < y_x$ se sigue que $y_x \in X \setminus m \subset M$, entonces $y_x \in D$. Por lo tanto, para todo $x \in D$, se sigue que $U_x \subset D$ de donde $D = \cup_{x \in D} U_x$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico *submaximal*. □

Definición 2.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$*

(1) *A es un conjunto preabierto si*

$$A \subset int[cl(A)].$$

(2) *X es un espacio puerta si para todo conjunto $A \subset X$*

$$A = int(A) \text{ o } A = cl(A).$$

(3) *X es un espacio hiperconexo si para todo $V \in \tau$ tal que $V \neq \emptyset$*

$$cl(V) = X.$$

Teorema 2.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico de las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *(X, τ) es un espacio topológico localmente indiscreto.*

(2) *Para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto preabierto.*

(3) *Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto preabierto.*

(4) *Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, F es un conjunto preabierto.*

Teorema 2.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico hiperconexo las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *(X, τ) es un espacio topológico Submaximal.*

(2) *(X, τ) es un espacio topológico puerta.*

3 Conjuntos g-cerrados

Iniciaremos esta sección dando la definición de conjunto g-cerrado así como otras definiciones que nos serán útiles en esta sección. Las definición 3.1 inciso (1) aparece en [5, definición 2.1] y el inciso (2) y Observación 1 aparecen en [4, definición 3.2], el teorema 3.2 aparece en [2, teorema 2.2].

Definición 3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ definimos*

(1) *A es un conjunto g-cerrado si*

$$cl(A) \subset U \text{ para cada conjunto abierto } U \subset X \text{ tal que } A \subset U.$$

(2) *La g cerradura de A la cual denotaremos como $cl_g(A)$ es el conjunto*

$$cl_g(A) = \cap\{F \subset X : A \subset F \text{ con } F \text{ un conjunto } g\text{-cerrado}\}.$$

Observación 1. Es claro que si $A \subset X$ es un conjunto cerrado, entonces

(1) A es un conjunto g-cerrado.

(2) $cl_g(A) = A$.

(3) No todo conjunto g-cerrado es cerrado como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sean

$$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\} \text{ y } A = \{a, b\}.$$

Es claro que A es un conjunto g-cerrado pero no cerrado.

Teorema 3.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado o $X \setminus \{x\}$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X$ si $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ no es un conjunto abierto de donde se sigue que el único conjunto abierto que lo contiene es X de donde se sigue que $cl(X \setminus \{x\}) \subset X$.

Por lo tanto, para todo $x \in X$

$$\{x\} \text{ es un conjunto cerrado o } X \setminus \{x\} \text{ es un conjunto } g\text{- cerrado.}$$

□

Los resultados de 3.3-3.8 aparecen en [5, teo 2.9, teo 2.4, teo 2.6, cor 2.7 y teo 2.9].

Teorema 3.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ con (Y, τ_Y) un subespacio y $A \subset Y$ un conjunto g- cerrado en X, entonces A es un conjunto g-cerrado en Y.*

Demostración. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $A \subset V$.

Como $V \in \tau_Y$, de la Definición 2.7 existe $O \in \tau$ tal que $V = O \cap Y$ de donde $A \subset O \cap Y$ en particular $A \subset O$ lo cual implica que $cl(A) \subset O$ es decir $cl(A) \cap Y \subset O \cap Y$ con lo cual obtenemos $cl_Y(A) \subset V$.

Por lo tanto,

$$A \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado en } Y.$$

□

Teorema 3.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$ con A y B conjuntos g-cerrados, entonces $A \cup B$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$ conjuntos g-cerrados y $O \in \tau$ tal que $A \cup B \subset O$.

Como $A \cup B \subset O$ entonces $A \subset O$ y $B \subset O$ y dado que A, B son conjuntos g-cerrados de la Definición 3.1, se sigue que $cl(A) \subset O$ y $cl(B) \subset O$ y como $cl(A) \cup cl(B) = cl(A \cup B)$, entonces $cl(A \cup B) \subset O$.

Por lo tanto, de la Definición 3.1 se tiene que $A \cup B$ es un conjunto g-cerrado. □

Sin embargo la intersección de conjuntos g-cerrados no necesariamente es g-cerrado para lo cual basta dar un ejemplo.

Ejemplo 3.5. *Sean*

$$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}, A = \{a, b\} \text{ y } B = \{a, c\}.$$

Es claro que A y B son conjuntos g-cerrados pero $A \cap B$ no es g-cerrado.

Teorema 3.6. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subset A \subset X$ tales que B es un conjunto g-cerrado en A y A es un conjunto g-cerrado en X, entonces B es un conjunto g-cerrado en X.*

Demostración. Sean $B \subset A \subset X$ tales que

(1) B es un conjunto g-cerrado en A,

(2) A es un conjunto g-cerrado en X y

(3) $O \in \tau$ tal que $B \subset O$.

Como $B \subset O$ y $B \subset A$, entonces $B \subset A \cap O$ y de la Definición 2.7, $A \cap O$ es un abierto relativo en A y como B es un conjunto g-cerrado en A de la Definición 3.1 se sigue que $cl_A(B) \subset A \cap O$ es decir $A \cap cl(B) \subset A \cap O$ en particular $A \cap cl(B) \subset O$ de donde,

$$(A \cap cl(B)) \cup (X \setminus cl(B)) \subset O \cup (X \setminus cl(B))$$

entonces $A \subset O \cup (X \setminus cl(B))$ con lo cual,

$$cl(A) \subset O \cup (X \setminus cl(B))$$

y dado que $B \subset A$ tenemos que $cl(B) \subset O \cup (X \setminus cl(B))$, entonces $cl(B) \subset O$.

Por lo tanto, de la definición 3.1, se tiene que

$$B \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado en } X.$$

□

En el Ejemplo **??** se demostró que intersección de conjuntos g-cerrados no necesariamente es un conjunto g-cerrado, sin embargo si uno de estos conjuntos es cerrado y el otro es g-cerrado la intersección es g-cerrado como nos lo muestra el siguiente resultado que se sigue del teorema 3.6.

Corolario 3.7. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, F \subset X$ tales que A es un conjunto g-cerrado y F un conjunto cerrado, entonces $A \cap F$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sean A es un conjunto g-cerrado y F un conjunto cerrado.

Como A es un conjunto g-cerrado y F un conjunto cerrado, $A \cap F$ es un conjunto cerrado en A, de donde es un conjunto g-cerrado en A, y aplicando el teorema 3.4, obtenemos que

$$A \cap F \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

□

Teorema 3.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$ tales que*

(1) $B \subset A \subset cl(B)$ *y*

(2) B *un conjunto g-cerrado,*

entonces A es un conjunto g-cerrado.

Demostración. Sean $A, B \subset X$ tales que $B \subset A \subset cl(B)$ con B un conjunto g-cerrado y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$.

Como $B \subset A$ y $A \subset O$, entonces $B \subset O$ y dado que B es un conjunto g-cerrado de la Definición 3.1 se tiene que $cl(B) \subset O$ y como $A \subset cl(B)$ se sigue que $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto, de la Definición 3.1 se tiene que

A es un conjunto g- cerrado.

□

Teorema 3.9. *Sean (X, τ) un espacio topológico localmente indiscreto, entonces todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sean $A \subset X$ y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$. Luego, $cl(A) \subset cl(O)$, y como X es localmente indiscreto, se sigue que $cl(O) = O$, con lo cual $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto,

A es un conjunto g-cerrado .

□

De los teoremas 2.17 y 3.9 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces todo conjunto $A \subset X$, es un conjunto g-cerrado si satisface cualquiera de las siguientes condiciones.*

(1) *A es un conjunto preabierto.*

(2) *Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto preabierto.*

(3) *Todo conjunto cerrado $F \subset X$, es un conjunto preabierto.*

La siguiente definición junto con la observación que se da a continuación nos permite decir cuando un conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.

Definición 3.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ diremos que*

La T cerradura de A que denotaremos como $cl_T(A)$ es el conjunto

$$cl_T(A) = \{x \in X : cl_g(U) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}$$

A es un conjunto g-T cerrado si

$$cl_T(A) \subset U \text{ para todo conjunto abierto } U \subset X \text{ tal que } A \subset U.$$

La θ cerradura de A la cual denotaremos como $cl_\theta(A)$ es el conjunto

$$cl_\theta(A) = \{x \in X : cl(U) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}$$

A es un conjunto θ cerrado si $A = cl_\theta(A)$.

A es un conjunto g-θ cerrado si

$$cl_\theta(A) \subset U \text{ para cada } U \in \tau \text{ tal que } A \subset U.$$

Observación 2. Si $A \subset X$, entonces

(1) $A \subset cl_g(A) \subset cl(A) \subset cl_T(A)$.

(2) $A \subset cl_g(A) \subset cl(A) \subset cl_\theta(A)$.

Corolario 3.12. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto, entonces A es un conjunto g cerrado si satisface cualquiera de las siguientes condiciones*

(1) *A es un conjunto g-T cerrado.*

(2) *A es un conjunto g-θ cerrado.*

El teorema 3.13 aparece en [1, teorema 2.2] y el teorema 3.14 aparece en [3, teorema 2.2].

Teorema 3.13. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\gamma = \{F \subset X : F = cl(F)\}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) $\tau = \gamma$.

(2) *Todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. (1) implica (2) Supongamos que $\tau = \gamma$ y sean $A \subset X$ y $O \in \tau$ tales que $A \subset O$.

Como $\tau = \gamma$ y $O \in \tau$ son tales que $A \subset O$, entonces $cl(A) \subset cl(O) = O$ lo cual implica que $cl(A) \subset O$.

Definición 3.1, se tiene que

$$A \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

(2) implica (1) Supongamos que todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.

Sea $O \in \tau$, como $O \subset O$ y O es un conjunto g- cerrado, entonces $cl(O) \subset O$ y como $O \subset cl(O)$, entonces $O = cl(O)$.

Así $\tau \subset \gamma$. En forma análoga podemos demostrar que $\gamma \subset \tau$.

Por lo tanto, $\tau = \gamma$. □

Teorema 3.14. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g-cerrado.*

(2) *$cl(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para cada $x \in cl(A)$.*

(3) *$cl(A) \setminus A$ no contiene conjuntos cerrados no vacíos.*

Demostración. (1) implica (2) Sea A es un conjunto g-cerrado.

Supongamos que existe $x \in cl(A)$ tal que $cl(\{x\}) \cap A = \emptyset$, entonces $A \subset X \setminus cl(\{x\})$ y dado que A es un conjunto g-cerrado de la Definición 3.1 se sigue que $cl(A) \subset X \setminus cl(\{x\})$ lo cual implica que $x \in X \setminus cl(\{x\})$ lo que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$cl(\{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ para cada } x \in cl(A).$$

(2) implica (3) Supongamos que existe un conjunto cerrado $F \subset cl(A) \setminus A$ tal que $F \neq \emptyset$.

Como $F \neq \emptyset$ existe $x \in F$ de donde $\{x\} \subset F$, entonces $cl(\{x\}) \subset F$ y como $F \subset cl(A) \setminus A$ tenemos que

$$\emptyset \neq cl(\{x\}) \cap A \subset F \cap A \subset (cl(A) \setminus A) \cap A$$

que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$\text{Si } F \subset cl(A) \setminus A \text{ es un conjunto cerrado, entonces } F = \emptyset.$$

(3) implica (1) Supongamos que $cl(A) \setminus A$ no contiene conjuntos cerrados no vacíos.

Sea $U \in \tau$ tal que $A \subset U$, es claro que $cl(A) \cap (X \setminus U)$ es un conjunto cerrado tal que

$$cl(A) \cap (X \setminus U) \subset cl(A) \setminus A.$$

entonces $cl(A) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ lo cual implica que $cl(A) \subset U$.

De la Definición 3.1 se tiene que A es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 3.15. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g-cerrado.*

(2) *$cl(A) \subset ker(A)$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea A es un conjunto g-cerrado de la Definición 3.1, $cl(A) \subset U$ para todo $U \in \tau$, tal que $A \subset U$, de donde

$$cl(A) \subset \cap\{U \in \tau : A \subset U\}.$$

De la Definición 2.1, tenemos que

$$cl(A) \subset ker(A).$$

(2) implica (1) Supongamos que $cl(A) \subset ker(A)$.

Como $cl(A) \subset ker(A)$, entonces $cl(A) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $A \subset U$.

De la Definición 3.1 tenemos que A es un conjunto g cerrado. □

En los teoremas damos algunas equivalencias al hecho de que para cada $x \in X$, $\{x\}$ sea un conjunto g-cerrado.

Teorema 3.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *X es un espacio topológico simétrico.*

(2) *Para todo* $x \in X$, $\{x\}$ *es un conjunto* g*-cerrado.*

Demostración. (1) implica (2) Sea (X, τ) un espacio topológico simétrico y supongamos que existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ no es un conjunto g-cerrado.

Como $\{x\}$ no es un conjunto g-cerrado entonces existe $O \in \tau$ tal que $\{x\} \subset O$ y $cl(\{x\})$ no esta contenido en O.

Como $cl(\{x\})$ no está contenido en O, entonces $cl(\{x\}) \cap (X \setminus O) \neq \emptyset$, que implica que existe $y \in cl(\{x\}) \cap (X \setminus O)$ es decir $y \in cl(\{x\})$ y $y \in (X \setminus O)$ y dado que (X, τ) es un espacio topológico simétrico. Por definición 2.8, $x \in cl(\{y\})$ lo cual implica que $x \in cl(\{y\}) \subset (X \setminus O)$, es decir, $\{x\} \subset (X \setminus O)$ que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$\text{para todo } x \in X, \{x\} \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

(2) implica (1) Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado y que (X, τ) no es un espacio topológico simétrico.

Como (X, τ) no es un espacio topológico simétrico existen $x, y \in X$ tales que $x \in cl(\{y\})$ y $y \notin cl(\{x\})$.

Dado que $y \notin cl(\{x\})$, entonces $\{y\} \subset (X \setminus cl(\{x\})$ y hipótesis se sigue que $cl(\{y\}) \subset (X \setminus cl(\{x\})$ de donde $x \in (X \setminus cl(\{x\})$ que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$(X, \tau) \text{ es un espacio topológico simétrico.}$$

$\square$

Los teoremas 3.17 y 3.18 son consecuencia de [7, lemas 4.2 y 4.3].

Teorema 3.17. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *Para todo* $x \in X$, $\{x\}$ *es un conjunto* g*-cerrado.*

(2) $U = \bigcup\{F \subset U : F = cl(F)\}$ *para todo* $U \in \tau$.

Demostración. (1) implica (2) Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado.

Como para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado, $cl(\{x\}) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$, entonces $U = \bigcup\{cl(\{x\}) : x \in U\}$.

(2) implica (1) Supongamos que $U = \bigcup\{F \subset U : F = cl(F)\}$ para todo $U \in \tau$.

Sean $U \in \tau$ y $x \in U$, entonces por hipótesis existe $F \subset U$ tal que $F = cl(F)$ y $x \in F$ de donde se sigue que $cl(\{x\}) \subset F$ lo cual implica que $cl(\{x\}) \subset U$.

Por lo tanto, para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 3.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado.*

(2) *$ker(F) = F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$.*

Demostración. (1) implica (2) Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado, entonces por el teorema 3.16 esto es equivalente a que

$$U = \bigcup\{F \subset U : F = cl(F)\} \text{ para todo } U \in \tau.$$

Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado, entonces $X \setminus F \in \tau$ lo cual implica que

$$X \setminus F = \cup\{C \subset X \setminus F : cl(C) = C\}$$

es decir $F = \bigcap\{X \setminus C : F \subset X \setminus C\}$.

Por lo tanto,

$$ker(F) = F.$$

(2) implica (1) Supongamos que $ker(F) = F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$.

Sea $U \in \tau$, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado lo cual implica que $ker(X \setminus U) = X \setminus U$ implica que U es unión de conjuntos cerrados.

Del teorema 3.16, para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado. □

En los resultados damos algunos equivalencias que nos aseguran cuando un conjunto g-cerrado es cerrado.

Corolario 3.19. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto g-cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) *$cl(A) \setminus A$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. (1) implica (2) Es inmediato.

(2) implica (1) Supongamos que $cl(A) \setminus A$ es un conjunto cerrado.

Como A es un conjunto g-cerrado, aplicando el teorema 3.13, $cl(A) \setminus A = \emptyset$ lo cual implica $cl(A) = A$.

Por lo tanto, A es un conjunto cerrado. □

Teorema 3.20. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, un conjunto g-cerrado entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) *A es un conjunto localmente cerrado.*

Demostración. (1) implica (2) Es inmediato.

(2) implica (1) Sea A un conjunto localmente cerrado.

Como A es un conjunto localmente cerrado del teorema 2.12 existe un conjunto $O \in \tau$ tal que $A = O \cap cl(A)$, entonces $A \subset O$ y como A es un conjunto g- cerrado, de la Definición 3.1 se tiene que $cl(A) \subset O$ de donde $A = O \cap cl(A) = cl(A)$.

Por lo tanto,

$$A = cl(A).$$

□

Corolario 3.21. *Sean (X, τ) un espacio topológico tal que todo conjunto $A \subset X$, es un conjunto g- cerrado entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) *X es un espacio topológico submaximal.*

Demostración. (1) implica (2): Se sigue del teorema 2.14 y corolario 2.13.

(2) implica (1): Se sigue de los teoremas. □

De los teoremas 2.14, 2.15 y 2.18 se tiene los siguientes 2 corolarios.

Corolario 3.22. *Sea (X, τ) un espacio topológico hiperconexo tal que todo conjunto $A \subset X$, es un conjunto g-cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) *X es un espacio topológico puerta.*

Corolario 3.23. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico de* $Alexandroff$ *tal que todo conjunto* $A \subset X$*, es un conjunto* g*-cerrado entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*

(2) $X = M \cup m$.

De los teoremas 2.11 y 3.15 tenemos los siguientes resultados.

Corolario 3.24. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico tal que para todo* $x \in X$, $\{x\}$ *es un conjunto* g*-cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *X es un espacio topológico* T_D.

(1) *Para todo* $x \in X$, $\{x\}$ *es un conjunto cerrado.*

Corolario 3.25. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico tal que para todo* $x \in X$, $\{x\}$ *es un conjunto* g*-cerrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *X es un espacio topológico* T_D.

(1) $U = \bigcup\{F \subset X : F = cl(F)\}$ *para todo* $U \in \tau$.

Finalizaremos esta sección dando resultados bajo los cuales la imagen de un conjunto g-cerrado es un conjunto g-cerrado.

Teorema 3.26. *Sean* (X, τ_X), (Y, τ_Y) *espacios topológicos,* $f : X \to Y$ *continua y cerrada y* $A \subset X$ *un conjunto* g*-cerrado, entonces* $f(A)$ *es un conjunto* g*-cerrado.*

Demostración. Sea $O \in \tau_1$ tal que $f(A) \subset O$, entonces $A \subset f^{-1}(O)$ y dado que A es un conjunto g- cerrado y $f^{-1}(O) \in \tau$ se sigue que $cl(A) \subset f^{-1}(O)$ y como

$$cl(f(A)) \subset cl(f[cl(A)]) = f[cl(A)] \subset O$$

implica que $cl(f(A)) \subset O$.

Por lo tanto, $f(A)$ es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 3.27. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f : X \to Y$ continua, abierta, sobre y $B \subset Y$ un conjunto g- cerrado, entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sean $B \subset Y$ un conjunto g- cerrado y $U \in \tau$ tal que $f^{-1}(B) \subset U$. Como $f^{-1}(B) \subset U$ se sigue que $B \subset f(f^{-1}(B)) \subset f(U)$ y dado que f es abierta y B es un conjunto g-cerrado se tiene que $cl(B) \subset f(U)$ y como f es continua y sobre tenemos que $cl[f(B)] \subset f(cl(B)) \subset f^{-1}(f(U)) = U$ es decir $cl(f^{-1}(B)) \subset U$.

Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un conjunto g-cerrado. □

4 Conjuntos g-cerrados en clases de espacios

Es conocido que si $A \subset X$ es un conjunto cerrado y (X, τ) es un espacio compacto o numerablemente compacto o Lindeloff o paracompacto, entonces A es compacto, numerablemente compacto, Lindeloff, paracompacto respectivamente veremos que si $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado y (X, τ) es un espacio compacto o numerablemente compacto o Lindeloff o paracompacto, entonces A es compacto, numerablemente compacto, Lindeloff, paracompacto respectivamente. Los resultados de es ta secciónpueden ser consultados en [5, teorems 3.1 y 3.2].

Teorema 4.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto g-cerrado, entonces*

(1) *Si (X, τ) un espacio topológico compacto, entonces A es compacto.*

(2) *Si (X, τ) un espacio topológico numerablemente compacto, entonces A es numerablemente compacto.*

(3) *Si (X, τ) un espacio topológico Lindeloff, entonces A es Lindeloff.*

(4) *Si (X, τ) un espacio topológico para compacto, entonces A es para compacto.*

Demostración. (1) Sea $A \subset X$ un conjunto g-cerrado y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A.

Como $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A se sigue que $A \subset \cup\{O : O \in \mathcal{U}\}$ y aplicando la Definición 3.1 se sigue que $cl(A) \subset \cup\{O : O \in \mathcal{U}\}$ y como X

es compacto $cl(A)$ es compacto de donde existen $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{U}$ tales que $cl(A) \subset \cup\{O_i : i = 1, \ldots, n\}$, se sigue que $A \subset \cup\{O_i : i = 1, \ldots, n\}$.

Por lo tanto,

$$A \text{ es compacto.}$$

Las demostraciones de (2), (3) y (4) son análogas. □

Teorema 4.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $d(A)$ es un conjunto g- cerrado.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $O \in \tau$ tal que $d(A) \subset O$. Como $d(A) \subset O$ del Lema 2.1 se tiene que $d(d(A)) \subset O$ y como $cl(d(A)) = d(A) \cup d(d(A))$, entonces

$$cl(d(A)) \subset O$$

Por lo tanto, $d(A)$ es un conjunto g-cerrado. □

Corolario 4.3. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, entonces $d(A)$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $A \subset X$. Por el teorema 4.2 $d(A)$, es un conjunto g-cerrado y como X es compacto, entonces por el teorema 4.1, se tiene que $d(A)$ es compacto. □

Teorema 4.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico regular y $A \subset X$ compacto, entonces A es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Sea $A \subset X$ compacto y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$.

Como $A \subset O$ y X es regular existe $O_1 \in \tau$ tal que $A \subset O_1 \subset cl(O_1) \subset O$ de donde se sigue que $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto, A es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 4.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico normal y $A, F \subset X$ con F un compacto, A un conjunto g-cerrado y $F \cap A = \emptyset$, entonces existen $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $F \subset O_1$, $A \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.*

Demostración. Sean $A, F \subset X$ con F un compacto, A un conjunto g-cerrado tales que $F \cap A = \emptyset$.

Como $F \subset X$ con F compacto y X normal, entonces F es un conjunto cerrado y dado que $F \cap A = \emptyset$, entonces $A \subset (X \setminus F)$ y como A es un conjunto g-cerrado de la Definición 3.1 se tiene que $cl(A) \subset (X \setminus F)$ lo cual implica que $cl(A) \cap F = \emptyset$ y dado que X es un espacio normal se sigue que existen $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $F \subset O_1$, $cl(A) \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y como $A \subset cl(A)$.

Por lo tanto,

$$\text{existen } O_1, O_2 \in \tau \text{ tales que } F \subset O_1, A \subset O_2 \text{ y } O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

□

En general conjuntos g-cerrados ajenos en un espacio normal no pueden ser separados por conjuntos a abiertos para lo cual es suficiente dar un ejemplo.

Ejemplo 3. Sean

$$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}, A = \{b\} \text{ y } B = \{c\}.$$

es claro que $A \cap B = \emptyset$, A y B son conjuntos g-cerrados y no pueden ser separados por conjuntos abiertos.

Teorema 4.6. *Sean (X, τ) un espacio topológico normal y $Y \subset X$ un conjunto g-cerrado, entonces (Y, τ_Y) es un espacio normal.*

Demostración. Sean $E, F \subset X$ conjuntos cerrado en X tales que $(Y \cap E) \cap (Y \cap F) = \emptyset$.

Como $(Y \cap E) \cap (Y \cap F) = \emptyset$ se sigue que $Y \subset X \setminus (E \cap F)$ lo cual implica que $cl(Y) \subset X \setminus (E \cap F)$, entonces $(cl(Y) \cap E) \cap (cl(Y) \cap F) = \emptyset$.

Como (X, τ) un espacio topológico normal, existen $O_1, O_2 \in \tau$ tales que

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset, cl(Y) \cap E \subset O_1 \text{ y } cl(Y) \cap F \subset O_2$$

se sigue que $Y \cap E \subset O_1 \cap Y$ y $Y \cap F \subset O_2 \cap Y$.

Por lo tanto, (Y, τ_Y) es un espacio normal. □

Teorema 4.7. *Sean (X, τ) un espacio topológico Localmente Indiscreto, entonces A es un conjunto g-cerrado para todo $A \subset X$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$.

Como (X, τ) un espacio topológico Localmente Indiscreto y $O \in \tau$, $O = cl(O)$, y dado que $A \subset O$ sigue que $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto, A es un conjunto g-cerrado. □

5 Conjuntos g-abiertos

Definición 5.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces A es un conjunto g-abierto si $X \setminus A$ es un conjunto g-cerrado. Los resultados de esta sección pueden ser consultados en [5, definición 4.1, teoremas 4.2, 4.3, 4.5, 4.8, 4.9 y corolario 4.4].*

Teorema 5.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g-abierto.*

(2) *Para todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $F \subset A$ implica que $F \subset int(A)$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea A es un conjunto g-abierto y $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $F \subset A$.

Como A es un conjunto g-abierto, entonces $X \setminus A$ es un conjunto g-cerrado y dado que $F \subset X$ es un conjunto cerrado tal que $F \subset A$ se sigue que $X \setminus A \subset X \setminus F$ lo cual implica $cl(X \setminus A) \subset X \setminus F$ con lo cual obtenemos que $F \subset X \setminus cl(X \setminus A)$.

Por lo tanto,
$$F \subset int(A).$$
(2) implica (1) Supongamos que para todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $F \subset A$ implica que $F \subset Int(A)$ y sea $U \in \tau$ tal que $X \setminus A \subset U$.

Como $X \setminus A \subset U$ se sigue que $X \setminus U \subset A$ lo cual implica que $X \setminus U \subset int(A)$ de donde $X \setminus int(A) \subset U$ y dado que $X \setminus A \subset X \setminus int(A) \subset U$ se sigue que $cl(X \setminus A) \subset U$.

Por lo tanto, A es un conjunto g-abierto. □

Teorema 5.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$, conjuntos separado, g-abiertos entonces $A \cup B$ es un conjunto g-abierto.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$, conjuntos separados, g-abiertos y F un conjunto cerrado tal que $F \subset A \cup B$.

Como $A, B \subset X$, son conjuntos separados y $F \subset A \cup B$, entonces $F \cap cl(A) \subset A$ y $F \cap cl(B) \subset B$ y dado que A y B son conjuntos g-abiertos, se sigue que
$$F \cap cl(A) \subset int(A) \text{ y } F \cap cl(B) \subset int(B).$$

Ahora como

$$F = F \cap (A \cup B) \subset (F \cap cl(A)) \cap (F \cap cl(B)) \subset int(A) \cup B \subset int(A \cup B),$$

se sigue que $F \subset int(A \cup B)$.

Por lo tanto, $A \cup B$ es un conjunto g-abierto. □

En general la unión de conjuntos g-abiertos no necesariamente es g-abierto para lo cual es suficiente recordar el Ejemplo 3.5, sin embargo, si estos conjuntos son separados la intersección de estos conjuntos si es un conjunto g-cerrado como nos lo muestra el siguiente resultado.

Corolario 5.4. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$, conjuntos g-cerrados tales que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son separados entonces $A \cap B$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración. Como $A, B \subset X$, son conjuntos g-cerrados y $A = X \setminus (X \setminus A)$ y $B = X \setminus (X \setminus B)$, entonces $(X \setminus A)$ y $(X \setminus B)$ son conjuntos g-abiertos separados, de donde del teorema anterior, $(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ es un conjunto g-abierto y dado que $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ implica que $X \setminus (A \cap B)$ es un conjunto g-abierto.

Por lo tanto, $A \cap B$ es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 5.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g- abierto.*

(1) *Si $int(A) \cup (X \setminus A) \subset O$ con $O \in \tau$, entonces $O = X$.*

Demostración. (1) implica (2) Sea A es un conjunto g- abierto y $int(A) \cup (X \setminus A) \subset O$ con $O \in \tau$.

Como $int(A) \cup (X \setminus A) \subset O$, entonces

$$(X \setminus O) \subset cl(X \setminus A) \cap A = cl(X \setminus A) \setminus (X \setminus A).$$

Como $X \setminus A$ es g-cerrado y $X \setminus O$ es cerrado, del teorema 3.10, se sigue que $X \setminus O = \emptyset$.

Por lo tanto,

$$O = X.$$

(2) implica (1) Sea F un conjunto cerrado tal que $F \subset A$.

Como $F \subset A$, entonces $(X \setminus A) \subset (X \setminus F)$ de donde $int(A) \cup (X \setminus A) \subset int(A) \cup (X \setminus F)$ lo cual implica que $int(A) \cup (X \setminus F) = X$ es decir $F \subset int(A)$.

Por lo tanto, A es un conjunto g-abierto. □

Teorema 5.6. *Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico X tales que $int(A) \subset B \subset A$ con A un conjunto g-abierto, entonces B es un conjunto g-abierto.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$ tales que $int(A) \subset B \subset A$ con A un conjunto g-abierto.

Como $int(A) \subset B \subset A$ y A un conjunto g-abierto, entonces $(X \setminus A) \subset (X \setminus B) \subset cl(X \setminus A)$ y dado que $(X \setminus A)$ es un conjunto g-cerrado, entonces $(X \setminus B)$ es un conjunto g-cerrado.

Por lo tanto, B es un conjunto g-cerrado. □

Teorema 5.7. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g-cerrado*

1. (2)] $cl(A) \setminus A$ es un conjunto g-abierto.

Demostración. (1) implica (2): Sea A es un conjunto g-cerrado y F un conjunto cerrado tal que $F \subset cl(A) \setminus A$ de donde se sigue que $F = \emptyset$ lo cual implica que $F \subset int(cl(A) \setminus A)$ de donde aplicando el Teorema .

Por lo tanto,

$$cl(A) \setminus A \text{ es un conjunto } g\text{-abierto.}$$

(2) implica (1): Sean $cl(A) \setminus A$ es un conjunto g-abierto y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$.

Es claro que

(1) $cl(A) \cap (X \setminus O)$ es un conjunto cerrado y

(1) $cl(A) \cap (X \setminus O) \subset cl(A) \cap (X \setminus A) = cl(A) \setminus A$

y dado que $cl(A) \setminus A$ es un conjunto g-abierto se sigue que

$$cl(A) \cap (X \setminus O) \subset int(cl(A) \setminus A) = \emptyset$$

de donde $cl(A) \cap (X \setminus O) = \emptyset$, es decir, $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto, A es un conjunto g-cerrado. □

Agradecimientos

El autor agradece a los árbitros el esfuerzo y tiempo que la revisión de este trabajo les haya tomado. También agradece a los editores por dar la oportunidad de colaborar en este libro.

Bibliografía

[1] W. Dunham, *Weakly Hausdorff space*, Kyungpook Math. J. Vol 15. (1975) 41-50.

[2] W. Dunham, $T_{\frac{1}{2}}$-*spaces*, Kyungpook Math. J. Vol 17. Num 2, (1977) 161-169.

[3] W. Dunham and N. Levine, *Further results on generalized closed sets in topology*, Kyungpook Math. J. Vol 20. Num 2, (1980) 169-175.

[4] W. Dunham, *A new closure operator for non* T_1 *topologies*, Kyungpook Math. J. Vol 22. Num 1, (1982) 55-60.

[5] N. Levine *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19 (1970) 89-96.

[6] M. Ibarra Contreras y A. Martínez García, *Espacios de Alexandroff*, Matemáticas y sus aplicaciones 17, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2021) 5-38.

[7] A. Martínez García, *Axiomas de separación*, Matemáticas y sus aplicaciones 20, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2023) 99-125.

[8] A. Martínez García y M. Ibarra Contreras, *Conjuntos preabiertos y algunos conceptos relacionados*, Topología y sus aplicaciones 9, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2023) 3-20.

[9] D. Rose, G. Scible and D. Walsh, *Alexandroff Spaces*, Journal of Advanced Studies in Topology vol 3 No. 1, (2012) 31-43.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

maga@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 3

Implications, equivalence and special versions of the Arrow's Impossibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem

Bolivia Cuevas Otahola[1], Jesús Alonso Arriaga Hernández[2], Ramón Pino Pérez[3], María Monserrat Morín Castillo[1], José Jacobo Oliveros Oliveros[2]
FCE BUAP[1], FCFM BUAP[2], Université d'Artois[3]

Abstract

In this work we aim to formalize and show the equivalence between the Arrow's Imposibility Theorem and the Gibbard-Satterhwaite's Manipulability Theorem, as a second and final part of Chapter 3 published in "Matematicas y sus Aplicaciones 21" (2023). As in the previous chapter, we show techniques and equivalences which are crucial to prove the equivalence between the Arrow's Impossibility Theorem and the Gibbard-Satterhwaite's Manipulability Theorem. We analyze different versions of the Impossibility and Manipulability Theorems according to several functions in social choice theory, namely social choice functions, social welfare functions and voting rules. Moreover, we prove several equivalences including relevant fundamentals of the different versions of the Impossibility theorem and the Manipulability theorem (relations and classical proof) according to the results by D. Makinson.

1 Introduction

As mentioned in Cuevas et al. [1], the Social Choice Theory's subject matter are the procedures to choose candidates given the voters' preferences. Such procedures are analyzed and classified according to features, considered rational. Kelly et al. [2] present an introductory approach to this theory,

which started with the doctoral dissertation by Arrow, entitled "Social choice and individual values" [3], where the electoral procedures are standardized, transforming the voters' preferences into a social preference. Arrow [3] used the term social welfare function to refer to the relation transforming each set of individual's total pre-orders into a total pre-order (voting global preferences), concluding that there does not exist any social welfare function with a minimum number of rational properties unless it is a dictatorship. Arrow did not consider, which are the manipulability situations for electoral processes, where a voter can lie to obtain a more convenient result than the one obtained voting honestly. In this line of thoughts, the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem, established that all choice functions satisfying a set of desirable properties are necessarily manipulable, as mentioned in Cuevas et al. [1].
In this chapter we focus on formalizing the equivalence between both theorems [1]. To this aim, we need to delve into several proofs, in addition to the different versions of the Impossibility and Manipulability Theorems, according to social choice and social welfare functions and voting rules. We introduce the Arrow's theorem versions to analyze its interrelations and classic proof, subsequently, we introduce different versions of the manipulability theorem, highlighting those carried out by Makinson et al. [4]. From the latter, we show the equivalences between the impossibility and the manipulability theorems from the techniques shown in the preceding sections [5], with the aim to thoroughly show the equivalence between the Arrow's impossibility theorem and the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem. We continuosly recall the work by Cuevas et al. [1] in chapter 3 in "Matemáticas y sus Aplicaciones 21 del año 2023". A significant part of the results in this work rely on the work by Cuevas et al. [1], and hereinafter we will refer to several definitions, theorems and lemmas in such work.

2 Basic concepts of Impossibility and Manipulability

The social choice theory studies thoroughly the set preferences of an individual over a set of determined alternatives, to provide a global preference or the best alternatives, where the main goal is to establish which choice systems are fair or appropriate, satisfying the society as a set, expressing the preferences as total pre-orders (Def. 2.1 to 2.3 in Cuevas et al. [1]). We bear in mind that reflexivity is not included since it is derived immediately from the totality of the relation. In addition to these results in [1], we set the following notation: $a{\sim}b$ denotes that a is "indifferent to" b. We use $a{\succ}b$, to denote that a is "less strict than" b, and $a{\succcurlyeq}b$, denotes that a "is as good as" b. Likewise, PT denotes the total pre-orders set and OL the set of linear orders. We will refer to the subject study individuals set as N, the set of alternatives X, and $\mathscr{P}^*(X)$ the set of alternatives (where * is used by convention to stand for the non-empty power set of X), V denotes the collection of subsets of $\mathscr{P}^*(X)$ (which we will call "agenda"), and to denote the set of the best alternatives in V according to the preferences in u, we use $f(u,V)$ where $f_u(V)$ and $f(u,V)$ are equivalent. In Social Choice Theory is necessary to define social choice functions, social welfare functions, and voting rules.

Definition 2.1. *Let X denote a set of alternatives. A social choice function f is a function of the form*

$$f : PT^n{\times}\mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X) \textit{ such as } f(u,V){\subset}V.$$

Definition 2.2. *A deterministic social welfare function is manipulable-fbs if there exists an individual i, a profile u and an order $\succ^*$ satisfying*

- $f\left(u\right) = \left(x_1, x_2, \cdots x_p, a, \ldots, \right)^T$,
- $f(u[\succ^* /i]) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p, b, \ldots\right)^T$,
- $b \succ_i a$.

We establish some choice rules for the social choice functions:

Simple Majority Rule: Let $X = \{x, y\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$ and consider the pairs of the form (u, V) with $u \in PT^n$. We define:

$$f_u\left(V\right) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } |i \in N : x \succ_i y| > |i \in N : y \succ_i x|, \\ \{y\}, & \text{if } |i \in N : y \succ_i x| > |i \in N : x \succ_i y|, \\ \{x, y\}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

Absolute Majority Rule: Proceeding analogously as in the simple majority rule, we define:

$$f_u(V) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } |i \in N : x \succ_i y| > \frac{n}{2}, \\ \{y\}, & \text{if } |i \in N : y \succ_i x| > \frac{n}{2}, \\ \{x, y\}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

Projection Rule: Let i denote an individual, u a profile and V an agenda. Hence, without loss of generality, we define:

$$f_u(V) = \max(V, \succcurlyeq_i). \tag{3}$$

Borda Rule: Let $u = \{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_3, \ldots, \succcurlyeq_n\}$, for each $x \in X$, x is associated with a natural number $r_i(x)$, corresponding to the position of x in the total pre-order $\succcurlyeq_i$ where $r_i(x)\, m \Leftrightarrow m$ is the largest integer such as there exists $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ with $x_j \succ_i x_{j+1}$ and $x_1 = x$. We define:

$$r_u(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x), \tag{4}$$

$$f_u^B(V) = \{x \in V : r_u(x) \geq r_u(y)\ \forall\ y \in V\}. \tag{5}$$

The previously mentioned rules of Absolute Majoritory, Projection and Borda are widely related to Def. 2.5 to 2.21 in Cuevas et al. [1] as properties of the social choice functions to provide a notion of manipulability, which essentially manifests that an individual i which we will refer to as manipulator, obtains better results by lying over telling the truth. The latter leads to the interpretation of individual i as a manipulator, obtaining a set with at least a better element than the best element in the true preferences set, to enunciate the manipulability in a pessimistic fashion. These arguments state that the manipulator obtains a set in which the worst element of the set represents the lie. In this context, it is necessary to define Social Welfare Functions [1]. We highlight that in the social welfare functions, the input is a profile and the output the individuals' global preferences. The transition between social choice and social welfare functions is given by assigning a pre-order to the winning alternatives in the social choice function, i.e.

$$f_u(V) = \succcurlyeq_u. \tag{6}$$

The whole path from the beginning of the chapter by Cuevas et al. [1] to set the foundations to define social welfare functions, is continued here, where we remain to enunciate several rules and properties for social welfare functions equivalent to the rules and properties enunciated for social choice functions, both in the construction, structure, and notation (nomenclature). In the deterministic case a Social Welfare Function $f : OL^n \longrightarrow OL$ is said to be deterministic if $f(u) = \succcurlyeq$, where $\succcurlyeq$ is a linear order. We proceed at this point to focus on Voting Rules since there exists a transition between them and the social welfare functions. We recall that the winner for the Borda rule is given by the pre-order top which is the image of the social welfare function. In Definitions. 2.22 to 2.28 in Cuevas et al. [1], they show the properties for the individual i considered as dictator-rv, voting rules-f, dictatorial voting rules-rv, and Pareto-rv. The latter are required to establish the Arrow's Impossibility Theorem, and its proof depends on Definitions. 3.2 and 3.3 in Cuevas et al. [1], which give place to the following Lemmas (shown in [1] pp. 74-75):

Lemma 2.3. *Let f be a social choice function satisfying transitive explanations, IIA and Pareto then $x \succcurlyeq_u y$ if and only if $x \in f_u(\{x, y\})$.*

Lemma 2.4. ***First contagion result.*** *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. Then, if $xD_S y \Rightarrow xD_S^* z$ for every $z \in X$ with $z \neq x$ and $z \neq y$.*

Lemma 2.5. ***Second contagion result.*** *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. If it holds $xD_S y$, then $wD_S^* y$ for any $w \in X$ with $w \neq x$ and $w \neq y$.*

Lemma 2.6. ***General Contagion Theorem.*** *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. Hence, if it satisfies $xD_S y$ for given $x, y \in X$, then $wD_S^* z$ for any pair w, z with $w \neq z$, which means S is decisive.*

We bear in mind that Lemmas 2.4, 2.5 and 2.6 refer to techniques by Salcedo et al. [6] and Kelly et al. [2], that allow us to denote S as locally decisive for x against y and use $xD_s y$. We recall that if f satisfies Pareto, then N is locally decisive. To denote that S is globally decisive for x against y we use $xD_S^* y$ and if $xD_S^* y$ for any pair of alternatives x, y, we will simply refer to S as decisive, implying that if f satisfies Pareto, then N is globally decisive. From the latter, it follows that:

Theorem 2.7. *Let $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ a social choice function, satisfying standard domain, transitive explanations, $IIA - fes$, and Pareto. Then f is dictatorial ("**Arrow's Impossibility Theorem**").*

Proof. Following the hypothesis and since f satisfies Pareto, we have that N is decisive. Thus, we consider the set $\mathscr{I} := \{M \subseteq N : M \textit{ is decisive}\}$, where it can be noticed straighforwardly that $\mathscr{I} \neq \emptyset$ since $N \in \mathscr{I}$. Subsequently, we can consider $S \in \mathscr{I}$ such as $|S| \leq |M|$ for every $M \in \mathscr{I}$, i.e. S has a minimal size. Hence, if $|S| = 1$, then $S = \{i\}$ for a given individual $i \in N$, a dictator.

