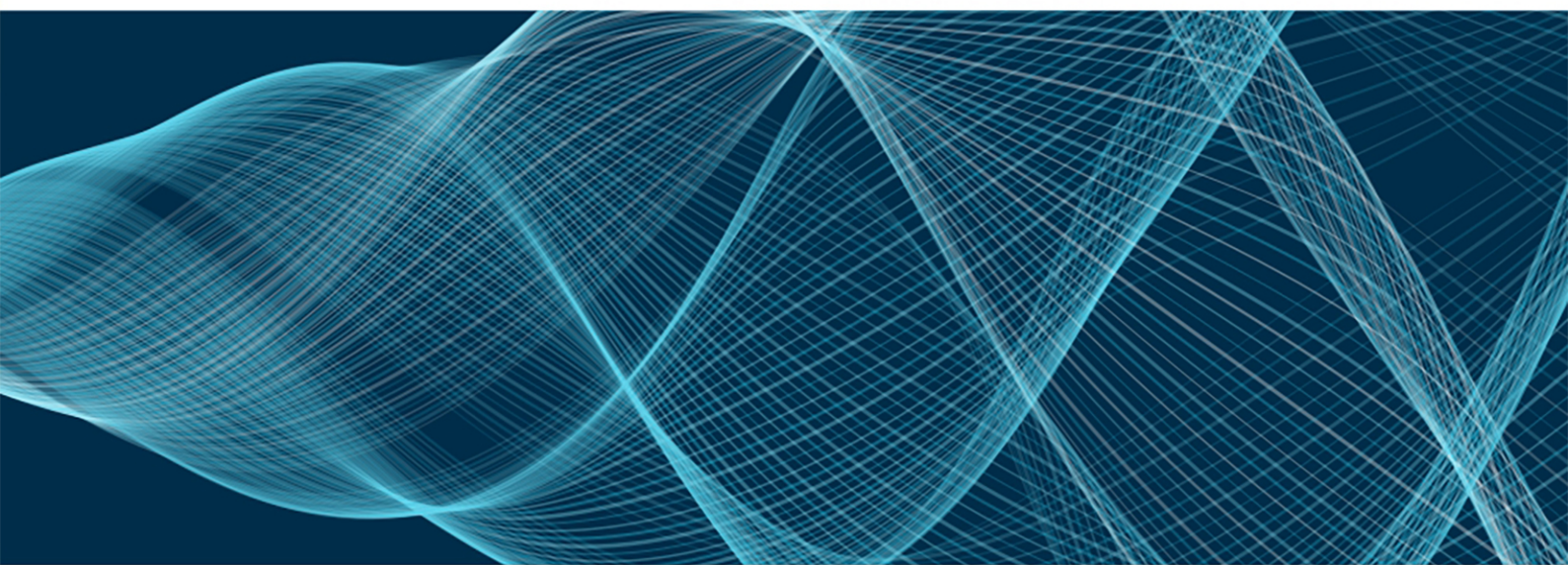




Dirección
General de
Publicaciones



Topología y sus aplicaciones 12

JOSÉ JUAN ANGOA AMADOR
AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO
RAÚL ESCOBEDO CONDE
MARÍA DE JESÚS LÓPEZ TORIZ

editores



MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Topología y sus aplicaciones 12

Editores literarios

José Juan Angoa Amador
Agustín Contreras Carreto
Raúl Escobedo Conde
María de Jesús López Toriz

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL: DAMIÁN HERNÁNDEZ
MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DIFUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO
CALDERÓN. DIRECTOR GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA
GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-68-9

D.R. BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP
72000

TELÉFONO: 222 229 55 00

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE
PUBLICACIONES

2 NORTE 1404, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP
72000

TELÉFONO: 222 246 85 59

LIBROS.DGP@CORREO.BUAP.MX |
WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA:
Daniel Domínguez Málaga

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Presentación

El cuerpo académico de topología y sus aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, pone a la luz el nuevo volumen de su serie de textos en topología^[1]. Persistimos en nuestra propuesta de origen: ofrecer un lugar para generar y difundir conocimiento en topología y temas afines, con artículos expositivos y de investigación, de motivación para estudiantes y de interés para especialistas.

Entre los doce capítulos que componen este volumen se exponen temas de topología general, de teoría de continuos y de hiperespacios de conjuntos: se presenta un estudio del clásico plano de Niemyntzki, se incluyen exposiciones de los espacios estrella P , de la Lindelöfización de espacios discretos y del problema de Efimov (concerniente con la presencia de compacidad en ausencia de sucesiones convergentes), la propiedad $[\theta, \kappa]$ -compacidad, el teorema de Erdős-Rado, también una revisión de los axiomas de separación desde la óptica de la noción de marco. En los temas de continuos e hiperespacios se entrega un estudio de sucesiones inversas con funciones conjunto-valuadas, cuyo límite inverso es el conjunto de Cantor, también se analiza el comportamiento de la propiedad de Kelley en dendroides, y se estudian funciones especiales entre continuos que preservan esta propiedad; además, se estudia el hiperespacio de los conjuntos que no cortan en árboles, y una nueva variante de hiperespacios suspensión. Los trabajos en este libro aportan resultados originales o pruebas nuevas de hechos conocidos.

En esta entrega colaboran personas de las siguientes instituciones: Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas (BUNACH), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca (UABJO), Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx), Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSH), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

Agradecemos a los autores por elegir nuestro libro para publicar sus investigaciones, a los árbitros por sus cuidadosas revisiones y, especialmente, a ti que nos lees.

Los editores
Agosto de 2026

¹Esta serie inició en 2007; los primeros volúmenes se denominan Topología y sistemas dinámicos I-IV, los siguientes Topología y sus aplicaciones 1-11. Contacto de editores: jangoa@fcfm.buap.mx, acontri@fcfm.buap.mx, escobedo@fcfm.buap.mx, mjlopez@fcfm.buap.mx,

Contenido

CAPÍTULO 1. Algunas propiedades del Plano de Niemytzki <i>Alicia Santiago Santos y Noé Trinidad Tapia Bonilla</i>	3
CAPÍTULO 2. Fundamentos de la teoría de los espacios estrella P <i>Alejandro Ríos Herrejón</i>	35
CAPÍTULO 3. La Lindelöfización unipuntual de espacios discretos <i>Fidel Casarrubias Segura</i>	73
CAPÍTULO 4. Asignaciones de vecindad y $[\theta, \kappa]$ -compacidad <i>Iván Martínez Ruiz, Oleg Okunev y Alejandro Ramírez Páramo</i>	97
CAPÍTULO 5. Un primer acercamiento al Problema de Efimov <i>Alexis Chávez Cortés y Alejandro Ríos Herrejón</i>	111
CAPÍTULO 6. El Teorema de Erdős-Rado y el Lema del Δ -sistema <i>Luis Enrique Aponte Pérez, Iván Martínez Ruiz, Cesar Alonzo Moreno Espinoza, Oleg Okunev</i>	149
CAPÍTULO 7. Separación en espacios topológicos y marcos <i>José Juan Angoa Amador y Luis Alberto Reyes Macías</i>	163
CAPÍTULO 8. Ejemplos que tienen como límite inverso generalizado el conjunto de Cantor <i>David Maya Escudero y Mónica Sánchez Garrido</i>	179
CAPÍTULO 9. El hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles <i>Florencio Corona Vázquez, Raúl Escobedo Conde y Eduardo García Muñoz</i>	197
CAPÍTULO 10. Equivalencias de la propiedad de Kelley en dendroides <i>María de Jesús López Toriz y Paula Ivón Vidal Escobar</i>	215

CAPÍTULO 11. Hiperespacios suspensión mediante hiperespacios intersección en continuos	231
---	-----

*Florencio Corona Vázquez, José Antonio Martínez Cortez,
Russell Aarón Quiñones Estrella y Javier Sánchez Martínez*

CAPÍTULO 12. Algunas funciones especiales entre continuos que preservan la propiedad de Kelley	251
---	-----

*María de Jesús López Toriz, Andrés Alejandro Olivares Jorge y
Gerardo Hernández Valdez*

CAPÍTULO 1

Algunas propiedades del Plano de Niemytzki

Alicia Santiago Santos

Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

Noé Trinidad Tapia Bonilla

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, Oaxaca de Juárez, Oaxaca, México

1. Introducción	3
2. Preliminares	4
3. Plano de Niemytzki	5
Bibliografía	33

1. Introducción

La topología es una rama importante de las matemáticas, la cual se dedica al estudio de las propiedades de los cuerpos que permanecen inalteradas bajo transformaciones continuas. El primer matemático en usar la palabra topología fue J. B. Listing, alumno de C. F. Gauss en su libro titulado “Vorstudien zur Topologie” en el año de 1847. Sin embargo, la definición de espacio topológico abstracto que actualmente conocemos fue dada hasta 1914 por F. Hausdorff, para conocer más historia sobre espacios topológicos puede consultar [14, 16]. Debido a que las ideas topológicas están presentes en muchas disciplinas de la matemática, es importante su estudio.

Por otro lado, sabemos que los contraejemplos juegan un papel fundamental para la comprensión de la matemática, en topología, el espacio topológico, el plano de Niemytzki, es un “contraejemplo universal” al igual que la línea de Sorgenfrey [2], razón por la cual consideramos importante su análisis. Cabe mencionar que una motivación para realizar este trabajo fue justamente [2]. Así, consideramos que el presente trabajo reúne algunos resultados interesantes respecto a este famoso espacio.

Este espacio nos sirve para demostrar varias cosas, algunas de ellas son: los espacios de Tychonoff no necesariamente son normales, los espacios primero numerables no necesariamente son segundo numerables, un subespacio de un espacio separable no necesariamente es separable y que no hay implicación alguna entre los conceptos de separable y Lindelöf, conceptos indispensables en un primer curso de Topología general, sin embargo, en este trabajo tratamos de abordar otros conceptos que no necesariamente se abordan en un primer curso de topología general. En este escrito pretendemos hacer una presentación sobre algunos resultados interesantes del plano de Niemytzki, con la finalidad de hacer lo más autocontenido posible este escrito, en la sección dos introducimos algunas definiciones y notaciones que se usarán a lo largo de este capítulo.

Posteriormente, en la sección tres presentamos los resultados principales que conforman este escrito, para ello, tal sección se dividió en seis subsecciones. Iniciamos esta sección definiendo el plano de Niemytzki. Luego, en la primera subsección se analizan los conceptos de conjuntos π -cerrados y π -abiertos en un espacio topológico. Además, vemos cuales subconjuntos del plano son π -cerrados y π -abiertos. Posteriormente, en la subsección dos se revisan algunas propiedades generales de este espacio. Finalmente, en las subsecciones tres, cuatro, cinco y seis se revisan los axiomas de separación, los axiomas de numerabilidad, así como, algunos tipos de compacidad y conexidad en el plano de Niemytzki.

2. Preliminares

Para reunir todos los elementos necesarios que nos permita la comprensión de los resultados expuestos en este capítulo, en esta sección presentamos conceptos básicos y generales, así como la notación que utilizaremos durante el desarrollo de este trabajo. Para notación y terminología no dada aquí, vea [2].

Parte I. Notación general.

Los símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ designarán, como es costumbre, a los conjuntos de los números reales, los enteros, los racionales y naturales, respectivamente. Dado un conjunto X denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ a la colección de todos los subconjuntos de X , es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

Dados X y Y conjuntos, $f : X \rightarrow Y$ una función y $A \subseteq X$, el símbolo $f|_A$ denota la restricción de f al subconjunto A . Además, denotamos por id_X a la función identidad de X sobre X . Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces los símbolos $\text{int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y $X \setminus A$ denotan el interior, la cerradura, la frontera y el complemento de A con respecto a X , respectivamente. Además, utilizamos el símbolo $\times$ para el producto cartesiano de espacios (con la topología producto). Dado $Y \subseteq X$, denotaremos por $(\tau)_Y$ a la topología que hereda Y como subespacio de X .

Ahora, supongamos que dado I un conjunto de índices cualesquiera para cada $i \in I$ se tiene definido un único subconjunto A_i . La unión de la familia $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, denotada por $\bigcup \mathcal{A}$, es el conjunto

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

De manera análoga, definimos la intersección de la familia $\mathcal{A}$, denotada por $\bigcap \mathcal{A}$, como el conjunto

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Parte II. Terminología general.

Dados un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$, un subconjunto V de X se llama vecindad (o entorno) de x , si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq V$. A la colección de vecindades de x le llamamos sistema de vecindades de x y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Una base de vecindades de x , es una colección $\mathbb{B}_x \subseteq \mathcal{V}(x)$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}(x)$

podemos encontrar $B_x \in \mathbb{B}_x$ con $B_x \subseteq V$. Además, $Y \subseteq X$ es denso en X si y sólo si para todo abierto de X diferente del vacío se tiene que $U \cap Y \neq \emptyset$.

A continuación vamos a presentar algunos ejemplos de espacios topológicos con los cuales estaremos trabajando en este escrito.

- (1) Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita, la cual denotaremos por τ_{cof} .
- (2) Sean (X, d) un espacio métrico, un punto $x \in X$ y un número real positivo ϵ , como es usual $B_\epsilon(x)$ representa la bola abierta de radio ϵ con centro en x . Por otro lado, la bola cerrada con centro en x y de radio $\epsilon > 0$ la definimos y denotamos por $B_\epsilon[x]$, y es el conjunto

$$B_\epsilon[x] = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Vamos a denotar por τ_d la topología en (X, d) inducida por la métrica d .

Como es usual, la topología del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ generada por la métrica del valor absoluto la denotaremos por τ_u . De igual manera, denotaremos por τ_E la topología euclidiana de $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, diremos que los conjuntos A y B son equipotentes (o tienen la misma cardinalidad si hay una función biyectiva con dominio A y rango B). Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A es equipotente con el conjunto $\{1, \dots, n\}$. En este caso decimos que A tiene n elementos o que el número cardinal de A es n y denotamos por $|A|$. Un conjunto es infinito si no es finito. Además, decimos que un conjunto A es numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$ y el número cardinal de $\mathbb{N}$ lo denotaremos por $\aleph_0$. Para mayor información sobre este tema, puede revisar [11].