Now, we aim to show that indeed there exists a dictator for which we can proceed by contradiction. Hence, $|S| \geq 2$, and without loss of generality we can consider $i \in S$ and $S \backslash \{i\} \subseteq N$. Subsequently, given that $|S| \geq 2$ and using the hypothesis $S \backslash \{i\} \neq \emptyset$. Since f satisfies Standard Domain, we can consider the agenda $V = \{x, y, z\}$ and the profile u such as,

$$u\restriction \{x, y, z\} = \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \\ \underbrace{z}_{\{i\}} & \underbrace{x}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{y}_{N\backslash S} \end{array} \right). \tag{7}$$

Subsequently, we focus on $f_u(\{y, z\})$ and consider the following: since S is decisive, then $z \neq f_u(\{y, z\})$, it follows that $y \succ_u z$. Moreover, focusing on $x \succcurlyeq_u y$, by contradiction, we can assume that it holds that $y \succ_u x$, i.e. $x \neq f_u(\{y, z\})$ and we notice that:

$$u\restriction \{x, y\} = \left(\begin{array}{ccc} x & y & x \\ \underbrace{y}_{\{i\}} & \underbrace{x}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{y}_{N\backslash S} \end{array} \right). \tag{8}$$

Since f satisfies Transitive Explanations, it follows that if $x \neq f_u(\{x, y\})$, then $x \neq f_u(V)$ for every agenda V such as $y \in V$. Indeed, $y \succ_u x$, and similarly, by Transitive Explanations $f_u(V) = \max(V, \succcurlyeq_u)$, from which it follows that if $y \in V$ then $x \neq f_u(V)$. Hence, since $x \succ_k y$ for every $k \in (N\backslash S) \cup \{i\} \ \wedge y \succ_k x$ (for every $j \in \ S\backslash\{i\}$). On the other hand, by the hypothesis it holds $x \neq f_u(\{x, y\})$, and by Transitive Explanations it follows that for every agenda with $x \in V$ and $x \neq \max(V, \succcurlyeq_u)$, then $yD_{\,S\backslash\{i\}}y$.

By Lemma 2.6 it follows that $S\setminus\{i\}$ is decisive, which contradicts the minimal size of S, i.e. $|S|\leq|M|$ for every $M\in\mathscr{I}$, thus $x\not\succcurlyeq_u y$. On the other hand, since $y\succ_u z\wedge x\not\succcurlyeq_u y$ then $x\succ_u z$, which means that $z\neq f_u(\{x,z\})$, and noticing that:

$$u\restriction\{x,z\}=\left(\underbrace{\begin{matrix}x\\z\end{matrix}}_{\{i\}}\quad\underbrace{\begin{matrix}z\\x\end{matrix}}_{S\setminus\{i\}}\quad\underbrace{\begin{matrix}z\\x\end{matrix}}_{N\setminus S}\right). \tag{9}$$

Since $z\succ_k x$ for every $k\in N\setminus\{i\}\ \wedge\ x\succ_i z\ z\neq f_u(\{x,z\})$, then $xD_{\{i\}}z$. By virtue of Lemma 2.6 it follows that $\{i\}$ is decisive, which contradicts the minimality of S. Hence, $|S|=1$, which means there exists a dictator. □

As a consequence of Theorem 2.7 we have the following result for Social Welfare Functions

Theorem 2.8. ***Version for social welfare functions.*** *Let f be a social welfare function of the form $f: PT^n\to PT$ which satisfies simultaneously Pareto-fbs and Independence of Irrelevant Alternatives IIA-fbs. Hence, f is dictatorial-fbs.*

Subsequently, we focus on the Gibbard-Satterthwaite's theorem. To this aim, we need the results in the Definitions, Lemmas and Corollaries 3.9 to 3.17 (their proofs are provided in Cuevas et al. [1] (pp. 78-80). From these results, we give the following Theorem as a consequence of Theorem 2.8.

Theorem 2.9. *Let $f: OL^n\longrightarrow\mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying MIIA and Pareto-rv, then f is Dictatorial-rv.*

At this point, from Theorems 2.8 and 2.9, along with the results in Cuevas et al. [1] in Definitions, Lemmas and Propositions 3.20 to 3.36, it follows that:

Lemma 2.10. *Let $f: OL^n\longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying downward monotonicity and Pareto, $S\subseteq N$ with $a,b,c\in X$ two by two different alternatives. If aSb and $S=T\cup U$ for $T\cap U=\emptyset$, then aTc or cUb.*

Proof. We will consider a profile u such as $a\succ_i b\succ_i c$ for every $i\in T$, $c\succ_j a\succ_j b$ for every $j\in U$, and $b\succ_i c\succ_i a$ for every $k\in N\setminus S$. Hence, u is as follows,

$$u\restriction\{x,y\} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & b & a \\ \underbrace{\vdots}_{T} & \underbrace{\vdots}_{U} & \underbrace{\vdots}_{N\backslash S} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

On the other hand, since $a{\succ_i}x$, $b{\succ_i}x$ and $c{\succ_i}x$ for every $i \in N$ and for every $x \in X\backslash\{a,b,c\}$, by Pareto it follows that $f(u) \notin X\backslash\{a,b,c\}$, implying that $f(u) \in \{a,b,c\}$. By hypothesis, we have that aSb, implying straightforwardly that $f(u) \neq b$, giving place to the possibilities $f(u) = a$ or $f(u) = c$.
Thus, if $f(u) = a$, by Lemma 3.28 in Cuevas et al. [1] (page 83) (Existence Lemma) it follows that aTc since for every $i \in T$ it follows that $a{\succ_i}c$ and for every $j \in N\backslash T$ we have that $c{\succ_i}a$. Similarly, if $f(u) = c$, by Lemma 3.28 in Cuevas et al. [1] (page 83) it follows that cUb since for every $j \in U$ it holds that $c{\succ_i}b$ and for every $i \in N\backslash U$ it follows that $b{\succ_i}c$. □

Lemma 2.11. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto. If S is an Oligarchy (Def. 3.20, page 81 in Cuevas et al. [1]), then there exists $i \in S$ such as $\{i\}$ is an Oligarchy. In particular, since N is an Oligarchy (by Pareto), then there exists a voter which is a dictator for f [2, 15, 16].*

The following result (Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem) is a direct consequence (Corollary) of Lemma 2.11 (which also depends on Lemma 2.10)

Theorem 2.12. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying non-manipulability and Pareto-rv, then f is a voting rule Dictatorial-rv* ***(Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem)****.*

These results also allow us to enunciate another version of Theorem 2.12, for example, in Theorem 2.13 we will provide a version of Theorem 2.12 for voting rules (the proof is provided in Cuevas et al. [1] page 84).

Theorem 2.13. *A voting rule $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ is non-Manipulable, non-Impositive and deterministic if and only if, it is Dictatorial.*

Theorem 2.14. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying non-manipulability and non-imposition, then f is a dictatorial voting rule.*

By virtue of the previous results, we have the required tools to obtain the following result, enunciated and proved by Jhon Duggan and Thomas Schwartz in 1993 and formally published in 2000 [17].

Theorem 2.15. ***(Version for non-deterministic voting rules and non-linear orders).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying non-manipulability either in a pessimistic or optimistic way, and non-imposition. Then f is a dictatorial weakly inclusive voting rule.*

Theorem 2.15 is very important. Indeed, other versions of such theorem are obtained from Theorem 2.15. We mention some of the most relevant versions hereinafter.

Theorem 2.16. ***(Version of Theorem 2.12 for social welfare functions).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow PT$ be a deterministic social welfare function satisfying non-manipulability-fbs and non-imposition by pairs, then f is dictatorial-fbs [17].*

Theorem 2.17. ***(Version of Theorem 2.12 for deterministic social choice functions and non-linear orders).*** *Let $f : OL^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic social choice function satisfying non-manipulability-fes and non-imposition by pairs, then f is dictatorial-fes [5, 18].*

Theorem 2.18. ***(Version of Theorem 2.12 for non-deterministic social choice functions and non-linear orders).***
Let $f : OL^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a non-deterministic social choice function satisfying non-manipulability-fes either in a optimistic or pessimistic way, and non-imposition by pairs, then f is dictatorial-fes [5, 18, 19].

3 Proof of the Equivalence between Arrow's and Gibbard Satterthwaite's theorems

In this section, we accomplish the main goal of this chapter, proving the equivalence between Theorem 2.7 (Arrow's Impossibility Theorem) and Theorem 2.12 (Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem). As a first step, we will enunciate special versions of the theorems by means of the previous results, as well as other useful results to reach our goal.

Theorem 3.1. ***(Arrow's Special Theorem, special version of Theorem 2.7).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto and MIIA (Def. 3.17, page 80 in Cuevas et al. [1]), then f has a dictator [3, 20].*

Theorem 3.2. ***(Gibbard-Satterthwaite's Special Theorem, special version of Theorem 2.12).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic non-impositive and non-manipulable voting rule, then f has a dictator [21, 19].*

By means of Theorems 3.1 and 3.2 we obtain the following version of Theorem 2.7:

Theorem 3.3. ***(Second Arrow's Special Theorem, special version of Theorem 2.7).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying Pareto, IIA and downward monotonicity, then f has a dictator [22].*

Since the conclusion is the same in both Theorems 3.2 and 3.3, it will suffice to show that the premises are equivalent. In order to achieve this, we will enunciate the following results:

Lemma 3.4. *Every voting rule $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying IIA and Pareto is deterministic [5, 6].*

Proof. We will proceed by contradiction. Let f be non-deterministic, u a profile and $a, b, c \in X$ with $|X| > 3$ such as $a, b \in f(u)$. Subsequently, we assume $N = A \cup B$ with $A = \{i \in N : a \succ_i b\}$, $B = \{i \in N : b \succ_i a\}$, 4 new profiles defined from u as follows:

- $u_1 = u \downarrow_c$ (placing c in the bottom),
- $u_2 = u_1 \begin{bmatrix} a & \\ c & /A \\ b & \end{bmatrix}$ (for c between a and b in the set A),
- $u_3 = u_2 \begin{bmatrix} c & \\ a & /A \\ b & \end{bmatrix}$ (for c in the top of A),

- $u_4 = u_3 \begin{bmatrix} b & \\ c & /B \\ a & \end{bmatrix}$ (placing c between a and b for set B),

as a straightforward consequence, the following statements hold:

1. $c \notin f(u_1) \wedge \{a,b\} \subseteq f(u_1)$,
2. $c \notin f(u_2) \wedge \{a,b\} \subseteq f(u_2)$,
3. $c \notin f(u_3) \wedge \{a,b\} \subseteq f(u_3)$,
4. $c \notin f(u_4) \wedge \{a,b\} \subseteq f(u_4)$.

Clearly, for statement 1 and by Pareto $c \notin f(u_1)$ since by contradiction, it holds that $\{a,b\} \nsubseteq f(u_1)$, therefore $u|_{\{e,f\}} = u_1|_{\{e,f\}}$ if $c \notin \{e,f\}$. On the other hand, $a \neq c$ and $e \neq c \Rightarrow u|_{\{a,e\}} = u_1|_{\{a,e\}}$ and without loss of generality $a \notin f(u_1) \wedge e \in f(u_1)$. Restricting profiles u and u_1 to the alternatives a and e, we have two equal profiles with $a \notin f(u_1)$ and $a \in f(u)$ which contradicts IIA.
For statement 2, for both A and B it follows that $a \succ_i c \;\forall\; i$. If we restrict u_1 and u_2 to alternatives a and c, we obtain two equal profiles, and by IIA, since $c \notin f(u_1)$ it follows that $c \notin f(u_2)$. By contradiction, $\{a,b\} \nsubseteq f(u_2) \Rightarrow u_1|_{\{e,f\}} = u_2|_{\{e,f\}}$ if $c \notin \{e,f\}$, given that $a \neq c$ and $e \neq c \Rightarrow u_1|_{\{a,e\}} = u_2|_{\{a,e\}}$. Assuming $a \notin f(u_2) \wedge e \in f(u_2)$ and restricting the profiles u_1 and u_2 to the alternatives a and e, we obtain two equal profiles with $a \notin f(u_2)$ and $a \in f(u_1)$, which contradicts IIA.
For statement 3, if we restrict u_2 and u_3 to alternatives c and b, it follows that $u_2|_{\{b,c\}} = u_3|_{\{b,c\}}$. Subsequently, since $c \notin f(u_2) \wedge b \in f(u_2)$ and by the IIA hypothesis it follows that $c \notin f(u_3)$. To show that $\{a,b\} \subseteq f(u_3)$, we assume by contradiction that $\{a,b\} \nsubseteq f(u_3)$, therefore $u_2|_{\{e,f\}} = u_3|_{\{e,f\}}$ if $c \notin \{e,f\}$. Since $a \neq c$ and $e \neq c$, thus $u_2|_{\{a,e\}} = u_3|_{\{a,e\}}$, without loss of generality, we may assume $a \notin f(u_3) \wedge e \in f(u_3)$ and restricting profiles u_2 and u_3 to alternatives a and e we obtain two equal profiles with $a \notin f(u_3)$ and $a \in f(u_2)$, which contradicts IIA.
For statement 4, if we restrict u_3 and u_4 to alternatives b and c, it follows that $u_3|_{\{b,c\}} = u_4|_{\{b,c\}}$. Moreover, $c \notin f(u_3) \wedge b \in f(u_3)$ by the IIA hypothesis, it follows that $c \notin f(u_4)$. Subsequently, we will show that $\{a,b\} \subseteq f(u_4)$.

To this aim, we proceed by contradiction. It follows that $\{a,b\} \nsubseteq f(u_4)$, therefore $u_3|_{\{e,f\}} = u_4|_{\{e,f\}}$ if $c \notin \{e,f\}$. Moreover, $a \neq c$ and $e \neq c \Rightarrow u_3|_{\{a,e\}} = u_4|_{\{a,e\}}$. We assume that $a \notin f(u_4) \wedge e \in f(u_4)$ and restrict the profiles u_3 and u_4 to alternatives a and e, which results in two equal profiles with $a \notin f(u_3)$ and $a \in f(u_2)$ which contradicts IIA. Hence, we have proved the 4 statements. We notice that in statement 4, we obtained that $a \in f(u_4)$ which contradicts Pareto, since in this profile $c \succ a$ for every i.
Hence, $|f(u)| = 1$, which means f is deterministic. $\square$

We will see that in the deterministic case, the definition of MIIA is equivalent to IIA along with downward monotonicity; which can be seen in the following results (this proof follows from the Propositions 3.5 to 3.6, 3.8, Lemma 3.10 in Cuevas et al. [1] page 87), recalling Theorem 3.7.

Proposition 3.5. *Let f be a deterministic voting rule satisfying MIIA, then f satisfies downward monotonicity.*

Proposition 3.6. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto, then MIIA is equivalent to IIA with downward monotonicity.*

Proof. We will show in the first place that MIIA implies IIA and downward monotonicity. Hence, let us suppose that f satisfies MIIA. By Proposition 3.5 f satisfies downward monotonicity. For the IIA case, we will assume that $u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}}$, $f(u) = \{a\}$. Hence, by contradiction, if f is deterministic it follows that $f(u') = \{b\}$ and by MIIA implies that there exists i such as $a \succ_i b$ and $a \succ_i' b$, which is a contradiction.
In the case that downward monotonicity and IIA implies MIIA, we will suppose that IIA and downward monotonicity hold, and assume that $f(u) = \{a\}$ and $f(u') = \{b\}$ with $a \neq b$. Hence, proceeding by contradiction, let $A = \{k : a \succ_k b\}$ and $B = \left\{k : b \succ_k' a\right\}$. By Pareto and given that the preferences are linear, we have that A and B are non-empty sets, and by construction $A \cap B = \emptyset$ and thus $B \subseteq N \backslash A$.
However, if $B = N\backslash A$ it follows that $u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}}$ and by IIA $b \notin f(u')$ which contradicts the hypothesis of $f(u') = \{b\}$. If $B \nsubseteq N\backslash A$, then $N\backslash A = B \cup A'$, where for every $j \in A'$ it follows that $a \succ_i' b$. Hence, by downward monotonicity the individuals' preferences in A' can be changed by placing b over a, resulting in profile u'' such as $f(u'') = b$. However, by construction $u|_{\{x,y\}} = u''|_{\{x,y\}}$, which by IIA follows that $b \notin f(u'')$, which is a contradiction. $\square$

Theorem 3.7. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying Pareto, then the following are equivalents: (i) f is deterministic and non-manipulable, (ii) f is deterministic and satisfies MIIA, and (iii) f satisfies IIA and downward monotonicity [2, 3, 6, 23].*

Recalling our main objective, we need to prove that the premises in Theorems 2.7 and 2.12 are equivalent. To prove such equivalence, we will establish a series of definitions, propositions and lemmas, hereinafter:

Proposition 3.8. *Every voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying Pareto, also satisfies Unanimity (Def. 3.30, page 84 in Cuevas et al. [1]).*

Corollary 3.9. *Every voting rule satisfying Pareto, satisfies non-imposition.*

Lemma 3.10. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic non-manipulable and non-impositive voting rule, then f satisfies Pareto.*

Proof. In order to show that f satisfies Pareto, we need to see that for a profile u, if $x \succ_i y$ for every i, then $y \neq f(u)$.
Proceeding by contradiction, we will assume that $f(u) = y$. Hence, since f is deterministic and non-manipulable, by Lemma 3.25 in Cuevas et al. [1] (page 81) f satisfies downward monotonicity. By Lemma 3.27 in Cuevas et al. [1] (page 82), we are able to assume that all preferences in u are of the form $x \succ y \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{k-2}$ (for k the number of alternatives).
Since f is non-impositive, we can consider a profile u' such as $f(u') = x$. By virtue of Lemma 3.26 in Cuevas et al. [1] (page 82), we can assume that all preferences in u' are of the form $x \succ y \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{k-2}$. Thus, $u = u'$, however, $f(u) \neq f(u')$, which is a contradiction. Therefore, f satisfies Pareto. □

From the previous results in Lemma 3.10, Corollary 3.9, and Proposition 3.8 (along with all the previous results from Theorem 2.18), we can prove the equivalence, enunciated in the following theorem:

Theorem 3.11. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule, then the following are equivalent:*

(i) f satisfies Pareto, IIA and downward monotonicity,

(ii) f is deterministic, satisfies Pareto and MIIA,

(iii) f is deterministic, non-impostitive and non-manipulable.

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) It is a consequence of applying Theorem 3.7.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Since f satisfies Pareto, by Corollary 3.9 it follows that f is non-impositive. Moreover, by Theorem 3.7, it follows that f is non-manipulable. Hence, f is non-impositive and non-manipulable.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) On the other hand, since f is deterministic, non-impositive and non-manipulable, by virtue of Lemma 3.10 it follows that f satisfies Pareto. Hence, since f satisfies Pareto, it is also deterministic and non-manipulable, and by Theorem 3.7 f satisfies MIIA. Thus, f is deterministic, satisfies Pareto and MIIA. □

As a Corollary of Theorem 3.11, we have the equivalence between the Arrow's Impossibility Theorem (Theorem 2.7) and the Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem for voting rules (Theorem 2.13).
Finally, as a corollary of this equivalence and by Theorem 2.13, we have proved Theorem 2.9. The equivalence between these two theorems follows from these results, complementing the previously published chapter by Cuevas et al. [1].

4 Miscellany of problems/examples

In general, probability is not a popular area in science, despite it is indirectly used in research projects in several areas in mathematics, physics, biology, etc. Most specifically, the social choice functions and voting rules could include a probabilistic idea of a dictator variable. There are elements and tools used in a small research circle, namely the social choice theory, which have the additional aim of reaching out a broader readers' audience that could potentially use the Arrow's Imposibility Theorem and Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem, and intuitively think of their equivalence. We have included a series of examples/problems applying such elements of social choice theory to relate this chapter to research works in the literature, also related to probability.

Ejemplo 4.1. *Let $u = (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \ldots, \succcurlyeq_n)$ be a profile and $\succcurlyeq_u$ a total pre-order assigned to the profile u defined as follows*

$$x \succcurlyeq_u y \Longleftrightarrow r_u(x) \geqslant r_u(y).$$

Hence, it follows that $f_u^B(V) = \max(V, \succcurlyeq_u)$ *by virtue of the definition in the Borda Rule and following the pre-order properties. Therefore, the Borda Rule satisfies Transitive Explanations.*

Ejemplo 4.2. *Let us consider a profile and an agenda V, satisfying:*

- $x \in V$,
- *For every* $i \in N x \succ_i y$.

We will show that $y \notin f_u^B(V)$. *By hypothesis it follows that* $x \succ_i y$ *for every* $i \in N$ *where* $r_i(x) > r_i(y)$. *Thus,*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x) > \sum_{i=1}^{n} r_i(y), \forall i \in N. \tag{11}$$

The latter implies that $r_u(x) > r_u(y)$. *Hence, since* $x \in V$ *and by definition of* $f_u^B(V)$ *it follows that* $y \notin f_u^B(V)$. *In consequence, the Borda rule satisfies Pareto.*

Problem 4.3. *We prove a manipulation situation considering* $X = \{x, y, z\}$, $n = 3$, *a social choice function (in this case the Borda Rule)* $f : PT^3 \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ *and a profile u defined as follows*

$$u = \begin{pmatrix} xy & z & x \\ z & y & z \\ & x & y \\ \underbrace{\quad}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{\quad}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{\quad}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $\succ$ be a profile, defined as a lie, which follows:

$$z \succ x \succ y,$$

using the Projection rule, we define $g_u(X) = \max(f_u(X), \succ)$. From such pre-order $\succ$ and the Projection rule it follows that $g_u(X) = \{z\}$. By the Borda rule it follows that

- $r_u(x) = 6$,
- $r_u(y) = 5$,

- $r_u(z) = 6$,

where $f_u^B(X) = \{x, z\}$. Let us assume that individual 1 changes preferences in such a manner that profile u transforms into

$$u' = \begin{pmatrix} x & z & x \\ y & y & z \\ \underbrace{z}_{\succcurlyeq'_1} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

Moreover, by the Burda rule, it holds that

- $r_{u'}(x) = 7$,
- $r_{u'}(y) = 5$,
- $r_{u'}(z) = 6$,

where $f_{u'}^B(X) = \{x\}$. On the other hand, if we define $g_{u'}(X) = \max(f_{u'}(X), \succ)$, it follows that $g_{u'}(X) = \{x\}$. Hence, if we denote by $\succcurlyeq'$ the pre-order satisfying $x \succcurlyeq' y \succcurlyeq' z$, we notice that u' is indeed $u[\succcurlyeq' /1]$. However, we recall that in the true preferences of individual 1 it follow that $x \succcurlyeq_1 z$, where

$$g(u[\succcurlyeq' /1]) = g(u') = x \succ_1 z = g(u).$$

This represents a manipulation situation for g, since individual 1 obtains better results lying. $\square$

Ejemplo 4.4. *Let $X = \{x, y, z\}$ and the profile*

$$u = \begin{pmatrix} x & xy & y \\ y & & x \\ \underbrace{z}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{z}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{z}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix},$$

by virtue of the Borda rule it follows

- $r_u(x) = 7$,

- $r_u(y) = 7$,
- $r_u(z) = 3$,

where $f^B(u) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$.

We notice that in this example $x \succ_i z, \quad y \succ_i z$ *and* $x \succcurlyeq_u z, \quad y \succcurlyeq_u z$. *The latter illustrates that the Borda rule satisfies Pareto, which was proved in Cuevas et al. [1].*

Problem 4.5. *We show that the Borda rule does not satisfy IIA-fbs for* $n = 3$, $X = \{x, y, z\}$ *and the following profiles*

$$u = \begin{pmatrix} xy & z & y \\ z & x & z \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}$$

and

$$u' = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ z & z & x \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{z}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

Proof. If we restrict profiles u and u' to alternatives $\{x, y\}$, we obtain

$$u \upharpoonright_{\{x,y\}} = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix},$$

$$u' \upharpoonright_{\{x,y\}} = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

We notice that $u' \upharpoonright_{\{x,y\}} = u \upharpoonright_{\{x,y\}}$. We observe that using the Borda rule for each profile u, we obtain

- $r_u(x) = 5$,
- $r_u(y) = 6$,
- $r_u(z) = 6$,

where $f(u) = (yz, x, \ )^T$. Hence, for profile u'

- $r_{u'}(x) = 7$,
- $r_{u'}(y) = 6$,
- $r_{u'}(z) = 4$,

where $f(u') = (x, y, z)^T$. Thus, $f(u) \neq f(u')$. Hence, the Borda rule does not satisfy IIA-fbs. $\square$

Ejemplo 4.6. *Let us consider the profiles* $u = (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \ldots, \succcurlyeq_n)$ *and* $u' = (\succcurlyeq'_1, \succcurlyeq'_2, \ldots, \succcurlyeq'_n)$ *such as for any alternatives* x, y, $u \restriction_{\{x,y\}} = u' \restriction_{\{x,y\}}$.

In particular, $\succcurlyeq_1 \restriction_{\{x,y\}} = \succcurlyeq'_1 \restriction_{\{x,y\}}$. *Hence,* $f(u) = f(u')$.

In consequence, the Projection Rule satisfies IIA-fbs.

Ejemplo 4.7. *Let* $n = 3$ *and* $X = \{x, y, z\}$. *Let us assume*

$$u = \begin{pmatrix} x & x & xyz \\ y & z & \\ \underbrace{z}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{\quad}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

From example 4.4, we recall that the image of the social welfare function is the pre-order

$$\succcurlyeq_u = \begin{pmatrix} x \\ yz \\ \ \end{pmatrix}.$$

Hence, $f^B(u) = top(\succcurlyeq_u)$. *Thus,* $f^B(u) = \{x\}$.

Ejemplo 4.8. *We have seen in the definition of social choice functions (Section 2 in Cuevas et al. [1]) that the Borda rule satisfies Pareto. We illustrate this situation recalling Example 4.4.*
Considering the top of the resulting pre-order in the mentioned example, by virtue of the Borda definition it follows that $f^B(u) = \{x, y\}$. We recall that $x \succ_i z$ and $y \succ_i z$ for every $i \in N$ and also $z \notin f^B(u)$. In consequence, the Borda rule satisfies Pareto.

Problem 4.9. *Prove that the Borda Rule does not satisfy IIA-rv for $n = 3$, $X = \{x, y, z\}$ and the following profiles*

$$u = \begin{pmatrix} xy & z & y \\ z & x & z \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}$$

and

$$u' = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ z & z & x \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{z}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix}.$$

Proof. If we restrict profiles u and u' to alternatives $\{x, y\}$, we obtain

$$u \upharpoonright_{\{x,y\}} = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix};$$

$$u' \upharpoonright_{\{x,y\}} = \begin{pmatrix} xy & x & y \\ \underbrace{}_{\succcurlyeq_1} & \underbrace{y}_{\succcurlyeq_2} & \underbrace{x}_{\succcurlyeq_3} \end{pmatrix},$$

We recall that $u' \upharpoonright_{\{x,y\}} = u \upharpoonright_{\{x,y\}}$, and using the Borda rule for each profile we obtain profile u

- $r_u(x) = 5$,
- $r_u(y) = 6$,
- $r_u(z) = 6$,

where $f(u) = \{y, z\}$, and for profile u'

- $r_{u'}(x) = 7$,
- $r_{u'}(y) = 6$,
- $r_{u'}(z) = 4$,

where $f(u') = \{x\}$. We notice that $x \notin f(u)$ and $x \in f(u')$ which contradicts IIA-rv. Hence, in this case, the Borda rule does not satisfy IIA-rv. $\square$

Problem 4.10. *Show that the Borda rule holds under the consideration of $X = \{x, y, z\}$, $n = 3$, a voting rule $f : PT^3 \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ and a profile u defined as follows*

$$u = \begin{pmatrix} xy & z & x \\ z & y & z \\ & x & y \\ \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} \\ \succcurlyeq_1 & \succcurlyeq_2 & \succcurlyeq_3 \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $\succcurlyeq$ be a pre-order, which we defined as a lie and satisfying the following:

$$z \succ x \succ y.$$

Using the Projection rule, we define $g(u) = \max(f(u), \succcurlyeq^*)$. Hence, from such pre-order $\succ$ and the Projection rule it follows that $g(u) = \{z\}$. By virtue of the Borda rule it holds:

- $r_u(x) = 6$,
- $r_u(y) = 5$,
- $r_u(z) = 6$,

Where $f(u) = \{x, z\}$. Subsequently, we assume individual 1 changes preferences in such manner that profile u transforms into

$$u' = \left(\underbrace{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}}_{\succcurlyeq_1} \quad \underbrace{\begin{array}{c} z \\ y \\ x \end{array}}_{\succcurlyeq_2} \quad \underbrace{\begin{array}{c} x \\ z \\ y \end{array}}_{\succcurlyeq_3} \right).$$

In addition, by virtue of the Borda rule, it follows that

- $r_{u'}(x) = 7$,
- $r_{u'}(y) = 5$,
- $r_{u'}(z) = 6$,

Where $f(u') = \{x\}$. On the other hand, if we define $g(u') = \max(f(u'), \succcurlyeq^*)$ it follows that $g(u') = \{x\}$. Thus, if we denote by $\succcurlyeq'$ the pre-order satisfying $x \succcurlyeq' y \succcurlyeq' z$, we notice that u' is indeed $u[\succcurlyeq' /1]$. However, we recall that in the true preferences of individual 1, it follows that $x \succcurlyeq_1 z$, where

$$g(u[\succcurlyeq' /1]) = g(u') = x \succ_1 z = g(u).$$

The latter represents a manipulation situation for g, since individual 1 obtains better results lying. □

5 Conclusions

After going through several versions of the impossibility and manipulability theorems, we were able to establish a narrow bridge between a version of the impossibility theorem and the manipulability theorem, constituted by versions for voting rules. We think we have clarified the picture of the different Arrow's theorem versions and its relations, as well as the outlook of different versions of the manipulability theorem. So far, we do not know if more complex manipulability versions for social choice functions are equivalent to any version of the Arrow's theorem, which constitutes an interesting work to carry out.

Finally, in this chapter, we give a proof of the equivalence between the impossibility and the manipulability theorem. To this aim, we need to prove additional versions of the equivalence theorem for voting rules and the dictator definition, as well as the consideration of such dictator in the context of contagion rules. The miscellany aims to reach out a broader reader's audience in diverse areas.

Acknowledgments

The authors also thank CONAHCyT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología, México) and Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Postgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, for the support given during the course of this investigation.

Bibliography

[1] Bolivia Cuevas, Jesús Ariaga, Ramón Pino, María Morín and Jacobo Oliveros, *Matemáticas y sus aplicaciones (Vol. 21)*, Chap. 3 "Arrow's impossibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem equivalence", BUAP & FCFM Publishing, 2023.

[2] Jerry S. Kelly, *Social Choice Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, 1988.

[3] Kenneth J. Arrow, *Social choice and indiviual values*, Yale University Press, 1963.

[4] David Makinson, Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems, (Springer) *Theory and Decision* **40** (1996) 181–190.

[5] Alan D. Taylor, *Social choice and the mathematics of manipulation*, Cambridge University Press, 2005.

[6] Dubraska Salcedo, *Teorema de Arrow para perfiles estructurados*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes (ULA-Venezuela), presentada en el 2008.

[7] Bhaskar Dutta, Matthew O. Jackson and Michel Le-Breton. *Strategic Candidacy and Voting Procedures. Econometrica*, 9(3):1013–1037, 2002.

[8] Leobardo Plata-Pérez. *Bases de medición e hipótesis de comparación en decisiones colectivas y multicriterio. Denarius*, 33(10):33–62, 2005.

[9] Graciela Chichilnisky. *The topological equivalence of the pareto condition and the existence of a dictator. J. of Math. Econo.*, 9(3):223–233, 1982.

[10] Leobardo Plata-Pérez. *Amartya Sen y La Economía Del Bienestar. Est. Econó.*, 14(1):3–32, 1989.

[11] David Makinson. *Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems. Theor. Decis.*, 40:181–189, 1996.

[12] Pirlot Marc and Ph. Vincke, *Semiorders: Properties, representations, applications (Vol. 36)*, Springer Science & Business Media, 1997.

[13] Michael B. Gibilisco, Annie M. Gowen, Karen E. Albert, John N. Mordeson, Mark J. Wierman and Terry D. Clark. *Fuzzy social choice theory (Vol. 315)*, Dordrecht: Springer, 2014.

[14] Elena B. Yanovskaya. *Correspondence between social choice functions and solutions of cooperative games. Math. Soc. Sci.*, 27(2):217–234, 1994.

[15] Fuad T. Aleskerov. *Arrovian Aggregation Models*, Springer Science & Business Media, 2013.

[16] Norman Schofield. *Collective Decision-Making: Social Choice and Political Economy*, Springer Dordrecht, 1996.

[17] John Duggan and Thomas Schwartz. *Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized. Soc. Choice Welfare*, 17:85–93, 2000.

[18] Alan D. Taylor. *The Manipulability of Voting Systems. The Ame. Math. Monthly*, 109(4):321–337, 2002.

[19] Alain Marciano and Giovanni B. Ramello. *Encyclopedia of Law and Economics*, Springer New York, Chapter: Gibbard-Satterthwaite Theorem:1–7, 2020.

[20] John Geanakoplos. *Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem. Econo. Theo.*, 26(1):211–215, 2005.

[21] Arunava Sen. *Another direct proof of the Gibbard–Satterthwaite Theorem. Econo. Leters*, 70(3):381–385, 2001.

[22] Michael Morreau. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2019 Edition)*, Stanford, Edward N. Zalta (ed.), Chapter: Arrow's Theorem, 2019.

[23] Donald E. Campbell and Jerry S. Kelly. *Social Welfare Functions That Satisfy Pareto, Anonymity, and Neutrality, but Not Independence of Irrelevant Alternatives. Soc. Choice Welfare*, 29(1):69–82, 2007.

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
Faculté des Sciences, Université d'Artois
UMR 8188, Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL), Lens,
F-62300, France

bolivia.cuevasotahola@viep.com.mx
jesus.arriagahdz@correo.buap.mx
ramon.pinoperez@univ-artois.fr
maria.morin@correo.buap.mx
oliveros@fcfm.buap.mx

Probabilidad y Estadística

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 4

Predicción del precio de la mezcla mexicana de crudo de exportación: modelo discreto vs. modelo continuo

Carlos Manuel García Remigio, Ambrosio Ortiz Ramírez
Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo se ejecuta el pronóstico de precio de la mezcla mexicana petróleo crudo de exportación (MME) mediante dos metodologías. La primera consiste en la identificación, la estimación y validación de un modelo de series de tiempo ARMA(p,q). Se elije un modelo ARMA(2,0,2) por obtener el valor mínimo de tres criterios de información AIC, BIC, HQIC y de la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM). En segundo lugar se estiman los parámetros de tendencia y volatilidad de la ecuación diferencial estocástica (EDE) de un movimiento geométrico browniano (MGB) y se ejecutan predicciones por simulación Monte Carlo con 20,000 trayectorias. De acuerdo con la evidencia empírica analizada al comparar las medidas de desempeño RECM de ambos modelos, con el ARMA(2,0,2) se obtuvo un valor de 1.27, mientras que con el MGB se obtuvo un valor de 35. En este sentido las ventajas y limitaciones de los modelos propuestos son distintas, por lo que se concluye que para periodos cortos de tiempo los modelos discretos son más eficientes que los modelos en tiempo continuo.

1 Introducción

El menester de ejecutar pronósticos confiables está presente en todas las disciplinas. Con frecuencia las empresas que se dedican al estudio de mercado sobre un determinado producto ejecutan pronósticos considerando factores relevantes como la demanda, precio, posicionamiento de la marca, entre otros.

En los entes económicos que diseñan estrategias de inversión para los diferentes productos que ofrecen a sus clientes, se tiene la necesidad de fundamentar las expectativas sobre determinado activo o conjunto de activos y de esta manera tomar decisiones que en el futuro cercano se verán reflejadas en los estados financieros. En el sector público los generadores de indicadores financieros recurren a menudo a hacer pronósticos sobre una determinada variable que es clave en finanzas públicas, por ejemplo, el tipo de cambio al que se venderá determinada materia prima, el nivel estimado de cambio del producto interno bruto o el nivel de la inflación, por mencionar algunos. En ambos escenarios se tienen que hacer un estimado con la información disponible y las características propias del objeto en cuestión. Si por alguna razón no se contara con un antecedente de precios o niveles asociados históricos, estos se podrían estimar al compararlos con otros con características similares y sobre la marcha hacer los ajustes necesarios mediante consenso en un intercambio de información con todas las áreas interesadas. Una manera clásica de hacer pronósticos es con un análisis de series de tiempo o con modelos en tiempo continuo.

En [12] se define una serie de tiempo como una secuencia de información que asigna un período de tiempo a cada dato. El dato puede ser cualquier cosa medible que dependa del tiempo de alguna manera, como precios, producto interno bruto, inflación, temperatura, humedad, número de personas que acuden a un cajero automático, etc. Siempre que los valores que se registren sean válidos, cualquier conjunto de datos podría modelarse como una serie de tiempo. No existen limitaciones con respecto al período de tiempo total de la serie de tiempo, podría ser un segundo, un minuto, una hora, un día, un mes, un año o incluso una década.

Se necesita dos puntos: inicial y final. Por lo general, hay muchos otros puntos entre el inicial y el final de una serie de tiempo. El intervalo de tiempo entre el registro de un punto de la serie y el siguiente se denomina período de tiempo. La frecuencia con la que se registran los valores del conjunto de datos se denomina frecuencia del conjunto de datos. Para analizar una serie de tiempo de manera efectiva, todos los períodos deben ser iguales y estar claramente definidos, lo que resulta en una frecuencia constante. Esta frecuencia es una medida del tiempo y puede variar, por ejemplo, desde unos milisegundos hasta décadas. Sin embargo, los más usuales son diarios, mensuales, trimestrales y anuales. Además, se espera que los patrones observados en la serie de tiempo persistan en el futuro. Frecuentemente se intenta predecir el futuro analizando los valores históricos [12].