3. Plano de Niemytzki

En esta sección vamos a definir el Plano de Niemytzki y a mostrar algunas de sus propiedades. Para esto, consideremos el subconjunto de $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$, $X = \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Para cada $p = (x, y) \in X$ y cada $\epsilon > 0$, sean

$$\begin{aligned} B_\epsilon^T(p) &= \{q \in X : d((x, \epsilon), q) < \epsilon\} \cup \{p\} = B_\epsilon((x, \epsilon)) \cup \{p\}, \quad \text{si } y = 0; \\ B_\epsilon(p) &= \{q \in X : d(p, q) < \epsilon\}, \quad \text{si } y > 0, \end{aligned}$$

donde d es la métrica Euclidiana sobre el plano $\mathbb{R}^2$. Para cada $p = (x, y) \in X$, consideramos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^T(p) &= \{B_\epsilon^T(p) : \epsilon \in \mathbb{R}^+\}, \quad \text{si } y = 0; \\ \mathcal{B}(p) &= \{B_\epsilon(p) : \epsilon \in \mathbb{R}^+\}, \quad \text{si } y > 0. \end{aligned}$$

La familia

$$\tau^* = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : \text{para cada } p \in A, \text{ existe } V \in \mathcal{B}^T(p) \cup \mathcal{B}(p), \text{ con } V \subseteq A\},$$

es una topología en X , y cada $\mathcal{B}^T(p)$ ó $\mathcal{B}(p)$ es una base de vecindades de $p \in X$ (vea [5, pág. 33, 1.38] o [20, pág. 8, 1.1.14]). Al conjunto X con esta topología le llamamos El Plano de Niemytzki y lo denotaremos por η .

A continuación establecemos tres observaciones sobre algunos subconjuntos de η .

OBSERVACIÓN 3.1. Haciendo $P = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ y $L = \mathbb{R} \times \{0\}$, tenemos que $X = P \cup L$. Esta última forma de escribir a X como una unión de dos conjuntos disjuntos, nos permite establecer algunas observaciones y propiedades sencillas del plano de Niemytzki η .

- (i) Es claro que P es un conjunto abierto en el plano de Niemytzki η , así que $L = X \setminus P$ es un conjunto cerrado del plano de Niemytzki η .
- (ii) De la definición del plano de Niemytzki η , tenemos que cada conjunto abierto y no vacío en η intersecta a P , es decir, P es denso en η .
- (iii) Para cada $p = (x, 0) \in L$ y cada entorno básico, $B_\epsilon^T(p)$, de p , se tiene que $B_\epsilon^T(p) \cap L = \{p\}$. De modo que la topología relativa en L con respecto al plano de Niemytzki η , coincide con la topología discreta sobre L .
- (iv) La topología que hereda P como subespacio del plano de Niemytzki η , coincide con la topología que hereda como subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

Las observaciones siguientes serán útiles en la subsección 4.

OBSERVACIÓN 3.2. Consideremos el plano de Niemytzki η . Sean $(x, 0) \in X$ y $(a, b) \in B_\delta^T((x, 0))$. Llamemos $p_1 = (x, 0)$, $p_2 = (a, 0)$ y $p_3 = (a, b)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \sqrt{(a-x)^2 + 0^2} = \sqrt{(a-x)^2} = |a-x|, \\ d(p_2, p_3) &= \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = |b|, \\ d(p_1, p_3) &= \sqrt{(a-x)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Note que los puntos p_1 , p_2 y p_3 forman un triángulo rectángulo. Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que $(d(p_1, p_3))^2 = (d(p_2, p_3))^2 + (d(p_1, p_2))^2$. Así, $\left(\sqrt{(a-x)^2 + b^2}\right)^2 = |b|^2 + |a-x|^2$. Lo cual implica que:

$$(1.1) \quad |x-a|^2 + |b|^2 = |(a, b) - (x, 0)|^2.$$

OBSERVACIÓN 3.3. Sean $\delta, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \delta < \frac{1}{2}$ y $0 < \alpha < 1$. Se tiene que $\delta\alpha < \delta$. Esto implica que $B_{\delta\alpha}(x, \delta\alpha) \subseteq B_\delta(x, \delta)$.

3.1. Conjuntos π -cerrados. En esta subsección presentamos un estudio de los conceptos de dominio abierto y dominio cerrado en un espacio topológico, y probamos que L es un conjunto π -cerrado en el plano de Niemytzki η (Lema 3.29). Por tal razón, iniciamos esta subsección con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.4. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que:

- A es un dominio cerrado en X si $A = \overline{\text{int}(A)}$.
- A es un dominio abierto en X si $A = \text{int}(\overline{A})$.
- A es π -cerrado en X si es una intersección finita de subconjuntos que son dominios cerrados en X .
- A es π -abierto en X si es una unión finita de subconjuntos que son dominios abiertos en X .

NOTA 3.5. Los dominios cerrados también son llamados regularmente cerrado y los dominios abiertos son también llamados regularmente abiertos.

OBSERVACIÓN 3.6. *Los dominios abiertos son conjuntos abiertos y los dominios cerrados son conjuntos cerrados.*

La prueba del siguiente Lema 3.7 se sigue de la Definición 3.4.

LEMA 3.7. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces se tiene que:*

- (a) *Si A es un dominio abierto en X , entonces A es π -abierto en X .*
- (b) *Si A es un dominio cerrado en X , entonces A es π -cerrado en X .*
- (c) *Si A es π -cerrado en X , entonces A es un conjunto cerrado en X .*
- (d) *Si A es π -abierto en X , entonces A es un conjunto abierto en X .*

En el ejemplo que sigue se muestra que cualquier intervalo cerrado es un dominio cerrado y cualquier intervalo abierto es un dominio abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

EJEMPLO 3.8. *Considere el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Observe que $[a, b] = \overline{\text{int}([a, b])}$, esto es, $[a, b]$ es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Así, por el inciso (b) del Lema 3.7 se tiene que $[a, b]$ es π -cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

Por otro lado, $(a, b) = \text{int}(\overline{(a, b)})$. Es decir, (a, b) es un dominio abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Luego, por el inciso (a) del Lema 3.7 se tiene que (a, b) es π -abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

En el ejemplo que sigue se muestra que la intersección de dos dominios cerrados no necesariamente es un dominio cerrado.

EJEMPLO 3.9. *Considere el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Por el Ejemplo 3.8 se sabe que $[0, 1]$ y $[1, 2]$ son dominios cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Sin embargo, $[0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$ no es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

A continuación se exhibe un ejemplo, el cual muestra que la unión de dos dominios abiertos no necesariamente es un dominio abierto.

EJEMPLO 3.10. *Considere el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$, por el Ejemplo 3.8 se sabe que $A = (1, 2)$ y $B = (2, 3)$ son dominios abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Observe que $A \cup B = (1, 3) \setminus \{2\}$. Mientras que $\text{int}(\overline{A \cup B}) = (1, 3)$. Por lo tanto, $A \cup B$ no es un dominio abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

En el ejemplo que sigue se muestra que toda bola cerrada en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$, es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ y por lo tanto, es un conjunto π -cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

EJEMPLO 3.11. *Consideremos el espacio $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$, $p \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$. Notemos que:*

$$\overline{B_\epsilon(p)} = \overline{\text{int}(\overline{B_\epsilon(p)})}.$$

En consecuencia, $\overline{B_\epsilon(p)}$ es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$. Además, $B_\epsilon[p] = \overline{B_\epsilon(p)}$. En consecuencia, $B_\epsilon[p]$ es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$. Por lo tanto, por el inciso (b) del Lema 3.7 se obtiene que $B_\epsilon[p]$ es π -cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

EJEMPLO 3.12. *Consideremos el plano de Niemytzki η , $p \in P$ y $\epsilon > 0$. Se tiene que $\overline{B_\epsilon(p)} = \text{int}(\overline{B_\epsilon(p)})$, es decir, $\overline{B_\epsilon(p)}$ es un domio cerrado en el plano de Niemytzki η y por el inciso (b) del Lema 3.7 se tiene que $\overline{B_\epsilon(p)}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .*

En el siguiente ejemplo se muestra que la cerradura de una bola tangente es un conjunto π -cerrado en el plano de Niemytzki η .

EJEMPLO 3.13. Consideremos el plano de Niemytzki η , $(x, 0) \in \eta$ y $\epsilon > 0$. Note que

$$B_\epsilon^T[(x, 0)] = \overline{B_\epsilon^T(x, 0)} = \overline{\text{int}\left(\overline{B_\epsilon^T(x, 0)}\right)}.$$

En consecuencia, $B_\epsilon^T[(x, 0)]$ es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η . Luego, por el inciso (b) del Lema 3.7 se tiene que $B_\epsilon^T[(x, 0)]$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .

LEMA 3.14. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es un conjunto abierto y cerrado en X , entonces A es dominio cerrado en X y A es un dominio abierto (X, τ) .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es un conjunto abierto y cerrado en X , Luego, $A = \text{int}(A)$ y $A = \overline{A}$. Por lo tanto,

$$A = \overline{A} = \overline{\text{int}(A)}.$$

En consecuencia, A es un dominio cerrado en (X, τ) . Por otro lado, como

$$\text{int}\left(\overline{A}\right) = \text{int}(A) = A,$$

se obtiene que A es un dominio abierto en (X, τ) . □

Como una consecuencia del Lema 3.14 se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 3.15. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces X y $\emptyset$ son dominios abiertos y cerrados en (X, τ) .

Del Lema 3.14 se obtienen los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3.16. Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Se cumple lo siguiente:

- (a) si $A = \{a\}$ y $B = \{b, c\}$, entonces A y B son dominios cerrados y, dominios abiertos en (X, τ) .
- (b) si $A = \{b\}$, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .
- (c) si $A = \{c\}$, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .
- (d) si $A = \{a, c\}$, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .
- (e) si $A = \{a, b\}$, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .
- (f) los únicos conjuntos π -cerrados en (X, τ) son $X, \emptyset, \{a\}$ y $\{b, c\}$.
- (g) los únicos conjuntos π -abiertos en (X, τ) son $X, \emptyset, \{a\}$ y $\{b, c\}$.

En efecto. Se tiene que los conjuntos cerrados en (X, τ) son:

$$(1.2) \quad X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}.$$

(a) Observemos que $A = \{a\}$ y $B = \{b, c\}$ son abiertos por definición de τ . De (1.2) se obtiene que los conjuntos A y B son cerrados. Así, por el Lema 3.14 se concluye que A y B son dominios abiertos y dominios cerrados en (X, τ) .

(b) Para $A = \{b\}$. Usando (1.2) obtenemos que $\overline{A} = \{b, c\}$ y $\text{int}(A) = \emptyset$. Luego,

$$\begin{aligned}\overline{\text{int}(A)} &= \overline{\emptyset} = \emptyset \neq A \quad \text{y} \\ \text{int}(\overline{A}) &= \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \neq A.\end{aligned}$$

Por lo tanto, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .

(c) Para $A = \{c\}$. Usando (1.2) se tiene que $\overline{A} = \{b, c\}$ y $\text{int}(A) = \emptyset$. Luego,

$$\begin{aligned}\overline{\text{int}(A)} &= \overline{\emptyset} = \emptyset \neq A \quad \text{y} \\ \text{int}(\overline{A}) &= \text{int}(\{b, c\}) = \{b, c\} \neq A.\end{aligned}$$

En consecuencia, A no es un dominio cerrado y no un dominio abierto en (X, τ) .

(d) Para $A = \{a, c\}$. Usando (1.2) tenemos que $\overline{A} = X$ y $\text{int}(A) = \{a\}$. Luego,

$$(1.3) \quad \overline{\text{int}(A)} = \overline{\{a\}} = \{a\} \neq A \quad \text{y}$$

$$(1.4) \quad \text{int}(\overline{A}) = \text{int}(X) = X \neq A.$$

De (1.3) y (1.4) se sigue que A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .

(e) Para $A = \{a, b\}$. Usando (1.2) obtenemos que $\overline{A} = X$ y $\text{int}(A) = \{a\}$. En consecuencia,

$$\overline{\text{int}(A)} = \overline{\{a\}} = \{a\} \neq A$$

y

$$\text{int}(\overline{A}) = \text{int}(X) = X \neq A.$$

Por lo tanto, A no es un dominio cerrado y no es un dominio abierto en (X, τ) .

En lo que resta probemos los incisos (f) y (g). Por el inciso (a) sabemos que $\{a\}$, $\{b, c\}$ son dominios cerrados y también son dominios abiertos en (X, τ) . Además, por (1.2) del Ejemplo 3.16 sabemos que $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ no son cerrados en (X, τ) . Finalmente, por definición de τ , sabemos que $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ no son abiertos en (X, τ) .

(f) Por el Lema 3.7(b), $\{a\}$ y $\{b, c\}$ son π -cerrados en (X, τ) , y por Lema 3.7(c), $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ no son π -cerrados en (X, τ) . Además, por el Corolario 3.15 se tiene que X y $\emptyset$, son dominios cerrados en (X, τ) . Por lo tanto, en (X, τ) los únicos conjuntos π -cerrados en (X, τ) son X , $\emptyset$, $\{a\}$ y $\{b, c\}$.

(g) Por el Lema 3.7(a), $\{a\}$ y $\{b, c\}$ son π -abiertos, y por Lema 3.7(d), $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ no son π -abiertos en (X, τ) . Además, por el Corolario 3.15 se tiene que X y $\emptyset$, son dominios abiertos en (X, τ) . En consecuencia, en (X, τ) los únicos conjuntos π -abiertos en (X, τ) son X , $\emptyset$, $\{a\}$ y $\{b, c\}$.

LEMA 3.17. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$. Si A y B son π -cerrados en (X, τ) , entonces $A \cap B$ es π -cerrado en (X, τ) .

DEMOSTRACIÓN: Sean A y B π -cerrados en (X, τ) . Luego, existen un número finito de dominios cerrados, $A_1, \dots, A_n$ y $B_1, \dots, B_m$ en X , tales que $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ y $B = \bigcap_{j=1}^m B_j$.