En [14] se define "un análisis con series de tiempo requiere establecer sus componentes, aplicar técnicas estadísticas y efectuar las proyecciones. En una serie de tiempo pueden existir cuatro componentes o tipos de variación: tendencia secular, variación estacional, variación cíclica y variación irregular o aleatoria. Estos cuatro componentes no actúan en forma independiente, lo hacen de manera simultánea y provocan un efecto que puede ser aditivo o multiplicativo en la variable que se examina. Se aplica un modelo aditivo cuando la variación estacional no depende de los otros componentes. El modelo multiplicativo se aplica cuando la estacionalidad varía con la tendencia".

La utilidad del análisis de series de tiempo se basa en los pronósticos. Es imprescindible que, dichos pronósticos sean lo más precisos y confiables posibles. Según [7] "...pronosticar consiste en comprimir el rango de incertidumbre dentro del cual se toman las decisiones que afectan el futuro del negocio y con él a todas las partes involucradas, aunque, el pronóstico no sustituye el juicio administrativo en la toma de decisiones, simplemente es una ayuda en ese proceso...". En [8] se ejecuta un pronóstico para los casos de nuevos contagios y decesos en México debido al virus SARS-COV2 mediante la metodología Prophet que está basado en un modelo aditivo para series de tiempo ajustando tendencias no lineales. Sus resultados indican que los casos nuevos de contagios pueden ascender a los niveles registrados en julio de 2022 para el cierre de dicho año, mientras que para los nuevos decesos se observa un aumento para septiembre de 2022, pero en menor proporción a los picos previamente registrados.

En los que se refiere a modelos en tiempo continuo existen varias referencias; en [4] se estima un modelo de volatilidad estocástica con saltos con el método de momentos a los principales índices europeos. Sus resultados resaltan el hecho de que no obstante el modelo propuesto tiende a exagerar la asimetría negativa en relación con los momentos muestrales, se mejora la capacidad para replicar la curtosis muestral de los índices analizados. En [6] se analiza el desempeño del MGB en el pronóstico del precio de la acción Nestlé en la crisis del Covid-19, con un periodo de entrenamiento de 16 semanas y dos periodos de prueba: una semana y cuatro semanas. Los autores concluyen que durante la pandemia del Covid-19, la predicción a corto plazo con MGB es más eficiente que la predicción a largo plazo, ya que el valor mínimo del error cuadrático medio (ECM) se obtiene en el período de una semana. Otros trabajos relacionados son [11], [15], por mencionar algunos.

Este capítulo está organizado como sigue, en la siguiente sección se presenta la teoría sobre series de tiempo, sus componentes, la definición y características teóricas sobre los procesos de medias móviles de orden q denotados por MA(q), los procesos autoregresivos de orden p, denotados por AR(p), los procesos autoregresivos ARMA(p, q). Asimismo, se describe la ecuación diferencial estocástica que conduce la dinámica de un movimiento geométrico Browniano y la estimación de parámetros por máxima verosimilitud. En el transcurso de la sección 3 se presenta el análisis de resultados de la aplicación de las metodologías propuestas, por lo que se presentan los resultados de la estimación de los modelos discretos que mejor se ajustaron a la serie de precios con los criterios de información AIC, BIC, HQIC y una medida de desempeño: raíz cuadrada del error cuadrático medio: RECM en la predicciones. En el caso del M.G.B. se ejecuta la estimación de parámetros y la predicción por simulación Monte Carlo con 20,000 trayectorias. Por último, en la sección 4 se presentan las conclusiones del presente trabajo junto con algunas extensiones por explorar en la agenda futura de investigación.

2 Teoría de series de tiempo

En la era *big data* el mundo está lleno de varios tipos de datos, las series de tiempo son uno de los tipos de datos más comunes. Existe una gran cantidad de datos en series de tiempo tanto en la vida cotidiana como en todos campos de la ciencia y la tecnología. Sin embargo, ¿qué es una serie de tiempo? En pocas palabras, una serie de tiempo (en adelante ST) es una secuencia de datos de un proceso natural o social observado a lo largo del tiempo. Por lo tanto, está ordenado en "tiempo" y no se debe intercambiar las posiciones de dos valores cualesquiera.

Hay muchos ejemplos de series de tiempo en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, el peso corporal de una persona medido un mismo día de la semana en un año genera una ST; el precio de cierre diario de la acción de una empresa que cotiza en bolsa también lo es. El primer paso en cualquier análisis de series de tiempo es graficar los datos y hacer un análisis exploratorio. En un sistema de coordenadas, el tiempo denotado por t está en el eje horizontal y el valor observado en el eje vertical. Por tanto, los datos de las series de tiempo dependen del tiempo en su respectiva frecuencia. Es fácil de hacer y es un primer paso para analizar series de tiempo. El comportamiento incluye la tendencia y/o estacionalidad (período) de la ST. Una definición es la siguiente:

Definición 2.1. *Una serie de tiempo es una sucesión ordenada de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde t representa el índice de tiempo y $t \in T = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. Los valores de la ST se denominan realización, muestra u observación.*

Obviamente, la ST está ordenada y también se le denomina proceso estocástico (discreto). En este contexto, una realización, muestra u observación de la ST también se denomina simplemente ST y, con frecuencia, se denotar por $\{x_{1:n}\} = \{x\ _t; t = 1, 2, \ldots,\ n\}$ ya que el número de observaciones es finito. En algunos casos se denota $\{a : b\}$ para representar $\{a, a+1, \ldots, b\}$ para cualquier número entero $a \leq b$ y $x_{1:n} = \{x_{1:n}\}$ para representar $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_t; t = 1, 2, \ldots, n\}$.

Funciones momento y estacionariedad de series de tiempo

En esta sección, se definen varios conceptos importantes sobre series de tiempo, tales como estacionariedad, función de auto-covarianza, función de auto-correlación. También se presentan dos modelos básicos de series temporales: ruido blanco y caminata aleatoria.

Funciones asociadas a momentos

Para describir la estructura de probabilidad de una serie de tiempo $\{X_t\}$ se debe conocer su distribuciones de dimensión finita, es decir, para cualquier entero positivo n, y en puntos de tiempo arbitrarios $t_1, t_2, \ldots, t_n$, se tienen las siguientes funciones de distribución:

$$\begin{aligned} F_{t_{1:n}}(x_{1:n}) &= F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= \mathrm{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \cdots, X_{t_n} \leq x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$. En este punto, se dice que $\{X_t\}$ sigue una distribución dada. Sin embargo, en general es muy difícil obtener tales funciones. Afortunadamente, gran parte de la información de estas distribuciones multivariadas se puede describir en términos de sus momentos: media, desviación estándar, etc.

Definición 2.2. *(1) La función media (primer momento) de una ST se define como:*

$$\mu_t = \mathrm{E}(X_t) \tag{2}$$

Esto es, μ_t es la esperanza de la ST al tiempo t. (2) La función varianza (segundo momento central) de una ST define como:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{E}[(X_t - \mu_t)^2] \tag{3}$$

Además, $\sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2}$ se denomina función desviación estándar.

En general, las funciones anteriores pueden tener variar con el tiempo. Además, son extensiones naturales de los conceptos relacionados en la estadística clásica y poseen propiedades similares.

Definición 2.3. *La función autocovarianza de una ST se define como:*

$$\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)] \tag{4}$$

La función de autocorrelación de una ST:

$$\rho(s,t) = \mathrm{Corr}(X_s, X_t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sigma_s \sigma_t} = \frac{\mathrm{Cov}(X_s, X_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_s)\mathrm{Var}(X_t)}} \tag{5}$$

Tanto las funciones de autocovarianza como de autocorrelación miden la correlación (lineal) entre dos puntos X_s y X_t en la misma serie, pero esta última no tiene dimensiones y es más fácil de usar e interpretar. Las propiedades que se usan son:

$$\gamma(t,t) = \sigma_t^2;\ \gamma(s,t) = \gamma(t,s);\ |\gamma(s,t)| \leq \sigma_s \sigma_t. \tag{6}$$

$$\rho(t,t) \equiv 1;\ \rho(s,t) = \rho(t,s);\ |\rho(s,t)| \leq 1. \tag{7}$$

Estacionariedad y Ergodicidad

Estacionariedad. Si una ST posee esta propiedad, entonces está en algún tipo de equilibrio estadístico. Hay dos tipos de estacionariedad:

Definición 2.4. *Una ST $\{X_t\}$ es estrictamente estacionaria o tiene estacionariedad estricta si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $\{X_{1+k}, \ldots, X_{n+k}\}$ tienen la misma distribución conjunta para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier número entero k.*

Evidentemente, la estacionariedad estricta es una condición muy restrictiva y, a menudo, difícil de verificar. Existe otra forma que se denomina estacionariedad débil y es relativamente fácil de probar.

Definición 2.5. *Una ST* $\{X_t\}$ *es débilmente estacionaria o tiene estacionariedad débil si (1)* $\mathrm{E}(X_t) = \mu$ *es una constante y (2) para cualquier tiempo* t, $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$ *y* $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k)$ *es independiente de* t *para cada entero* k.

Definición 2.6. *Suponga que* $\{X_t\}$ *es una ST estacionaria con media* μ *y varianza* σ^2

(1) $\{X_t\}$ *es ergódica en media si:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t - \mu)^2] = 0. \tag{8}$$

(2) $\{X_t\}$ *es ergódica en varianza si:*

$$\lim_{n\to\infty} E[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu)^2 - \sigma^2]^2 = 0 \tag{9}$$

(3) $\{X_t\}$ *es ergódica si es ergódica tanto en media como en varianza.*

Es evidente que las series de tiempo a menudo pueden observarse sólo una vez durante un período determinado y suele estar correlacionada en diferentes momentos de tiempo. Por tanto, hay que aplicar algunas condiciones a las series de tiempo para estimar sus parámetros. De ahora en adelante, se supone que todas las ST estacionarias estudiadas son ergódicas. Por lo tanto, para cualquier ST estacionaria en la media μ y la varianza σ^2, se puede estimar μ y σ^2 con una muestra suficientemente grande $\{x_t; 1 \leq t \leq n\}$.

Función de autocorrelación muestral

En la práctica μ, $\gamma(k)$, y $\rho(k)$ no son conocidos y deben estimarse a partir de los datos. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 2.7. *Sea* $\{x_t; 1 \leq t \leq n\}$ *una muestra de tamaño* n *de una ST* $\{X_t\}$.

(1) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$ *se denomina media muestral de* $\{X_t\}$.

(2) $c_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$ *se conoce como función de autocovarianza muestral de* $\{X_t\}$.

(3) $r_k = \frac{c_k}{c_0}$ *es la función de autocorrelación muestral de* $\{X_t\}$.

Observaciones:

- Como la mayoría de la literatura, se utiliza ACF para indicar la función de autocorrelación muestral así como la función de autocorrelación, por lo que la ACF se puede identificar fácilmente en contexto.

- c_0 es la varianza muestral de $\{X_t\}$. Además, $r_0 = \frac{c_0}{c_0} = 1$ y para cualquier entero $k, |r_k| \leq 1$.

- Graficar la ACF (r_k) versus el retraso k es fácil pero muy útil para analizar muestras de series de tiempo. La gráfica de la ACF se conoce como correlograma.

- Si $\{X_t\}$ es estacionaria con $\mathrm{E}(X_t) = 0$ y $\rho_k = 0$ para todo $k \neq 0$, es decir, es una serie de ruido blanco, entonces la distribución muestral de r_k es asintóticamente normal con media 0 y varianza $\frac{1}{n}$. Por lo tanto, hay aproximadamente un 95 % de probabilidad de que r_k esté dentro del intervalo
$$\left[-1.96/\sqrt{n}, 1.96/\sqrt{n}\right].$$

En resumen: (1) si el gráfico de una serie de tiempo muestra una tendencia y/o estacionalidad explicitas, seguramente no es estacionaria; (2) si la ACF r_k disminuye muy lentamente o apenas disminuye a medida que aumenta el retraso k, la serie de tiempo tampoco debería ser estacionaria.

Ruido blanco y caminata aleatoria

El ruido blanco actúa como componente básico y es importante en el análisis de ST. Su definición es:

Definición 2.8. *W_t es una serie tipo ruido blanco o una serie puramente aleatoria si satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Para todo* t, $E(W_t) = \mu$ *es constante.*

(2) *Para todo* t, $Var(W_t) = \sigma_w^2$ *es constante.*

(3) *No existe correlación en diferentes tiempos, es decir, si* $t \neq s$, *entonces* $\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = 0$.

En los modelos de series de tiempo, el ruido blanco refleja información no observable y a veces, se denomina término de innovación. En diversas aplicaciones de ingeniería, el ruido blanco se utiliza como modelo para el ruido y una señal aleatoria que tiene la misma intensidad en diferentes frecuencias. Se denota como $W_t \sim \mathrm{RB}(\mu, \sigma_w^2)$. Además, se requiere que el ruido blanco sea independiente e idénticamente distribuido (iid), y se distingue al escribir $W_t \sim \mathrm{iid}(\mu, \sigma_w^2)$. Es más, si la distribución es normal y W_t son iid se denota el ruido blanco como $W_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_w^2)$. Sin pérdida de generalidad, se supone que la media $\mathrm{E}(W_t) = \mu = 0$. Explícitamente, W_t es estacionario y su autocorrelación tiene la siguiente propiedad:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Definición 2.9. $\{X_t\}$ *es una caminata aleatoria si es conducida por*

$$X_t = X_{t-1} + W_t \tag{10}$$

donde W_t *es un ruido blanco y para todo* t, *y no existe correlación entre* W_t *y* X_{t-1}.

donde W_t es ruido blanco y para todo t, W_t y X_{t-1} no están correlacionados.

Si W_t son v.a. iid y $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ entonces $\{X_t\}$ es una caminata aleatoria normal. De acuerdo con la ecuación anterior el valor de $\{X_t\}$ al tiempo t es el valor de la serie en el tiempo $t-1$ más un valor completamente aleatorio generado por el ruido blanco $\{W_t\}$ por lo que se sigue que:

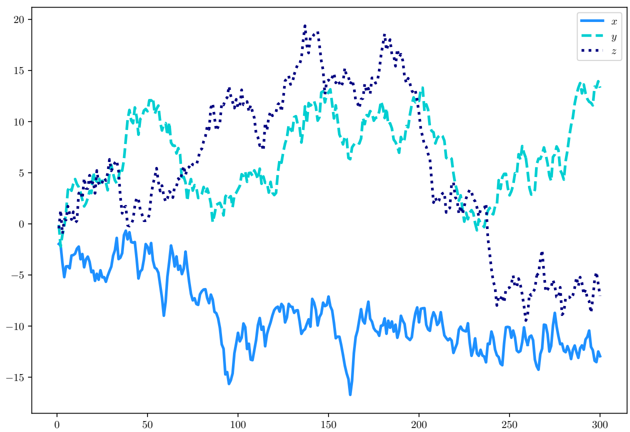
$$X_t = X_{t-1} + W_t = X_{t-2} + W_{t-1} + W_t = \cdots = X_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{t-1} + W_t \tag{11}$$

Por tanto, para todo t, $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_0)$ es una constante, es decir, la caminata aleatoria es estacionaria. Por otro lado, sin embargo, se tiene

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_{t-1}) + \sigma_w^2 > \mathrm{Var}(X_{t-1})$$

Por tanto, la caminata aleatoria no es estacionaria en varianza. Naturalmente, es probable que no sea estacionaria. Por lo tanto, la caminata aleatoria es una ST no estacionaria que no tiene tendencia determinista ni estacionalidad determinista. La figura siguiente muestra tres trayectorias simuladas de una caminata aleatoria normal estándar ($\sigma_w^2 = 1$). Las trayectorias parecen diferentes, pero en realidad todas son generadas por la misma caminata aleatoria.

Figura 1: Simulación de tres trayectorias de una caminata aleatoria normal estándar.



Fuente: elaboración propia en Python.

Funciones de autocorrelación parcial

Anteriormente se presentó el concepto de función de autocorrelación (ACF) y sus propiedades. Con una muestra de una ST se calcula su ACF y se representa por un correlograma. Otro concepto de correlación en el análisis de ST es la función de autocorrelación parcial (PACF).

Definición 2.10. *La función de autocorrelación parcial (PACF) en el rezago k de una serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ con $E(X_t) = 0$ es*

$$\phi_{11} = \mathrm{Corr}(X_{t-1}, X_t) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_t)}{[\,Var(X_{t-1})\,Var(X_t)]^{1/2}} = \rho_1$$

y

$$\phi_{kk} = \mathrm{Corr}(\hat{Z}_{t-k}, \hat{Z}_t) = \frac{\mathrm{Cov}(\hat{Z}_{t-k}, \hat{Z}_t)}{\left[Var(\hat{Z}_{t-k})\, Var(\hat{Z}_t) \right]^{1/2}},\ k \geq 2$$

Según la propiedad del coeficiente de correlación $|\phi_{kk}| \leq 1$, véase [2].

Definición 2.11. *El operador de retroceso (o rezago) opera a una serie de tiempo $\{X_t\}$. Si B representa un rezago, se define el operador de rezago*

$$BX_t = X_{t-1}$$

Es decir, B tiene el efecto de regresar los datos un paso atrás cuando opera en $\{X_t\}$. En general

$$B^n X_t = B^{n-1}(BX_t) = X_{t-n}$$

para cualquier número entero $n \geq 1$ y $B^0 X_t = X_t$ las propiedades del operador B en sí, son similares a las de una matriz. Por ejemplo, para cualquier número real α y β y cualquier serie de tiempo $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$:

$$B(\alpha X_t \pm \beta Y_t) = B(\alpha X_t) \pm B(\beta Y_t) = \alpha X_{t-1} \pm \beta Y_{t-1}$$

y

$$(1-B)^n X_t = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} B^i X_t = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} X_{t-i}$$

Con B, una caminata aleatoria se puede escribir como $(1-B)X_t = W_t$ con $W_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$

Modelos de promedio móvil

Para modelar estadísticamente datos de series de tiempo, se han propuesto muchos modelos desde la década de 1920, en los que el modelo de media móvil introducido por primera vez en [17] en 1937.

Definición 2.12. *La siguiente ecuación se denomina modelo de media móvil de orden q y se denota por* MA(q)*:*

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{12}$$

donde $\{\varepsilon_t\} \sim \text{RB}(0, \sigma_\epsilon^2)$ es decir, $\{\varepsilon_t\}$ es una serie de ruido blanco y $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ son parámetros (coeficientes) de valor real con $\theta_q \neq 0$ Si una serie de tiempo $\{X_t\}$ es estacionaria y satisface una ecuación (12), entonces se le denomina proceso MA(q). Observaciones:

- En la práctica, se supone que el intercepto (término constante) $\mu = 0$; en otro caso, considerar $\{X_t - \mu\}$.

- Se debe distinguir el concepto de modelos MA del concepto de procesos MA.

- A veces ε_t en (12) se conoce como término de innovación.

- La serie $\{X_t\}$ generada por (12) o el modelo MA(q) siempre es estacionario.

Además, al utilizar el operador B, el modelo MA(q) se denota como

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Donde $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$ es el polinomio MA.

Definición 2.13. *Si la ST $\{X_t\}$ generada por un modelo es estacionaria, entonces se dice que el modelo es estacionario.*

La definición anterior no es solamente para el modelo MA sino para cualquier modelo que pueda generar una ST. De acuerdo con esto, el modelo MA(q) es siempre estacionario y es una propiedad importante.

Propiedades de los modelos MA

Se enuncia una definición sobre las propiedades de ACF y PACF:

Definición 2.14. (1) *Si existe h tal que la ACF $\rho_h \neq 0$ y para todo $k > h$, $\rho_k = 0$ entonces se dice que la ACF se corta después del rezago h. De manera similar, si existe h tal que la PACF $\phi_{hh} \neq 0$ y para todo $k > h$, $\phi_{kk} = 0$ entonces se dice que la PACF se corta después del rezago h.*

(2) *Si para cualquier $n > 0$, existe $m \geq n$ tal que la ACF $\rho_m \neq 0$ (PACF $\phi_{mm} \neq 0$), entonces se dice que la ACF (PACF) disminuye.*

Además de la anterior, un modelo MA tiene las siguientes propiedades. Sea $\{X_t\}$ un modelo MA(q). Entonces

(1) $\mathrm{E}(X_t) = \mu$.

(2) $\gamma_0 = \mathrm{Var}(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$.

(3) La función de autocovarianza:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > q, \\ \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}, & \text{si } 0 \leq k \leq q \end{cases}$$

donde $\theta_0 = 1$.

(4) La función de autocorrelación:

$$\rho_k = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+k}) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k > q, \\ \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k} / \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2, & \text{si } 0 < k \leq q. \end{cases}$$

Las propiedades anteriores confirman que todos los modelos de media móvil son estacionarios. Observe que para todos los $k > q$, $\rho_k = 0$, esto es, la ACF de los modelos MA(q) se corta después del rezago q, lo cual es muy útil para construir modelos MA.

Modelos AutoRegresivos

El modelo autoregresivo (AR) fue propuesto por Yule, quien utilizó el modelo AR para ajustar la serie numérica de manchas solares en [20]. Es uno de los modelos fundamentales en el análisis de series de tiempo.

Definición 2.15. *La siguiente ecuación es de un modelo autoregresivo de orden p y se denota por $AR(p)$:*

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \ldots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{13}$$

donde $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\mathrm{E}(X_s \varepsilon_t) = 0$ si $s < t$ y $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ son parámetros (coeficientes) de valor real con $\varphi_p \neq 0$.

Si una serie de tiempo $\{X_t\}$ es estacionaria y satisface (13), entonces se denomina proceso AR(p). Observaciones:

- Se supone que el intercepto (término constante) $\varphi_0 = 0$ otro caso, considerar $\{X_t - \mu\}$.
- Se debe distinguir el concepto de modelos AR del concepto de procesos AR. Los modelos AR pueden ser estacionarios o no y los procesos AR deben ser estacionarios.
- $\mathrm{E}(X_s \varepsilon_t) = 0, (s < t)$ significa que X_s en el pasado no tiene relación con ε_t al tiempo t.
- Al igual que la definición de modelos MA, a veces ε_t en (13) se denomina término de innovación o *shock*.

Además, utilizando el operador de rezago B, el modelo AR(p) se puede reescribir como

$$\varphi(B)X_t = \varepsilon_t$$

donde $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z$ se llama polinomio AR y a $\varphi(B)$ polinomio de rezago AR.

Propiedades de los modelos AR

Del modelo AR(p) en (13) se observa que tiene la misma estructura que un modelo de regresión lineal múltiple. Sin embargo, su presente se explica por su información pasada. Dado que

$$\left\{X_{(t-p):(t-1)}\right\} = \left\{x_{(t-p):(t-1)}\right\}$$

se tiene

$$\mathrm{E}(X_t | X_{(t-p):(t-1)}) = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \ldots + \varphi_p x_{t-p}$$

Esto sugiere que, dado el pasado, el lado derecho de la ecuación anterior es una buena estimación de X_t. Además

$$\mathrm{Var}(X_t | X_{(t-p):(t-1)}) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Ahora suponga que el modelo AR(p). es estacionario; entonces se tiene

(1) La esperanza:

$$\mathrm{E}(X_t) = \mu = \frac{\varphi_0}{(1 - \varphi_1 - \ldots - \varphi_p)}$$

Por lo tanto, la esperanza del modelo $\mu = 0$ si y solo si $\varphi_0 = 0$.

(2) Si la esperanza es cero ó $\varphi_0 = 0$ ((3) y (4) a continuación tienen el mismo supuesto), considerando que $\mathrm{E}(X_t\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, multiplicar (13) por X_t, se calcula esperanza y se obtiene

$$\mathrm{Var}(X_t) = \gamma_0 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \cdots + \varphi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$$

además

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \varphi_1\rho_1 - \varphi_2\rho_2 - \ldots - \varphi_p\rho_p)}.$$

(3) Para todo $k > p$, la autocorrelación parcial $\phi_{kk} = 0$, es decir, la PACF de los modelos AR(p) se corta después del rezago p, lo cual es muy útil para identificar un modelo AR. De hecho, en este punto, el predictor o la regresión de X_t sobre $\{X_{t-k+1:t-1}\}$ es

$$\widehat{X_t} = \varphi_1 X_{t-1} + \ldots + \varphi_{k-1}X_{t-k+1}$$

Por lo tanto; $X_t - \hat{X}_t = \varepsilon_t$. Más aún, $X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}$ es una función de $\{X_{t-k:t-1}\}$, y ε_t no está correlacionado con $\{X_{t-k:t-1}\}$. Por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}, X_t - \hat{X}_t) = \mathrm{Cov}(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}, \varepsilon_t) = 0.$$

Por definición de función de autocorrelación parcial PACF $\phi_{kk} = 0$.

(4) Al multiplicar (13) por X_{t-k}, al calcular la esperanza, dividir por γ_0 y obtener la relación recursiva entre las autocorrelaciones para $k \geq 1$

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \ldots + \varphi_p\rho_{k-p} \tag{14}$$

en la ecuación anterior sea $k = 1, 2, \ldots, p$, se obtiene un conjunto de ecuaciones en diferencia, que se conocen como ecuaciones de Yule-Walker. Si se dan las ACF $\{\rho_{1:p}\}$, entonces se resuelven las ecuaciones de Yule-Walker para obtener las estimaciones de $\{\rho_{1:p}\}$, y las soluciones se conocen como estimadores de Yule-Walker.

Modelos AutoRegresivos de Media Móvil (ARMA)

Los modelos AutoRegresivos de media móvil (ARMA) se forman al combinar modelos AR y MA. Si se trabaja con solo un modelo AR o MA para ajustar una serie de tiempo, a veces se tiene un modelo AR de varios componentes o un modelo MA de un componente. Por otro lado, es deseable contar con un modelo parsimonioso que se ajuste a los datos, por ello al combinar modelos AR y MA se obtiene un modelo diferente y parsimonioso que posee propiedades interesantes.

Definición 2.16. *La siguiente ecuación es de un modelo autoregresivo de orden* (p, q) *y se denota por* $ARMA(p, q)$*:*

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \ldots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{15}$$

donde $\{\varepsilon_t\} \sim \text{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $E(X_s \varepsilon_t) = 0$ si $s < t$, y $\{\varphi_k\}$ y $\{\theta_k\}$ son parámetros (coeficientes) de valor real con $\{\varphi_k \neq 0\}$ y $\{\theta_k\} \neq 0$. Si una serie de tiempo $\{X_t\}$ es estacionaria y satisface (15), entonces se denomina proceso ARMA(p, q).

Se supone que el intercepto (término constante) $\varphi_0 = 0$. Al aplicar el operador de rezago B, el modelo ARMA(p, q). se reescribe como:

$$\varphi(B) X_t = \theta(B) \varepsilon_t$$

donde $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p$ es el polinomio AR y $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$ es el polinomio MA. Se supone que $\varphi\,(z)$ y $\theta\,(z)$ no tienen factores comunes. Además, $\varphi(B) X_t = \varepsilon_t$ y se denominan componentes AR y MA respectivamente, del modelo ARMA(p, q). Por supuesto, tanto el modelo AR como el modelo MA son dos casos especiales del modelo ARMA: $AR(p) =$ ARMA$(p, 0)$ y MA$(q) =$ ARMA$(0, q)$.

Propiedades de los modelos ARMA

En cuanto a la estacionariedad, invertibilidad y causalidad, se puede verificar:

(1) Un proceso ARMA(p, q) es estacionario si y solo si su parte AR es estacionaria.

(2) Un proceso ARMA(p, q) es invertible si y sólo si su parte MA es invertible.

(3) Un proceso ARMA(p, q) es causal si y sólo si su parte AR es causal.

Para los coeficientes $\{\pi_j\}$ en la representación AR(∞) y los coeficientes $\{\psi_j\}$ en la representación MA(∞), es fácil probar las siguientes proposiciones.

- Si un modelo ARMA(p,q) definido por (15) invertible, entonces su representación AR(∞) es

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j \right) X_t$$

donde $\pi_0 = 1$ y para $j \geq 1$

$$\pi_j = -\sum_{k=1}^{j} \theta_k \pi_{j-k} - \varphi_j$$

donde $\theta_k = 0$ para $k > q$, $\varphi_j = 0$ para $j > p$.

- Si un modelo ARMA(p,q) definido por (15) es causal, entonces su representación MA(∞) es

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \right) \varepsilon_t$$

donde $\psi_0 = 1$ y y para $j \geq 1$

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{j} \varphi_k \psi_{j-k} + \theta_j$$

donde $\varphi_k = 0$ para $k > p$, $\theta_j = 0$ para $j > q$.

Modelos en tiempo continuo: movimiento geométrico browniano

De acuerdo con [18] una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una ecuación diferencial en la que uno o más de los términos tiene un componente aleatorio. En el estudio de finanzas matemáticas, las EDE se utilizan para modelar diversos fenómenos como precios de acciones, tasas de interés o volatilidad, por nombrar sólo algunos. Por lo general, las EDE presentan trayectorias continuas con componentes aleatorios y no aleatorios, para incorporar el componente aleatorio del modelo, se agrega un proceso de Wiener. Algunas extensiones suponen otro tipo de componentes aleatorios además de un proceso de Wiener, como el proceso de Poisson al modelar saltos discontinuos en [13] o modelar los saltos mediante una distribución exponencial asimétrica doble como en [9], entre otros.

Definición 2.17. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. y sea* $\{W_t : t \geq 0\}$ *un proceso de Wiener estándard. Suponga que la dinámica de* S_t *es conducida por un movimiento geométrico browniano en la siguiente EDE:*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Para resolver esta EDE sea $Y_t = \ln S_t$ y la expansión $d(\ln S_t)$ en serie de Taylor y aplicando el Lema de Itô [1]:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2}(dS_t)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) - \frac{1}{2S_t^2}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2S_t^2}\left(\sigma^2 S_t^2 dt\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t. \tag{16}$$

Al integrar la expresión anterior en el intervalo (t, T):

$$\begin{aligned} \int_t^T d(\ln S_u) &= \int_t^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) du + \int_t^T \sigma dW_u \\ \ln S_T - \ln S_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right) \\ \frac{\ln S_T}{\ln S_t} &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma W_{T-t} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \tag{17}$$

donde $W_T - W_t = W_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$, S_T es lognormal (LN), por lo tanto:

$$S_T \sim \text{LN}\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right] \tag{18}$$

la esperanza de S_T dado que $S_t = x$ es:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(S_T|S_t = x\right) &= e^{\ln x + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= xe^{\mu(T-t)}\end{aligned}$$

y la varianza:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(S_T|S_t = x\right) &= \left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right) e^{2\ln x + 2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma^2(T-t)} \\ &= x^2\left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right) e^{2\mu(T-t)}.\end{aligned}$$

Estimación de parámetros del MGB

Sea $S_t, S_{t+\Delta t}, S_{t+2\Delta t}, \ldots, S_{t+N\Delta t}$ con $\Delta t = (T-t)N$ una sucesión de valores observados en intervalos regulares de tiempo $\Delta t > 0$, con el supuesto que estas observaciones provienen de un MGB. Mediante máxima verosimilitud [16] se procederá a desarrollar y obtener los estimadores máximo verosímiles (EMV) del MGB.

Con los supuestos anteriores y a partir de (16) se integra:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t} d(\ln S_u) &= \int_t^{t+\Delta t}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) du + \int_t^{t+\Delta t}\sigma dW_u \\ \ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma W_{\Delta t}\end{aligned}$$

donde $W_{\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(0, \Delta t\right).$

Por lo tanto:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma^2\Delta t\right].$$

Al seguir el método de máxima verosimilitud se tiene que la función de densidad conjunta de

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right), \ln\left(\frac{S_{t+2\Delta t}}{S_{t+\Delta t}}\right), \ln\left(\frac{S_{t+3\Delta t}}{S_{t+2\Delta t}}\right), \ldots, \ln\left(\frac{S_{t+N\Delta t}}{S_{t+(N-1)\Delta t}}\right)$$

es el producto de sus funciones de densidad marginales dado por:

$$\begin{aligned} l(\mu,\sigma) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S_{t+i\Delta t}}{S_{t+(i-1)\Delta t}}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \end{aligned}$$

con

$$R_i = \ln\left(\frac{S_{t+i\Delta t}}{S_{t+(i-1)\Delta t}}\right), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N.$$

Al calcular el logaritmo de la función $l(\mu,\sigma)$ y simplificar se tiene que

$$\begin{aligned} \ln l(\mu,\sigma) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right]\right) \\ &= -N\ln\sigma - \frac{N}{2}\ln(2\pi\Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)^2 \end{aligned}$$

Para determinar los EMV se deriva $\ln l(\mu,\sigma)$ con respecto a μ y σ como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln l}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right) \\ \frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right) \end{aligned}$$

Al igualar a cero y desarrollar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right) &= 0 \\ \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\Delta t &= \bar{R} \end{aligned}$$

Al simplificar se obtiene que el estimador para μ es:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t}\left(\bar{R} + \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right)^2\right). \tag{19}$$

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3 \Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right)^2$$
$$-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t\right) = 0$$

De donde

$$-\frac{N}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3 \Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right)^2 - \frac{1}{\hat{\sigma}}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right) = 0$$
$$-\frac{1}{\hat{\sigma}}\left(N - \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right)\right) = 0$$

Al simplificar resulta que

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\left(R_i - \bar{R}\right)^2}. \tag{20}$$

donde:

$$\bar{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i.$$

3 Análisis y discusión de resultados

Con información del portal de Banxico se extrae la serie de precios de la Mezcla Mexicana de Exportación del periodo 31/12/2019 al 23/02/2024 con un total de 1077 observaciones. Las unidades son el dólares americanos por barril. En la figura (2) se muestra la evolución del precio de la MME, se observa una tendencia bajista a inicios del 2020 hasta tocar un valor mínimo en 6.55 el día 27 de abril de 2020, a partir de ahí tiene una tendencia alcista hasta tocar un máximo en 119.62 el 08/03/2022 posiblemente influenciado por el conflicto de Ucrania y Rusia.

Figura 2: Serie histórica de precio de la MME.

Fuente: elaboración propia.

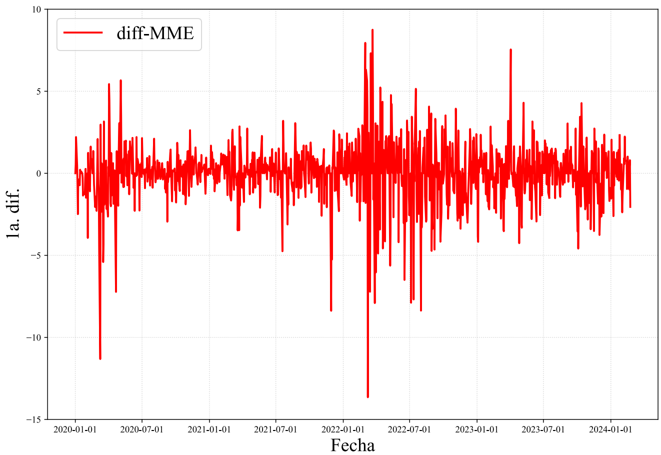
Estacionariedad

La estacionariedad es importante porque si la serie no es estacionaria, entonces todos los resultados del análisis son incorrectos. Por lo tanto, se utiliza una prueba de raíz unitaria para probar la no estacionariedad y la existencia de una raíz unitaria en la serie de tiempo original. La prueba de raíz unitaria a utilizar es la prueba Dickey-Fuller Aumentada (DFA), las hipótesis para la prueba ADF son:

- H_0: La serie no es estacionaria y tiene raíz unitaria,
- H_1: La serie es estacionaria y no tiene raíz unitaria.

La mayoría de las series de tiempo económicas y financieras presentan tendencia y no son estacionarias, lo que indica una media y una varianza no constantes en la serie. Se calcula la primera diferencia de la serie de datos para eliminar su varianza y luego ejecutar la prueba DFA. En la figura siguiente se muestra la primera diferencia de la serie:

Figura 3: Primera diferencia de la serie de precios de la MME.



Fuente: elaboración propia.

Luego, se realiza la identificacion y estimacioníz unitaria de DFA a la primera diferencia de la serie, el resultado de la prueba es:

Cuadro 1: Resultado de la prueba DFA para la primera diferencia de precios de MME.

Prueba DFA	Estadística	valor-p
Con constante	-16.0414	5.9E-29
Con constante y tendencia	-16.0338	1.12E-22
Sin constante y tendencia	-16.0468	8.88E-28

Fuente: elaboración propia.

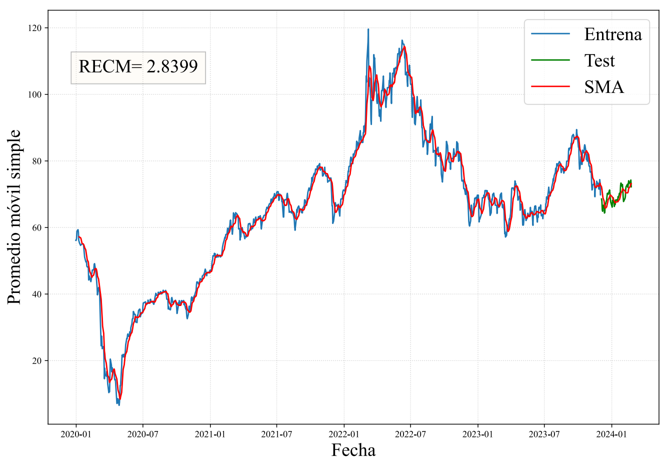
La prueba de raíz unitaria de la serie MME muestra un resultado significativo del valor p a un nivel de significancia del $5\,\%$, lo que indica que la serie es estacionaria y no tiene raíz unitaria en la primera diferencia. los modelos a estimar serían $\mathrm{AR}(p), \mathrm{MA}(q), \mathrm{ARMA}(p, q)$ y el siguiente paso será decidir los órdenes p y q. Para el análisis se dividirán los datos en dos partes: entrenamiento y prueba, con un porcentaje para el conjunto de entrenamiento del $95\,\%$ y para el de prueba del $5\,\%$, de esta manera las observaciones son desde

2019-12-31 al 2024-02-23 con 1077 observaciones. El periodo de entrenamiento abarca del 2019-12-31 al 2023-04-19 con 1023 observaciones y por último el periodo de prueba es del 2023-04-20 al 2024-02-23 con 54 observaciones. Para elegir el modelo que mejor se ajusta a los datos se calcularán tres medidas de desempeño: error medio absoluto (EMA), error cuadrático medio (ECM) y raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), pero se toma esta última medida y los criterios de información para elegir el mejor modelo.

Identificación y estimación

Antes de identificar, estimar y diagnosticar los modelos, se comenzará con un modelo de promedios móvil simple. Este modelo está basado en una media móvil aritmética, es decir, pronostica los siguientes valores utilizando un promedio fijo n, de los valores anteriores. La figura siguiente muestra los resultados con $n = 8$ y el RECM que se obtiene.

Figura 4: Promedio móvil simple con $n = 8$.



Fuente: elaboración propia.

Es pertinente mencionar que al ejecutar la ventana móvil, no es necesario usar la partición de entrena y prueba, ya que se abarca todo el periodo de la muestra. Además, no se ha hecho sobre la serie estacionaria, pero posteriormente se estimarán modelos de series de tiempo y es imperativo que la serie sea estacionaria.

En primer lugar, se trata con un MA(q), el orden q, se elegirá al examinar la función de autocorrelación y para elegir el número de rezagos se aplicará la Regla de corte exponencial:

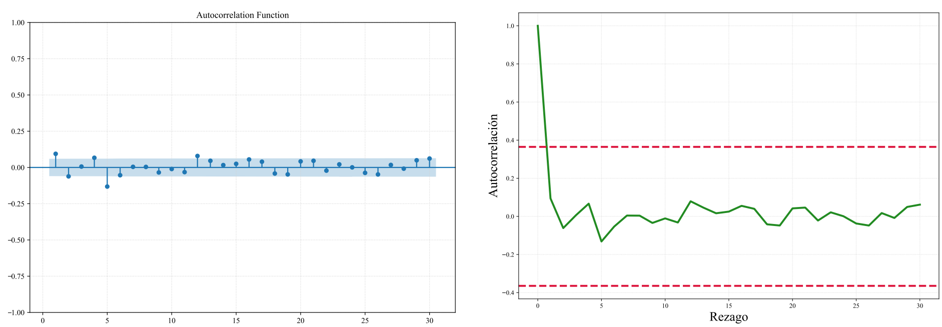
1. Observar el correlograma de la serie de tiempo.