Esto implica que,

$$A \cap B = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m B_j \right).$$

Luego, $A \cap B$ es una intersección finita de dominios cerrados en (X, τ) . Por lo tanto, $A \cap B$ es π -cerrado en (X, τ) . $\square$

Para el inciso (i) de la Observación 3.18 puede consultar [20, pág. 15, 1.2.11], mientras que el inciso (ii) se sigue de (i).

OBSERVACIÓN 3.18. Para el Lema 3.19 será útil recordar que si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces:

- (i) $\text{int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.
- (ii) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \text{int}(A)$.

LEMA 3.19. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es un dominio abierto, entonces $X \setminus A$ es un dominio cerrado en X .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es un dominio abierto. Demostraremos que $X \setminus A = \overline{\text{int}(X \setminus A)}$. Notemos que $\overline{\text{int}(X \setminus A)} = \overline{X \setminus \overline{(X \setminus A)}} = \overline{X \setminus \overline{A}}$. En consecuencia, tenemos que probar que $X \setminus A = \overline{X \setminus \overline{A}}$.

Como $\overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus \text{int}(A)$ y $A = \text{int}(\overline{A})$ se tiene que:

$$\overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus \text{int}(\overline{A}) = X \setminus A.$$

Así, $X \setminus A$ es un dominio cerrado en X . $\square$

LEMA 3.20. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es π -abierto en (X, τ) , entonces $X \setminus A$ es π -cerrado en (X, τ) .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es π -abierto en (X, τ) . Luego, existen $A_1, \dots, A_n$ dominios abiertos en (X, τ) tales que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Esto implica que $X \setminus A = \bigcap_{i=1}^n X \setminus A_i$. Por otra parte, del Lema 3.19, se obtiene que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $X \setminus A_i$ es un dominio cerrado en (X, τ) . Por lo tanto, $X \setminus A$ es π -cerrado en (X, τ) . $\square$

LEMA 3.21. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es π -cerrado en (X, τ) , entonces $X \setminus A$ es π -abierto en (X, τ) .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es un conjunto π -cerrado en (X, τ) . Luego, $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$, donde A_i es un dominio cerrado en (X, τ) , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Esto implica que $A = \bigcap_{i=1}^n \overline{\text{int}(A_i)}$. Así, por las Leyes de De Morgan, se obtiene:

$$(1.5) \quad X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i=1}^n \overline{\text{int}(A_i)} = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus \overline{\text{int}(A_i)}).$$

Sea $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue de la Observación 3.18,

$$\begin{aligned} \text{int} \left(\overline{X \setminus \text{int}(A_{i_0})} \right) &= X \setminus \left(\overline{X \setminus X \setminus \text{int}(A_{i_0})} \right) \\ &= X \setminus \left(\overline{X \setminus X \setminus A_{i_0}} \right) \\ &= X \setminus \left(\overline{X \setminus (X \setminus \text{int}(A_{i_0}))} \right) = X \setminus \overline{\text{int}(A_{i_0})}. \end{aligned}$$

De lo anterior, obtenemos que $X \setminus \overline{\text{int}(A_{i_0})}$ es un dominio abierto en (X, τ) . Dado que i_0 es arbitrario, de (1.5) se concluye que $X \setminus A$ es π -abierto en (X, τ) . $\square$

Para la prueba del Lema 3.23 es necesario recordar lo siguiente.

OBSERVACIÓN 3.22. Sea $\mathbb{R}$ con la topología cofinita τ_{cof} y $A \subseteq \mathbb{R}$. Recordemos que:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{cases} A, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ \mathbb{R}, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases} \\ \text{int}(A) &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } X \setminus A \text{ es infinito;} \\ A, & \text{si } X \setminus A \text{ es finito.} \end{cases} \end{aligned}$$

LEMA 3.23. Los subconjuntos π -cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$. Supongamos que A es π -cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$. Luego, A es una intersección finita de dominios cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, es decir, $A = L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_n$ donde, L_i es un dominio cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Por otro lado, como $A \neq \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$, entonces para algún $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, se tiene que $L_{i_0} \subsetneq \mathbb{R}$ y $L_{i_0} \neq \emptyset$. Además, como L_{i_0} es dominio cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ se tiene que $\overline{\text{int}(L_{i_0})} = L_{i_0}$. Como $L_{i_0} \subsetneq \mathbb{R}$, de la Observación 3.22 se concluye que $\text{int}(L_{i_0})$ es finito. Nuevamente, ocupando la Observación 3.22 se tiene que $\text{int}(L_{i_0}) = \emptyset$ o $\text{int}(L_{i_0}) = L_{i_0}$. Si $\text{int}(L_{i_0}) = \emptyset$, se tiene que $\overline{\text{int}(L_{i_0})} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{int}(L_{i_0}) = L_{i_0}$. Luego, L_{i_0} es finito. Además, L_{i_0} es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$. Esto implica que existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{R} \setminus L_{i_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Así, $L_{i_0} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Por lo tanto L_{i_0} no es abierto. Esta contradicción vino de suponer que existía un conjunto π -cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$. Por lo tanto, los únicos subconjuntos π -cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$. $\square$

NOTACIÓN 3.24. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} A_n &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4n-2} < y < \frac{1}{4n-3} \right\} \quad y \\ B_n &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4n} < y < \frac{1}{4n-1} \right\}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.25. Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n y B_n son conjuntos abiertos en el plano de Niemytzki η . Además, si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, se tiene que A y B son abiertos en el plano de Niemytzki η y $A \cap B = \emptyset$. De igual manera, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\overline{A_n} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4n-2} \leq y \leq \frac{1}{4n-3} \right\} \quad y \\ \overline{B_n} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4n} \leq y \leq \frac{1}{4n-1} \right\}.\end{aligned}$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $\overline{A_n} \cap \overline{B_n} = \emptyset$. Además, por las leyes de De Morgan:

$$\left(\bigcup \overline{A_n} \right) \cap \left(\bigcup \overline{B_n} \right) = \bigcup \left\{ \overline{A_n} \cap \overline{B_n} : (n, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\} = \emptyset.$$

OBSERVACIÓN 3.26. Consideremos el plano de Niemytzki η , $(x, 0) \in L$ y $\delta > 0$. Note que la sucesión $\left\{ \left(x, \frac{8n-5}{2(4n-2)(4n-3)} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $(x, 0)$ y, $\left(x, \frac{8n-5}{2(4n-2)(4n-3)} \right) \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $B_\delta^T(x, 0)$ es una vecindad de $(x, 0)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(x, \frac{8n-5}{2(4n-2)(4n-3)} \right) \in B_\delta^T(x, 0)$, para cada $n \geq N$.

En los lemas [3.27](#), y [3.28](#), $\overline{A}$ y $\overline{B}$, denotarán los conjuntos dados en la Observación [3.25](#).

LEMA 3.27. Consideremos el plano de Niemytzki η . Se tiene que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son dominios cerrados en el plano de Niemytzki η .

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que $\overline{A} = \overline{\text{int}(\overline{A})}$. Para esto, primero veamos que $\overline{\text{int}(\overline{A})} \subseteq \overline{A}$. Sean $x \in \text{int}(\overline{A})$ y U_x una vecindad de x , demostraremos que $U_x \cap A \neq \emptyset$. Supongamos que $U_x \cap A = \emptyset$. Entonces $A \subseteq X \setminus U_x$. Dado que U_x es una vecindad de x existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq U_x$. Note que $X \setminus U$ es cerrado en el plano de Niemytzki η . Es decir,

$$A \subseteq X \setminus U_x \subseteq X \setminus U.$$

Luego,

$$\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus U_x} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Esto implica que,

$$\text{int}(\overline{A}) \subseteq \text{int}(X \setminus U) \subseteq X \setminus U.$$

En consecuencia,

$$\overline{\text{int}(\overline{A})} \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Dado que $x \in \overline{\text{int}(\overline{A})}$ se tiene que $x \in X \setminus U$. Es decir $x \notin U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $U_x \cap A \neq \emptyset$.

Ahora veamos que $\overline{A} \subseteq \overline{\text{int}(\overline{A})}$. Sean $x \in \overline{A}$ y U_x una vecindad de x . Probaremos que $U_x \cap \text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$. Dado que $A \subseteq \overline{A}$, se tiene que $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(\overline{A})$. Como $A \subseteq \text{int}(A)$, se obtiene que $A \subseteq \text{int}(\overline{A})$. Luego, $U_x \cap A \subseteq U_x \cap \text{int}(\overline{A})$.

Por otro lado, como $x \in \overline{A}$, se obtiene que $U_x \cap A \neq \emptyset$. En consecuencia $U_x \cap \text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \overline{\text{int}(\overline{A})}$.

De manera similar se prueba que $\overline{B} = \overline{\text{int}(\overline{B})}$. $\square$

LEMA 3.28. *Consideremos el plano de Niemytzki η . Se tiene que:*

- (a) $\overline{A} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) \cup L$,
- (b) $\overline{B} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} \right) \cup L$.
- (c) $L = \overline{A} \cap \overline{B}$.

DEMOSTRACIÓN:

(a) Primero veamos que $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) \cup L \subseteq \overline{A}$. Sea $p \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) \cup L$, entonces $p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ o $p \in L$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$. En este caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \overline{A_{n_0}}$. Dado que $\overline{A_{n_0}} \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \overline{A}$, se tiene que $p \in \overline{A}$.

Caso II. Si $p \in L$. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $p = (x, 0)$. Sea U una vecindad de p . Probaremos que $U \cap A \neq \emptyset$, lo cual es equivalente a ver que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U \cap A_n) \neq \emptyset$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_k \neq \emptyset$. Como U es una vecindad de p , existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^T(p) \subseteq U$. Por la Observación 3.26 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(x, \frac{8n-5}{2(4n-2)(4n-3)} \right) \in B_\epsilon^T(p)$, para cada $n \geq N$. Let $k \geq N$. Se tiene que $\left(x, \frac{8k-5}{2(4k-2)(4k-3)} \right) \in U \cap A_k$. Por lo tanto, $U \cap A_k \neq \emptyset$.

(b) se prueba de manera similar al inciso (a).

(c) Se tiene que:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) \cup L \right) \cap \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} \right) \cup L \right) = L \cup \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} \right) \right).$$

De la Observación 3.25 se concluye que $\overline{A} \cap \overline{B} = L$. $\square$

LEMA 3.29. *Consideremos el plano de Niemytzki η . El subconjunto $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .*

DEMOSTRACIÓN: Por el Lema 3.27 sabemos que los conjuntos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son dominios cerrados en X . Por otro lado, por el inciso (c) del Lema 3.28 se concluye que $L = \overline{A} \cap \overline{B}$. Por lo tanto, se tiene que L es un subconjunto π -cerrado en el plano de Niemytzki η . $\square$

LEMA 3.30. *Consideremos el plano de Niemytzki η y $p = (x, y) \in \eta$. Se cumple lo siguiente:*

- (a) *Si $y = 0$, entonces $\{(x, 0)\}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .*
- (b) *Si $y > 0$, entonces $\{(x, y)\}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .*

DEMOSTRACIÓN:

(a) Supongamos que $y = 0$ y sea $r > 0$. Note que $B_r^T((x, 0))$ es un conjunto abierto básico de $(x, 0)$ en el plano de Niemytzki η . Por el Ejemplo 3.13 sabemos que $\overline{B_r^T((x, 0))}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η . Dado que $\overline{B_r^T((x, 0))} \cap L = \{(x, 0)\}$, por el Lema 3.17 se concluye que $\{(x, 0)\}$, es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .

(b) Supongamos que $y > 0$. Por el inciso (i) de la Observación 3.1, sabemos que P es un conjunto abierto en el plano de Niemytzki η . Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $p \in B_{\epsilon_x}(p) \subseteq P$. Consideremos $B_1 = B_{\frac{\epsilon}{2}}\left((x - \frac{\epsilon}{2}, y)\right)$ y $B_2 = B_{\frac{\epsilon}{2}}\left((x + \frac{\epsilon}{2}, y)\right)$. Notemos que $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \{(x, y)\}$. Además, por el Ejemplo 3.12 sabemos que $\overline{B_1}$ y $\overline{B_2}$ son dominios π -cerrados en el plano de Niemytzki η . Por lo tanto, por el Lema 3.17 se concluye que $\{(x, y)\}$ es π -cerrado en el plano de Niemytzki η . $\square$

3.2. Algunas propiedades generales. En esta sección mencionaremos algunas propiedades de τ^* y de algunos subconjuntos del plano de Niemytzki η . Por tal motivo, iniciaremos esta sección recordando que dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un conjunto X , se dice que τ_1 es menos fina que τ_2 (o que τ_2 es más fina que τ_1) si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

PROPOSICIÓN 3.31. *Consideremos el conjunto $X = \mathbb{R} \times [0, \infty) \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau_E)$, el espacio de Niemytzki (X, τ^*) y $(X, (\tau_E)_X)$. La topología τ^* es estrictamente más fina que $(\tau_E)_X$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathbb{B}_X$ una base para $(\tau_E)_X$, $\mathbb{B}^*$ una base para τ^* , $B \in \mathbb{B}_X$ y $p = (x, y) \in X$ tal que $p \in B$. Demostraremos que existe $B^* \in \mathbb{B}^*$ tal que $p \in B^* \subseteq B$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $p \in P$.

Como $B \in \mathbb{B}_X$, existe $r > 0$ tal que $B = B_r(p) \cap X$. Si $B_r(p) \subseteq P$, entonces consideramos $B^* = B_r(p)$. Ahora, si $B_r(p) \cap L \neq \emptyset$. Sea $r_1 = \frac{d((x, y), (x, 0))}{3}$. Notemos que $r_1 < r$, $B_{r_1}(p) \subseteq B_r(p)$, $B_{r_1}(p) \cap L = \emptyset$ y $B_{r_1}(p) \in \mathbb{B}^*$. Así, en este caso tomamos $B^* = B_{r_1}(p)$.