2. Identificar el primer rezago donde la autocorrelación cae por debajo de dos veces el error estándar de la autocorrelación (líneas punteadas en el gráfico).

3. Seleccionar ese rezago como el número de rezagos (q) para el proceso MA(q).

Las figuras de la función de autocorrelación (ACF) y el corte exponencial se muestran a continuación:

Figura 5: Función de autocorrelación y corte exponencial



((a)) Función de autocorrelación. ((b)) Corte exponencial.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la función de autocorrelación (ACF) y la regla de corte exponencial, se elige un modelo MA$(0,0,2)$, cuyos coeficientes son:

$$X_t = 0.0133 + 0.1006\varepsilon_{t-1} - 0.0524\varepsilon_{t-2} \tag{21}$$

Para un proceso autoregresivo AR(p), el orden p, se elegirá al examinar la función de autocorrelación parcial y para elegir el número de rezagos se aplicará la Regla de corte exponencial:

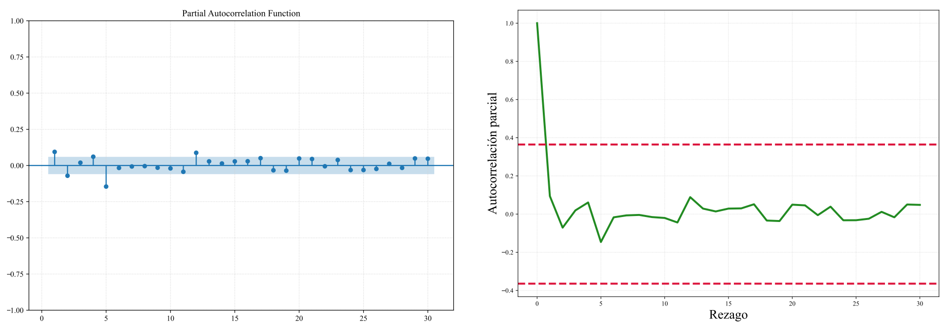
1. Observar la función de autocorrelación parcial (PACF) de la serie de tiempo.

2. Identificar el primer rezago donde la PACF cae por debajo de dos veces el error estándar de la PACF (líneas punteadas en el gráfico).

3. Seleccionar ese rezago como el número de rezagos (p) para el proceso AR(p).

Las figuras de la función de autocorrelación parcial (PACF) y el corte exponencial se muestran a continuación:

Figura 6: Función de autocorrelación parcial y corte exponencial.



((a)) Función de autocorrelación parcial.

((b)) Corte exponencial.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la función de autocorrelación parcial y la regla de corte exponencial, se elige un modelo $\mathrm{AR}(2,0,0)$, cuyos coeficientes son:

$$X_t = 0.0133 + 0.1020X_{t-1} - 0.0734X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{22}$$

Para un proceso autoregresivo de media móvil $\mathrm{ARMA}(p,q)$, los p, q, se elegirán al examinar las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial y para elegir el número de rezagos se aplicará la Regla de corte exponencial:

1. Observar la función de autocorrelación parcial (PACF) y el correlograma de la serie de tiempo.

2. Identificar el primer rezago donde la PACF y el correlograma caen por debajo de dos veces el error estándar (líneas punteadas en las gráficas).

3. Considerar los siguientes casos:
   - Si solo la PACF cae por debajo del límite, elegir ese rezago como p (orden AR).
   - Si solo el correlograma cae por debajo del límite, elegir ese rezago como q (orden MA).
   - Si ambos caen por debajo del límite en el mismo rezago, elegir ese rezago como p y q (orden ARMA).

4. Ajustar un modelo ARMA(p, q) con los valores de p y q seleccionados.

Como ambos rezagos cumplen con la condición de caer por debajo del límite, entonces elegimos un modelo ARMA$(2, 0, 2)$ cuyos coeficientes son:

$$X_t = 0.0134 - 1.0170X_{t-1} - 0.7391X_{t-2} + \varepsilon_t + 1.1392\varepsilon_{t-1} + 0.8039\varepsilon_{t-2} \quad (23)$$

donde $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{RB}(0, 3.3983)$.

Diagnóstico

A partir de las figuras de las funciones FAC y FACP, se observa que hay unos picos que están dentro las bandas que caen después del quinto rezago. Esto indica que se pueden tener desde $\mathrm{AR}(5), \mathrm{MA}(5)$ hasta un $\mathrm{AR}(2), \mathrm{MA}(2)$. Entonces, los posibles modelos con los diferentes criterios de información se presentan a continuación.

Cuadro 2: Estadísticas de diferentes parámetros ARMA.

Modelo	MA	AR	AIC	BIC	HQIC
ARMA(0,0,2)	2	0	4177.76	4197.48	4185.25
ARMA(2,0,0)	0	2	4177.05	4196.77	4184.54
ARMA(2,0,2)	2	2	4162.65	4192.23	4173.88

Fuente: elaboración propia.

Según el cuadro anterior, el modelo AR$(2, 0, 2)$ se considera el mejor modelo porque los valores de los criterios: Criterio de Información Akaike (AIC), criterio de Schwartz (BIC) y criterio de información de Hannan-Quinn más pequeños. Un AR$(2, 0, 2)$ se considera el modelo apropiado para el presente análisis de series de tiempo sobre la MME, por ser un modelo que cumple con los criterios de selección anteriores, aunque podría haber un problema de sobreajuste. De esta manera, se evalúan los modelos si cumplen o no un diagnóstico con una prueba. Si el modelo no cumple la prueba, es necesario identificar un modelo más apropiado.

Al hacer la prueba de Durbin-Watson, se obtiene un valor de 2.0138, lo que indica que no existe autocorrelación en los residuales. Sin embargo los residuales no pasan la prueba de normalidad. Significa que los residuos del modelo AR seleccionado no tienen autocorrelación pero no son ruido blanco. Esto implica que se necesita hacer un análisis más profundo al hacer pruebas de heterocedasticidad.

Por último, para investigar la eficiencia del ajuste de los modelos para la predicción de los datos, se elige como medida de desempeño la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), de esta manera el modelo con el valor mínimo es el modelo AR$(2, 0, 2)$. Los resultados de la eficiencia se muestran en seguida:

Cuadro 3: Valores del RECM para modelos propuestos.

Modelo	AR(2,0,0)	ARMA(2,0,2)	MA(0,0,2)	Promedio Móvil S.
RECM	1.2845	1.2763	1.2820	2.8399

Fuente: elaboración propia.

Con los resultados del cuadro anterior se observa que con el modelo ARMA(2,0,2) se obtiene el menor valor del RECM.

MGB: estimación de parámetros y predicción

En este apartado, con el supuesto que el precio de la MME es conducido por la EDE del MGB, se estiman los parámetros por máxima verosimilitud partir de una serie de precios que comprende el periodo 31/12/2019 al 23/02/2024 con un total de 1077 observaciones. Se dividen los datos en los mismos periodos de entrenamiento y prueba que en la primera subsección de esta sección. Se simulan trayectorias y se ejecutan predicciones, por último se evalúa la eficiencia de la predicción con RECM.

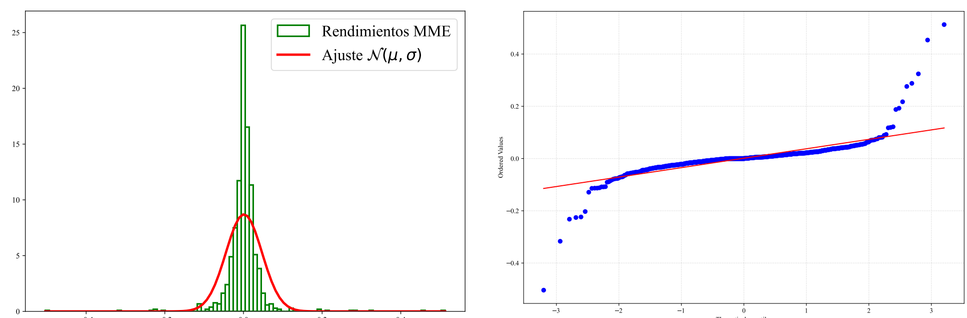
El cuadro (4) muestra la estadística descriptiva de los rendimientos simples del precio de la MME, en el periodo de la muestra se observa un precio promedio de 65.47, una desviación estándar de 21.42. La curtosis es alta de 47.33, lo que indica que hay valores extremos en la serie. Respecto al coeficiente de asimetría tiene un valor positivo, lo que indica que su distribución es sesgada hacia la derecha.

Cuadro 4: Estadística descriptiva de los rendimientos de PMME.

	μ	σ	Mediana	Moda	Rango	min	max	sesgo	curtosis	n
R_i	65	21	67	69	113	7	120	1	47	1077

Fuente: elaboración propia

Figura 7: Histograma y gráfica cuantil-cuantil de rendimientos MME.



((a)) Histograma de rendimientos MME. ((b)) Gráfica quantil-quantil.

Fuente: elaboración propia.

Al ejecutar la prueba de normalidad de los rendimientos con Jarque-Bera al 5 % de significancia, se obtiene una estadística de prueba de 95794.4017 con un valor-p de 0.0, por lo que es que se rechaza tal supuesto. Se concluye que hay evidencia suficiente para afirmar que los rendimientos tienen asimetría y curtosis que son significativamente diferentes de una distribución normal, esto se verifica con el histograma de rendimientos y la figura (7) (cuantil-cuantil).

Para ejecutar la predicción del precio de la MME a 58 días se siguen los siguiente pasos:

1. Estimar los parámetros del MGB por máxima verosimiltud: μ y σ.

2. Elegir un número n y generar trayectorias con la EDE asociada al MGB.

3. Dividir el periodo en dos partes: entrenamiento y prueba.

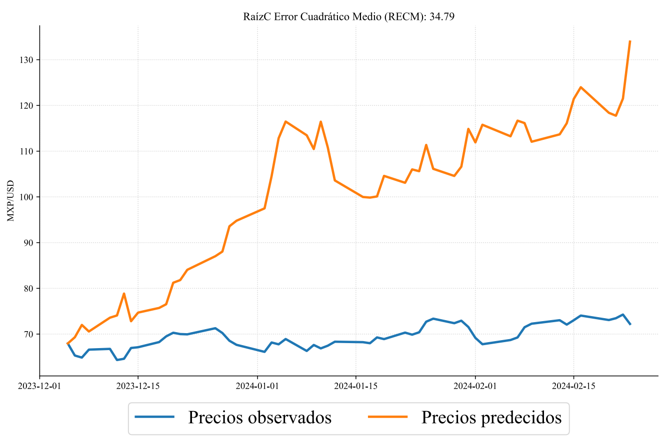
4. Elegir la ponderación para las predicciones: en este caso se elige 0.5 para el máximo y 0.5 para el mínimo.

5. Generar predicciones de precios y comparar con los precios reales.

6. Calcular el RECM.

Al ejecutar el procedimiento anterior se obtiene $\mu = 0.001257$ y $\sigma = 0.045824$, con $n = 20,000$ trayectorias se obtiene un RECM=34.79. La siguiente figura muestra los precios predecidos y los observados:

Figura 8: Precios predecidos y observados $n = 20000$.



Fuente: elaboración propia.

4 Conclusiones

Modelar la dinámica de los precios de los diferentes instrumentos que se negocian en los mercados financieros es una tarea compleja, en particular para series de tiempo de tipo financiero, porque los datos muestran tendencias en diferentes puntos del tiempo y no son estacionarios. Asimismo, exhiben patrones de volatilidad causados por diferentes eventos que provocan rendimientos inesperados, por ello, es fundamental que los participantes diseñen estrategias para tomar decisiones acertadas en el mercado. Existen diferentes métodos que pueden usarse como herramientas de modelado para hacer predicciones y evaluar su desempeño, en la aplicación de esas técnicas el desempeño implica contar con el menor error posible. En este trabajo se abordan dos enfoques para ejecutar predicciones: la primera con series de tiempo en un modelo ARMA y la segunda con un modelo en tiempo continuo: movimiento geométrico browniano.

Con información del portal de Banxico de precios de la Mezcla Mexicana de Exportación del periodo 31/12/2019 al 23/02/2024 con un total de 1077 observaciones. Se rechaza el supuesto de normalidad con la prueba de Jarque-Bera para la series de precios de la MME y de la primera diferencia. Se estiman un modelo de promedio móvil simple con una ventana móvil de 8 días y tres modelos de series de tiempo. Se hace la prueba de Dickey-Fuller a la primera diferencia interpretando que la serie es estacionaria y no tiene raíz unitaria. Se identifican, estiman y se validan los modelos de series de tiempo siguientes: $\mathrm{AR}(2,0,0)$, $\mathrm{MA}(0,0,2)$ y $\mathrm{ARMA}(2,0,2)$. El análisis de los resultados indica que se elige el modelo $\mathrm{AR}(2,0,2)$ por tener los valores mínimos de los criterios de información AIC, BIC, HQIC y el valor mínimo de RECM (1.27) en la eficiencia de conjunto de datos de entrenamiento y prueba. Respecto al MGB se estimaron los parámetros a partir de los mismos datos, periodos de prueba y entrenamiento, se elige 0.5 para los valores máximo y mínimo en ponderación en las predicciones, el RECM resultó en 35. Se concluye que periodos cortos de tiempo los modelos discretos son más eficientes que los modelos en tiempo continuo.

En futuras líneas de investigación se pretende modelar la dinámica del precio con modelos auto regresivos de heterocestascidad condicional y sus diferentes variantes con su correspondiente identificación, estimación y validación. Respecto a los modelos en tiempo continuo se podría añadir dos EDE de tal manera que se pueda modelar tanto la tasa de interés o la volatilidad de la volatilidad con o sin reversión a la media.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por los proyectos de investigación:*"Pronósticos de indicadores económicos: modelos discretos y continuos"* con clave SIP-20231833 de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

[1] Capiński M., Kopp E. y Traple J. Stochastic Calculus for Finance. Cambridge: Cambridge University Press; 2012. doi:10.1017/CBO978113901736

[2] Casella, G., Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, 2nd ed. Duxbury Press, Belmont.

[3] David A. Dickey & Wayne A. Fuller (1979) Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**:366a, 427-431, DOI: 10.1080/01621459.1979.10482531

[4] González-Urteaga, A. (2012). Further empirical evidence on stochastic volatility models with jumps in returns, *The Spanish Review of Financial Economics*, **10** (11), 11- 17. DOI: 10.1016/j.srfe.2011.12.001

[5] Gujarati, D. y Porter, D. (2010). Econometría, McGraw-Hill, 5a edición, México.

[6] Hamzah, S.R., Halul, H., Jeng, A. y Umul, A. S. 2021. Forecasting Nestle Stock Price by using Brownian Motion Model during Pandemic Covid-19, *Malaysian Journal of Science Health & Technology.* **7**2 (Oct. 2021), 58-64. DOI: https://doi.org/10.33102/mjosht.v7i2.214

[7] Hanke, A. y Wichern, D. (2010). Pronóstico en los negocios. México: Pearson Educación.

[8] Jiménez Preciado, A.L., Trejo García, J.C. y Gurrola Ríos, C. (2023). Análisis de nuevos contagios y decesos por Covid-19 en México mediante pronósticos Prophet, capítulo 10, 219-238, en Valencia-Romero, R., Bárcenas, H. S., y García, M. Á. M. (2023). Estudios sobre el desarrollo económico en México: un enfoque multifactorial. Editorial Comunicación científica, México, primera edición.

[9] Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing, *Management Science*, **48**, 1086-1101.

[10] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. y Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root, *Journal of Econometrics*, **54** (1-3), 159-178.

[11] Lee, S. L., Liew, C. Y., Chen, C. K., & Voon, L. L. (2022). Geometric Brownian motion-based time series modeling methodology for statistical autocorrelated process control: Logarithmic return model, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **2022**, 10.

[12] Mehandzhiyski, V. (2021). Course notes: Time Series Analysis with Python, 365datascience.

[13] Merton, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**(1-2) (1976), 125–144

[14] Moreno, C., T. F. (2019). El pronóstico de ventas en los negocios: modelos y aplicaciones. Santiago de Chile, Universidad Autónoma de Chile, RIL editores.

[15] Nordin, N., Ishak, N., Halim, N.A., Hamzah, S.R., Rasadee, A.F.N. (2024). A Geometric Brownian Motion of ASEAN-5 Stock Indexes. In: Alareeni, B., Elgedawy, I. (eds) *AI and Business, and Innovation Research: Understanding the Potential and Risks of AI for Modern Enterprises*. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 440. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-42085-6_67

[16] Rossi, R. J. (2018). Mathematical Statistics : An Introduction to Likelihood Based Inference. New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-1-118-77104-4.

[17] Slutzky, E. (1937). The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. Econometrica, **5**(2), 105-146. https://doi.org/10.2307/1907241

[18] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).

[19] Walker, G. (1931). On Periodicity in Series of Related Terms, Archived 2011-06-07 at the Wayback Machine, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, 131, 518-532.

[20] Yule, G.U.: On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. Philos. Trans. R. Soc. London. Series A. 226, 267-298.

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

cmgarcia@ipn.mx
amortiz@ipn.mx

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 5

Sobre la descomposición scs de un continuo y la construcción del cono topológico

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández
FCFM, BUAP.

Resumen

En este capítulo se trata de la descomposición scs de un espacio topológico, especificamente de la descomposición scs de los espacios métricos no vacios compactos y conexos, es decir, de los continuos. daremos una breve revisada a los axiomas de separación y daremos algunos ejemplos clasicos de continuos. Se hablará de algunos resultados de las particiones y veremos bajo que condiciones la descomposición de un continuo es tambien un continuo, hablaremos de la descomposición scs y demostraremos que toda descomposición scs de un continuo es un continuo, hablaremos sobre una tecnica para construir particiones scs y finalmente daremos una definicón de el cono topológico mediante este tipo especial de partición.

1 Introducción

En la teoría de los espacios métricos vista desde un enfoque topológico aparecen conceptos tales como los de compacidad y conexidad que no nos podemos permitir pasar por desapercibidos, dichos conceptos dan lugar a lo que se conoce como continuos. La teoría de los continuos surge contemporaneamente junto a las primeras nociones de los espacios topológicos en el siglo XIX con los trabajos de G. Cantor en donde el introduce el termino de *continuo* como un conjunto X contenido en $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $a, b \in X$ y $\varepsilon > 0$, exiten $a = x_1, \ldots, x_k = b$ elementos de X donde $|x_i - x_{i+1}| < \varepsilon$ para cada $i = 1, .., k-1$. A saber, si a esta definición se le agrega la compacidad, entonces obtenemos la definición actual de **continuo**.

Como ejemplos de continuos destacamos algunos sencillos tales como **el arco**, **la circunferencia** o la **2-celda**. A saber, en la teoría de los continuos exiten diversas formas de construir continuos a partir de otros, el presente trabajo nos muestra una forma interesante de construir continuos mediante un tipo especial de partición, la llamada partición semicontinua superior.

2 Preliminares

Compacidad y conexidad

Definición 2.1. *Sea $Y \subset X$. Si $Y \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ con U_α conjunto abierto en X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se le llama cubierta abierta de Y.*

Si $I' \subset I$ es tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha\in I'} U_\alpha$, entonces decimos que la subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I'}$ es una subcubierta de Y.

Si además I' es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una subcubierta finita de Y.

Definición 2.2. *Sea X un espacio métrico y $Y \subset X$. Decimos que Y es **compacto** si toda cubierta abierta de Y admite una subcubierta finita.*

Ejemplo 2.3. *Sea $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$, a saber, Y es compacto.*

Demostración: Sea A una cubierta abierta de Y, luego debe existir un abierto U de A que contiene al 0 y por la forma en que está definido Y el conjunto U debe contener a todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ excepto a un número finito de ellos; digamos $y_1, \ldots, y_k$. Ahora, para cada una de estos puntos que no están en U, tomemos un elemento de A que los contenga, digamos $A_1, \ldots, A_k$. Luego $U \cup \{A_i\}_{i=1}^{k}$ es una subcubierta abierta para Y y por tanto Y es compacto. ■

Intuitivamente un espacio acotado es aquel que no se extiende indefinidamente, en otras palabras cuando se mantiene dentro de ciertos límites.

Definición 2.4. *Sea Y un subconjunto no vacío de (X, d) un espacio métrico. Decimos que Y es acotado si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x, y \in Y$ se tiene que $d(x, y) \leq k$.*

El teorema que a continuación se enuncia relaciona los intervalos acotados y cerrados de $\mathbb{R}$ con el concepto de compacidad.

Teorema 2.5. *Cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto.*

Demostración. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta para dicho intervalo, consideremos a

$$B = \{c \in [a, b] : \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \ admite\ una\ subcubierta\ finita\ para\ [a, c]\}$$

consideremos a $S = sup\{B\}$, a saber si $S < b$, entonces debe existir U_β de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tal que $S \in U_\beta$, luego al ser U_β abierto debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que $(S - \varepsilon, S + \varepsilon) \subset U_\beta$, y al ser $S - \varepsilon < S$, el intervalo $[0, S - \varepsilon]$ puede cubrirse con una cantidad finita de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y así el intervalo $[0, S + \frac{\varepsilon}{2}]$ con los elementos que cubren a $[0, S - \varepsilon]$ junto com U_β, lo que implicaria que S no es el supremo de B, por tanto debe suceder que $S = b$ y así $[a, b]$ puede cubrirse con una cantidad de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Por tanto $[a, b]$ es compacto. ∎

El siguiente resultado se utiliza muchas veces a lo largo de este trabajo, por eso, aunque es una propiedad básica, se considera importante su mención.

Teorema 2.6. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto y C un subconjunto cerrado de X, entonces C es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta para C, luego al ser C cerrado, tenemos que C^c es abierto, nótese que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup C^c$ es una cubierta abierta para X y al ser X compacto, este admite una subcubierta finita. A saber, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita para X, en particular $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}, C^c\}$ también es subcubierta finita para X es decir $X \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \cup C^c$ y como $C \subset X$, con $C \not\subset C^c$ entonces $C \subset \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$ y por tanto C compacto. ∎

Siguiendo ahora con el concepto de conexidad. La definición actual de esta fue introducida en 1893 por C. Jordan (1838-1922) para la clase de los subconjuntos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914, por F. Hausdorff (1878-1973), y en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Siempre podemos pensar de manera intuitiva a un conjunto conexo como un conjunto de una sola pieza (que no se puede dividir), pero en términos más precisos y a manera de no generar ambigüedad, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea X un espacio métrico y sean P y Q subconjuntos abiertos no vacíos de X. Diremos que P Y Q son una* ***separación*** *de X si $X = P \cup Q$ y $P \cap Q = \emptyset$.*
Diremos que X es ***disconexo*** *si existe una separación de X y en caso contrario diremos que X es conexo, o bien. X es* ***conexo*** *si no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos.*
Además, si $Y \subset X$, entonces Y es disconexo o conexo si lo es como subespacio con la topología relativa.

Proposición 2.8. *Sean C un subespacio métrico conexo de X. Si $C \subset B \subset \overline{C}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, entonces deben existir M y N abiertos tales que $B = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$. Luego como C es conexo, C debe ser subconjunto de M o bien de N, sin perdida de generalidad supongamos que $C \subset M$, entoces $\overline{C} \subset \overline{M}$ por lo que $\overline{C} \cap N = \emptyset$. Y como $B \subset \overline{C}$ se tiene que $B \cap N = \emptyset$, luego $N = \emptyset$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, B es conexo. ■

A continuación un teorema que caracteriza los subconjuntos conexos del espacio $\mathbb{R}$.

Teorema 2.9. *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si I es un intervalo o un subconjunto unitario.*

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Primero Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es conexo. En caso de que sea un conjunto unitario no hay nada que probar, así pues supongamos que no es unitario y también que no es un intervalo, luego deben existir $a, b \in I$ tales que $[a, b] \not\subset I$, así existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin I$, Considerese los conjuntos

$$P = (-\infty, c) \cap I \quad y \quad Q = (c, \infty) \cap I$$

luego $I = P \cup Q$ con P yQ separados, pero esto contradice que I conexo. por tanto I debe ser un intervalo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora bien, si I unitario no tenemos nada que probar, supongamos pues que I es un intervalo y no es conexo. Luego, deben existir $P, Q \subset \mathbb{R}$ no vacíos y separados tales que $I = P \cup Q$. Sean $x \in P$ y $y \in Q$ y supongase que $x < y$, al ser I un intervalo podemos asegurar que $[x, y] \subset I$. Así pues, sea $R = [x, y] \cap P$, notemos que $R \neq \emptyset$ y tiene como cota superior a y, luego debe exitir $\alpha = supR$.
Ahora bien, se tiene que $x \leq \alpha \leq y$ por lo que $\alpha \in [x, y]$, entonces $\alpha \in P$ o bien $\alpha \in Q$ pero no en ambos, supongamos que $\alpha \in P$, entonces $\alpha < y$.
Pero al ser P abierto en I debe existir D abierto en $\mathbb{R}$ con la propiedad de que $P = D \cap I$, entonces $\alpha \in D$ por lo que debe exitir un $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset D$ y como $\alpha < y$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ a manera de que $\alpha + \varepsilon < y$, así $\alpha + \varepsilon \in I$, luego $\alpha + \varepsilon \in P$ lo que contradice que $\alpha = supR$, lo mismo para el caso en que $\alpha \in Q$. Por tanto I conexo. ■

Nótese que la unión de conjuntos conexos puede ser un conjunto no conexo, pero si la intersección de estos conjuntos es al menos un punto, entonces la unión dará como resultado un conjunto conexo.
El siguiente teorema generaliza esta idea.

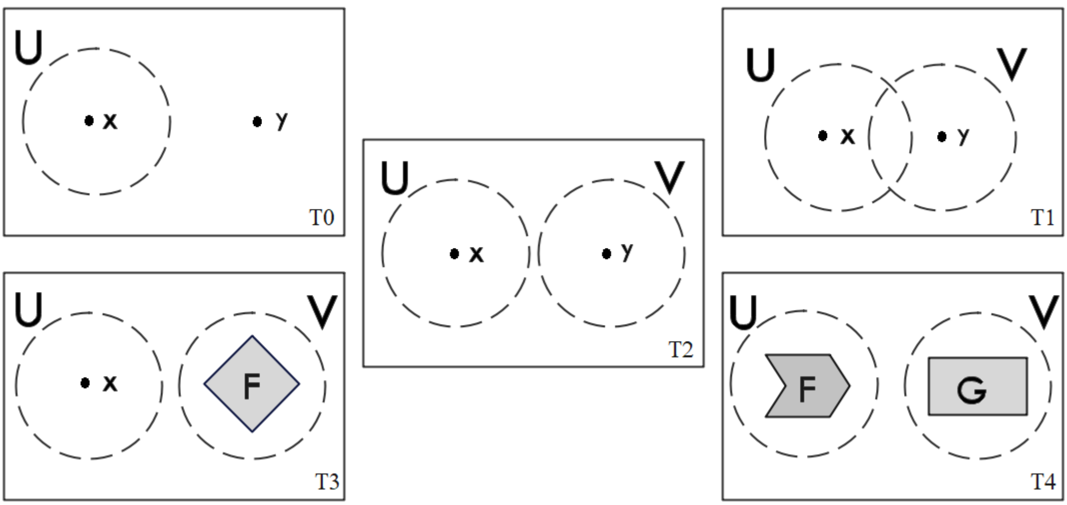
Teorema 2.10. *[7, Teorema (2.A.10)] Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de subconjuntos conexos en un espacio topológico X tales que para $i \neq j$, se cumple que $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ es conexo.*

Axiomas de separación

En la topológia existen propiedades que pueden satisfacer los espacios topológicos en función de que tantos puntos o subconjuntos cerrados de X se pueden separar por medio de conjuntos abiertos, para esto, es fundamental hablar de los axiomas de separación. Entender los axiomas de separación es esencial para el estudio de diversas estructuras matemáticas. Existen varios axiomas de separación cada uno con caracteristicas y propiedades únicas acorde a su utilidad en algunas aplicaciones, se verá durante el desarrollo de este trabajo que es necesario enunciarlos por la utilidad que a estos se les da en teoremas consecuentes.

Definición 2.11. *Sea X un espacio topológico. Diremos que:*

- *X es T_0 (o de Kolmogórov) si y solo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto U que contiene uno de los puntos pero no al otro punto.*
- *X es T_1 (o de Fréchet) si y solo si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U$ pero $y \notin U$, y además $y \in V$ pero $x \notin V$.*
- *X es T_2 (o de Hausdorff) si y solo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U y V ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$.*
- *X es T_3 (o regular) si y solo si para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existen abiertos U y V ajenos tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*
- *X es T_4 (o normal) si y solo si para cada par de cerrados $F, G \subset X$ ajenos existen abiertos U y V ajenos tales que $F \subset U$ y $G \subset V$.*



Espacios T_i

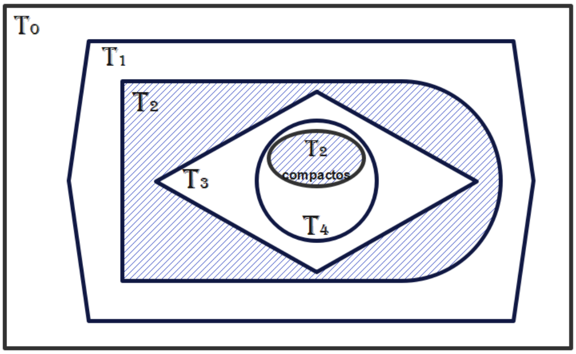
Se puede llegar a probar que si X es un espacio métrico T_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple que $T_i \Rightarrow T_{i-1}$, a continuación enunciamos y demostramos algunos lemas que serán utiles más adelante.

Lema 2.12. *Sea X un espacio de Hausdorff, si $K \subset X$ compacto, entonces K es cerrado.*

Demostración: Sean X un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ compacto, sea $x \in X - K$ un elemento cualquiera, luego para cada $k \in K$ deben existir U_k y V_k abiertos ajenos de k y x respectivamente tales que $k \in U_k$ y $x \in V_k$ (nótese que $U_k \subset X - V_k$) a saber los abiertos U_k forman una cubierta abierta para K, luego al ser K compacto, este admite una subcubierta finita, digamos $\{U_{k_i}\}_{i=1}^n$, definamos $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$, nótese que V es una vecindad de x que no intersecta a K, pues $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n}(X - V_{k_i}) = X - V$, de ahí que V es una vecindad de x contenida en $X - K$ de donde K debe ser cerrado. ■

Lema 2.13. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto, entonces X es T_4*

Demostración: Sea X un espacio T_2 compacto, consideremos $C \subset X$ un cerrado de X, sea $x \in X - C$ como X es de Hausdorff se tiene que para cada $c \in C$ existen abiertos ajenos U_c y V_c de c y x respectivamente tales que $c \in U_c$ y $x \in V_c$, ahora bien, como $C \subset X$ es cerrado, tenemos que C es compacto, por lo que debe existir una cubierta finita que cubre a C, digamos $\{U_{c_i}\}_{i=1}^n$, similar al lema anterior $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{c_i}$ son abiertos ajenos que contienen a C y x respectivamente, de donde se afirma que X es T_3.
Ahora consideremos C y D dos cerrados ajenos de X, como hemos verificado que X es T_3 tenemos entonces que para cada $d \in D$ existen abiertos ajenos U_d y V_d que contienen a C y d respectivamente. Ahora bien, dado que D es cerrado de X, D es compacto, por lo que admite una cubierta finita, digamos $\{V_{d_i}\}_{i=1}^n$, es claro que $D \subset V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{d_i}$ y observese que $C \subset U_{d_i}$ para cada d_i $i = 1, 2, \ldots, n$ por lo que si tomamos ,$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{d_i}$, también es claro que $C \subset U$, y como V y U son abiertos ajenos que contienen a D y C respectivamente, entonces tenemos que X es T_4. ■



Espacios T_i

3 Continuos

La primera definición de *continuo* fue dada en 1883 por G. Cantor (1845-1918) y nos dice que un continuo es un subconjunto cerrado y denso en sí mismo y conexo en un espacio Euclidiano. Pero esta definición había sido formulada sobre la base del estudio de otro objeto de investigación matemática: El concepto de línea o curva, las cuales eran más importantes en esa época (Ver en [2, pág. 225-226]). Sin embargo la noción actual de continuo se formaliza en el siglo XX con los trabajos de Borel, Hausdorff, Urysohn, Alexandroff y Fréchet.

Para esta parte comezaremos con la definición formal de un continuo, daremos algunos ejemplos clasicos de estos y hablaremos un poco de como construir continuos a partir de algunos ya dados.
Antes de dar la definición formal de un continuo tengamos en consideración lo siguiente:

- Decimos que un conjunto es **no degenerado.** si dicho conjunto tiene más de un punto.

- Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene cardinalidad igual a la del conjunto $\mathbb{N}$.

- Se entiende que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X, si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D.

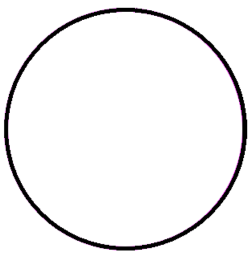
- Decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Definición 3.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Además si X es un continuo y $Y \subset X$ se dirá que Y es un* ***subcontinuo*** *de X, si también Y es un continuo.*

Nota: Con los puntos anteriores y dado que cada espacio métrico compacto es separable, (Ver en [1, pág. 62-63]), se tiene que los continuos son separables.

Ejemplo 3.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo. Pues $[a, b]$ es conexo y compacto.*

Ejemplo 3.3. *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((0,0),(x,y)) = 1\}$ donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. X es la circunferencia unitaria y es un continuo.*

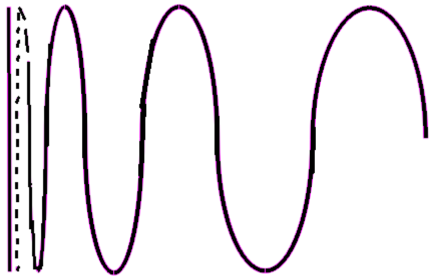


Circunferencia unitaria.

Ejemplo 3.4. *Si $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, entonces $X = \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$ es un continuo llamado la curva sinoidal del topólogo. Observe que*

$$\overline{W}^{\mathbb{R}^2} = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

El continuo X se puede observar de manera aproximada en la siguiente figura.



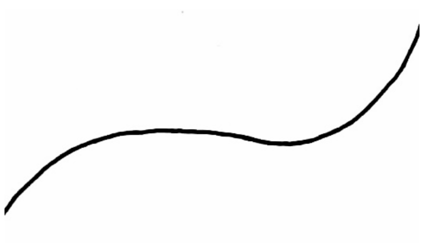
Continuo sen$(\frac{1}{x})$

Llegados a este punto es valido hacernos la pregunta: ¿La unión de continuos es un continuo? y aunque la respuesta es que no necesariamente, el siguiente teorema nos dice bajo que condiciones esto es posible.

Teorema 3.5. *La unión de dos continuos es un continuo siempre que tengan un punto en común.*

Definición 3.6. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

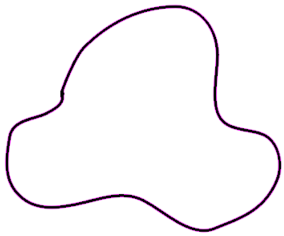
Sea A un arco. Para cualquier homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$, se tiene que $\{p, q\} = \{f(0), f(1)\}$. Por esto, los puntos extremos del arco A son p y q. Podemos decir que A es un **arco de** p **a** q o de q **a** p.



Arco.

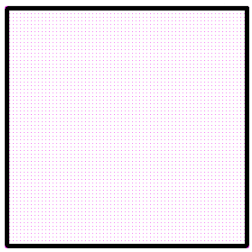
El intervalo $[0, 1]$ es un continuo, así un arco es un continuo.

Definición 3.7. *Una* ***curva cerrada simple*** *es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.*



Curva cerrada simple.

Definición 3.8. *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *definimos una* $n-$***celda*** *como un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada de dimensión* n. $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, *en particular una* $2-$***celda*** *es un espacio topológico homeomorfo a* $[0,1]\times[0,1]$.



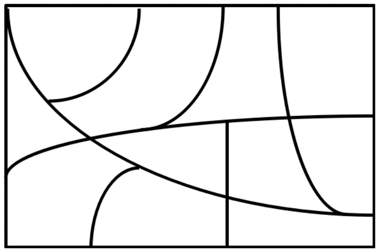
2-celda.

Definición 3.9. *Sean* X *e* Y *dos espacios topológicos, diremos que* $f : X \to Y$ *es una* ***función abierta*** *si para cada abierto* U *de* X *se tiene que* $f(U)$ *es abierto en* Y. *De igual manera diremos que es una* ***función cerrada*** *si para cada cerrado* C *de* X *se tiene que* $f(C)$ *es cerrado en* Y.

4 Espacios de descomposición

Ya que nuestro estudio tiene que ver con la partición semicontinua superior de espacios, en esta sección empezaremos por definir que es una partición y algunos conceptos que de ella surgen para más adelante hablar de la descomposición scs.

Definición 4.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, diremos que una colección* $\mathcal{G}$ *de subconjuntos de* X *es una* ***partición*** *de* X *si los elementos de* $\mathcal{G}$ *son ajenos dos a dos y además su unión es igual a* X. *Si además los miembros de* *la partición $\mathcal{G}$ son cerrados en X, diremos que $\mathcal{G}$ es una* ***partición cerrada*** *de X.*



Partición de X.

Ahora consideremos (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{G}$ una partición y definamos $\tau(\mathcal{G}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{G} : \bigcup \mathcal{U} \in \tau\}$.

A saber $\tau(\mathcal{G})$ es una topología para $\mathcal{G}$, en efecto, pues al ser $\mathcal{G}$ una partición de X se tiene de antemano que $\bigcup \mathcal{G} = X \in \tau$ y así $\mathcal{G} \in \tau(\mathcal{G})$, claramente como $\varnothing \subset \mathcal{G}$ es tal que $\bigcup \varnothing = \varnothing \in \tau$ y así tenemos que $\varnothing \in \tau(\mathcal{G})$. Ahora consideremos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en $\tau(\mathcal{G})$, es claro que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{G}$ y se tiene que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subcolecciones de la partición se cumple la igualdad $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{U} \cap \bigcup \mathcal{V}$ luego como $\bigcup \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V}$ son elementos de τ entonces $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \tau$ y por tanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau(\mathcal{G})$. Finalmente consideremos $\mathcal{F}$ una colección arbitraria de elementos en $\tau(\mathcal{G})$, notemos que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{F}} (\bigcup \mathcal{U})$, y como para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, se tiene que $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{F} \in \tau(\mathcal{G})$.

Nota: Diremos que el epacio topológico $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un **espacio de descomposición** de X.

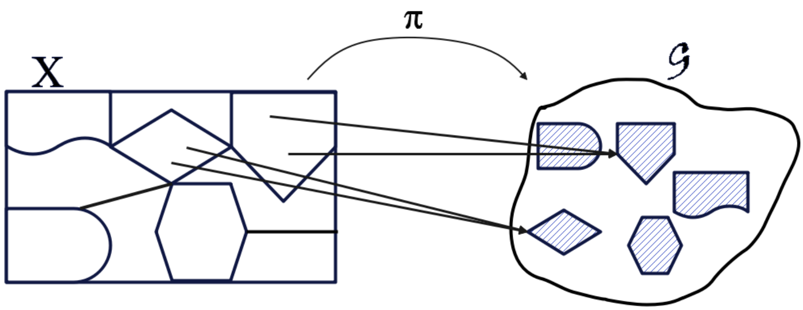
Observación: Lo anterior nos dice que cada vez que tomemos una partición de un espacio topológico, podemos dotarla de una topología.

Nótese que por la manera en que una partición está definida cada vez que consideramos un elemento x de X este es seleccionado de un único elemento de la partición $\mathcal{G}$ así pues consideremos la siguiente definición.

Definición 4.2. *Llamaremos* ***mapeo natural*** *a la función*

$$\pi : X \to \mathcal{G}$$

que asigna a x elemento de X su único elemento de $\mathcal{G}$ que lo contiene. Nótese que π es sobreyectiva y continua.