Caso II. $p \in L$.

Como $B \in \mathbb{B}_X$, existe $r > 0$ tal que $B = B_r((x, 0)) \cap X$. Así, considerando $B^* = B_{\frac{r}{2}}^T((x, 0))$. Obtenemos que existe $B^* \in \mathbb{B}^*$ tal que $p \in B^* \subseteq B$.

En cualquiera de los dos casos encontramos $B^* \in \mathbb{B}^*$ tal que $p \in B^* \subseteq B$, es decir, la topología τ^* es más fina que la topología $(\tau_E)_X$. De hecho, τ^* es estrictamente más fina que la topología $(\tau_E)_X$ ya que las vecindades básicas de los puntos que están sobre L no están en $(\tau_E)_X$. $\square$

DEFINICIÓN 3.32. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es nunca denso en X , o en algunas ocasiones también se les dice densos en ninguna parte o conjuntos diseminados, si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.*

A continuación anotamos ejemplos de conjuntos nunca densos.

EJEMPLO 3.33. Consideremos $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ y $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si $|A| < \infty$, entonces A es nunca denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto nunca denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
- El conjunto de Cantor es nunca denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
- S^1 es un conjunto nunca denso en $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

Sea Y un subespacio de un espacio topológico X . Dado $A \subseteq Y$, $\overline{A}^Y$ representa la cerradura de A en Y .

LEMA 3.34. Consideremos el plano de Niemytzki η y A un subconjunto no vacío de L . Se tiene que:

- (a) $A' = \emptyset$;
- (b) A es cerrado en el plano de Niemytzki η ;
- (c) A es cerrado en $(L, \eta|_L)$;
- (d) A es nunca denso en el plano de Niemytzki η .
- (e) L es nunca denso en el plano de Niemytzki η .
- (f) A es un dominio abierto y un dominio cerrado de $(L, \eta|_L)$.
- (g) A no es un dominio cerrado de el plano de Niemytzki η .

DEMOSTRACIÓN:

(a) Para probar que $A' = \emptyset$, procederemos por contradicción. Supongamos que $A' \neq \emptyset$. Luego, existe $p = (x, y) \in X$ tal que $p \in A'$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $p \in P$.

Por el inciso (a) de la Observación 3.1, sabemos que P es un conjunto abierto en el plano de Niemytzki η . Luego, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $p \in B_{\epsilon_x}(p) \subseteq P$. Así, $(B_{\epsilon_x}(p) \setminus \{p\}) \cap L = \emptyset$. Como $A \subseteq L$, se tiene que, $(B_{\epsilon_x}(p) \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \notin A'$.

Caso II. Si $p \in L$.

En este caso, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $(x, 0) \in B_{\epsilon_x}^T(x, 0)$. Note que $(B_{\epsilon_x}^T(x, 0) \setminus \{(x, 0)\}) \cap L = \emptyset$. Dado que $A \subseteq L$, se tiene que, $(B_{\epsilon_x}^T(x, 0) \setminus \{(x, 0)\}) \cap A = \emptyset$, en consecuencia $(x, 0) \notin A'$.

Así, en ambos casos se llega a una contradicción, la cual vino de suponer que $A' \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A' = \emptyset$.

(b) Por el inciso (a) de este lema sabemos que $A' = \emptyset$. Además, como $\overline{A}^\eta = A \cup A'$ se tiene que $A = \overline{A}^\eta$, es decir, A es un conjunto cerrado en el plano de Niemytzki η .

(c) Sabemos que $\overline{A}^L = \overline{A}^\eta \cap L$. Así, por el inciso (b) de este lema $\overline{A}^L = A \cap L = A$. En consecuencia, A es un conjunto cerrado en L .

(d) Por el inciso (b) de este lema sabemos que $\overline{A}^\eta = A$. Luego, $\text{int}_\eta(\overline{A}^\eta) = \emptyset$. Por lo tanto, A es nunca denso en el plano de Niemytzki η .

(e) Sabemos que L es cerrado en el plano de Niemytzki η (Observación 3.1 inciso (i)). Luego $\text{int}_\eta(\overline{L}^\eta) = \text{int}_\eta(L) = \emptyset$. Por lo tanto, L es nunca denso en el plano de Niemytzki η .

(f) Dado que la topología de L , con respecto a el plano de Niemytzki η , coincide con la topología discreta A es abierto y cerrado en L (Observación 3.1 inciso (ii)). Así, por el Lema 3.14 se tiene que A es un dominio abierto y un dominio cerrado de $(L, \eta|_L)$.

(g) Como $\text{int}_\eta(A) = \emptyset$, se sigue que $A \neq \overline{\text{int}_\eta(A)}^\eta$. Por lo tanto, A no es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η . $\square$

Concluimos este apartado con el siguiente resultado, el cual puede encontrarlo en [2, pág. 48, 1.5.H].

LEMA 3.35. *Consideremos el plano de Niemytzki η y K un subconjunto cerrado no vacío de η . Se tiene que K es G_δ .*

3.3. Axiomas de separación. Iniciamos esta subsección recordando algunos axiomas de separación en un espacio topológico. Para mayor información referente a este tema puede consultar [15, pág. 195, 31].

DEFINICIÓN 3.36. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es:*

- *casi normal, si cualesquiera dos subconjuntos π -cerrados y ajenos de X pueden ser separados.*
- *a lo más normal si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados ajenos A y B de X , uno de los cuales es dominio cerrado en (X, τ) existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*
- *suavemente normal (también llamado k -normal) si para cualesquiera dos dominios cerrados ajenos A y B en X , existen conjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Con respecto a la Definición 3.36 tenemos la siguiente información.

- La clase de los espacios casi normales fue definida por V. Zaïvet en [21].
- La clase de los espacios a lo más normales fue definida por Singal y Arya, vea [19].
- La clase de los espacios suavemente normales fue definida por Shchepin, vea [18].

La Figura 1 muestra la relación que existe entre los conceptos dados en la Definición 3.36 (vea [12]).

$$\begin{aligned} \text{Normal} &\Rightarrow \text{A lo más normal} \Rightarrow \text{Suavemente normal} \\ \text{Normal} &\Rightarrow \text{Casi normal} \Rightarrow \text{Suavemente normal} \end{aligned}$$

FIGURA 1. Diagrama sobre las relaciones que en general existen entre los axiomas de separación proporcionados en la Definición 3.36.

La siguiente caracterización de los espacios regulares será útil en la prueba del Teorema 3.39

TEOREMA 3.37. [15, pág. 196, 31.1] *Un espacio X es regular si y sólo si siempre que $U \subseteq X$ es abierto y $x \in U$ existe un conjunto abierto $V \subseteq X$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

OBSERVACIÓN 3.38. *Consideremos $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ y $P = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Se tiene que $P \subseteq (\mathbb{R}^2, \tau_E)$. Dado que $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ es metrizable, se tiene que $(P, (\tau_E)_P)$ es metrizable (vea [8, pág. 186, 5.1]). Así, por [15, pág. 202, 32.2], se obtiene que $(P, (\tau_E)_P)$ es normal.*

TEOREMA 3.39. *El espacio de Niemytzki η es:*

- (a) T_0 , T_1 y T_2 .
- (b) Regular.
- (c) T_3 .