Mapeo natural

Los espacios de descomposición son muy importantes en la teoría de los continuos y serán de gran importancia en este capítulo cuando definamos el cono topológico, así pues vale la pena analizar la siguiente pregunta ¿El espacio de descomposición de un continuo es también un continuo? La respuesta es que no necesariamente y para verificar esto, un ejemplo.

Ejemplo 4.3. *Consideremos al continuo $X = [-1, 1]$ y sea $\mathcal{G}$ una partición de X dada por $\mathcal{G} = \{\{x, -x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}$, A saber $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ no es un continuo, pues puede verificarse que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ no es un espacio de Hausdorff y por tanto no es metrizable. [Ver Teorema 4.6]*

Como hemos visto, si $\mathcal{G}$ es una partición de un continuo X no necesariamente sucede que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un continuo. ¿Cuándo si?. Los teoremas que a continuación se enuncian son clave para hablar de esto, [Ver Teorema 4.7].

Lema 4.4. *Sean X y Y espacios topológicos con X compacto y Y de Hausdorff. Consideremos $f : X \to Y$, si f es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración: Sea C un cerrado de X. Por hipótesis tenemos que X es compacto, luego C debe ser compacto y al ser f continua, tenemos que $f(C)$ debe ser compacto de Y y dado que por hipótesis Y es de Hausdorff, entonces por el Lema 2.12 tenemos que $f(C)$ es cerrado en Y. Por tanto, f es una función cerrada.

Lema 4.5. *Sean X y Y espacios topológicos con X compacto y Y de Hausdorff. Consideremos $f : X \to Y$, si f es continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración: Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva con X compacto y Y de Hausdorff, a saber el Lema 4.4 nos dice que f es cerrada. Consideremos a $\mathcal{C}$ una base numerable para X, luego para cada subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ definamos $E_{\mathcal{L}} = Y - f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$. Es claro que $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ es abierto de X por lo que $X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ es cerrado de X y en consecuencia $f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$ es cerrado en Y pues no perdamos de vista que f es cerrada, luego $E_{\mathcal{L}}$ es abierto en Y para cada $\mathcal{L}$ subconjunto finito de $\mathcal{C}$.

¡Afirmación! $\mathcal{P} = \{E_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}\ \textit{es un subconjunto finito de}\ \mathcal{C}\}$ es una base numerable para Y.

En efecto, observese que al ser $\mathcal{C}$ numerable, también se tiene que $\mathcal{P}$ es numerable. Ahora, sean U un abierto de Y y p un elemento de U, $f^{-1}(\{p\})$ es cerrado en X y $f^{-1}(U)$ es abierto en X pues como sabemos f es continua, luego como X compacto, se sigue que $f^{-1}(\{p\})$ es también compacto, observese que $f^{-1}(\{p\}) \subset f^{-1}(U)$, entonces debe existir un subconjunto finito $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{C}$ tal que:

$$f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L\in\mathcal{L}'} L \subset f^{-1}(U).$$

Afirmamos que p es un elemento de $E_{\mathcal{L}}$, pues de lo contrario, si $p \notin E_{\mathcal{L}}$ se tendría que $p \in f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$ y entonces debería existir $x \in X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ tal que $f(x) = p$ luego $x \in f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L\in\mathcal{L}'} L$ lo cual es una contradicción. Por último nótese que al ser f continua y suprayectiva debe suceder que Y es compacto al igual que X. Así Y compacto y de Hausdorff, entonces por el Teorema 2.13 Y es normal y en consecuencia Y regular con base númerable por lo que Y es metrizable (Ver en [4, pág. 241]).

Teorema 4.6. *Sea X un espacio métrico compacto, un espacio de descomposición $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es metrizable si y solo si es de Hausdorff.*

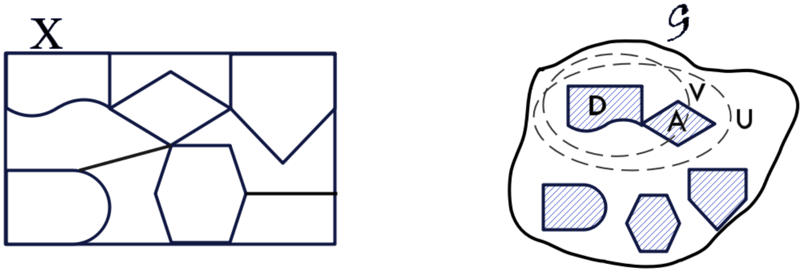
Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Es claro que si $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es metrizable, entonces debe ser de Hausdorff.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es de Hausdorff, como $\pi : X \to \mathcal{G}$ es sobreyectiva y continua tenemos entonces por el Lema 4.5 que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ tiene que ser metrizable. ∎

Teorema 4.7. *Sea X un continuo, un espacio de descomposición $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un continuo si y solo si es de Hausdorff.*

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un continuo, de donde sabemos que entonces es espacio métrico y en consecuencia de Hausdorff.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es de Hausdorff, entonces por el Teorema 4.6 se tiene que es metrizable, más aún, como $\pi : X \to \mathcal{G}$ es continua no perdamos de vista que la compacidad y conexidad son invariantes topológicos por lo que $\mathcal{G}$ tiene que ser compacto y conexo. Por tanto $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un continuo. ∎

Este último teorema nos dice como a partir de un continuo construir otros nuevos, sin embargo requiere la condición de que los espacios de descomposición sean de Hausdorff. Ahora hablemos de un tipo especial de partición, la llamada semicontinua superior; esta nos facilitará la construcción de nuevos continuos a partir de otros.

Definición 4.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una partición de X, diremos que $\mathcal{G}$ es* ***semicontinua superior*** *si siempre que $D \in \mathcal{G}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{G}$ y $A \cap V \neq \varnothing$, entonces $A \subset U$.*



Partición semicontinua superior

Definición 4.9. *Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X, diremos que $A \subset X$ es* $\mathcal{G}$***-saturado*** *si existe una subcolección $\mathcal{C}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $A = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$.*

Ejemplo 4.10. *Si X un conjunto con $\mathcal{G}$ una partición y consideramos $\pi : X \to \mathcal{G}$ el mapeo natural, dado $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ se tiene que $\pi^{-1}(\mathcal{B})$ es $\mathcal{G} -$ saturado, pues $\pi^{-1}(\mathcal{B}) = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$.*

Teorema 4.11. *Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X, $A \subset X$ es $\mathcal{G} -$ saturado si y solo si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.*

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $A \subset X$ y supongamos que A es $\mathcal{G} -$ *saturado*, entonces existe una subcolección $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ tal que $A = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$, nótese que $\pi(A) = \{\pi(x) : x \in A\} = \mathcal{C}$, luego $\pi^{-1}(\pi(A)) = \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \{x \in X : \pi(x) \in \mathcal{C}\} = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C = A$ y así $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, claramente $\pi(A)$ es un subconjunto de $\mathcal{G}$ y del Ejemplo 4.10 tenemos entonces que su preimagen debe ser $\mathcal{G} -$ *saturado* de ahí que A es $\mathcal{G} -$ *saturado*. ■

El siguiente teorema nos dice que pasa con los abiertos de X si estos a su vez son $\mathcal{G} -$ *saturados*.

Teorema 4.12. *Sea X un espacio topológico y sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de X, si U es $\mathcal{G} -$ saturado y abierto en X , entonces $\pi(U)$ es abierto en $\mathcal{G}$.*

Demostración: Consideremos U $\mathcal{G}-$ *saturado* y abierto en X, entonces por el Teorema 4.11 tenemos que $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, de donde $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{V\in\pi(U)} V$ es abierto en X, es decir que $\bigcup_{V\in\pi(U)} V \in \tau_X$ donde claramente $\pi(U) \in \mathcal{G}$ y así $\pi(U) \in \tau_X(\mathcal{G})$, es decir que $\pi(U)$ es un abierto en $\mathcal{G}$ ∎

A continuación veremos un par de caracterizaciones de la partición semicontinua superior.

Teorema 4.13. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $(\mathcal{G},\tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de X, además consideremos a $\pi : X \to \mathcal{G}$ el mapeo natural, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua superior.

(ii) π es una función cerrada.

(iii) si $G \in \mathcal{G}$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que V es $\mathcal{G}-$ saturado y $G \subset V \subset U$

Demostración: $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Supongamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superior y sea C un cerrado en X, a saber, primero veamos que $\pi^{-1}(\mathcal{G}-\pi(C)) \in \tau$, en efecto, sea $x \in \pi^{-1}(\mathcal{G}-\pi(C))$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{G}-\pi(C)$ luego $\pi(x) \subset X-C$ pues si por el contrario existiera un $y \in \pi(x)\cap C$ tendríamos que $y \in \pi(y)$ y entonces $\pi(y)\cap\pi(x) \neq \varnothing$ de donde tendría que suceder que $\pi(x) = \pi(y) \in \pi(C)$ pues $y \in C$, y esto entra en contradicción con el hecho de que $\pi(x) \in \mathcal{G}-\pi(C)$, nótese que $X - C$ es abierto en X y como $\mathcal{G}$ es semicontinua superior, debe existir $V \in \tau$ con $\pi(x) \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{G}$ y $A \cap V \neq \varnothing$, entonces $A \subset X-C$, a saber si $v \in V$ nótese que $\pi(v) \in \mathcal{G}$ y además $\pi(v)\cap V \neq \varnothing$ por lo que $\pi(v) \subset X-C$. Ahora veamos que $\pi(V) \subset \mathcal{G}-\pi(C)$ sea $B \in \pi(V)$, debe existir $b \in V$ tal que $\pi(b) = B$ observese que si sucediera que $\pi(b) \in \pi(C)$ tendríamos que exite $y \in C$ tal que $\pi(b) = \pi(y)$ y entonces $y \in \pi(b) \cap C$ y por tanto $\pi(b)$ no puede estar contenido en $X - C$ lo cual es una contradicción. Por tanto $\pi(V) \subset \mathcal{G} - \pi(C)$ y tomando preimagenes en la contención, entonces $V \subset \pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C))$ y dado que $x \in \pi(x) \subset V$ entonces tenemos que $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C)) \in \tau$ luego, del Ejemplo 4.10 sabemos que $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C))$ es $\mathcal{G}-$ *saturado* y así por el Teorema 4.12 tenemos que $\pi(\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C)))$ es abierto en $\mathcal{G}$ y dado que π es sobreyectiva, entonces $\mathcal{G} - \pi(C) \in \tau(\mathcal{G})$ y así finalmente $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{G}$ y por lo tanto π es cerrada.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Sean $G \in \mathcal{G}$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$ y supongamos que π es cerrada. Claramente $X-U$ es cerrado en X por lo que tenemos que $\pi(X-U)$ es cerrado en $\mathcal{G}$, luego $\mathcal{G}-\pi(X-U)$ es abierto en $\mathcal{G}$ y dado que π es continua tenemos que $\pi^{-1}(\mathcal{G}-\pi(X-U))$ es abierto en X. Haciendo $V=\pi^{-1}(\mathcal{G}-\pi(X-U))$ ya tenemos que $V \in \tau$ y además del Ejemplo 4.10 también V es $\mathcal{G}-saturado$, solo resta probar que $G \subset V \subset U$, veamos que en efecto $G \subset V$, sea $x \in G$ como $G \in \mathcal{G}$ entonces $\pi(x)=G$, y como por hipótesis tenemos que $G \subset U$, entonces $\pi(x) \subset U$ por lo que $\pi(x) \notin \pi(X-U)$, es decir que, $\pi(x) \in \mathcal{G}-\pi(X-U)$ y entonces $x \in \pi^{-1}(\mathcal{G}-\pi(X-U))$, es decir que $x \in V$ por lo tanto $G \subset V$ ya solo veamos que $V \subset U$, sea $x \in V$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{G}-\pi(X-U)$, lo cual quiere decir que $\pi(x)=A$ para algún $A \in \mathcal{G}-\pi(X-U)$ de donde $A \notin \pi(X-U)$ por tanto $\pi(x)=A \subset U$ y así $x \in U$, por lo tanto $V \subset U$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Finalmente, sea $D \in \mathcal{G}$, $U \in \tau$ con $D \subset U$ por hipótesis tenemos que existe $V \in \tau$ tal que V es $\mathcal{G}-saturado$ y $D \subset V \subset U$. Sea $A \in \mathcal{G}$ con $A \cap V \neq \varnothing$ como V es $\mathcal{G}-saturado$ tenemos que existe una subcolección $\mathcal{C}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $V=\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, de donde se sigue que $A \subset V$ y así se concluye que $A \subset U$ y por lo tanto $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua superior. ■

Lema 4.14. *Sea X un espacio topológico tal que para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado en X. Si $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua de X, entonces $\mathcal{G}$ es una partición cerrada.*

Demostración: Sean $A \in \mathcal{G}$ un miembro de la partición cualquiera, $x \in A$ y nuevamente consideremos a π el mapeo natural. Se tiene por hipótesis que $\{x\}$ es cerrado en X y por el Teorema 4.13 tenemos que π es función cerrada, entonces $\pi(\{x\})$ es cerrado en $\mathcal{G}$, observese que $\pi(\{x\})=\{\pi(x)\}=\{A\}$ de donde $\{A\}$ es cerrado en $\mathcal{G}$ y como π continua, entonces $\pi^{-1}(\{A\})$ es cerrado en X, a saber $\pi^{-1}(\{A\})=\{x \in X : \pi(x) \in \{A\}\}=\{x \in X : \pi(x)=A\}=A$ por lo tanto A es cerrado en X y como A fue tomado de manera arbitraria en $\mathcal{G}$ tenemos entonces que $\mathcal{G}$ es una partición cerrada. ■

Definición 4.15. *Si $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un espacio de descomposición de un espacio* *topológico X tal que $\mathcal{G}$ es semicontinua superior. Diremos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es una* ***descomposición scs****.*

Lema 4.16. *Si X un espacio métrico compacto, entonces cualquier descomposición scs de X es metrizable.*

Demostración: Sea $\mathcal{G}$ una descomposición scs de X, queremos ver que $\mathcal{G}$ es metrizable. Dado que X es métrico compacto el Teorema 4.6 nos garantiza que bastará con demostrar que $\mathcal{G}$ es de Hausdorff. A saber, sean $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ con $G_1 \neq G_2$, así pues $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ y como X es normal, los conjuntos unipuntuales son cerrados, por lo que el Lema 4.14 nos asegura que G_1 y G_2 son cerrados, más aún, existen U_1 y U_2 ajenos y abiertos en X tales que $G_1 \subset U_1$ y $G_2 \subset U_2$ luego por el Teorema 4.13 existen V_1 y V_2 $\mathcal{G} - saturados$ abiertos tales que $G_1 \subset V_1 \subset U_1$ y $G_2 \subset V_2 \subset U_2$. Ahora bien sea $x \in G_1$, entonces $G_1 = \pi(x) \in \pi(G_1) \subset \pi(V_1)$, entonces $G_1 \in \pi(V_1)$ y de manera análoga $G_2 \in \pi(V_2)$, nótese que V_1 y V_2 cumplen las hipótesis del Teorema 4.12 por lo que $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ abiertos en $\mathcal{G}$, también por ser V_1 y V_2 $\mathcal{G} - saturados$ el Teorema 4.11 nos dice que $V_1 = \pi^{-1}(\pi(V_1))$ y $V_2 = \pi^{-1}(\pi(V_2))$, obsérvese que como $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ se tiene también que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, de donde $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \varnothing$ y así $\mathcal{G}$ es de Hausdorff. ■

Teorema 4.17. *Si X es un continuo, entonces cualquier descomposición scs de X es un continuo.*

Demostración: Sean X un continuo y $\mathcal{G}$ una descomposición scs. Nótese que al ser X compacto y conexo, se tiene que $\mathcal{G}$ tambien lo es pues $\pi : X \to \mathcal{G}$ es continua, más aún, por el Lema 4.16 tenemos que $\mathcal{G}$ debe ser metrizable y por tanto $\mathcal{G}$ es un continuo. ■

El siguiente teorema nos da una forma interesante de obtener una partición semicontinua superior a partir de un espacio topológico dado, evidentemente el plan es obtener un continuo a partir de un continuo dado via su descomposición scs.

Teorema 4.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado de X no vacío, entonces la partición $\mathcal{G}_A$ definida como sigue es semicontinua superior.*

$$\mathcal{G}_A = \{A\} \cup \{\{z\} : z \in X - A\}.$$

Demostración: Sean $G \in \mathcal{G}_A$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$. Primero supongamos que $G = A$ y sean $V = U$ y $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \varnothing$, a saber si $B = A$, se sigue que $B \subset\ U$ y entonces $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior, por otro lado si $B = \{z\}$ para algún $z \in X - A$, entonces $z \in V$ y luego $B \subset U$ y así $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior.
Ahora supongamos que $G = \{x\}$ para algún $x \in X - A$, consideremos $V = U \cap (X - A) \in \tau$ y sea $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \varnothing$, a saber $B \neq A$ pues si sucediera que $B = A$ por un lado tendríamos que $A \cap V \neq \varnothing$ mientras que por otro $A \cap V = A \cap (U \cap (X - A)) = \varnothing$, así pues $B = \{z\}$ para algún $z \in X - A$, como $\{z\} \cap V \neq \varnothing$, se tiene que $z \in V = U \cap (X - A)$ y en consecuencia $\{z\} = B \subset U$ y por tanto $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior. ∎

Nota: Dado (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}_A$ definida como arriba, denotaremos el espacio de descomposición $(\mathcal{G}_A, \tau(\mathcal{G}_A))$ simplemente por X/A, a saber, podemos pensar intuitivamente a X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto. Además en el caso en que X es un espacio métrico compacto o un continuo, claramente por el Lema 4.16 y por el Teorema 4.17 X/A será metrizable o un continuo respectivamente.

Definición 4.19. *Consideremos $Z = X \times [0,1]$ con X un espacio topológico, $A = \{(x, 1) : x \in X\}$, definimos y denotamos el **cono topológico sobre** X como $TC(X) = Z/A = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$.*

Tengamos en cuenta las siguientes observaciones:

- $X \times [0,1]$ es llamado el **cilindro** de X.
- Nótese que en el caso en que X es un continuo, tenemos que $TC(X)$ también es un continuo.
- Los puntos de $TC(X)$ son de la forma $[(x,t)]$ donde $x \in X$ y $t \in [0,1]$.
- Siendo X un espacio topológico , se puede verificar que $TC(X)$ es arco-conexo.

A saber, este último punto nos dice que de hecho solo con que X sea un espacio métrico compacto, se tendrá que $TC(X)$ es un continuo. Pues como $TC(X)$ es arco-conexo, se implica que $TC(X)$ es conexo y en consecuencia $TC(X)$ debe ser un continuo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar este capítulo.

Referencias

[1] Herrera Carrasco David, Macías Romero Fernando, Guerrero Méndez Luis Alberto, *La magia de los Espacios Métricos,* FCFM., Benemérita Universidad Autónoma de Puebla., Puebla., 2024

[2] J. J. Charatonik, Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225-264.

[3] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[4] K. Kuratowski,*Topology,* Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[5] K. Kuratowski,*Topology,* Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[6] J. R. Munkres, *Topología,* Prentice Hall, Madrid 2002.

[7] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992..

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
rh223470378@alm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 6

Algunas técnicas para la construcción de continuos

Daniel Dominguez Málaga, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se presentan algunos resultados que son de ayuda para la construcción de nuevos continuos, aunque hay varias formas de construir continuos, aquí solo mostraremos las *intersecciones anidadas* y las *descomposiciones semi-continuas superiores*, esta última proporciona continuos que sirven de contraejemplos para ciertos resultados, expondremos brevemente algunas de las propiedades más importantes de estas y algunas de sus caracterizaciones más importantes.

1 Ejemplos de continuos e intersecciones anidadas

Definición 1.1. *Un* continuo *es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un* subcontinuo *es un continuo el cual es un subconjunto de un espacio.*

El término continuo no degenerado *significa que el espacio consiste de más de un punto.*

El siguiente resultado establece que la propiedad de "ser un continuo" es una invariante topológica bajo homeomorfismos.

Proposición 1.2. *Sean X un continuo, Y un espacio topológico y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces Y es un continuo.*

Demostración. Como X es, en particular, un espacio compacto y conexo. Dada la continuidad de h, tenemos que, $h(X) = Y$ es compacto y conexo. Y es un espacio métrico dado que $d_Y(x, y) = d_X(h^{-1}(x), h^{-1}(y))$ (donde d_X es una métrica sobre X) es una métrica sobre Y. $\square$

Arcos

Definición 1.3. *Un* arco *es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1]$*.*

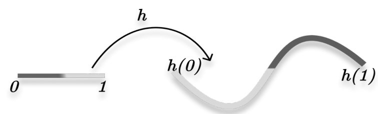


Figura 1: Arco

Observación 1.4. (1) *El subespacio* $[0, 1]$ *de* $\mathbb{R}$ *es continuo ya que es cerrado y acotado, así, por Heine-Borel es compacto, la conexidad se debe a que los intervalos son los únicos conjuntos conexos en* $\mathbb{R}$*.*

(2) *Si* X *es un espacio homeomorfo a* $[0, 1]$*, entonces* X *es un continuo por la proposición 1.2. Por tanto todo* arco *es un* continuo*.*

Definición 1.5. *Sea* X *un espacio métrico conexo. Un punto* $p \in X$ *es un* punto de corte *de* X *si* $X \setminus \{p\}$ *no es conexo. Si* p *no es punto de corte de* X *entonces llamaremos a* p *un* punto de no corte*.*

Proposición 1.6. *Sean* X, Y *espacios métricos conexos y* $h : X \to Y$ *un homeomorfismo entre ellos, entonces* p *es un punto de corte de* X *si y solo si* $h(p)$ *es un punto de corte de* Y*.*

Demostración. Supongamos que $h(p)$ no es un punto de corte de Y entonces $Y \setminus \{h(p)\}$ es conexo, como h^{-1} es continua, $h^{-1}(Y \setminus \{h(p)\})$ es conexo, pero $h^{-1}(Y \setminus \{h(p)\}) = X \setminus \{p\}$ lo que contradice el hecho de que p es un punto de corte de X.

El recíproco se muestra de manera similar. $\square$

Ejemplo 1.7. *Para cada* $a \in (0, 1)$*,* a *es un punto de corte de* $(0, 1)$ *ya que el conjunto* $(0, 1) \setminus \{a\} = (0, a) \cup (a, 1)$ *no es conexo, así,* $(0, 1)$ *tiene infinitos puntos de corte.*

Ejemplo 1.8. *El intervalo cerrado* $[0, 1]$ *tiene infinitos puntos de corte, pero* 0 *y* 1 *son puntos de no corte dado que* $[0, 1] \setminus \{0\} = (0, 1]$ *y* $[0, 1] \setminus \{1\} = [0, 1)$ *lo cuales son conexos (ya que siguen siendo intervalos).*

Proposición 1.9. *Sea* $h : [0,1] \to [0,1]$ *un homeomorfismo. Entonces*

$$\{h(0), h(1)\} = \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $x \in \{h(0), h(1)\}$ entonces $x = h(0)$ o $x = h(1)$. Si $x = h(0)$ entonces este no puede ser un punto de corte de $[0,1]$ ya que de ser el caso tendriamos por el ejemplo 1.8 y la proposición 1.6 que 0 es un punto de corte de $[0,1]$, lo cual no puede ser posible, asi $h(0) = 0$ o $h(0) = 1$ y por tanto $x \in \{0,1\}$, luego, dada la inyectividad de h, la igualdad se cumple. □

Lema 1.10. *Sean* A *un arco y* $h : [0,1] \to A$ *un homeomorfismo. Si* $h' : [0,1] \to A$ *es cualquier otro homeomorfismo, entonces*

$$\{h(0), h(1)\} = \{h'(0), h'(1)\}.$$

Demostración. Nótese que $h^{-1} \circ h' : [0,1] \to [0,1]$ es un homeomorfismo, se sigue por la proposición 1.9 que $\{(h^{-1} \circ h')(0), (h^{-1} \circ h')(1)\} = \{0,1\}$. Luego

$$\begin{aligned} \{h(0), h(1)\} &= h\left(\{0,1\}\right) \\ &= h\left(\left\{\left(h^{-1} \circ h'\right)(0), \left(h^{-1} \circ h'\right)(1)\right\}\right) \\ &= \{h'(0), h'(1)\}. \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad se cumple. □

Observación 1.11. *Los puntos* $h(0)$ *y* $h(1)$ *son puntos especiales de* A*, los cuales se les llama* puntos finales de A. *Cuando decimos que* A *es un arco de* $h(0)$ *a* $h(1)$ *queremos decir que* A *es un arco con puntos finales* $h(0)$ *y* $h(1)$ *(veasé la figura 1).*

n-celdas y n-esferas

Definición 1.12. *Un subconjunto* K *de* $\mathbb{R}^n$ *se dice que es convexo si tienen la siguiente propiedad: si para cada* x, $y \in K$ *y* $t \in (0,1)$*, el punto*

$$z_t = (1-t)x + ty \in K$$

Definición 1.13. *Para cada punto* $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$*, se define su norma como:*

$$||\vec{x}|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Sea $n \in \mathbb{N}$, una n-*celda *es un espacio topológico homeomorfo a la bola cerrada n-dimensional $B^n \subset \mathbb{R}^n$ donde*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}.$$

Observación 1.14. *El subespacio B^n de $\mathbb{R}^n$ es acotado ya que $B^n \subset \prod_{i=1}^{n} J_i$ donde $J_i = [-1, 1]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y es cerrado, dado que si $x \in \overline{B^n}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en B^n tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Nótese que la sucesión de números reales $\{||x_n||\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $||x||$ cuando $n \to \infty$ y como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $||x_n|| \leq 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| \leq 1$ así $||x|| \leq 1$ y por tanto $x \in B^n$ con lo cual $B^n = \overline{B^n}$, se sigue por Heine-Borel que B^n es compacto.*

B^n es convexo, ya que para cualesquiera $\vec{x}$, $\vec{y} \in B^n$ y $t \in (0, 1)$ el punto $\vec{z}_t = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$ también pertenece a B^n dado que

$$\begin{aligned} ||\vec{z}_t|| = ||(1-t)\vec{x} + t\vec{y}|| &\leq |1-t|||\vec{x}|| + |t|||\vec{y}|| \\ &\leq (1-t) + t = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, toda n-celda es un continuo por la proposición 1.2.

Definición 1.15. *Sea $n \in \mathbb{N}$, una n-esfera es un espacio topológico homeomorfo a la esfera n-dimesional $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donde*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}.$$

Una 1-*esfera es llamada una* curva cerrada simple.

Definición 1.16. *Sea X un espacio métrico, decimos que X es* arco conexo *si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un arco contenido en X cuyos puntos finales sean x, y.*

En algunas ocasiones determinar la arco conexidad de un espacio métrico X es mucho más fácil que exhibir su conexidad, el siguiente resultado nos proporciona una manera útil de determinar cuando X es conexo.

Proposición 1.17. *Sea X un espacio métrico, si X es arco conexo entonces X es conexo.*

Demostración. Sea x' un punto arbitrario pero fijo de X, para cualquier otro punto $x \in X$ con $x \neq x'$ existe un arco A_x cuyos puntos finales son x, x'. Sea $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X \text{ y } x \neq x'\}$ podemos observar que para cada A_x es un conjunto conexo y además $X = \bigcup \mathcal{A}$ con $x' \in A_x$ para cada $x \in X$. Podemos concluir que X es conexo. $\square$

Observación 1.18. *El subespacio $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es compacto ya que $S^n \subset \prod_{i=1}^{n+1} J_i$, donde $J_i = [-1, 1]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Veamos que es cerrado, sea $x \in \overline{S^n}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S^n tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, nótese que la sucesión de números reales $\{||x_n||\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $||x||$, pero como para cada $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| = 1$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 1$ así $||x|| = 1$ y por tanto $x \in S^n$, con lo cual $S^n = \overline{S^n}$, el resultado se sigue por el teorema de Heine-Borel. Es conexo dado S^n es arco conexo, ya que para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in S^n$, $\alpha([0, 1])$ es un arco contenido en S^n cuyos puntos finales son $\vec{a}, \vec{b}$ donde α es la función $\alpha : [0, 1] \to S^n$ dada por*

$$\alpha(t) = \frac{tb + (1-t)\vec{a}}{||t\vec{b} + (1-t)\vec{a}||}.$$

Otros continuos especiales

El siguiente continuo difiere drasticamente de los mostrados anteriormente.

Definición 1.19. *Un* cubo de Hilbert *es un espacio topológico homeomorfo al producto cartesiano numerable $H = \prod_{n\in\mathbb{N}} I_i$ donde $I_n = [0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con la topología producto (véase [3, p.147]) .*

Observación 1.20. *El cubo de Hilbert es un espacio métrico ya que la función $\rho : H^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i - y_i|$$

donde $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ es una métrica para H (véase [3, pp.212-213]), es compacto por el `Teorema 4` *de [4, p.17] y conexo por el* `Teorema 11` *de [4, p.137], se sigue por 1.2, que todo* Cubo de Hilbert *es un continuo.*

Definición 1.21. *El continuo* $\operatorname{sen}(1/x)$ *es la cerradura* $\overline{W}$ *donde*

$$W = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$$

Observación 1.22. *El subespacio* $\overline{W} \subset \mathbb{R}^2$ *es cerrado ya que la cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado,* $\overline{W}$ *es acotado ya que* $\overline{W} \subset [-1,1] \times [-1,1]$*, se sigue por Heine-Borel que es compacto. Es conexo puesto que* W *lo es.*

Definición 1.23. La circunferencia de Varsovia *es el nombre que se le da a cualquier espacio topológico homeomorfo a* $Y \cup Z$*, donde* Y *es el continuo* $\operatorname{sen}(1/x)$ *y* Z *es la unión de tres arcos en* $\mathbb{R}^2$*, uno de* $(0,-1)$ *a* $(0,-2)$*, otro de* $(0,-2)$ *a* $(1,-2)$ *y el último de* $(1,-2)$ *a* $(1, sen(1))$*.*

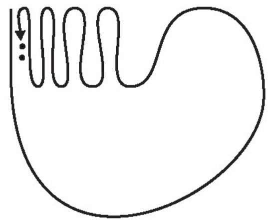


Figura 2

Intersecciones anidadas

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos interesantes de continuos es el uso de intersecciones anidadas. De hecho, se puede decir que la técnica de las intersecciones anidadas es fundamental para la teoría de continuos. No sólo se utiliza para construir ejemplos, sino que es la idea clave para las demostraciones de muchos teoremas. Incluso se utiliza en la construcción de funciones continuas. Los dos resultados siguientes sientan las bases para utilizar esta técnica.

Proposición 1.24. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios métricos compactos tal que* $X_{n+1} \subset X_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Si U *es un subconjunto abierto de* X_1 *tal que* $X \subset U$*, entonces existe* $N_U \in \mathbb{N}$ *tal que para toda* $n \geq N_U$ *se cumple que* $X_n \subset U$*.*

Demostración. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N(n) \geq n$ tal que $X_{N(n)} \not\subset U$, sea $x_n \in X_{N(n)} - U$, como $N(n) \geq n$ entonces $X_{N(n)} \subset X_n$, por lo que $x_n \in X_n$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X_n - U$, nótese que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $X_1 - U$, donde este último es cerrado en X_1 el cual es compacto, se sigue entonces que $X_1 - U$ es compacto, así, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una sucesión parcial convergente a algún punto en $X_1 - U$, digamos $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x \in X_1 - U$ cuando $k \to \infty$.

Afirmamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $x \in X_n$. Para el natural dado n, existe algún k_0 de tal manera que para toda $k \geq k_0$ se cumple que $n_k > n$, observemos que para cada $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in X_{n_k} \subset X_n$ pues como $n_k > n$, $X_{n_k} \subset X_n$. Sea entonces $\{x_{n_k}\}_{k\geq k_0}$, la cual es una sucesión parcial de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y por tanto esta converge a x, nótese que tal sucesión está contenida en X_n el cual es cerrado pues este es compacto, se sigue entonces que $x \in X_n$, como $n \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. De esto se sigue que $x \in U$ pues $X \subset U$, lo cual no puede ser posible. Por tanto debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para cada $n \geq N$. $\square$

Corolario 1.25 (Teorema de la intersección de Cantor). *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ y $X_n \neq \emptyset$. Sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

entonces $X \neq \emptyset$ (y por tanto, un espacio métrico compacto).

Demostración. Supongamos que $X = \emptyset$, sea $U = X$ el cual es un subconjunto abierto de X_1 y es tal que $X \subset U$, por 1.24, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$ para cada $n \geq N$, entonces $\emptyset \subset X_n = \emptyset = U$, por lo que $X_n = \emptyset$ para cada $n \geq N$ lo cual no puede ser posible, por tanto $X \neq \emptyset$.

Por último, X es un espacio métrico no vacío, ya que este hereda la métrica de X_1, además, como cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es compacto, se sigue por el [2, Corolario 7.8] que X_n es cerrado, así X es cerrado en X_1 pues es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados, se sigue por la [2, Proposición 7.4] que X es compacto. $\square$

Teorema 1.26. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de continuos tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ y sea*

$$X = \bigcap_{n=\in\mathbb{N}} X_n.$$

Entonces, X es un continuo.

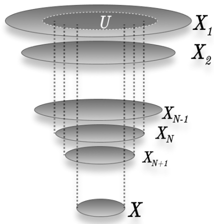


Figura 3: Espacios métricos anidados

Demostración. Por 1.25 X es un espacio métrico compacto no vació, resta mostrar que X es conexo, supongamos entonces que no lo es, entonces existen subconjuntos A y B no vacíos, ajenos y cerrados en X tal que $X = A \cup B$. Nótese que A y B son cerrados en X_1 pues $A = X \cap A'$ y $B = X \cap B'$ donde X, A', B' son cerrados en X_1, ahora, como X_1 es un espacio normal, existen conjuntos V y W abiertos no vacíos y ajenos tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$, el cual es abierto en X_1 y es tal que $X = A \cup B \subset V \cup W = U$, así, por 1.24 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$ para cada $n \geq N$, en particular, para el natural N, $X_N \subset U = V \cup W$.

Afirmamos que los subconjuntos $(X_N \cap V), (X_N \cap U)$ de X_N formar una disconexion de este. Observe que los conjuntos $(X_N \cap V), (X_N \cap U)$ son abiertos en X_N, son no vacíos puesto que $A \subset X_N \cap V$ y $B \subset X_N \cap W$ con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, estas contenciones se deben a que $X = A \cup B \subset X_N$, además $X_N \cap V$ y $X_N \cap W$ son ajenos puesto que $V \cap W = \emptyset$ y cuya unión es X_N, pues como $X_N \subset U = V \cup W$ se tiene que

$$X_N = X_N \cap (V \cup W) = (X_N \cap V) \cup (X_N \cap W).$$

Esto no puede ser posible puesto que X_N no admite disconexion alguna. Por tanto, X es conexo, lo cual termina de probar que X es un continuo. □

Construcción de continuos a partir de intersecciones anidadas

Definición 1.27. *Un continuo X se dice que es descomponible siempre que X pueda escribirse como la unión de dos subcontinuos propios.*

Un continuo que no es descomponible se dice que es indescomponible.

Puede parecer que todos los continuos son descomponibles (excepto los continuos de un solo punto). Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, este no es el caso. De hecho, una "gran cantidad" de continuos son indescomponibles.

El pseudo arco

Definición 1.28. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *un espacio topológico,* $x, y, z \in X$. *Una colección indexada finita* $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, *donde para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$, A_i *es un subconjunto de* X *decimos que es una* cadena simple *de* x *a* z *pasando por* y *siempre que* $\mathcal{C}$ *satisfaga que:*

$(CS1)$ $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *si y solo si* $|i - j| \leq 1$;

$(CS2)$ $x \in A_i$ *si y solo si* $i = 1$ *y* $z \in A_i$ *si y solo si* $i = n$;

$(CS3)$ $y \in A_i$ *para algún* $i = 1, 2, \ldots, n$.

A los elementos de $\mathcal{C}$ *son llamados* eslabones.

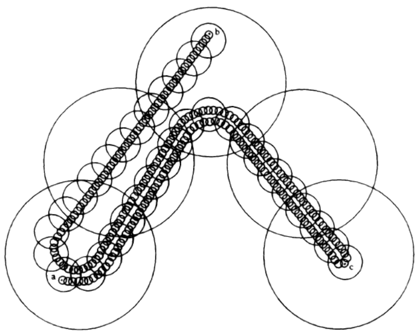


Figura 4: Cadena simple

Ejemplo 1.29 (Un continuo indescomponible no degenerado). *Construimos un continuo indescomponible no degenerado* X *en el plano* $\mathbb{R}^2$ *de la siguiente manera. Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ *construyamos una cadena simple* $\mathcal{C}_1$ *cuyos eslabones son* $2-$ *celdas (véase 1.13) de diámetro menor que* 1 *empezando por* a, *pasando por* b *y terminando en* c. *dentro de* $\mathcal{C}_1$ *construyamos una cadena simple* $\mathcal{C}_2$ *de* $2-$ *celdas de diámetro menor que* 2^{-1} *que empiece por* b, *que* *pase por a y que termine en c, Dentro de $\mathcal{C}_2$ construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_3$ de $2-$celdas de diámetro menor que 2^{-2}, empezando por a, pasando por c y terminando en b. Siguiendo así construyamos cadenas simples $\mathcal{C}_n$ cuyos eslabones son $2-$celdas de diámetro menor que 2^{-n} tales que.*

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

(a) $\mathcal{C}_{3n+1}$ va de a hacía c a través de b.

(b) $\mathcal{C}_{3n+2}$ va de b hacía c a través de a.

(c) $\mathcal{C}_{3n+3}$ va de a hacía b a través de c.

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup \mathcal{C}_{n+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_n$

Sea $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$, por 1.26 X es un continuo. Notemos que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n) \subset \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, pues, de lo contrario existe $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$ tal que $x \notin \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, así, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{C}_{3j+1}$ es decir $x \notin \mathcal{C}_{3j+1}$, pero $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$ en particular $x \in \mathcal{C}_{3j+1}$ lo cual es una contradicción. Así se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_n\right) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_{3n+1}\right)$$

Ahora, veamos que se cumple que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1}) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$, supongamos lo contrario, por lo que existe $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$ tal que $x \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_n)$, así existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{C}_n$, notemos que $\bigcup \mathcal{C}_{3j+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_j$ y como $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{C}_{3j+1}$, así se cumple que $x \in \bigcup \mathcal{C}_j$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_{3n+1}\right).$$

Veamos que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $\{a, c\} \subset Y$. Supongamos que existe tal Y, como $Y \subset X$, entonces sea $p \in X \setminus Y$ y $d(p, Y) = \varepsilon > 0$ pues Y es compacto. Por la propiedad arquimediana existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Fijemos $l \geq N$ y supongamos que el eslabón $\mathcal{C}$ de la cadena $\mathcal{C}_{3l+1}$ que contiene a p intersecta a Y. Sea $t \in \mathcal{C} \cap Y$. Se tiene que $diam(\mathcal{C}) < \frac{1}{2^l} < \varepsilon$. Entonces

$$d(p, Y) \leq d(p, t) < \varepsilon$$

Lo cual es una contradicción. Así, para $k \geq N$ los eslabones de la cadena $\mathcal{C}_{3k+1}$ que contienen a p no intersectan a Y. Como $Y \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$ entonces para $l > N$, $Y \subset \bigcup \mathcal{C}_{3l+1}$
Supongamos que $\bigcup \mathcal{C}_{3l+1} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s$ donde $a \in \mathcal{C}_1$ y sea $c \in \mathcal{C}_s$, supongamos que $p \in \mathcal{C}_m$, pero por lo anterior $\mathcal{C}_m \cap Y = \emptyset$. Así

$$Y = (Y \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m-1})) \cup (Y \cap (\mathcal{C}_{m+1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s))$$

Por lo que Y se escribe como la unión de dos conjuntos cerrados, ajenos, y no vacíos, ya que $a \in (Y \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{m-1}))$ y $c \in (Y \cap (\mathcal{C}_{m+1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_s))$, pero eso es una contradicción, pues Y es conexo.
Notemos que se puede demostrar que $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+2})$ y no existe Y subcontinuo propio tal que $\{b, c\} \subset Y$ y además $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+3})$ y no existe Y subcontinuo propio tal que $\{a, b\} \subset Y$. Así X es indescomponible.

La carpeta de Sierpinski

Como otro ejemplo de la técnica de interseccion anidada, construimos el siguiente continuo.

Ejemplo 1.30 (La curva universal de Sierpinski)**.** *Procedemos a dividir el cuadrado sólido $S = [0, 1] \times [0, 1]$ en nueve cuadrados congruentes y sea*

$$X_1 = S - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Similarmente, partimos cada uno de los ocho cuadrados restantes en otros nueve cuadrados congruentes y sea X_2 el continuo obtenido al eliminar los interiores de cada uno de los ocho cuadrados centrales resultantes, siguiendo este proceso, definimos $X_3, X_4, \ldots,$. Sea

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

entonces X es un continuo por 1.26 y es llamado La Curva Universal de Sierpinski.

2 Descomposición de continuos

Empezaremos recordando la definición de espacio de descomposición en general y veremos cuando un espacio de descomposición de un continuo es un continuo.

Espacios de descomposición

Definición 2.1. *Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una partición de X. Definamos a $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ y como:*

$$\mathscr{T}(\mathcal{D}) = \left\{ \mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \mathscr{T} \right\}. \tag{1}$$

Y denotamos por $p_{\mathcal{D}}$ a la función $p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ definida para cada $x \in X$ como $p_{\mathcal{D}}(x) = D$ donde D es el único elemento de la partición $\mathcal{D}$ que contiene a x. La función $p_{\mathcal{D}}$ se le conoce como funcion natural *o* proyeccion natural.

Si para cada $D \in \mathcal{D}$ es cerrado en X, decimos entonces que $\mathcal{D}$ es una partición cerrada.

Al espacio $(\mathcal{D}, \mathscr{T}(\mathcal{D}))$ es llamado espacio de descomposición de X o simplemente descomposición de X, la topología $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es llamada topología de descomposición y a la Enfatizamos que el término descomposición significa una partición de X con la topología descomposición.

Proposición 2.2. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una partición de X. La familia $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$.*

Demostración. (T1) Notemos que $\emptyset \subset \mathscr{T}(\mathcal{D})$ y es tal que $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \mathscr{T}$, por otra parte, sea $\mathcal{U} = \mathcal{D}$, nótese que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ de tal manera que $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{D} = X \in \mathscr{T}$.

(T2) Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$, denotemos por $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, si $\mathcal{W} = \emptyset$ ya no hay nada que probar. Ahora, supongamos que $\mathcal{W} \neq \emptyset$ si $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ y $\mathcal{V} = \{V_t : t \in T\}$ tales que

(1) $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{D}$,

(2) $\bigcup\limits_{s\in S} U_s, \bigcup\limits_{t\in T} V_t \in \mathscr{T}$.

Por (1) se sigue que $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$, además;

$$\mathcal{W} = \{U_s \cap V_t : (s,t) \in S \times T\}$$

No es difícil verificar que:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{W} &= \bigcup \{U_s \cap V_t : (s,t) \in S \times T\} \\ &= \left[\bigcup_{s\in S} U_s\right] \cap \left[\bigcup_{t\in T} V_t\right] \end{aligned}$$

Como $\mathscr{T}$ es topología para X se sigue por (2) que $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \mathscr{T}$ y por tanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$.

(T3) Sea $\{\mathcal{U}_s\}_{s\in S}$ una subfamilia de $\mathscr{T}(\mathcal{D})$, sea $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{s\in S} \mathcal{U}_s$, mostraremos que $\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$, para ello tenemos que verificar que $\bigcup \mathcal{V} \in \mathscr{T}$. Notemos que

(a) para cada $s \in S$, $\mathcal{U}_s = \{U_{st} : t \in T_s\} \subset \mathcal{D}$, es decir, cada $\mathcal{U}_s$ es una familia de subconjuntos de X ajena dos a dos, la cual esta indexada por un conjunto de índices el cual denotamos por T_s, y

(b) para cada $s \in S$, $\bigcup \mathcal{U}_s = \bigcup\limits_{t\in T_s} U_{st} \in \mathscr{T}$.

No es difícil verificar lo siguiente:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{U}_s = \left\{U_{st} : t \in \bigcup \mathcal{T}\right\} \subset \mathcal{D}$$

donde $\mathcal{T} = \{T_s : s \in S\}$, por lo que

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{V} &= \bigcup \left\{U_{st} : t \in \bigcup \mathcal{T}\right\} \\ &= \bigcup_{T_s\in\mathcal{T}} \left(\bigcup_{t\in T_s} U_{st}\right) \end{aligned}$$

Si denotamos por $V_{T_s} = \bigcup_{t\in T_s} U_{st}$ entonces por (b), $\{V_{T_s}\}_{T_s\in\mathcal{T}}$ es una subfamilia de conjuntos abiertos de X, como $\mathscr{T}$ es topología, se sigue que $\bigcup \mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$.

Por tanto $\mathscr{T}(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$. □

Proposición 2.3. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Entonces $(\mathcal{D}, \mathscr{T}(\mathcal{D}))$ es la topología mas grande para la cual la función $p_{\mathcal{D}}$ es continua.*

Demostración. $p_{\mathcal{D}}$ es continua, sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{D}$, afirmamos que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup \mathcal{U}$, en efecto, sea $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{U})$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in \mathcal{U}$, por definición de $p_{\mathcal{D}}$, $x \in p_{\mathcal{D}}(x)$. Por tanto $x \in \bigcup \mathcal{U}$.

Sea ahora $y \in \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$, más aún, U es el único elemento de $\mathcal{U}$ tal que $y \in U$, pues si U' es otro elemento de $\mathcal{U}$ para el cual $y \in U'$, entonces $y \in U \cap U'$, se sigue necesariamente que $U = U'$, así, $p_{\mathcal{D}}(y) = U \in \mathcal{U}$. Por tanto $y \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{U})$.

Se sigue entonces que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X pues $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en X. Supongamos ahora que $\mathscr{S}(\mathcal{D})$ es otra topología para $\mathcal{D}$ de tal manera que hace de $p_{\mathcal{D}}$ una función continua, sea $\mathcal{V} \in \mathscr{S}(\mathcal{D})$, de manera similar a como hicimos anteriormente se muestra que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{V} \in \mathscr{T}$ y por tanto, por como se definió $\mathscr{T}(\mathcal{D})$, $\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathcal{D})$, lo cual muestra que $\mathscr{S}(\mathcal{D}) \subset \mathscr{T}(\mathcal{D})$. □

Intuitivamente, una descomposición es el espacio que se obtiene del espacio original identificando todos los puntos de cada miembro de una partición determinada. Por esta razón, las descomposiciones frecuentemente se denominan espacios de identificación. También se les suele llamar espacios cocientes debido a la íntima conexión entre las relaciones de equivalencia y las particiones en la teoría de conjuntos.

Las descomposiciones son una fuente importante de ejemplos, contraejemplos y teoremas en la teoría de continuos, sin embargo, nos apresuramos a señalar que una descomposición de un continuo X puede no ser un continuo, para evidenciar eso, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Sea el continuo $X = [-1, 1]$ y $\mathcal{D}$ la partición cerrada de X dada por*

$$\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}.$$

En el ejemplo anterior, el espacio de descomposición $(\mathcal{D}, \mathscr{T}(\mathcal{D}))$ no puede ser un continuo, ya que no es un espacio de Hausdorff, y por tanto, no es un espacio metrizable. Como veremos más adelante en 2.7 el que una descomposición sea un espacio de Hausdorff será de vital importancia para que una descomposición sea un continuo.

Lema 2.5. *Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es metrizable.*

Demostración. Obsérvese primeramente que por la continuidad de f el espacio Y es compacto y el cual por hipótesis es de Hausdorff y por tanto es un espacio normal y en consecuencia un espacio regular.

Así, para exhibir que el espacio topológico Y es metrizable basta mostrar por el *teorema de la metrización de Urysohn* que Y admite una base $\mathscr{B}_Y$ numerable. Como el espacio métrico (X, d) es compacto, este es separable, se sigue por la [2, Proposición 3.27] que X es segundo numerable, por tanto este admite una base $\mathscr{B}_X$ numerable. Para cada subfamilia finita $\mathcal{A}$ de $\mathscr{B}_X$, definamos

$$U(\mathcal{A}) = Y - f\left(X - \bigcup \mathcal{A}\right) \tag{2}$$

Afirmamos que la familia $\mathscr{B}_Y$ de subconjuntos de Y, donde

$$\mathscr{B}_Y = \{U(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ es una subfamilia finita de } \mathscr{B}_X\}$$

es una base numerable para Y. Veamos que $\mathscr{B}_Y$ satisface las condiciones de la [2, Proposición 1.18];

(1) Sea $U(\mathcal{A}) \in \mathscr{B}_Y$, como $\mathcal{A} \subset \mathscr{B}_X \subset \mathscr{T}_d$ donde $\mathscr{T}_d$ es la topología generada por la métrica d, entonces $X - \bigcup \mathcal{A}$ es subconjunto cerrado de X, no es difícil probar que f es una función cerrada, por lo que $f\left(X - \bigcup \mathcal{A}\right)$ es un subconjunto cerrado de Y, así $U(\mathcal{A}) \in \mathscr{T}$.

(2) Sea V un subconjunto abierto de Y y sea y cualquier elemento de V, nótese que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$, pues para $x \in f^{-1}(y)$, $f(x) = y \in V$ y por tanto $x \in f^{-1}(V)$. Nótese que $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado y por tanto tenemos que $f^{-1}(y)$ es compacto, por otro lado como $\mathscr{B}_X$ es una base para X, existe una subcolección $\{U_s\}_{s \in S}$ tal que $f^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{s \in S} U_s$, por lo que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s \in S} U_s.$$

Dada la compacidad de $f^{-1}(y)$, tenemos que existen $U_{s1}, U_{s2}, \ldots, U_{sn}$ tales que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{si}.$$

Sea $\mathcal{A}_0 = \{U_{s1}, U_{s2}, \ldots, U_{sn}\}$, veamos que $U(\mathcal{A}_0)$ es el abierto buscado. Por definición, $U(\mathcal{A}_0) \in \mathscr{B}_Y$, además, tenemos que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=i}^{n} U_{sn} \subset f^{-1}(V)$$

por lo que

$$X \setminus f^{-1}(V) \subset X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0 \subset X \setminus f^{-1}(y).$$

Nótese que de esta última contención, tenemos que para cada $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0$, $f(x) \neq y$ y por tanto $y \notin f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0\right)$, por lo cual $y \in Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0\right) = U(\mathcal{A}_0)$. Por otro lado tenemos que

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V).$$

Por tanto, tenemos que $f^{-1}(Y \setminus V) \subset X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0$, luego $f\left(f^{-1}(Y \setminus V)\right) = Y \setminus V \subset f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0\right)$ con lo cual $Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{A}_0\right) = U(\mathcal{A}_0) \subset V$.

Por tanto $\mathscr{B}_Y$ es una base para Y, la cual también es numerable, lo cual establece el teorema. $\square$

Teorema 2.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. $\mathcal{D}$ es metrizable si y solo si es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es de inmediato pues todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.

$(\Leftarrow)$ Nótese que la función $p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ es una función continua que va de un espacio métrico compacto a un espacio de Hausdorff, así por el lema 2.5, $\mathcal{D}$ es metrizable. $\square$

Teorema 2.7. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es un continuo si y solo si $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como X es un continuo, este es en particular un espacio métrico compacto, se sigue por el teorema 2.6 que $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.

($\Leftarrow$) Puesto que X es un continuo este es un espacio métrico compacto y conexo. Notese que la función $p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva, entonces $p_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D}$ es compacto y conexo. □

3 Descomposiciones semi-continuas superiores

Como ya mencionamos anteriormente queremos usar las descomposiciones de espacios métricos para construir nuevos espacios métricos, o en este caso, continuos. No obstante, en algunos casos es inconveniente verificar la condición en el teorema 2.6 para verificar que el espacio de descomposición es un espacio de Hausdorff, y por tanto metrizable.

En esta sección, buscaremos una condición útil para verificar esto último pero que sea los suficientemente general para poder aplicarlos en muchas situaciones. Como veremos en el teorema 3.7, la siguiente definición da tal condición, en realidad, esta condición es necesaria y suficiente.

Definición 3.1. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X decimos que es semi-continua superior o usc (upper semi-continuous) si para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $U \in \mathscr{T}$ tal que $D \subset U$, existe $V \in \mathscr{T}$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.*

Observe que en la definición anterior no toma en cuenta a la topología de descomposición, es la propia partición que es *usc* por ella misma, sin embargo,cuando una descomposición sea *usc* diremos que es una *descomposición usc* teniendo en cuenta la topología de descomposición.

Llegados a este punto, nos dirigimos a demostrar los resultados expuestos en los teoremas 3.7 y 3.8, para simplificar algunas demostraciones sera de conveniencia la siguiente definición.

Definición 3.2. *Sea X es un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición, decimos que un conjunto $V \subset X$ es $\mathcal{D}$-saturado si se puede representar como la unión de una subcolección de $\mathcal{D}$.*

Proposición 3.3. (1) *Si $p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ es la proyección natural entonces para cualquier $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C})$ es $\mathcal{D}$-saturado.*

(2) *Si* $A \subset X$ *es un* $\mathcal{D}$*-saturado si y solo si* $A = p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(A))$.

(3) *Si* $U \subset X$ *es abierto y* $\mathcal{D}$*-saturado entonces* $p_{\mathcal{D}}(U)$ *es abierto en* $\mathcal{D}$.

Demostración. (1) Basta mostrar que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup \mathcal{C}$. Sea $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C})$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in \mathcal{C}$ por tanto $p_{\mathcal{D}}(x)$ es un elemento de $\mathcal{C}$ que contiene a x, con lo cual $x \in \bigcup \mathcal{C}$.

Sea ahora $y \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe un único elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C$, por tanto $p_{\mathcal{D}}(x) = C$ y así $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C})$.

(2) ($\Rightarrow$) Mostraremos solamente que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(A)) \subset A$. Sea $a \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(A))$, entonces $p_{\mathcal{D}}(a) \in p_{\mathcal{D}}(A)$, por lo que existe algún $b \in A = \bigcup \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ tal que $p_{\mathcal{D}}(b) = p_{\mathcal{D}}(a)$, por otro lado, también existe $A_b \in \mathcal{A}$ tal que $b \in A_b$, con lo cual $b \in p_{\mathcal{D}}(b) \cap A_b$. Por tanto $A_b = p_{\mathcal{D}}(b)$, con lo cual $a \in p_{\mathcal{D}}(b) = A_b \subset \bigcup \mathcal{A} = A$.

($\Leftarrow$) Nótese que para $A \subset X$, $p_{\mathcal{D}}(A) \subset \mathcal{D}$ por el inciso anterior tenemos que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(A))$ es un $\mathcal{D}$-saturado, así A lo es.

(3) Afirmamos que $\bigcup p_{\mathcal{D}}(U) = U$. Sea $x \in \bigcup p_{\mathcal{D}}(U)$, entonces existe $p_{\mathcal{D}}(y) \in p_{\mathcal{D}}(U)$ tal que $x \in p_{\mathcal{D}}(y)$, de esto último se sigue que para algún $u \in U$, $p_{\mathcal{D}}(u) = p_{\mathcal{D}}(y)$, pero como $U = \bigcup \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$, entonces existe V elemento de $\mathcal{U}$ tal que $u \in V$, entonces $u \in p_{\mathcal{D}}(u) \cap V$ y por tanto $p_{\mathcal{D}}(u) = V = p_{\mathcal{D}}(y)$ con lo cual $x \in V \subset \bigcup \mathcal{U} = U$.

Sea ahora $z \in U = \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe un único W elemento de $\mathcal{U}$ tal que $z \in W \subset \bigcup \mathcal{U} = U$, por lo que $p_{\mathcal{D}}(z) = W$ y por tanto $z \in \bigcup p_{\mathcal{D}}(U)$. $\square$

Proposición 3.4. *Sean* X *un espacio topológico y* $\mathcal{D}$ *es una descomposición. Si* C *un subconjunto cerrado de* X *entonces* $p_{\mathcal{D}}(C)$ *es cerrado en* $\mathcal{D}$ *si y solo si* $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))$ *es abierto en* X.

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $p_{\mathcal{D}}$ es una función continua y $\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)$ es abierto en $\mathcal{D}$, entonces $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))$ es abierto en X.

($\Leftarrow$) Por (1) de 3.3 se sigue que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))$ es un $\mathcal{D}$-saturado y por hipótesis es abierto, entonces por (3) de 3.3, $p_{\mathcal{D}}\left(p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))\right) = \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)$ es abierto en $\mathcal{D}$, y así $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado. $\square$

Continuamos dando unas caracterizaciones de las descomposiciones *usc* en la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sean X es un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición. Entonces los siguientes enunciados* (1)-(3) *son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{D}$ es una descomposición usc.*

(2) *$p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ es una función cerrada.*

(3) *Si D es cualquier elemento de la partición $\mathcal{D}$ y U es cualquier subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, entonces existe un subconjunto abierto V de X el cual es $\mathcal{D}$-saturado tal que $D \subset V \subset U$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea C un subconjunto cerrado de X para exhibir que $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$ por 3.4 basta mostrar que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))$ es abierto en X. Sea $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C))$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)$, afirmamos que $p_{\mathcal{D}}(x) \subset X \setminus C$, supongamos por el contrario que existe un elemento $y \in p_{\mathcal{D}}(x)$, pero que $y \notin X \setminus C$, entonces $y \in p_{\mathcal{D}}(x) \cap C$, nótese que $p_{\mathcal{D}}(y) \cap p_{\mathcal{D}}(x) \neq \emptyset$, pues $y \in p_{\mathcal{D}}(x) \cap p_{\mathcal{D}}(y)$, por lo que necesariamente se tiene que cumplir que $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(y)$, como $y \in C$ y es tal que $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(y)$, entonces tenemos que $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(C)$, lo cual no puede ser posible. Por tanto $p_{\mathcal{D}}(x) \subset X \setminus C$ donde $X \setminus C$ es un conjunto abierto de X, como la descomposición $\mathcal{D}$ es *usc* se sigue por 3.1 que existe un conjunto abierto V de X tal que $p_{\mathcal{D}}(x) \subset V$, de tal manera que si D' es otro elemento de $\mathcal{D}$ tal que $D' \cap V \neq \emptyset$, entonces $D' \subset X \setminus C$. Podemos notar que de esto último que para cada $u \in V$ se cumple que $p_{\mathcal{D}}(u) \cap V \neq \emptyset$, pues $u \in p_{\mathcal{D}}(u) \cap V$. Por lo que $p_{\mathcal{D}}(u) \subset X \setminus C$.

Por otro lado, tenemos que $x \in p_{\mathcal{D}}(x) \subset V$, así $x \in V$, además afirmamos que para cada $x \in V$ no puede ocurrir que $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(C)$,en efecto, supongamos por el contrario que existe un elemento $x_0 \in V$ tal que $p_{\mathcal{D}}(x_0) \in p_{\mathcal{D}}(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(c)$ con lo cual $c \in p_{\mathcal{D}}(x) \cap C$ y así $p_{\mathcal{D}}(x) \not\subset X \setminus C$, por la última observación del párrafo anterior tenemos que $x_0 \notin V$, lo cual no puede ser posible. Esto ultimo nos permite mostrar que $p_{\mathcal{D}}(V) \subset \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)$, pues para cada $p_{\mathcal{D}}(w)$ elemento de $p_{\mathcal{D}}(V)$ existe $v \in V$ tal que $p_{\mathcal{D}}(w) = p_{\mathcal{D}}(v)$, por lo anterior $p_{\mathcal{D}}(w) \in \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)$, pues $p_{\mathcal{D}}(v) \notin p_{\mathcal{D}}(C)$, de esto podemos concluir dada la sobreyectividad de $p_{\mathcal{D}}$ que

$$p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(V)\right) = V \subset p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)\right)$$

En resumen, para $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)\right)$ hemos exhibido la existencia de un conjunto abierto V de X tal que

$$x \in V \subset p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(C)\right).$$

Se sigue por 3.4 que $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$, así, $p_{\mathcal{D}}$ es una función cerrada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Asumamos (2), sea D un elemento de $\mathcal{D}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, dada nuestra suposición $p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$, por la continuidad de $p_{\mathcal{D}}$, el conjunto $V = p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)\right)$ es abierto en X. Mostraremos que V es el conjunto buscado, nótese que como $\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(X \setminus U) \subset \mathcal{D}$ se sigue por (1) de 3.3 que V es $\mathcal{D}$-saturado.

Afirmamos ahora que $D \notin p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)$, supongamos lo contrario, entonces existe $x \in X \setminus U$ tal que $p_{\mathcal{D}}(x) = D$, por lo que $x \in D \cap (X \setminus U)$ y por tanto $D \not\subset U$ lo cual no puede ser posible. De esto último se sigue que $p_{\mathcal{D}}(D) = \{D\} \subset \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)$, podemos notar que D es un $\mathcal{D}$-saturado, luego

$$p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(D)\right) = D \subset p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)\right) = V.$$

Sea ahora $x \in V$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in \mathcal{D} \setminus p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)$, afirmamos que $p_{\mathcal{D}}(x) \subset U$, supongamos por el contrario que existe $y \in p_{\mathcal{D}}(x)$, pero que $y \notin U$, entonces $y \in p_{\mathcal{D}}(x) \cap (X \setminus U)$, nótese que $p_{\mathcal{D}}(x) \cap p_{\mathcal{D}}(y) \neq \emptyset$ pues $y \in p_{\mathcal{D}}(x) \cap p_{\mathcal{D}}(y)$, luego se tiene que $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(y)$, es decir, y es un elemento de $X \setminus U$ tal que $p_{\mathcal{D}}(y) = p_{\mathcal{D}}(x)$ y por tanto $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(X \setminus U)$ lo cual no puede ser posible, por tanto $p_{\mathcal{D}}(x) \subset U$ y así $x \in p_{\mathcal{D}}(x) \subset U$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea D un elemento de $\mathcal{D}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $D \subset U$, dada nuestra suposición existe un subconjunto V el cual es abierto y $\mathcal{D}$-saturado tal que $D \subset V \subset U$.

Por último, sea A otro elemento de $\mathcal{D}$ tal que $A \cap V \neq \emptyset$, mostraremos que $A \subset U$, así que sea $a \in A$, como por lo menos existe $b \in A \cap V$ donde $V = \bigcup \mathcal{V}$ con $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$, entonces existe un elemento B de $\mathcal{V}$ tal que $b \in B$, se sigue que $A = B$, pues $b \in A \cap B$, por otro lado, notemos que $p_{\mathcal{D}}(a) = p_{\mathcal{D}}(b)$, es decir, tanto como a y b están en el mismo elemento de la partición, en este caso $a, b \in B$, en particular, $a \in B \subset \bigcup \mathcal{V} = V \subset U$. $\square$

Lema 3.6. *Si X es un espacio topológico T_1 y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Sea D un elemento de la partición $\mathcal{D}$, tomemos a x_0 un elemento fijo pero arbitrario de D, notemos que $p_{\mathcal{D}}(x_0) = D$, por otro lado como el espacio topológico X es T_1, el conjunto $\{x_0\}$ es cerrado, se sigue por (2) de 3.5 que $p_{\mathcal{D}}(\{x_0\})$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$. Afirmamos que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(\{x_0\})) = D$, sea $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(\{x_0\}))$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(\{x_0\})$, se sigue que existe $y \in \{x_0\}$ tal que $p_{\mathcal{D}}(y) = p_{\mathcal{D}}(x)$, es decir, $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(x_0)$, de aquí que $x \in p_{\mathcal{D}}(x_0) = D$. Sea ahora $y \in D$, como $x_0 \in D$, notemos que $p_{\mathcal{D}}(x_0) = p_{\mathcal{D}}(y) = D$ con $x_0 \in \{x_0\}$, por tanto $y \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(\{x_0\}))$.

Puesto que la función $p_{\mathcal{D}}$ es continua, se sigue que $p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(\{x_0\}))$ es cerrado en X, es decir, D es cerrado en X. $\square$

Teorema 3.7. *Sean X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es metrizable.*

Demostración. Por el teorema 2.6 basta mostrar que $\mathcal{D}$ es de Hausdorff. Sean D_1 y D_2 elementos de $\mathcal{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$, como la descomposición $\mathcal{D}$ es *usc*, se sigue por el lema 3.6 que D_i para $i = 1, 2$ son subconjuntos cerrados de X. Ahora, como todo espacio métrico es normal, entonces existen $U_i \subset X$ abiertos tales que $D_i \subset U_i$ para $i = 1, 2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Por otro lado, como $\mathcal{D}$ es *usc* se sigue por la proposición 3.5(3) que existen conjuntos abiertos V_1 donde V_i es abierto en X los cuales son $\mathcal{D}$-saturados tales que $D_i \subset V_i \subset U_i$ para $i = 1, 2$. Hacemos las siguientes afirmaciones:

(a) $D_i \in p_{\mathcal{D}}(V_i)$ para cada $i = 1, 2$.

(b) $p_{\mathcal{D}}(V_i)$ son abiertos en $\mathcal{D}$ para cada $i = 1, 2$.

(c) $p_{\mathcal{D}}(V_1) \cap p_{\mathcal{D}}(V_2) = \emptyset$.

Probaremos para $i = 1$, sea $x \in D_1 \subset V_1 = p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(V_1))$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(V_1)$, por lo que existe $y \in V$ tal que $p_{\mathcal{D}}(y) = p_{\mathcal{D}}(x)$, pero como $x \in D_1 \cap p_{\mathcal{D}}(x)$, entonces $D = p_{\mathcal{D}}(x)$. Por lo tanto, $p_{\mathcal{D}}(y) = D$ donde $y \in V_1$, así, $D_1 \in p_{\mathcal{D}}(V_1)$ lo cual establece (a).

Ahora, como para $i = 1, 2$, V_i es abierto y $\mathcal{D}$-saturado se sigue por (3) de 3.3 que $p_{\mathcal{D}}(V_i)$ para cada $i = 1, 2$ son abiertos en $\mathcal{D}$, esto establece (b).

Por último notemos que

$$\emptyset \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

por tanto, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, se sigue por (2) de 3.3 que $V_i = p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(V_i))$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}}(V_1 \cap V_2) &= p_{\mathcal{D}}\left(p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(V_1)) \cap p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(V_2))\right) \\ &= p_{\mathcal{D}}\left(p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(V_1) \cap p_{\mathcal{D}}(V_2))\right) \\ &= p_{\mathcal{D}}(V_1) \cap p_{\mathcal{D}}(V_2). \end{aligned}$$

Como $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces $p_{\mathcal{D}}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$, de lo anterior concluimos (c).

En resumen, para cualesquiera $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ con $D_1 \neq D_2$ mostramos la existencia de dos conjuntos abiertos y ajenos que cumplen (a), por tanto, hemos probado que el espacio $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff. □

Teorema 3.8. *Si X es un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición usc, entonces $\mathcal{D}$ es un continuo.*

Demostración. Como X es compacto, se sigue por el teorema 3.7 que $\mathcal{D}$ es metrizable. Por otro lado, como $p_{\mathcal{D}}$ es continua y suprayectiva, entonces $p_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D}$ es compacto y conexo. □

4 Continuos a partir de descomposiciones

Ahora, podemos dar algunos ejemplos de cómo las descomposiciones *usc* pueden dar como resultado continuos interesantes. Los ejemplos 4.1-4.3 son muy específicos. Los ejemplos del 4.4 en adelante son más generales.

Ejemplo 4.1 (Espacio n-proyectivo)**.** *Para cada $n = 1, 2, \ldots,$ sea $\mathscr{D}$ la partición de S^n (véase 1.15) dada por*

$$\mathscr{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}.$$

Es fácil ver que $\mathscr{D}$ es *usc*. Se sigue por 3.8 que el espacio de descomposición denotado por P^n es un continuo, llamado espacio $n-$ proyectivo. Observamos que aunque P^1 es una $1-esfera$, los espacios proyectivos de dimensiones superiores tienen muchas propiedades sorprendentes, especialmente por los simples que son. Por ejemplo, P^2 no contiene una $2-esfera$, además tiene la propiedad de punto fijo, algunas curvas cerradas simples en P^2 no lo separan y P^2 no puede encajarse en $\mathbb{R}^3$, pero sí en $\mathbb{R}^4$. Por otro lado, todos los continuos P^n son razonablemente buenos en el sentido de que cada P^n es una $n-$ *variedad.*

Ejemplo 4.2 (La banda de Moebius)**.** *Sea $\mathscr{D}$ la partición del cuadrado sólido $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ cuyos elementos son*

$$\{(x,0),(1-x,1)\} \textit{ para } 0 \leq x \leq 1, \quad \{(x,y)\} \textit{ para } 0 < y < 1$$

Es fácil ver que $\mathscr{D}$ es *usc*. Se de 3.8 que el espacio de descomposición es continuo. Se le llama banda de Moebius y puede considerarse como un ejemplo de superficie unilateral en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.3 (El $M-continuo$)**.** *Sea X un sen $\left(\frac{1}{x}\right)-continuo$ y sea $\mathscr{D}$ una partición de X cuyos elementos no degenerados son*

$$\{(0,y),(0,1-y)\} \textit{ para cada } y \textit{ tal que } 0 \leq y < \frac{1}{2}.$$

Se deduce fácilmente que $\mathscr{D}$ es *usc*. Así que el espacio de descomposición es continuo según 3.8, el cual se le llama $M-continuo$.

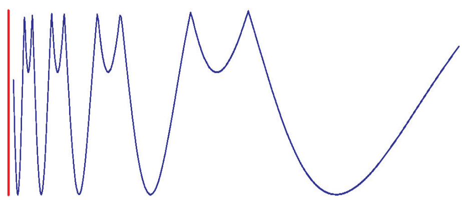


Figura 5: El continuo M

Observemos la siguiente construcción general, pero sencilla que será de gran interés.

Ejemplo 4.4 (El espacio X/A)**.** *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado no vacío de X. Sea $\mathcal{D}_A$ una partición de X dada por*

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{x\} : x \in X - A\}.$$

Nótese que $\mathcal{D}_A$ es *usc*. Llamaremos al espacio de descomposición como X/A. Intuitivamente, pensamos en X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto. Si X es un espacio métrico compacto o un continuo, también lo es X/A por 3.7 y 3.8

Ejemplo 4.5 (El cono topológico)**.** *Sea $Y = X \times [0,1]$ donde X es un espacio topológico y Y tiene la topología producto. Sea $A = \{(x,1) : x \in X\}$. Entonces el espacio de descomposición Y/X (véase 4.4) es llamado el* cono topológico *sobre X y este se denota por $TC(X)$. El* vértice *de $TC(X)$ es el punto A, y la base de $TC(X)$ es el conjunto $p_{\mathcal{D}}(\{(x,0) : x \in X\})$, donde $p_{\mathcal{D}}$ esta definida como (**??**) de 2.1, aunque frecuentemente nos referimos a X como la base de $TC(X)$. Podemos mostrar usando $p_{\mathcal{D}}$ que $TC(X)$ es (arco) conexo. Por tanto, si X es un espacio métrico compacto, $TC(X)$ es un continuo por 4.4. En el caso cuando X es un espacio métrico compacto, $TC(X)$ y el llamado* cono geométrico *son homeomorfos, por tanto, en este caso, nos referiremos a $TC(X)$ como el cono sobre X si no hay confusión. Los conos nos proporcionan ejemplos y contraejemplos en la teoría de continuos, también nos ayudan a pensar en nuevas construcciones.*

Ejemplo 4.6 (La suspensión topológica)**.** *Empezamos con el cono topológico $TC(X)$ con base B, la descomposición del espacio $TC(B)/B$ (véase 4.4) es llama da la* suspensión topológica *sobre X la cual se denota por $TS(X)$. Cuando X es un espacio métrico compacto, $TS(X)$ es un continuo por 4.4 y 4.5. En este caso, puesto que $TS(X)$ tiene una descomposición geométrica familiar, llamaremos a $TS(X)$ como la suspensión sobre X.*

La construcción presentada en 4.9 es muy general y es una de las formas más importante para obtener nuevos espacios a partir de otros, antes de presentarla daremos la siguiente:

Definición 4.7. *Sean $(X_1, \mathscr{T}_1)$ y $(X_2, \mathscr{T}_2)$ espacios topológicos tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. La* unión libre *de X_1 y X_2 es el espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ donde $X = X_1 \cup X_2$ y $\mathscr{T}$ está definida por la condición:*

$$U \in \mathscr{T} \text{ si y solo si } U \cap X_i \in \mathscr{T}_i \text{ para cada } i = 1, 2.$$

La unión libre de X_1 y X_2 se denota por $X_1 + X_2$.

Observación 4.8. *Un subconjunto $C \subset X_1 + X_2$ es cerrado si y solo si $C \cap X_1$ es cerrado en X_1 y $C \cap X_2$ es cerrado en X_2*

Definición 4.9. *Sean* $(X_1, \mathscr{T}_1)$ *y* $(X_2, \mathscr{T}_2)$ *espacios topológicos tales que* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, *A un subconjunto cerrado no vacío de* X_1, $f : A \to X_2$ *una función continua de A a* X_2. *Sea $\mathcal{D}$ la partición de* $X_1 + X_2$ *(véase 4.7) dada por:*

$$\mathcal{D} = \{\{y\} \cup f^{-1}(y) : \, y \in f(A)\,\} \cup \{\{x\} : \, x \in X_1 + X_2 - [A \cup f(A)]\,\}$$

Intuitivamente, X_1 y X_2 están *cosidos* a lo largo de A y $f(A)$, identificando cada $a \in A$ con su imagen $f(a) \in X_2$. Podemos notar que el espacio expuesto en 4.4 puede considerarse como un espacio adjunto.

Observación 4.10. *Si* $(X, \mathscr{T})$ *y* $(Y, \mathscr{T}')$ *son espacios topológicos como en 4.9,*

(1) si x es un elemento de $X+Y$, entonces x pertenece exactamente a uno y solo uno de los siguientes conjuntos $X \setminus A$, A, $f(A)$ o $Y \setminus f(A)$, ya que cada uno de esos conjuntos son ajenos entre si.

(2) Para cada $a \in A$, se cumple que $p_{\mathcal{D}}(a) = p_{\mathcal{D}}(f(a))$, pues para $a \in A$, podemos notar que $f(a) \in f(A)$, sea $b = f(a)$ como $a \in f^{-1}(b)$ tenemos que

$$p_{\mathcal{D}}(a) = \{b\} \cup f^{-1}(b)$$

pero para $b \in f(A)$, tenemos que

$$p_{\mathcal{D}}(b) = \{b\} \cup f^{-1}(b)$$

Por tanto, $p_{\mathcal{D}}(a) = p_{\mathcal{D}}(f(a))$ y así $p_{\mathcal{D}}(X) \cap p_{\mathcal{D}}(Y) \neq \emptyset$.

(3) Un conjunto $\mathcal{C} \subset X \cup_f Y$ es cerrado si y solo si $p^{-1}(\mathcal{C})$ y $q^{-1}(\mathcal{C})$ son cerrados en X e Y respectivamente, donde $p = p_{\mathcal{D}} \circ i_X : X \to X \cup_f Y$ y $q = p_{\mathcal{D}} \circ i_Y : Y \to X \cup_f Y$.

Proposición 4.11. *Sean* $(X, \mathscr{T})$ *y* $(Y, \mathscr{T}')$ *espacios topológicos tales que* $X \cap Y = \emptyset$, *A un subconjunto cerrado no vacío de X y $f : A \to Y$ una función continua. Sea $p_{\mathcal{D}} : X + Y \to X \cup_f Y$ la función proyección natural como en* (**??**) *de 2.1. Entonces*

(a) Para cada $C \subset X + Y$ se cumple que

$$p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right) = C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\left(f(C \cap A)\right) \cup f^{-1}(C \cap Y)$$

(b) Si $C \subset X + Y$ es tal que $C \cap X$ es cerrado en X, entonces $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ si y solo si $(C \cap Y) \cup f\,(C \cap A)$ es cerrado en Y.

(c) Si f toma subconjuntos cerrados de A sobre subconjuntos cerrados en Y, entonces $X \cup_f Y$ es una descomposición usc de $X + Y$.

Demostración. *(a)* Sea $C \subset X + Y$,

($\subset$) Para $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}\,(p_{\mathcal{D}}(C))$, entonces $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(C)$, con lo cual $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(c)$ para algún $c \in C$, notemos que $c \in p_{\mathcal{D}}(x)$, por (1) de 4.10 tenemos los siguientes casos:

(i) Si $x \in X \setminus A$ tenemos que $c \in p_{\mathcal{D}}(x) = \{x\}$, con lo cual $x = c \in C$.

(ii) Si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A) \subset Y$. Sea $y = f(x)$, tenemos que $c \in p_{\mathcal{D}}(x) = \{y\} \cup f^{-1}(y)$, por lo que $c \in \{y\}$ o $c \in f^{-1}(y)$. Si $c \in \{y\}$, entonces $f(x) = c \in C$, con lo cual $f(x) \in C \cap Y$, así, $x \in f^{-1}(C \cap Y)$, pues $x \in A$ y es tal que $f(x) \in C \cap Y$. Si $c \in f^{-1}(y) = \{a \in A :\ f(a) = y\}$, entonces $c \in C \cap A$ y es tal que $f(c) = f(x)$. Por lo que $x \in f^{-1}\,(f(C \cap A))$.

(iii) Si $x \in f(A)$, entonces tenemos que $c \in p_{\mathcal{D}}(x) = \{x\} \cup f^{-1}(x)$. Si $c \in \{x\}$, entonces $x = c \in C$. Si $c \in f^{-1}(x) = \{a \in A :\ f(a) = x\}$, entonces $c \in A \cap C$ y es tal que $f(c) = x$. Por tanto $x \in f^{-1}(C \cap A)$.

(iv) Si $x \in Y \setminus f(A)$, tenemos que $c \in p_{\mathcal{D}}(x) = \{x\}$, con lo cual $x = c \in C$.

En cualquiera de los anteriores casos, tenemos que

$$x \in C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\,(f(C \cap A)) \cup f^{-1}(C \cap Y).$$

($\supset$) Sea $x \in C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\,(f(C \cap A)) \cup f^{-1}(C \cap Y)$, tenemos los siguientes casos:

(I) Si $x \in f^{-1}(C \cap Y)$, entonces $f(x) \in C \cap Y$, sea $y = f(x)$, notemos que $p_{\mathcal{D}}(y) = p_{\mathcal{D}}(x)$ por () de (), si tomamos a $c = y \in C$, tenemos que $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(C)$ y por tanto $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}\,(p_{\mathcal{D}}(C))$.

(II) Si $x \in f^{-1}\,(f(C \cap A)) = \{a \in A :\ f(a) \in f(A \cap C)\}$, entonces $x \in A$ y es tal que $f(x) \in f(C \cap A)$, por lo que existe $c \in C \cap A$ tal que $f(x) = f(c)$, notemos que $p_{\mathcal{D}}(c) = \{f(c)\} \cup f^{-1}(f(c))$,

pero además $p_{\mathcal{D}}(x) = p_{\mathcal{D}}(f(x)) = p_{\mathcal{D}}(f(c)) = p_{\mathcal{D}}(c)$ con $c \in C$, por tanto $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$.

(III) Si $x \in f(C \cap A)$, entonces existe $c \in C \cap A$ tal que $f(c) = x$, notemos que $x \in p_{\mathcal{D}}(f(c)) = p_{\mathcal{D}}(c)$, se sigue por () de () que $p_{\mathcal{D}}(c) = p_{\mathcal{D}}(x)$ con $c \in C$, por tanto $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$.

(IV) Para $x \in C$, notemos que $p_{\mathcal{D}}(x) \in p_{\mathcal{D}}(C)$ y por tanto $x \in p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$.

En cualquiera de los anteriores casos, $x \in p_{\mathcal{D}}(p_{\mathcal{D}}(C))$.

(b) $(\Rightarrow)$ Supongamos que $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$, como $p_{\mathcal{D}}$ es una función continua, $p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$ es cerrado en $X + Y$, por 4.8 se sigue que $q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(c))$ es cerrado en Y, donde q es como en (3) de 4.10. Afirmamos que $q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) = (C \cap Y) \cup f(C \cap A)$, nótese que por el inciso anterior de esta proposición tenemos que:

$$\begin{aligned}
q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) &= (p_{\mathcal{D}} \circ i_Y)^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) \\
&= i_Y^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))\right) \\
&= Y \cap p_{\mathcal{D}}^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) \\
&= Y \cap \left(C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}(f(C \cap A)) \cup f^{-1}(C \cap Y)\right) \\
&= (C \cap Y) \cup (f(C \cap A) \cap Y) \cup \left(f^{-1}(f(C \cap A)) \cap Y\right) \\
&\quad \cup \left(f^{-1}(C \cap Y) \cap Y\right)
\end{aligned}$$

pero $f^{-1}(f(C \cap A)) \cap Y = \emptyset = f^{-1}(C \cap Y) \cap Y$, por lo tanto

$$q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) = (C \cap Y) \cup f(C \cap A)$$

$(\Leftarrow)$ Para mostrar que $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$, basta mostrar que $p^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$ y $q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$ son cerrados en X e Y respectivamente donde p y q son como en (3) de 4.10. Ya hemos probado que

$$q^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) = (C \cap Y) \cup f(C \cap A)$$

y dada nuestra suposición, este es cerrado en Y, por lo que solo resta mostrar que $p^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C))$ es cerrado en X, veamos que

$$p^{-1}(p_{\mathcal{D}}(C)) = (C \cap X) \cup f^{-1}(f(C \cap A)) \cup f^{-1}(C \cap Y).$$

Veamos que por el inciso anterior de esta proposición tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& p^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right) \\
& = \left(p_{\mathcal{D}} \circ i_X\right)^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right) \\
& = i_X^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right)\right) \\
& = X \cap p_{\mathcal{D}}^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right) \\
& = X \cap \left(C \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}\left(f(C \cap A)\right) \cup f^{-1}(C \cap Y)\right) \\
& = (C \cap X) \cup (f(C \cap A) \cap X) \cup (f^{-1}(f(C \cap A)) \cap X) \\
& \quad \cup (f^{-1}(C \cap Y) \cap X)
\end{aligned}
$$

pero $f(C \cap A) \cap X = \emptyset$, por tanto

$$
p^{-1}\left(p_{\mathcal{D}}(C)\right) = (C \cap X) \cup (f^{-1}(f(C \cap A))) \cup (f^{-1}(C \cap Y)). \quad (3)
$$

Como $(C \cap Y) \cup f(C \cap A)$ es cerrado en Y y f es una función continua tenemos que

$$
f^{-1}\left(f(C \cap A) \cup (C \cap Y)\right) = f^{-1}(f(C \cap A)) \cup f^{-1}(C \cap Y) \quad (4)
$$

es cerrado en A donde este ultimo es un subespacio cerrado de X, se sigue que el conjunto descrito en (4) es cerrado en X. Por tanto el conjunto descrito en (3) es cerrado en X.

(c) Por (2) de 3.5 basta mostrar que la función $p_{\mathcal{D}} : X+Y \to X \cup_f Y$ definida como en (**??**) de 2.1 es cerrada, así que sea $C \subset X+Y$ un subconjunto cerrado, como X es un subespacio cerrado del espacio $X+Y$, el conjunto $C \cap X$ es cerrado en X. Para exhibir que $p_{\mathcal{D}}(C)$ es cerrado en $X \cup_f Y$, por el inciso (*b*) basta mostrar que el conjunto $(C \cap Y) \cup f(C \cap A)$ es cerrado en Y.

Nótese primeramente que Y es un subespacio cerrado de $X+Y$, por lo que $C \cap Y$ es cerrado en Y, resta mostrar que el conjunto $f(C \cap A)$ es cerrado en Y, obsérvese que A es un subespacio cerrado de X, entonces $C \cap A$ es cerrado en A, como f es una función cerrada, $f(C \cap A)$ es cerrado en Y.

□

Teorema 4.12. *Si (X, d) y (Y, d') son espacios métricos compactos no vacíos tales que $X \cap Y = \emptyset$, entonces $X \cup_f Y$ es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Mostraremos primeramente que el espacio $(X + Y, \mathscr{T})$ como en 4.7 es un espacio compacto. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta de $X + Y$, como $X, Y \subset X + Y$, entonces $\{U_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta para X e Y respectivamente, por tanto existen $U_1, U_2, \dots, U_n$ y $U_1', U_2, \dots, U_m'$ tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i'$. Nótese que la familia $\{U_1, U_2, \dots, U_n, U_1', U_2, \dots, U_m'\}$ es una cubierta finita de $X + Y$, por tanto $X + Y$ es compacto.

Veamos ahora que la descomposición $\mathcal{D}$ es semi-continua superior, por (c) de 4.11 basta mostrar que la función f es cerrada, sea $B \subset A$ cerrado en A, como A es cerrado en X, este es compacto, así B es compacto, y por tanto $f(B)$ es compacto pues f es continua. Por tanto, $f(B)$ es cerrado en Y. Se sigue por 3.7 que $X \cup_f Y$ es un espacio métrico compacto. □

Teorema 4.13. *Si $(X, \mathscr{T})$ y $(Y, \mathscr{T}')$ son continuos disjuntos, entonces $X \cup_f Y$ es un continuo.*

Demostración. Como $(X, \mathscr{T})$ y $(Y, \mathscr{T}')$ son continuos, estos en particular son espacios métricos compactos los cuales son disjuntos, se sigue por 4.12 que $X \cup_f Y$ es un espacio métrico compacto. Resta mostrar que el espacio $X \cup_f Y$ es un espacio conexo.

Como la función proyección natural $p_{\mathcal{D}} : X + Y \to X \cup_f Y$ (como en (**??**) de 2.1) es continua, $p_{\mathcal{D}}(X)$ y $p_{\mathcal{D}}(Y)$ son conexos, afirmamos que;

(a) $p_{\mathcal{D}}(X) \cup p_{\mathcal{D}}(Y) = X \cup_f Y$

(b) $p_{\mathcal{D}}(X) \cup p_{\mathcal{D}}(Y)$ es conexo.

Como $p_{\mathcal{D}}(X) \cup p_{\mathcal{D}}(Y) = p_{\mathcal{D}}(X + Y) = X \cup_f Y$ pues $p_{\mathcal{D}}$ es suprayectiva, lo cual prueba (a). Para (b), por [2, `Proposicion 8.12`] basta mostrar que $p_{\mathcal{D}}(X) \cap p_{\mathcal{D}}(Y) \neq \emptyset$, lo cual es de inmediato por *(2) de 4.10, lo cual prueba* (b)*. Por tanto,* $X \cup_f Y$ *es un continuo.* □

Definición 4.14. *Sean $(X, \mathscr{T})$ y $(Y, \mathscr{T}')$ espacios topológicos. Una función suprayectiva $f : X \to Y$ es llamada una* función cociente *(o* función identificación*) siempre que $\mathscr{T}'$ sea la topología más grande de tal manera que f sea una función continua.*

Proposición 4.15. *Sean $(X, \mathscr{T})$ y $(Y, \mathscr{T}')$ espacios topológicos, si $f : X \to Y$ es una función cerrada (abierta) y suprayectiva, entonces f es una función cociente.*

Demostración. Sea $\mathscr{T}_f'$ otra topología para Y que hace de f una función continua, mostraremos que $\mathscr{T}_f' \subset \mathscr{T}'$. Sea $V \in \mathscr{T}_f'$, entonces $Y \setminus V$ es cerrado en Y (respecto a $\mathscr{T}_f'$), como f es continua (respecto a $\mathscr{T}_f'$), $f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado en X (respecto a $\mathscr{T}$), pero como f es cerrada, tenemos $f\left(f^{-1}(Y \setminus V)\right) = Y \setminus X$ es cerrado en Y (respecto a $\mathscr{T}'$), por lo que $V \in \mathscr{T}'$. □

Lema 4.16 (de transgresión)**.** *Sean $(X_i, \mathscr{T}_i)$ espacios topológicos para $i = 1, 2, 3$, $f : X_1 \to X_2$ una función cociente, y $g : X_1 \to X_3$ una función continua; entonces, si g es constante en cada fibra $f^{-1}(z)$ para cada $z \in X_2$ (es decir, $g \circ f^{-1}$ tiene un solo valor), $g \circ f^{-1}$ es una función continua.*

Demostración. Definamos una función $h : X_2 \to X_3$ como

$$\begin{aligned} h(y) = &\text{ al único elemento que pertenece} \\ &\text{al conjunto } \ g(f^{-1}(y)), \ \forall y \in X_2. \end{aligned}$$

h está bien definida pues para cada $y \in X_2$, $g(f^{-1}(y))$ es un subconjunto no vacío, pues como $y \in X_2 = f(X_1)$, entonces existe por lo menos un $x' \in X_1$ tal que $f(x') = y$ y por tanto $x \in f^{-1}(y)$ y el cual también es unitario de X_3, denotamos por $h(y)$ a ese punto. Afirmamos ahora que para cada $x \in X_1$, $(h \circ f)(x) = g(x)$, sea $x \in X_1$, nótese que $f(x) \in X_2$, sea $y = f(x)$, aplicando h a y tenemos que:

$$h(y) = \text{al único elemento que pertenece al conjunto } g(f^{-1}(y))$$

nótese que $g(x) \in g(f^{-1}(y))$, pues $x \in f^{-1}(y)$, por tanto $h(y) = g(x)$, es decir, $h(f(x)) = (h \circ f)(x) = g(x)$, esto muestra que $h \circ f = g \quad (*)$, de esto se deduce que $h = g \circ f^{-1}$.

Sea $\mathscr{T}_f = \{V \subset X_2 : f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_1\}$, la cual es una topología para X_2 que hace de f una función continua, pero como f es una función cociente, $\mathscr{T}_f \subset \mathscr{T}_2$, pues $\mathscr{T}_2$ es la topología más grande para la cual f es continua (más aún $\mathscr{T}_f = \mathscr{T}_2$).

Veamos por ultimo que $g \circ f^{-1} : X_2 \to X_3$ es una función continua, sea $W \subset X_3$ un conjunto abierto de X_3 (respecto a $\mathscr{T}_3$), como g es una función continua, $g^{-1}(W)$ es abierto en X_1 (respecto a $\mathscr{T}_1$). Notemos que $h^{-1}(W) \subset X_2$ y es tal que $f^{-1}(h^{-1}(W))$ es abierto en X_1, pues por $(*)$, tenemos que $g^{-1}(W) = (h \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(h^{-1}(W))$, por tanto $h^{-1}(W) \in \mathscr{T}_f \subset \mathscr{T}_2$, así $(g \circ f^{-1})^{-1}(W)$ es abierto en X_2. □

Proposición 4.17. *Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico compacto, $(Y, \mathscr{T}')$ un espacio topológico de Hausdorff, si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por [2, `Proposición 3.19`] basta mostrar que f es una función cerrada, sea A un subconjunto cerrado de X, entonces A es compacto, como f es continua, $f(A)$ es un subconjunto compacto de Y el cual es un espacio de Hausdorff, por tanto, $f(A)$ es cerrado en Y. □

El siguiente teorema muestra como obtener todas las descomposiciones de un espacio métrico compacto dado. Simultáneamente, este proporciona una manera para obtener descomposiciones *usc* específicas.

Teorema 4.18. *Sean (X, d), (Y, d') espacios métricos compactos, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, entonces, si $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X la cual es homeomorfa a Y.*

Recíprocamente, cualquier descomposición usc del espacio X es un espacio métrico compacto el cual es la imagen de una función continua.

Demostración. Supongamos que la descomposición $\mathcal{D}_f$ de X no es *usc*, entonces existe un elemento de la descomposición $\mathcal{D}_f$, digamos $f^{-1}(y_0) \in \mathcal{D}_f$ y un abierto U en X con $f^{-1}(y_0) \subset U$ tal que para cualquier abierto V en X con $f^{-1}(y_0) \subset V$, existe $f^{-1}(y) \in \mathcal{D}_f$ tal que $f^{-1}(y) \cap V \neq \emptyset$, pero que $f^{-1}(y) \not\subset U$.

Sea para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$N_d\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right) = \left\{x \in X : d(x, f^{-1}(y_0)) < \frac{1}{n}\right\}$$

el cual es un abierto en X y es tal que $f^{-1}(y_0) \subset N_d\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f^{-1}(y_n) \in \mathcal{D}_f$ tal que $f^{-1}(y_n) \cap$

$N_d\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(y_n) \not\subset U$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen

$$p_n \in f^{-1}(y_n) \cap N_d\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right), \quad q_n \in f^{-1}(y_n) \text{ y } q_n \in X - U$$

observamos primeramente que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(p_n) = y_n = f(q_n)$.

Ahora, por un lado tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in N_d\left(\frac{1}{n}, f^{-1}(y_0)\right)$ por lo que $d(p_n, f^{-1}(y_0)) < \frac{1}{n}$, como $f^{-1}(y_0)$ es cerrado en X (y en consecuencia este también es compacto), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in f^{-1}(y_0)$ tal que

$$d(p_n, x_n) = d(p_n, f^{-1}(y_0)) < \frac{1}{n}$$

notese que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta contenida en $f^{-1}(y_0)$, además, esta sucesión es de Cauchy, pues sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \varepsilon$, sean $m, n \geq N$, nótese que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(p_n, x_n) + d(p_n, x_m) \\ &\leq d(p_n, x_n) + d(p_n, p_m) + d(p_m, x_m) \\ &< \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún punto $p \in f^{-1}(y_0)$ (pues $f^{-1}(y_0)$ también es completo), afirmamos que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a $p \in f^{-1}(y_0)$. Sea $\varepsilon' > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N'} < \frac{\varepsilon'}{2}$, pero también existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, p) < \frac{\varepsilon'}{2}$ para $n \geq N''$, sea $n \geq \textit{máx}\,\{N', N''\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(p_n, p) &\leq d(p_n, x_n) + d(x_n, p) \\ &\leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'. \end{aligned}$$

Y por otro lado, nótese que la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $X - U$ el cual es cerrado en X y por tanto compacto, entonces esta sucesión admite una sucesión parcial convergente a algún punto en $X - U$, digamos $q_{n_k} \to q \in X - U$ cuando $k \to \infty$.

Nótese que la sucesión $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a $p \in f^{-1}(y_0)$, dada la continuidad de f, tenemos que $f(p_{n_k}) \to f(p)$ y $f(q_{n_k}) \to f(q)$ cuando $k \to \infty$ respectivamente, pero como para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(p_{n_k}) = f(q_{n_k})$ se tiene entonces que $f(p) = f(q)$, como $p \in f^{-1}(y_0)$, se sigue que $f(p) = y_0 = f(q)$ y por tanto $q \in f^{-1}(y_0)$, además $q \in f^{-1}(y_0) \cap (X - U)$, lo cual muestra que $f^{-1}(y_0) \not\subset U$ lo que contradice nuestra suposición inicial, por tanto $\mathcal{D}_f$ es *usc*.

Como X es un espacio compacto y $\mathcal{D}_f$ es *usc*, se sigue por 3.7 que el espacio de descomposición $\mathcal{D}_f$ es metrizable y por tanto un espacio de Hausdorff, también Y es un espacio compacto, así, para establecer un homeomorfismo $h : Y \to \mathcal{D}_f$ por 4.17 basta establecer una función h continua y biyectiva. Definamos una función h como sigue, sea $y \in Y$, como f es suprayectiva, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, sea $x \in f^{-1}(y)$, nótese que $p_{\mathcal{D}}(x) = f^{-1}(y)$, denotemos entonces por $h(y) = p_{\mathcal{D}}(f^{-1}(y))$ donde $f^{-1}(y) = x$. Nótese que h está bien definida, la suprayectividad de h es evidente, veamos que h es inyectiva, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $h(y_1) = h(y_2)$, por lo que $p_{\mathcal{D}}(f^{-1}(y_1)) = p_{\mathcal{D}}(f^{-1}(y_2))$, entonces $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$ y por tanto $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, con lo cual $y_1 = y_2$.

Por último, para ver que h es continua, nótese primeramente que f es una función cerrada (ver la demostración de 4.17), así f es una función cociente por 4.15, se sigue por el lema de transgresión que $h = p_{\mathcal{D}} \circ f^{-1}$ es una función continua.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición *usc* de X, el cual es un espacio compacto, por tanto, $\mathcal{D}$ es un espacio métrico por 3.7, como $p_{\mathcal{D}} : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva como en 2.1, tenemos que $p_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D}$ es compacto. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el esfuerzo y dedicación que aportaron a la revisión de este trabajo. También un especial agradecimiento a los editores por dar la posibilidad de colaborar en este trabajo.

Bibliografía

[1] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[2] Tamariz Mascarua, Angel, Fidel Casarrubias Segura. Elementos de topología general. Coyoacán, Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.

[3] K. Kuratowski, Topology, vol. I, Academic Press, New York, 1966.

[4] K. Kuratowski, Topology, vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[5] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, New York, 2004.

[6] R. Engelking, General Topology, Editrorial Alhambra. Madrid, España, 1989.

[7] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[8] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

daniel.dominguezm@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 23, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-5914-57-2

Capítulo 7

Límite de conjuntos y teoremas de golpes a la frontera

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, José Alberto Ortega Becerril

FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se presentan algunas propiedades sobre límites de conjuntos así como teoremas de golpes a la frontera en un continuo X sobre su hiperespacio. Se dan propiedades sobre el límite superior e inferior así como teoremas de convergencia, teoremas importantes como el del cable cortado.

1 Preliminares

Dado un conjunto X distinto del vacío, una **métrica** en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para todo x, y, z en $\mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
&d(x, y) \geq 0,\\
&d(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y,\\
&d(x, y) = d(y, x),\\
&d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).
\end{aligned}$$

Definición 1.1. *Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una métrica, al par (X, d) le llamaremos un* ***espacio métrico****.*

Definición 1.2. *Sean (X, d) un espacio métrico y $z_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. La* ***bola abierta*** *con centro en z_0 y radio r es*

$$B(z_0, r) = \{x \in X : d(x, z_0) < r\}.$$

Definición 1.3. *Si A es un subconjunto de un espacio métrico X y* $\mathrm{F} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *es una familia de subconjuntos de X, entonces:*

(1) *Decimos que* F *es una* ***cubierta*** *de A en X si $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$.*

(2) *Decimos que* F *es una* ***cubierta abierta*** *de A en X, si* F *es una cubierta y para todo $\lambda \in L$, U_λ es abierto en X.*

(3) *Si* F *es una cubierta de A en X. Una* ***subcubierta*** G *de A es una familia de elementos de* F *para la cual existe $M \subset L$ tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in M} U_\lambda$. Si M es finito, decimos que* G *es una* ***subcubierta finita*** *de A*

Definición 1.4. *Sea A subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que A es* ***compacto*** *en X si toda cubierta de A en X tiene una subcubierta finita.*

Definición 1.5. *Sea A subconjunto de un espacio métrico X con $A \neq \emptyset$. Los conjuntos S y T forman una* ***separación*** *de A si*

$$\begin{aligned}
&S \neq \emptyset \text{ y } T \neq \emptyset,\\
&S \text{ y } T \text{ son abiertos en } A,\\
&S \cup T = A,\\
&S \cap T = \emptyset.
\end{aligned}$$

Si tales conjuntos existen, el conjunto A se le llama ***disconexo****.*

Definición 1.6. *El conjunto A es* ***conexo*** *si no es disconexo.*

Definición 1.7. *Una* ***sucesión*** *en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, denotamos $f(n) = x_n$ y a la sucesión por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definición 1.8. *Una sucesión converge en un espacio métrico (X, d) a $x_0 \in X$, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.*

Definición 1.9. *Si $f, g : \mathbb{N} \to X$ son sucesiones, decimos que g es una* ***sucesión parcial*** *o* ***subsucesión*** *de f si existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva tal que $g = f \circ h$.*

2 Introducción

Definición 2.1. *Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Definición 2.2. *Dado un espacio topológico X, consideremos los siguientes conjuntos:*

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es un cerrado de } X\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Ahora, dado un espacio métrico X con métrica d, para el propósito de este capítulo definiremos una métrica adecuada H_d para 2^X, para ello, para cada $A \in 2^X$ y cada $\varepsilon > 0$:

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$$

y para cada $A, B \in 2^X$, sea:

$$H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}.$$

*Veremos en el teorema 2.4 que H_d es una métrica para 2^X y en el corolario 2.8 que la topología obtenida por esta para 2^X es un invariante de métricas equivalentes para X. Los espacios 2^X y $C(X)$ con la topología obtenida de H_d son los **hiperespacios** de X; H_d es la **métrica de Hausdorff** inducida por d.*

Si (X,d) es un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$ al conjunto

$$\{\varepsilon > 0 : \ A \subset N_d(\varepsilon, B) \ \text{ y } \ B \subset N_d(\varepsilon, A)\,\},$$

lo denotaremos por $\mathcal{N}_d(A,B)$.

Sea X un espacio métrico compacto y $A \in 2^X$, nótese que $A \subset X$ con A cerrado y X un conjunto compacto, por tanto A es compacto.

Proposición 2.3. *Sean (X,d) un espacio métrico compacto, $K, L \in 2^X$ y $x \in K$ entonces existe $y \in L$ tal que $d(x,y) \leq H_d(K,L)$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\delta_n = \frac{1}{n}$, entonces existe $\varepsilon_n \in \mathcal{N}_d(K, L)$ tal que

$$H_d(K, L) \leq \varepsilon_n < H_d(K, L) + \delta_n$$

donde

$$K \subset N_d(\varepsilon_n, L) \text{ y } L \subset N_d(\varepsilon_n, K).$$

Sea $x \in K \subset N_d(\varepsilon_n, L)$. Existe $y_n \in L$ tal que $d(x, y_n) < \varepsilon_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en L el cual es secuencialmente compacto, y por tanto esta admite una subsucesión convergente, digamos $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim y_{n_k} = y$ para algún $y \in L$.

Veamos ahora que $d(x, y) \leq H_d(K, L)$. Notemos que

$$d(x, y) \leq d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y), \ \forall \ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

pero por otro,

$$d(x, y_{n_k}) < \varepsilon_{n_k} < H_d(K, L) + \delta_{n_k} \tag{2}$$

de (1) y (2) tenemos que

$$d(x, y) \leq H_d(K, L) + d(y_{n_k}, y) + \delta_{n_k}$$

Luego;

$$d(x, y) \leq \lim_{k \to \infty} (H_d(K, L) + d(y_{n_k}, y) + \delta_{n_k}) = H_d(K, L)$$

y por tanto $d(x, y) \leq H_d(K, L)$, así $y \in L$ es el elemento buscado. □

Teorema 2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. La función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada en la definición 2.2 es una métrica para 2^X.*

Demostración. Mostraremos que la función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ satisface que para cualesquiera $A, B, C \in 2^X$:

(1) $H_d(A, B) \geq 0$,

(2) $H_d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$,

(3) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$,

(4) $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

Para ver (1) *basta notar que* 0 *es una cota inferior para* $\mathcal{N}_d(A,B)$ *y por tanto* $H_d(A,B) \geq 0$. *Probemos ahora* (2), *supongamos que* $H_d(A,B) = 0$ *y sea* $a \in A$. *Sea para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = \frac{1}{n}$, *entonces existe* $\varepsilon_n \in \mathcal{N}_d(A,B)$ *tal que*

$$H_d(A,B) = 0 \leq \varepsilon_n < H_d(A,B) + \delta_n = \delta_n,$$

y es tal que

$$A \subset N_d(\varepsilon_n, B) \;\; y \;\; B \subset N_d(\varepsilon_n, A).$$

Como $a \in A$ *entonces para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $b_n \in B$ *tal que* $d(a, b_n) < \varepsilon_n$, *nótese que* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión contenida en* B, *afirmamos que la sucesión* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al punto* a. *Sea* $\varepsilon > 0$ *entonces existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\delta_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$, *y existe* $\varepsilon_n \in \mathcal{N}_d(A,B)$, *tal que para cada* $n \geq N$ *se cumple que*

$$d(b_n, a) \leq \varepsilon_n < \delta_n < \varepsilon.$$

Por tanto $\lim b_n = a$ *y como* B *es cerrado se sigue que* $a \in B$ *y por tanto* $A \subset B$.

Con un argumento similar se muestra que si $b \in B$ *entonces* $b \in A$, *concluimos entonces que* $A = B$.

Recíprocamente, supongamos que $A = B$, *afirmamos que para cada* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathcal{N}_d(A,B)$. *Sea* $\varepsilon > 0$, *notar que* $A \subset N_d(\varepsilon, B)$, *y que* $B \subset N_d(\varepsilon, A)$, *por tanto,* $\varepsilon \in \mathcal{N}_d(A,B)$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *y por tanto* $H_d(A,B) = 0$.

Para ver (3), *nótese que* $\mathcal{N}_d(A,B) = \mathcal{N}_d(B,A)$ *y por tanto* $H_d(A,B) = H_d(B,A)$. *Por ultimo, veamos* (4), *sean* $\mathcal{N}_d(A,C)$, $\mathcal{N}_d(A,B)$ *y* $\mathcal{N}_d(B,C)$. *Sea cualquier* $\delta > 0$, *afirmamos que* $\varepsilon = H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta$ *pertenece a* $\mathcal{N}_d(A,C)$. *Sea* $a \in A$ *por la proposición anterior existe* $b \in B$ *tal que* $d(a,b) \leq H_d(A,B)$ *y de igual manera para* $b \in B$ *existe* $c \in C$ *tal que* $d(b,c) \leq H_d(b,C)$. *Por la desigualdad triangular de la métrica* d, *tenemos que*

$$\begin{aligned} d(a,c) &\leq d(a,b) + d(b,c) \\ &\leq H_d(A,B) + H_d(B,C) \\ &< H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, dado $a \in A$ *hemos probado que existe* $c \in C$ *tal que* $d(a,c) < \varepsilon$ *y por tanto* $A \subset N_d(\varepsilon, C)$.

Con un argumento similar se prueba que $C \subset N_d(\varepsilon, A)$ *y por tanto* $\varepsilon \in \mathcal{N}_d(A, C)$, *luego tenemos que*

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \delta,$$

pero como $\delta > 0$ *es arbitrario tenemos que*

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, C) + H_d(B, C).$$

Por tanto H_d *es una métrica para* 2^X. □

Definición 2.5. *Sea* X *un espacio métrico compacto con topología* T, *para cada* $U \in T$, *sean:*

(1) $\Gamma(U) = \{A \in 2^X : A \subset U\}$.

(2) $\Lambda(U) = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$.

(3) *Para cada* $U_1, \ldots, U_n \in T$ *con* $n < \infty$, *sea*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}.$$

Si X es un espacio métrico compacto y con topología T, entonces $\langle X \rangle = 2^X$.

Lema 2.6. *Las siguientes relaciones que aparecen en* $(1) - (3)$ *se cumplen entre los conjuntos descritos en la definición 2.5, es decir;*

(1) $\Gamma(U) = \langle U \rangle$ *y* $\Lambda(U) = \langle X, U \rangle$.

(2) $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left[\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_1\right)\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right]$.

(3) *Sean* $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *y* $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ *entonces*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Demostración. (1) Sea $A \in \Gamma(U)$ luego $A \subseteq U$ y además $A \cap U = A \neq \emptyset$ y por tanto $A \in \Lambda(U)$. Así concluimos que $A \in \langle U \rangle$.

Sea $A \in \langle U \rangle$ luego por definición de $\langle U \rangle$ se sigue que $A \in \Gamma(U)$.

Por otro lado si $A \in \Lambda(U)$ entonces $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap X \neq \emptyset$. Por tanto $A \in \langle X, U \rangle$.

Por último, sea $A \in \langle X, U \rangle$ entonces $A \subseteq X \cup U = X$ y $A \cap X \neq \emptyset$ y $A \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $A \in \Lambda(U)$.

(2) Observe que el conjunto **vietórico** se puede ver como sigue

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle &= \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ \text{ con } \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \\ &\quad \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset \ \text{ con } \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \\ &= \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].\end{aligned}$$

(3) Notemos primero que

$$U \cap V = \left[U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\right)\right] \cup \left[V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right] \tag{3}$$

$$= \left[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)\right]. \tag{4}$$

Sea $\omega \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$, entonces $\omega \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\omega \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$.

(a) Si $\omega \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ entonces se cumple que

$$\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U \ \text{ y } \ \omega \cap U_i \ \text{ para todo } \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(b) De forma similar se comprueba para el elemento $\omega \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$ para obtener

$$\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i = V \ \text{ y } \ \omega \cap V_i \ \text{ para todo } \ i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

De esto último observemos que $\omega \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\right) = U \cap V$.

Pero de acuerdo con la ecuación 3 tenemos que

$$\omega \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^{m}(U \cap V_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n}(V \cap U_i)\right].$$

Como $\omega \subseteq U$ se cumple que $\omega = \omega \cap U$ además observe que $\omega \cap V_i = \omega \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Del mismo modo se prueba que $\omega \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto concluimos que

$$\omega \in \langle U \cap V_1, \dots, U \cap V_m, V \cap U_1, \dots, V \cap U_n \rangle.$$

Por otro lado si $\omega \in \langle U \cap V_1, \dots, U \cap V_m, V \cap U_1, \dots, V \cap U_n \rangle$, luego por la igualdad (3) tenemos que $\omega \subseteq U \cap V$. Tomemos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, como $\omega \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, $\omega = \omega \cap V$ y $\omega \cap U_i = \omega \cap (V \cap U_i)$, se tiene que $\omega \cap U_i \neq \emptyset$. De la misma forma se prueba que $\omega \cap V_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Por lo tanto

$$\omega \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned} &\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \\ &= \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \dots, U \cap V_m \rangle. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.7. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d y topología T. Sean (usando la notación en 2.5):*

(1) $\mathscr{C} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \in T$ *para cada* $i = 1, \dots, n\}$.

(2) $\mathscr{P} = \{\Gamma(U) : U \in T\} \cup \{\Lambda(U) : U \in T\}$.

Entonces: $\mathscr{C}$ es una base para la topología T_{H_d} obtenida por la métrica de Hausdorff para 2^X, y $\mathscr{P}$ es una subbase para tal topología.

Demostración. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathscr{C}$ y $A \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, así $\mathcal{U}_1 = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ con $V_i \in T$: $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, y $\mathcal{U}_2 = \langle W_1, \ldots, W_s \rangle$ con $W_i \in T : \forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Sea

$$V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i \text{ y } W = \bigcup_{i=1}^{s} W_i$$

Como $A \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \langle V \cap W_1, \ldots, V \cap W_s, W \cap V_1, \ldots, W \cap V_m \rangle \in \mathscr{C}$ se tiene que.

$$x \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$$

Luego, para cada $A \in 2^X$ existe $V \in \mathscr{C}$ tal que $A \in V$ pues $A \in 2^X = \langle X \rangle$ así que basta considerar $V = \langle X \rangle \in \mathscr{C}$. Así $\mathscr{C}$ es una base para T_v que es la topología generada por $\mathscr{C}$. Ahora sea

$$[\mathscr{P}] = \left\{ \bigcap \mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es finito y } \mathcal{L} \subset \mathscr{P} \right\}$$

Notemos que $\mathscr{C} \subset [\mathscr{P}]$ pues si $\mathcal{U} \in \mathscr{C}$ entonces

$$\mathcal{U} = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle = \left[\Gamma \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) \right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(V_i) \right] \in [\mathscr{P}]$$

Se cumple además que $\mathscr{P} \subset \mathscr{C}$, por otro lado. Sea $\mathcal{Y} \in [\mathscr{P}]$ entonces $\mathcal{Y} = \bigcap \mathcal{L}$ donde $\mathcal{L} \subset \mathscr{P}$ y $\mathcal{L}$ es finito.

(a) Si cada $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ es de la forma $\Gamma(U)$ con $U \in T$ entonces $\Gamma(U) \cap \Gamma(W) = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle = \langle U \cap W \rangle \in \mathscr{C}$

(b) Si cada $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ es de la forma $\Lambda(U) : U \in T$, entonces $\Lambda(U) \cap \Lambda(W) = \langle X, U \rangle \cap \langle X, W \rangle \in \mathscr{C}$

(c) Si cada $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ es de la forma $\Gamma(U)$ o $\Lambda(W)$ entonces $\Gamma(U) \cap \Lambda(W) = \langle U \rangle \cap \langle X, W \rangle \in \mathscr{C}$.
Así en cualquiera de los casos $Y \in \mathscr{C}$ es decir $[\mathscr{P}] = \mathscr{C}$. Así $\mathscr{P}$ es una subbase para T_v.
Ahora probemos que $T_v = T_H$. Para $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ sean

$$B_H(A, \varepsilon) = \{K \in 2^X : H_d(A, K) < \varepsilon\},$$

$$d(L, K) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in L, y \in K\}.$$

Mostremos primero que $T_v \subset T_H$. Fijemos $U \in T$ tal que $U \neq X$. Sea $A \in \Gamma(U)$ entonces definimos

$$\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \text{ínf}\{d(a,b) : a \in A, b \in X \setminus U\}.$$

Sea $K \in B_H(A, \epsilon)$ entonces $H_d(A,K) < d(A, X \setminus U)$ y probemos que $K \subset U$. Sea $k \in K$ por la proposición 2.3 existe $a \in A$ tal que

$$d(a,k) \leq H_d(A,K) < d(A, X \setminus U)$$

Si $k \notin U$ entonces $k \in X \setminus U$ así, tendríamos que

$$d(a,k) < d(A, X \setminus U) \text{ y } d(A, X \setminus U) \leq d(a,k).$$

Lo cual es una contradicción, así $K \subset U$ y por lo tanto $K \in \Gamma(U)$ eso implica que $B_H(A, \varepsilon) \subset \Gamma(U)$. Ahora si $A \in \Lambda(U)$ entonces $A \cap U \neq \emptyset$, sea $p \in A \cap U$ y definimos

$$\varepsilon = d(\{p\}, X \setminus U) = \text{ínf}\{d(p,b) : b \in X \setminus U\}.$$

Ahora sea $K \in B_H(A, \varepsilon)$ y probemos que $K \cap U \neq \emptyset$. Probemoslo por contradicción, supongamos que $K \subset X \setminus U$, como $p \in A$ entonces existe $k \in K$ tal que

$$d(p,k) \leq H_d(A,K) < d(\{p\}, X \setminus U)$$

pero $p \in \{p\}$ y $k \in X \setminus U$ entonces $d(\{p\}, X \setminus U) \leq d(p,k)$ lo cual es una contradicción. Así $K \cap U \neq \emptyset$ es decir $K \in \Lambda(U)$ y por lo tanto $B_H(A, \varepsilon) \subset \Lambda(U)$, pero eso nos dice que $\Gamma(U), \Lambda(U) \in T_H$ para $U \in T$ con $U \neq X$, más aún $\Gamma(X) = \Lambda(X) = 2^X$. Por lo tanto $\mathscr{P} \subset T_H$ y eso implica que $T_v \subset T_H$. Para la siguiente contención basta probar que dada una H_d-bola $B_H(A, \varepsilon)$ existen $U_1, \ldots, U_n$ abiertos no vacíos tales que

$$A \in \langle U_1, \ldots U_n \rangle \subset B_H(A, \varepsilon).$$

Fijemos $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como A es precompacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Sea $U_i = B_d\left(a_i, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, es claro que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y diám$(U_i) < \varepsilon$. Sea $K \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ luego, por definición, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad K \cap B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ notemos que $d(a_j, K) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ es decir $a_j \in N_d\left(\dfrac{\varepsilon}{2}, K\right)$, así existe $k \in K$ tal que $d(a_j, k) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Si $x \in B_d\left(a_j, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ entonces $d(x, a_j) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$d(x, k) \leq d(x, a_j) + d(a_j, k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir,

$$B_d(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N_d(\varepsilon, K) \text{ para } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Luego,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N_d(\varepsilon, K)$$

y por otro lado es claro que $K \subset N_d(\varepsilon, A)$.
Así tenemos lo deseado.

□

Corolario 2.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, la topología obtenida de la métrica de Hausdorff para 2^X depende sólo de la topología de X (es decir, si d y D son métricas para X, cada una de las cuales da la topología T de X, entonces la topología para 2^X obtenida de H_d y la obtenida de H_D son idénticas).*

Demostración. Sean d y D métricas para X, T_d y T_D las topologías obtenidas por las métricas d y D respectivamente cada una de las cuales da la topología T, es decir, $T_d = T = T_D$. Sean T_{H_d} y T_{H_D} las topologías obtenidas por métricas de Hausdorff H_d y H_D respectivamente para 2^X, mostraremos que

$T_{H_d} = T_{H_D}$. Así X es un espacio métrico compacto con métrica d y topología T_d. Sea

$$\mathscr{C}_d = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : U_i \in T_d, \text{ Para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\ \}.$$

Por el teorema 2.7, $\mathscr{C}_d$ es una base para la topología T_{H_d}. Ahora como X es un espacio métrico con métrica D y topología T_D. Sea

$$\mathscr{C}_D = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : U_i \in T_D \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\ \}.$$

Por el teorema 2.7, $\mathscr{C}_D$ es una base para la topología T_{H_D}, como $T_d = T_D$ entonces $\mathscr{C}_d = \mathscr{C}_D$, entonces $T_{H_d} = T_{H_D}$. □

El resultado en 2.7 muestra directamente que si los espacios métricos compactos X e Y son homeomorfos entonces 2^X y 2^Y son homeomorfos. Mas aun, se cumple que:

Teorema 2.9. *Sean X e Y espacios métricos compactos con α y β sus métricas respectivas, y sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo de X a Y. Entonces existe un homeomorfismo h^* de 2^X a 2^Y tal que $h^*[C(X)] = C(Y)$.*

Demostración. Sea $h^* : 2^X \to 2^Y$ definida como $h^*(A) = h(A)$ para cada $A \in 2^X$. Nótese que como h es un homeomorfismo, h es una función cerrada y por tanto $h(A) \in 2^Y$, además si $A, B \in 2^X$ son tales que $A = B$ entonces $h^*(A) = h(A) = h(B) = h^*(B)$ por tanto h^* esta bien definida.

h^* es inyectiva, pues sean $A, B \in 2^X$ tales que $h^*(A) = h^*(B)$, es decir, $h(A) = h(B)$, por la inyectividad de h tenemos que

$$A = h^{-1}(h(A)) \quad \text{y} \quad B = h^{-1}(h(B)),$$

pero como $h(A) = h(B)$, entonces $A = B$.

h^* es sobreyectiva, pues para cualquier $B \in 2^Y$, bastara tomar a $h^{-1}(B)$ el cual pertenece a 2^X ya que h es una función continua y es tal que

$$h^*(h^{-1}(B)) = h(h^{-1}(B)) = B,$$

por la sobreyectividad de h.

Sea $C(X) \subset 2^X$ y veamos que $h^*[C(X)] = C(Y)$, sea $B \in h^*[C(X)]$ entonces existe $A \in C(X)$ tal que $h^*(A) = h(A) = B$ como las funciones continuas preservan la conexidad, se sigue que $h(A) = B$ es conexo y así $B \in C(Y)$, por lo que $h^*[C(X)] \subset C(Y)$.

Por otro lado, $C(Y) \subset 2^Y = h^*[2^X]$. Sea $B \in C(Y)$, entonces existe $A \in 2^X$ tal que $h^*(A) = B$, A es conexo, pues $h(A) = B$ y $h^{-1}(B) = h^{-1}(h(A)) = A$ con h^{-1} una función continua y B un conjunto conexo en Y, por tanto $A \in C(X)$, así $A \in h^*[C(X)]$, por tanto $h^*[C(X)] = C(Y)$.

Resta mostrar la continuidad de h^*, pero antes de ello definamos $D : X \times X \to \mathbb{R}$ como $D(x,y) = \beta(h(x), h(y))$ para cada $(x,y) \in X \times X$, no es difícil mostrar que D es una métrica para X. Afirmamos ahora que

$$H_\beta(h^*(A), h^*(B)) = H_D(A, B),$$

para ello mostraremos que dado cualquier $\delta > 0$, $\varepsilon_1 \in \mathcal{N}_\beta(h^*(A), h^*(B))$ y $\varepsilon_2 \in \mathcal{N}_D(A, B)$ donde $\varepsilon_1 = H_D(A,B) + \delta$ y $\varepsilon_2 = H_\beta(h^*(A), h^*(B)) + \delta$ pues de ser cierto, tendríamos que

$$\begin{aligned} H_\beta(h^*(A), h^*(B)) &\leq H_D(A, B) + \delta \\ H_D(A, B) &\leq H_\beta(h^*(A), h^*(B)) + \delta. \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario tendríamos que

$$H_\beta(h^*(A), h^*(B)) \leq H_D(A, B) \quad \text{y} \quad H_D(A, B) \leq H_\beta(h^*(A), h^*(B))$$

lo cual probaria la igualdad.

Veamos que $\varepsilon_1 \in \mathcal{N}_\beta(h^*(A), h^*(B))$, para ver esto, probaremos que

$$h^*(A) \subset N_\beta(\varepsilon, h^*(B)) \quad \text{y} \quad h^*(B) \subset N_\beta(\varepsilon, h^*(A))$$

Sea $t \in h^*(A) = h(A)$ entonces existe $a \in A$ tal que $h(a) = t$, por la proposición 2.3, existe $b \in B$ tal que

$$D(a, b) \leq H_D(A, B).$$

Sea $l = h(b) \in h^*(B)$ y veamos que

$$\begin{aligned} D(a, b) &= \beta(h(a), h(b)) \\ &= \beta(t, l) \\ &\leq H_D(A, B) \\ &< H_D(A, B) + \delta = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

lo cual que prueba que $h^*(A) \subset N_\beta(\varepsilon, h^*(B))$ y con un argumento similar se prueba que $h^*(B) \subset N_\beta(\varepsilon, h^*(A))$ y por tanto $\varepsilon_1 \in \mathcal{N}_\beta(h^*(A), h^*(B))$.

Procediendo de manera similar se prueba que $\varepsilon_2 \in \mathcal{N}_D(A, B)$. Luego, fijemos $A' \in 2^Y$ y $\varepsilon > 0$ y probemos que $(h^*)^{-1}(B_{H_\beta}(A', \varepsilon))$ es abierto. Como h^* es sobreyectiva existe $A \in 2^X$ tal que $h^*(A) = A'$, así notemos que

$$\begin{aligned}
(h^*)^{-1}(B_{H_\beta}(A', \varepsilon)) &= \{B \in 2^X : h^*(B) \in B_{H_\beta}(A', \varepsilon)\} \\
&= \{B \in 2^X : h^*(B) \in B_{H_\beta}(h^*(A), \varepsilon)\} \\
&= \{B \in 2^X : H_\beta(h^*(A), h^*(B)) < \varepsilon\} \\
&= \{B \in 2^X : H_D(A, B) < \varepsilon\} \\
&= B_{H_\beta}(A, \varepsilon).
\end{aligned}$$

El cual es abierto en 2^X □

3 Límite inferior, límite superior y límite

Habiendo expresado la topología de la métrica de Hausdorff para 2^X como en 2.2 en términos de conjuntos abiertos en X, ahora queremos dar una descripción apropiada de la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff mediante una noción de "convergencia en X".

Definición 3.1. *Sea (S, T) un espacio topológico, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de S. Definimos* lím *inf* A_i *y el* lím *sup* A_i *como sigue*

$$\begin{aligned}
\text{lím } inf\, A_i = \{x \in S :\ & \textit{para cada } U \in T \textit{ tal que } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\
& \textit{para todos, salvo para un numero finito de } i\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{lím sup } A_i = \{x \in S :\ & \textit{para cada } U \in T \textit{ tal que } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\
& \textit{para infinitos } i\}.
\end{aligned}$$

Por cómo se definen los conjuntos, notemos que lím $inf\, A_i \subset$ lím $sup\, A_i$.

Definición 3.2. *Sean (S, T) y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en la definición anterior, y sea $A \subset S$. Escribimos* lím $A_i = A$ *si*

$$\text{lím } inf\, A_i = A = \text{lím } sup\, A_i.$$

Proposición 3.3. *Sean (S, T) un espacio topológico, y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ cualquier sucesión de subconjuntos de S. Entonces*

(1) $\lim \mathit{inf}\, A_i$ *y* $\lim \mathit{sup}\, A_i$ *son subconjuntos cerrados de S.*

(2) $\lim \mathit{inf}\, \overline{A_i} = \lim \mathit{inf}\, A_i$ *y* $\lim \mathit{sup}\, \overline{A_i} = \lim \mathit{sup}\, A_i$

(3) $\lim A_i = \lim \overline{A_i}$ *siempre y cuando* $\lim A_i$ *o* $\lim \overline{A_i}$ *existan.*

Demostración. (1) Notemos primero que $\lim \mathit{sup}\, A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k} \right]$.

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k} \right]$. Entonces $x \in \overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k}$ para cada i. Entonces, para cada U abierto tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k) \neq \emptyset$, es decir $\bigcup_{i=1}^{\infty} (U \cap A_i) \neq \emptyset$. Pero eso ocurre para cada i. Así, $x \in \lim \mathit{sup}\, A_i$.

Ahora, si $x \in \lim \mathit{sup}\, A_i$ para cada $U \in T$ tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \neq \emptyset$, entonces $x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}$ y $U \cap (\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k) \neq \emptyset$, entonces $x \in \overline{\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k}$. Es decir, $U \cap \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \right) \neq \emptyset$, es decir, $x \in \overline{\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k}$. Pero eso ocurre para cada i. Así, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k} \right)$.

Así, $\lim \mathit{sup}\, A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k} \right]$.

Probemos que $\lim \mathit{sup}\, A_i$ es cerrado. Así, probemos que $X \setminus \lim \mathit{sup}\, A_i$ es abierto. Luego:

$$\begin{aligned} & X \setminus \lim \mathit{sup}\, A_i \\ & = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k}) \\ & = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(X \setminus \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Pero $\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i}$ es cerrado en S. Luego, $X \setminus \overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i}$ es abierto en S. Luego $\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(X \setminus \left(\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i} \right) \right)$ es abierto en S. Así, $X \setminus \lim \mathit{sup}\, A_i$ es abierto en S y, por lo tanto $\lim \mathit{sup}\, A_i$ es cerrado en S.

Ahora veamos que $\lim \mathit{inf} A_i$ es cerrado en S. Sean $x \in \overline{\lim \mathit{inf} A_i}$, $U \in T$, tales que $x \in U$. Luego,

$$U \cap \lim \mathit{inf} A_i \neq \emptyset.$$

Así, existe $y \in U \cap \text{lím}\, inf A_i$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, $U \cap A_i \neq \emptyset$, así concluimos que $x \in \text{lím}\, inf A_i$.

(2) Sean $x \in \text{lím}\, sup\, \overline{A_i}$, $U \in T$, tal que $x \in U$. entonces, $U \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$, para infinitos i, es decir, existen $x_i \in U \cap \overline{A_i}$, y para cada i, tenemos que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para infinitos i, así $x \in$ lím $supA_i$. Ahora sean $x \in \text{lím}\, sup\, A_i$, $U \in T$, tales que $x \in U$, entonces $U \cap A_i \neq \emptyset$, para infinitos i. pero notemos que $U \cap A_i \subset U \cap \overline{A_i}$, así, $U \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$ para infinitas i, por lo tanto $x \in \text{lím}\, sup\overline{A_i}$.
Ahora sean $x \in \liminf A_i$, $U \in T$ tales que $x \in U$, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, entonces $U \cap A_i \neq \emptyset$, Notemos que $U \cap A_i \subset U \cap \overline{A_i}$, así sí $i \geq N$ entonces $U \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$, es decir, $x \in \liminf\, \overline{A_i}$.
Ahora sean $x \in \text{lím}\, inf\overline{A_i}$, $U \in T$, tal que $x \in U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, se cumple que $U \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$. Luego,, existe $y \in U \cap \overline{A_i}$, pero eso nos dice que $U \cap A_i \neq \emptyset$, con eso podemos concluir que $x \in \text{lím}\, inf A_i$. Por último (3) es consecuencia de (2).

□

Lema 3.4. *Sean (S, T) un espacio topológico, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de S, y sea $A \subset S$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\text{lím}\ A_i = A$.

(2) $A \subset \text{lím}\ inf\ A_i$ *y* $\text{lím}\ sup\, A_i \subset A$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si lím $A_i = A$ entonces lím $inf\ A_i =$ lím $sup\, A_i$ entonces $A \subset$ lím $inf\ A_i$ y lím $sup\, A_i \subset A$

(2) $\Rightarrow$ (1) Tenemos $A \subset$ lím $inf\ A_i \subset$ lím $sup\, A_i \subset A$ entonces lím $inf\ A_i =$ lím $sup\, A_i$ por lo tanto lím $A_i = A$ □

Presentamos el siguiente resultado fundamental:

Teorema 3.5. *Sea X un espacio métrico compacto, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos y compacto de X. Entonces* lím $A_i = A$ *si y solo si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff H_d.*

Demostración. Supongamos que lím $A_i = A$. Primero mostremos que $A \in 2^X$. Como cada $A_i \neq \emptyset$, Luego, sea $U_i = X \setminus \overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i}$ para cada $i = 1, 2, \ldots$

Es claro que cada U_i es abierto. Supongamos que $\limsup A_i = \emptyset$. Luego $\bigcap_{i=1}^{\infty}\left[\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k}\right] = \emptyset$. Notemos que

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty}\left[\overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i}\right] = X$$

.

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[X \setminus \overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} A_i}\right] = X$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$$

Pero X es compacto. Así, existen $U_1, \ldots U_n$ abiertos tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} Ui$. Notemos que $U_i \subset U_j$ si $j \leq i$. Además $X = U_1 = X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$.

$$\Rightarrow \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1} = \emptyset$$

En particular $A_1 = \emptyset$, que es una contradicción. Así $\limsup A_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \neq \emptyset$, por (3.3) como $\limsup A_i$ es cerrado se sigue que $A \in 2^X$.

Ahora probemos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a H. Sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X tales que $A \in \langle U_i, \ldots, U_n\rangle$. Luego $A \cap U_j \neq \emptyset$ para cada j.

Como $\liminf A_i = A$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Existe $M_j \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \cap U_j \neq \emptyset$ para $i \geq M_j$. Sea $M = \max\{M_j : j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Luego, $A_i \cap U_j \neq \emptyset$ para $i \geq M$.

Luego, como $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ para $i \geq N$ pues, de lo contrario, para cada $N \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq N$, pero $A_i \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Entonces como $Y = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ es compacto, existe $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{A_i\}$ tal que $A_{i_k} \cap Y \neq \emptyset$.

Luego, $\{A_{i_k} \cap Y\}$ es no vacía. Así $\limsup(A_{i_k} \cap Y) \neq \emptyset$. Además, $\lim sup\,(A_{i_k} \cap Y) \subset \lim sup\, A_i = A$. Luego $A \cap Y \neq \emptyset$, pero $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$, lo cual es una contradicción. Así. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, entonces $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

Sea $s = \max\{N, M\}$. Luego, si $i \geq s$, entonces $A_i \in < U_1, \ldots, U_n >$. Así, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X

Ahora supongamos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X. Por el lema 3.2, basta probar que $A \subset \lim\inf A_i$ y $\lim sup\, A_i \subset A$.

Sean $p \in A$ y U abierto en X tal que $p \in U$. Como $\{A_i\}$ converge a A, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in B_H(A, \epsilon)$ para $i \geq N$. Notar que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $p \in B(p, \epsilon) \subset U$. Si $A = \{p\}$, entonces $A_i \in B_H(p, \epsilon_0)$ para $i \geq N$. Es decir, $A_i \subset N_d(\{p\}, \epsilon_0)$. Así, existe $a_i \in A_i$ tal que $d(a_i, p) < \epsilon$, es decir $a_i \in B_d(p, \epsilon_0) \subset U$ para $i \geq N$, $A_i \cap U \neq \emptyset$. Es decir, $p \in \lim inf A_i$.

Ahora supongamos que $|A| > 1$ y $p \in A$. Entonces

$$A \in \langle U, X \setminus \{p\} \rangle = \{A \in 2^X : A \subset U \cup X \setminus \{p\}, A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap X \setminus \{p\}\}$$

Como $\langle U, X \setminus \{p\} \rangle$ es abierto en 2^X y $\{A_i\}$ converge a A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \langle U, X\{p\}$ para $i \geq N$. Entonces $A_i \cap U \neq \emptyset$ para $i \geq N$. Así $p \in \lim\inf A_i$. Ahora demostraremos que $\lim sup\, A_i \subset A$.

Si $A = X$, terminamos. Sea $x \in X \setminus A \subseteq X$. Sea W abierto en X tal que $A \subset W$ y $x \notin \overline{W}$.

Como $A \in \langle W \rangle$ y $\langle W \rangle$ es abierto en 2^X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \langle W \rangle$ para $i \geq N$. Es decir, $A_i \subset W$ y $A_i \cap W \neq \emptyset$ para cada $i \geq N$. Por lo tanto $A_i \cap \left(X \setminus \overline{W}\right) = \emptyset$ para $i \geq N$. Como $X \setminus \overline{W}$ es abierto y $x \in X \setminus \overline{W}$, entonces $x \in \lim sup\, A_i$. Así, $\lim supA_i \subset A$. Así $A = \lim A_i$ $\square$

4 Teoremas de convergencia

Teorema 4.1. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es compacto*

Sea $\mathscr{P}$ como en 2.7 por el lema de la subbase de Alexander [2, P.4], bastá mostrar que para cada subcubierta de 2^X de elementos de $\mathscr{P}$ tiene una subcubierta finita, supongamos que $\mathcal{L} \subset \mathscr{P}$, donde

$$\mathcal{L} = \{\Gamma(U_\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \cup \{\Lambda(V_\omega) : \omega \in \Omega\}$$

es tal que $2^X = \bigcup \mathcal{L}$, es decir

$$2^X = \left[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Gamma(U_\sigma)\right] \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Sea $Y = X \setminus \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$, luego, consideremos los siguientes casos:

1. Si $Y = \emptyset$, entonces
$$X = \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}.$$
Como X es compacto, entonces existe un subconjunto finito Ω_0 de Ω tal que
$$X = \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega_0\}.$$
Afirmamos que $2^X = \bigcup_{\omega\in\Omega_0} \Lambda(V_\omega)$. Sea $A \in 2^X$, entonces $A \subset X$ y A es un cerrado en X pero además, $A \subset \bigcup_{\omega\in\Omega_0} V_\omega$, así que para cada $a \in A$ existe un $\omega_a \in \Omega_0$ tal que $A \cap V_{\omega_a} \neq \emptyset$, por lo que $A \in \langle X, V_{\omega_a}\rangle = \Lambda(V_{\omega_a})$, así $2^X = \bigcup_{\omega\in\Omega_0} V_\omega$. Por tanto, 2^X tiene una subcubierta finita.

2. Si $Y \neq \emptyset$, nótese entonces que Y es cerrado. Luego $Y \in 2^X$, afirmamos que para cualquier $\omega \in \Omega$, $Y \notin \Lambda(V_\omega)$. Supongamos que existe $\omega_0 \in \Omega$ tal que $Y \in \Lambda(V_{\omega_0})$, entonces, $Y \cap V_{\omega_0} \neq \emptyset$. Sea $y \in Y \cap V_{\omega_0}$, así $y \in V_{\omega_0} \subset \bigcup_{\omega\in\Omega} V_\omega$ y $y \in X \setminus \bigcup_{\omega\in\Omega} V_\omega$. Lo cual no puede ocurrir. Así $Y \in \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \Gamma(U_\sigma)$, es decir, $Y \subset U_\sigma$ para algún $\sigma \in \Sigma$. Luego
$$X \setminus U_\sigma \subset X \setminus Y = \bigcup_{\omega\in\Omega} V_\omega$$
Más aún $X \setminus U_\sigma \subset X$, con X compacto, entonces $X \setminus U_\sigma$ es compacto, así existe un subconjunto finito Σ_1 de Σ tal que
$$X \setminus U_\sigma \subset \bigcup_{\omega\in\Omega_1} V_\omega$$
Afirmamos que $2^X = \Gamma(U_\sigma) \cup \left[\bigcup_{\omega\in\Omega_1} \Lambda(V_\omega)\right]$. Sea $A \in 2^X$, si $A = Y$ ya terminamos, si $A \neq Y$ procedemos análogo como en el caso anterior. Por lo tanto 2^X es compacto.

Para mas información pertinente acerca, consulte [5, 4.24].

Corolario 4.2. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, para cada sucesión en 2^X tiene una sucesión parcial convergente. Más generalmente Si $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es cualquier sucesión de subconjuntos no vacíos de X, entonces existe una sucesión parcial $\{A_{i(j)}\}_{j=1}^\infty$ de $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ tal que* $\lim A_{i(j)}$ *existe como en* (3.2) *y es tal que* $\lim A_{i(j)} \in 2^X$.

Demostración. Como 2^X es compacto cada sucesión en 2^X tiene una sucesión parcial convergente. Ahora sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, consideremos $\{\overline{A_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que es una sucesión de compactos de 2^X, así por 3.5 existe una sucesión parcial convergente en 2^X digamos $\overline{A_{i_{(j)}}} \to A \in 2^X$ y además por 3.3 y 3.5 se tiene que

$$\lim A_{i_{(j)}} = \lim \overline{A_{i_{(j)}}} = A \in 2^X$$

$\square$

Definición 4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\varepsilon > 0$. Una $(d, \varepsilon) -$ cadena en X es un subconjunto finito no vació de X junto con una indexación, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, tal que*

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n-1.$$

Decimos que una $(d, \varepsilon) -$ cadena $\{x_1, \ldots, x_n\}$, con $p = x_1$ y $q = x_n$ va de p a q (cuando el orden para la indexación no es importante) o que une a p y q.

Se dice que un subconjunto Z de X esta $(d, \varepsilon) -$ encadenado (con $\varepsilon > 0$ fijo) siempre que dos puntos cualesquiera de Z puedan unirse mediante una $(d, \varepsilon) -$ cadena en Z.

Un subconjunto de X que es $(d, \varepsilon) -$ encadenado para cada $\varepsilon > 0$ se dice que esta $d -$ bien encadenado.

Lema 4.4. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X convergente a $A \in 2^X$. Si para cada A_i es un $(d, \varepsilon) -$ encadenado donde $\varepsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, entonces $A \in C(X)$.*

Demostración. Supongamos que A es no conexo, entonces A se puede representar como la unión de dos subconjuntos cerrados en A ajenos y no vacíos digamos K y L. Ahora como X es normal entonces existen U y V subconjuntos abiertos de X y ajenos tales que $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ y sin perdida de generalidad podemos suponer que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. De aquí obtenemos que $A \in \langle U, V \rangle$ que es un abierto en 2^X.

Como la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X, entonces existe N tal que

$$(1) \;\; A_i \in \langle U, V \rangle \;\; \text{para todo } i \geq N$$

Ahora sea

$$\delta = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in \overline{U} \text{ y } y \in \overline{V}\}$$

Por la compacidad de $\overline{U}$ y $\overline{V}$ tenemos que $\delta > 0$. Como $\epsilon_i \longrightarrow 0$ cuando $i \longrightarrow \infty$ existe $K \geq N$ tal que $\epsilon_K < \delta$, así por (1) tenemos que $A_K \in \langle U, V \rangle$ entonces $A_K \cap U \neq \emptyset$, $A_K \cap V \neq \emptyset$ y además $A_K \subseteq U \cup V$ pero A_K es (d, ϵ)-encadenado y $\epsilon_K < \delta$ por lo que existe un conjunto indexado $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A_K$ tales que $x_1 \in A_K \cap U$ y $x_n \in A_K \cap V$ y

$$d(x_i, x_{i+1}) \text{ para toda } i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$$

así

$$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon_K < \delta$$

notemos que $x_1 \in \overline{U}$ y $x_n \in \overline{V}$ se sigue que $\delta \geq d(x_1, x_n)$ lo que es absurdo pues $\epsilon_K < \delta$. □

Lema 4.5. *Sea X un espacio métrico, para cada $Z \subset X$ y para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto,*
$\mathcal{C}(Z, \varepsilon) = \{x \in X :$ *existe una (d, ε)-cadena en X de algún punto de Z a x* $\}$ *es un conjunto abierto, cerrado y no vacío en X*

Demostración. Sean $Z \subset X$ y $\varepsilon > 0$. y consideremos el conjunto $\mathcal{C}(Z, \varepsilon)$. Primero notemos que es no vacío. Como $Z \neq \emptyset$ entonces existe $a \in Z$, además $Z \subset X$ entonces consideremos nuestra (d, ε)-cadena como $\{x_0, x_1\}$ con $x_0 = a = x_1$, luego, $d(x_0, x_1) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$. Ahora mostremos que es abierto. Sea $x \in \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$, así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la (d, ε)-cadena con $x_1 = z$ y $x_n = x$ para algún $z \in Z$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ para $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ y mostremos que $x \in B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$.
Sea $b \in B(x, \varepsilon)$, definamos $y_j = x_j$ si $1 \leq j \leq n$ y $y_{n+1} = b$, así $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ es una (d, ε)-cadena, así, $b \in \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$, es decir, $\mathcal{C}(Z, \varepsilon)$ es un abierto en X. Por último probemos que es cerrado. Sea $b \in \overline{\mathcal{C}(Z, \varepsilon)}$. Luego $B(b, \varepsilon) \cap \mathcal{C}(Z, \varepsilon) \neq \emptyset$, entonces, existe $y \in B(b, \varepsilon) \cap \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$, así existe una (d, ε)-cadena $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, y\}$ con $x_1 = z \in Z$ para algún $z \in Z$, luego afirmamos que $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, y, b\}$ es una (d, ε)-cadena, lo cual es claro pues $y \in B(b, \varepsilon)$. así $b \in \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$. Es decir $\overline{\mathcal{C}(Z, \varepsilon)} = \mathcal{C}(Z, \varepsilon)$, por lo tanto es un cerrado en X. □

Teorema 4.6. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Como 2^X es compacto basta ver que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Sea $A \in 2^X$ tal que $A = \lim A_i$ donde cada $A_i \in C(X)$,

Ahora veamos que como cada A_i son conexos entonces son (d, ϵ) bien encadenados.

Sean $x \in A_i$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\{x\} \subset A_i$, consideremos, $\mathcal{C}(\{x\}, \epsilon)$ es abierto, cerrado y no vacío por 4.5 además es subconjunto de A_i el cuál es conexo así la única posibilidad es que $A_i = \mathcal{C}(\{x\}, \epsilon)$, es decir, A_i es bien encadenado. Luego, por el lema 4.4 se tiene que $A \in C(X)$ entonces es cerrado y por lo tanto compacto.

□

Corolario 4.7. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces: Para cada sucesión de subcontinuos de X tiene una sucesión parcial convergente a un subcontinuo de X, y, de este modo, toda sucesión convergente de un subcontinuo de X tiene un subcontinuo de X como su limite.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de X, más aún cada $A_i \in C(X)$ el cual es compacto, así existe una sucesión parcial convergente en $C(X)$ digamos $\{A_{i_{(j)}}\}_{j=1}^{\infty}$ a $A \in C(X)$, es decir a un subcontinuo de X además por 3.5

$$\lim A_{i_{(j)}} = A$$

□

5 Golpes a la frontera

¿Todos los continuos no degenerados contienen un subcontinuo propio no degenerado? Los siguientes pensamientos pueden estar pasando por tu mente: ¿Por qué no se me ocurrió esa pregunta? ¿Cómo pude haber leído tanto y no preguntarme nada al respecto?

Definición 5.1. *Sea S un espacio topológico. Una **componente** de S es un subconjunto conexo maximal de S. Si $p \in S$, entonces C_p, definido por*

$$C_p = \bigcup \{A \subset S : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}$$

es claramente una componente de S, dado que las componentes de S deben ser mutuamente disjuntas, llamamos componente de p en S o componente de

S que contiene p. De manera más general, si $Y \subset S$, la frase componente de Y en S o el componente de S que contiene a Y significa el subconjunto conexo maximal de S que contiene a Y (si existe). Sin embargo, para $Y \subset S$, la frase componente de Y se refiere a una componente de Y en Y donde Y tiene la topología subespacio. Observamos que cualquier componente de S es un subconjunto cerrado de S (ya que la cerradura de un conjunto conexo es conexo) y que todo subconjunto conexo de S está contenido en una componente de S.

Teorema 5.2 (Teorema del cable cortado)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sean A y B subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X interseca a A y B (de manera equivalente, ningún componente de X lo hace), entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados disjuntos de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Demostración. No sabemos si existe una cadena que una a $a \in A$ con $b \in B$, supongamos que $\forall i \in \mathbb{N}$ existe una $(d, \frac{1}{2^i})$- cadena K_i en X que une un punto $a \in A$ con un punto $b \in B$. Como X es un espacio métrico compacto por 4.2, existe una sucesión parcial $\{K_{i_{(j)}}\}$ de $\{K_i\}$ convergente a $K \in 2^X$ más aún $K \in C(X)$ y $K \cap A \neq \emptyset$ y $K \cap B \neq \emptyset$ pues $a \in A \cap K$ y $b \in B \cap K$ lo cual es una contradicción. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{C}(A, \varepsilon) \cap B = \emptyset$. Haciendo $X_1 = \mathcal{C}(A, \epsilon)$ y $X_2 = X - \mathcal{C}(A, \epsilon)$ tal que $X = X_1 \cap X_2$ cerrados y ajenos tal que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$ □

Los siguientes resultados son llamados teoremas de golpes en la frontera porque dicen que en condiciones leves, una componente de un conjunto debe "golpear (intersectar) a la frontera" del conjunto. La noción (topológica) de frontera se define de la siguiente manera.

Definición 5.3 (Definición de Frontera)**.** *Sea S un espacio topológico, y sea $H \subset S$. Entonces la frontera de H (en S),denotada por $Bd_s(H)$ o de manera más simple, como $Bd(H)$, se define por*

$$Bd(H) = \overline{H} \cap (\overline{S - H}).$$

Cabe destacar que cuando decimos frontera de H y escribimos $Bd(H)$, nos referimos a la frontera de H, en el espacio más grande que estemos considerando.

Teorema 5.4 (Teorema de golpe en la frontera I). *Sea X un continuo, y sea U un subconjunto abierto, propio y no vacío de X. Si K es un componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Bd(U) \neq \emptyset$ (de manera equivalente, ya que $K \subset \overline{U}$ y U es abierto, $K \cap (X - U) \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos que $K \cap Bd(U) = \emptyset$. Como K es cerrado y $Bd(U)$ es cerrado entonces por el teorema del cable cortado se cumple que $\overline{U} = M_1 \cup M_2$ donde M_1, M_2 son cerrados y ajeno de $\overline{U}$ con $K \subset M_1$ y $Bd(U) \subset M_2$. Sea $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$, notemos que $X = M_3 \cup M_1$, además M_1, M_3 son cerrados en X y además $K \neq \emptyset$ pues es componente de $\overline{U}$ y $K \subset M_1$ entonces $M_1 \neq \emptyset$ y como $X \setminus U \subset M_3$ y $U \neq \emptyset$ y $U \neq X$ entonces $X \setminus U \neq \emptyset$ y así $M_3 \neq \emptyset$.
Ahora como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (X \setminus U)$, Notemos que $M_1 \subset \overline{U}$ y $X \setminus U$ es cerrado en X, así $M_1 \cap M_3 \subset \overline{U} \cap (X \setminus U) = \overline{U} \cap \overline{X \setminus U} = Bd(U) \subset M_2$. Como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ entonces $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Así M_1, M_3 es una separación de X lo cuál es una contradicción pues X es conexo. Así $K \cap Bd(U) \neq \emptyset$ □

Corolario 5.5. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces, X contiene un subconjunto propio no degenerado. Además: si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que*

$$A \subset B \neq A \quad y \quad B \subset U.$$

Demostración. Probemos la segunda parte.
Sea $V \subset X$ abierto tal que $A \subset V$ y $\overline{V} \subset U$ y $V \neq \emptyset$. Ese V existe pues los continuos cumplen la propiedad $T_{3\frac{1}{2}}$.
Sea B una componente de $\overline{V}$ que contiene a A. Como $A \subset V$, entonces $B \neq A$. Para la primera parte. Sea $U = X$. Sean $p, q \in X$ tales que $p \neq q$ y $X \setminus \{p\} = C$.
Notese que $\{q\} \subset C$, por lo anterior existe B subcontinuo de X tal que $\{q\} \subset B \neq \{q\}$ y $B \subset C$. por lo que $B \neq X$ □

Teorema 5.6 (Teorema de golpe en la frontera II). *Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es un componente de E, entonces $\overline{K} \cap Bd(E) \neq \emptyset$ (de manera equivalente, $\overline{K} \subset \overline{E}, \overline{K} \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos que $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} = \emptyset$. Además $\overline{K} \neq \emptyset$ y $\overline{X \setminus E} \neq \emptyset$ pues E es un subconjunto propio de X. Notemos que $\overline{K}$ es un subconjunto

cerrado de X, luego $\overline{K}$ es compacto, y además es conexo pues K lo es, así K es un subcontinuo propio de X.
Ahora sea $U = X \setminus \overline{X \setminus E} = Int(E)$, veamos que $\overline{K} \subset U$ y $U \subset E$, y U es abierto por 5.5 existe B un subcontinuo de X tal que $\overline{K} \subset B \neq \overline{K}$ y $B \subset U \subset E$. Notemos que B es un subconjunto conexo que contiene propiamente a K, lo que contradice que K es una componente de E □

Teorema 5.7 (Teorema de golpe en la frontera III)**.** *Sea X, E y K que satisfacen las hipótesis del segundo teorema de golpes a la frontera. Si E es abierto en X, entonces*

$$\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset, \text{ es decir, } \overline{K} \setminus E \neq \emptyset.$$

Si E es cerrado en X, entonces

$$K \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset.$$

Demostración. Por el segundo teorema de golpes a la frontera $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$
i) Si E es abierto, luego $\overline{X \setminus E} = X \setminus E$, luego, $\overline{K} \cap X \setminus E \neq \emptyset$, es decir, $\overline{K} \setminus E \neq \emptyset$.
ii) Si E es cerrado, luego, como $K \subset E$ entonces $\overline{K} \subset E$, así, $\overline{K} \cap B_d(E) \neq \emptyset$, es decir $\overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$

□

Teorema 5.8. *Sean X un continuo y sea $A \subset B$ un subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X \setminus B$ tal que $\overline{K} \setminus K \subset A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

Demostración. Sea K una componente de $X \setminus B$ un abierto, por el resultado anterior $\overline{K} \cap B \neq \emptyset$ y $K \cap B = \emptyset$ como $\overline{K} \setminus K \subset A$ entonces $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$ entonces $\overline{K} \cup A$ es conexo, además es cerrado por lo tanto un compacto, es decir, un continuo, falta demostrar que $K \cup A = \overline{K} \cup A$

Tenemos $K \cup A \subset \overline{K \cup A} = \overline{K} \cup \overline{A} = \overline{K} \cup A$. Sea $x \in \overline{K} \cup A$ luego $x \in A$ y $x \in \overline{K}$ i) Si $x \in A$, $x \in A \cup K$.
ii) Si $x \in \overline{K}$ entonces ocurren dos casos, si $x \in K$ entonces $x \in A \cup K$. Si $x \in K$ entonces $x \in \overline{K} \setminus K \subset A$ entonces $x \in A \cup K$

□

Corolario 5.9. *Sea X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X \setminus A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

Demostración. Como K es cerrado en $X \setminus A$ entonces $\overline{K} \setminus K \subset A$. Así se sigue por 5.8 $\square$

Definición 5.10. *Sea (S, T) un espacio topológico. Si $p \in S$, entonces S es* ***conexo en pequeño*** *en p, escrito cik en p, siempre que cada vecindad de p contenga una vecindad conexa de p (vecindad no significa vecindad abierta al ser G una vecindad de p significa que hay un $U \in T$ tal que $p \in U \subset G$). Es importante señalar que, aunque claramente no hay pérdida de la generalidad en suponer que la primera vecindad de p sea abierta, se pierde generalidad al exigir que la vecindad conexa de p sea abierta.*

Definición 5.11. *Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo A no degenerado de X se llama* ***continuo de convergencia*** *(de X), siempre que exista una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de A_i de X tal que*

$$A = \lim A_i, \quad A \cap A_i = \emptyset \text{ para cada } i.$$

Notemos que si X es compacto, los continuos A_i como se muestran arriba, pueden elegirse de manera que, además, sean mutuamente disjuntos.

Teorema 5.12 (Continuo de convergencia). *Sea X un continuo y sea*

$$N = \{x \in X : X \text{ no es cik en } x\}$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

Demostración. Como $p \in N$, existe una vecindad U de p tal que toda vecindad de p contenida en U no es conexa, además existe W abierto tal que $p \in W \subset \overline{W} \subset U$, consideremos el conjunto cerrado $\overline{W} = M$ que es una vecindad de p tal que si C es la componente de p en M, entonces $p \notin int(C)$. Así, $p \in \overline{M \setminus C}$ y existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} &(1)\ \ p_i \longrightarrow p, \text{cuando } i \longrightarrow \infty. \\ &(2)\ \ p_i \in M \setminus C, \text{para todo } i. \end{aligned}$$

Para toda $i \in \mathbb{N}$, denotemos a C_i al componente de p_i en M. Si para algún $i \in \mathbb{N}$, tuviésemos $C \cap C_i \neq \emptyset$, entonces $C \cup C_i$ sería un subcontinuo de M ya que C es un componente de M, implicaría $C_i \subset C$, luego $p_i \in C$ lo cual es una contradicción en (2). Por lo tanto

$$(3)\ \ C \cap C_i = \emptyset, \text{para toda } i \in \mathbb{N}$$

Ahora, el límite C' de una sucesión convergente de $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ debe ser un continuo de convergencia, y $p \in C'$ por (1); sin embargo C' no necesariamente puede estar contenido en N. Esto es remediado como sigue: sea Q un conjunto cerrado que es una vecindad de p tal que

$$(4)\ \ Q \subset int(M).$$

Por (1) suponemos sin perdida de generalidad que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $p_i \in Q$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ denotemos por K_i al componente de p_i en Q. Como $Q \subset M$, podemos ver que

$$(5)\ \ K_i \subset C_i, \text{para todo } i \in \mathbb{N}$$

La suscesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{K_{i_{(j)}}\}_{j=1}^{\infty} \to K$

$$(6)\ \ K = \lim K_{i_j}.$$
$$(7)\ \ K \text{ es un subcontinuo.}$$

Como $p_{i(j)} \in K_{i(j)}$ para cada j por (1) y (6) Puesto que $K = \lim K_{i(j)}$ entonces fijemos $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_{i(j)} \in B_H(K, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ para } j \geq N_1$$

es decir $H_d(K, K_i(j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $j \geq N$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(p_{i(j)}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $j \geq N_2$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Tenemos que $K_i(j) \subset N_d(K, \frac{\varepsilon}{2})$ luego $p_{i(j)} \in N_d(K, \frac{\varepsilon}{2})$ para cada $j \geq N$ es decir $d(p_{i(j)}, k_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún $k_j \in K$, luego

$$\begin{aligned} d(p, k_j) &\leq d(p, p_{i(j)}) + d(p_{i(j)}, k_j) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario entonces $k_j \in B(p, \varepsilon)$ es decir $p \in \overline{K}$ es decir

$$(8)\ \ p \in K.$$

Además cada $K_{i(j)} \subset Q$ y Q es cerrado en X. Sea $t \in K$ como $\lim K_{i(j)} = K$ entonces dado $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset N_d(K_{i(j)}, \frac{1}{n}) \text{ para } j \geq N'$$

entonces existe $t_{i(j)} \in K_{i(j)}$ tal que $d(t_{i(j)}, t) \leq \frac{1}{n}$, Como $K_{i(j)} \subset Q$ entonces $\{t_{i(j)}\} \subset Q$ cuando $j \geq N'$. Además cuando $n \to \infty$ entonces $t_{i(j)} \to t$, así $t \in Q$ pues Q es cerrado. así

$$(9)\ \ K \subset Q$$

Por (9) y (4) se cumple que $K \subset M$. Como C es componente de p en M de 7) y 8) se sigue

$$(10)\ K \subset C$$

Además de $(5), (10), (3)$ se cumple que $K \cap K_{i(j)} = \emptyset$ pues $K \subset C$ y $K_i \subset C_i$ entonces $K \cap K_{i(j)} \subset C \cap C_{i(j)} = \emptyset$. Así K es un continuo de convergencia. Por la segunda parte del tercer teorema de golpes a la frontera, como Q es cerrado entonces $K_{i(j)} \cap \overline{X \setminus Q} \neq \emptyset$ para $j \in \mathbb{N}$, como $\lim K_{i(j)} = K$ entonces

$$K \cap \overline{X \setminus Q} \neq \emptyset$$

Pues existe $w_{i(j)} \in K_{i(j)} \cap \overline{X \setminus Q}$, luego, existe $\{l_{k(j)}\} \subset X \setminus Q$ tal que $l_{k(j)} \to w_{i(j)}$ para $\frac{1}{n}$ existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $d(l_{k(j)}, w_{i(j)}) < \frac{1}{n}$, para $j \geq N_3$ y N_4 tal que $K_{i(j)} \subset N_d(K, \frac{1}{n})$ para $j \geq N_4$. Tomemos $N'' = \max\{N_3, N_4\}$ y veamos que existe $r_{i(j)} \in K$ tal que $d(w_{i(j)}, r_{i(j)}) < \frac{1}{n}$ así

$$\begin{aligned} d(l_{k(j)}, r) &\leq d(l_{k(j)}.w_{i(j)}) + d(w_{i(j)}, r_{i(j)}) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \text{ cuando } j \geq N'' \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ entonces $l_{k(j)} \to r_{i(j)}$ así $r \in \overline{X \setminus Q}$, luego $K \cap \overline{X \setminus Q} \neq \emptyset$. Como $p \in K$ y $p \in Q$ entonces $p \notin \overline{X \setminus Q}$. Por lo tanto K es no degenerado. Probemos ahora que $K \subset N$, supongamos lo contrario, así existe $x \in K \setminus N$, como $x \in K$ por (9) y (4)

$$(11)\ M \text{ es una vecindad de } x$$

Por (10) se tiene

$$(12)\ C \text{ es componente de } x \text{ en } M$$

Pero $x \notin N$ es decir, x es conexo en pequeño en X, por (11) existe una vecindad conexa G de x tal que $G \subset M$, así por (12) se cumple

$$(13)\ G \subset C$$

Como $x \in K$ por (6) y (5)

$$x \in \operatorname{lím\,sup} K_i \subset \operatorname{lím\,sup} C_i$$

por esto, como G es vecindad de x entonces $G \cap C_l \neq \emptyset$ para alguna l por (3) $C \cap C_l = \emptyset$, lo cual es una contradicción, así $K \subset N$. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar este capítulo.

Referencias

[1] K. Kuratowski, *Topology, vol. I*, Academic Press, New York, 1966.

[2] K. Kuratowski, *Topology, vol. II*, Academic Press, New York, 1968.

[3] Ernest Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., 71(1951), 152–182.

[4] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Text-books in Pure and Applied Math., vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1978.

[5] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[6] Tamariz Mascarúa, Ángel, Fidel Casarrubias Segura. Elementos de topología general. Coyoacán, Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.

217–235.

[7] R. E. Smithson, *First countable hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 56(1976), 325–238.

[8] L. Vietoris, *Bereiche Zweiter Ordnung*, Monatshefte für Math. und Physik, 32 (1922), 258–280.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
jose.ortegabec@alumno.buap.mx

Índice de autores

Alvarado García, Alejandro, 5
Arriaga Hernández, Jesús Alonso, 69

Cejudo Castilla, César, 5
Cuevas Otahola, Bolivia, 69

Domínguez Málaga, Daniel, 154

Garcia Remigio, Carlos Manuel, 97

Herrera Carrasco, David, 133, 154, 189

Macías Romero, Fernando, 133, 154, 189
Martínez García, Armando, 43
Morín Castillo, María Monserrat, 69

Oliveros Oliveros, José Jacobo, 69
Ortega Becerril, José Alberto, 189
Ortiz Ramírez, Ambrosio, 97

Pineda Ramírez, Luis Enrique, 5
Pino Pérez, Ramón, 69

Rodríguez Hernández, David, 133

Matemáticas y sus aplicaciones 23
Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco
16 octubre de 2024
pdf
6 MB