DEMOSTRACIÓN:

(a) Veamos que el plano de Niemytzki η es T_2 . Sean $p, q \in \eta$ tales que $p \neq q$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I: $p, q \in P$. Por el inciso (i) de la Observación 3.1 existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $p \in B_{\epsilon_1}(p) \subseteq P$ y $q \in B_{\epsilon_2}(q) \subseteq P$. Consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso I.I $B_{\epsilon_1}(p) \cap B_{\epsilon_2}(q) = \emptyset$.

En este subcaso, considere los mismos conjuntos.

Subcaso I.II $B_{\epsilon_1}(p) \cap B_{\epsilon_2}(q) \neq \emptyset$.

Sea $r = \frac{d(p,q)}{3}$. Definamos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, r\}$. Se tiene que $B_\epsilon(p) \cap B_\epsilon(q) = \emptyset$.

Caso II: $p = (x, y) \in P$ y $q = (z, 0) \in L$. Existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $p \in B_{\epsilon_1}(p) \subseteq P$ y $q \in B_{\epsilon_2}^T(q) \subseteq L$. Consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso II.I $B_{\epsilon_1}(p) \cap B_{\epsilon_2}^T(q) = \emptyset$.

En este subcaso, considere los mismos conjuntos.

Subcaso II.II $B_{\epsilon_1}(p) \cap B_{\epsilon_2}^T(q) \neq \emptyset$.

Sea $r = \frac{d((x,y),(z,0))}{3}$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, r\}$. Se tiene que $B_\epsilon(p) \cap B_\epsilon^T(q) = \emptyset$.

Caso III: $p \in L$ y $q \in P$. Es similar al CASO II.

Caso IV: $p, q \in L$. Existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $p \in B_{\epsilon_1}^T(p)$ y $q \in B_{\epsilon_2}^T(q)$. Consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso IV.I $B_{\epsilon_1}^T(p) \cap B_{\epsilon_2}^T(q) = \emptyset$.

En este subcaso, considere los mismos conjuntos.

Subcaso IV.II $B_{\epsilon_1}^T(p) \cap B_{\epsilon_2}^T(q) \neq \emptyset$.

Sea $r = \frac{d((x,0),(y,0))}{3}$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, r\}$. Se tiene que $B_\epsilon^T(p) \cap B_\epsilon^T(q) = \emptyset$.

De los Casos I, II, III y IV, obtenemos que el plano de Niemytzki η es T_2 . Se sigue de las definiciones que el espacio de Niemytzki η es T_1 y T_0 .

(b) Sean $z = (x, y)$ un punto en X y U un abierto en el plano de Niemytzki η tal que $z \in U$. Por el Teorema 3.37 demostraremos que existe un abierto V en el plano de Niemytzki η tal que $z \in V \subseteq \overline{V}^\eta \subseteq U$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I: Si $z \in P$. Por el inciso (i) de la Observación 3.1 existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z) \subseteq U \cap P$ de tal manera que

$$z \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(z) \subseteq \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)}^\eta \subseteq B_\epsilon(z) \subseteq U \cap P \subseteq U.$$

Caso II: Si $z \in L$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^T((x, 0)) \subseteq U$. Entonces

$$\overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}^T((x, 0))}^\eta \subseteq B_\epsilon^T((x, 0)).$$

Así que,

$$z \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^T((x, 0)) \subseteq \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}^T((x, 0))}^\eta \subseteq U.$$

En cualquier caso se tiene que el plano de Niemytzki es un espacio regular.

(c) Como el plano de Niemytzki η es T_1 y regular, concluimos que el plano de Niemytzki η es T_3 . $\square$

Ahora, para probar que el plano de Niemytzki η es un espacio completamente regular, antes se necesita establecer una serie de resultados. Para esto, sea $z \in \eta$ tal que $z \in L$ y F un subconjunto cerrado de el plano de Niemytzki η tal que $z \notin F$. Como $z \in L$, se tiene que $z = (x, 0)$, para algún $x \in L$. Por otro lado, como $X \setminus F$ es abierto y $z \in X \setminus F$, existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que $z \in B_\delta^T((x, 0)) \subseteq X \setminus F$. Definamos $f: \eta \rightarrow [0, 1]$, por:

$$(1.6) \quad f((a, b)) = \begin{cases} 1, & \text{si } (a, b) \notin B_\delta^T((x, 0)); \\ 0, & \text{si } (a, b) = z; \\ \frac{(a-x)^2 + b^2}{2\delta}, & \text{si } (a, b) \in B_\delta((x, \delta)), \end{cases}$$

para cada $(a, b) \in X$.

LEMA 3.40. *Consideremos el plano de Niemytzki η y la función f definida del plano de Niemytzki en $[0, 1]$ (vea [1.6](#)). La función f está bien definida.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $p = (a, b) \in X$. Veamos que f está bien definida. Para esto, consideremos los siguientes casos:

Caso I. $p \notin B_\delta^T((x, 0))$ o $p = z$. Por definición de la función se tiene que $f(p) \in \{0, 1\}$.

Caso II. $p \in B_\delta((x, \delta))$. Consideremos los puntos $(x, 0)$, $(a, 0)$ y el punto p . Dado que la cuerda mayor en $B_\delta((x, \delta))$ es 2δ . De la Observación [3.2](#) obtenemos que:

$$0 < (a - x)^2 + b^2 < 2\delta,$$

así,

$$0 < \frac{(a-x)^2 + b^2}{2\delta} < 1.$$

De Caso I y Caso II, obtenemos que la función está bien definida. $\square$

LEMA 3.41. *Consideremos el plano de Niemytzki η y la función f definida del plano de Niemytzki en $[0, 1]$ (vea [1.6](#)). Sea $0 < \alpha < 1$. Se tiene que: $f^{-1}([0, \alpha)) = B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$. En consecuencia, $f^{-1}([0, \alpha)) \in \eta$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que:

$$(I) \quad f^{-1}([0, \alpha)) \subseteq B_{\delta\alpha}^T((x, 0)).$$

Sea $(a, b) \in f^{-1}([0, \alpha])$. Demostraremos que $(a, b) \in B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$. Como $(a, b) \in f^{-1}([0, \alpha])$ se tiene que $f(a, b) \in [0, \alpha]$. Consideremos ahora los siguientes casos:

Caso I. Si $f((a, b)) = 0$.

De la definición de la función f (vea (1.6)), se tiene que $(a, b) = (x, 0)$. Por lo tanto, $(a, b) \in B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$.

Caso II. Si $0 < f(a, b) < \alpha$.

En este caso como $\alpha < 1$, de la definición de la función f (vea (1.6)) obtenemos $0 < f(a, b) < 1$. Esto implica que $0 < \frac{(a-x)^2+b^2}{2\delta} < \alpha$, es decir, $(a-x)^2 + b^2 < 2\delta\alpha$.

Por otro lado, de la Observación 3.2 sabemos que $\sqrt{(a-x)^2 + b^2} = (a-x)^2 + b^2$. Luego,

$$\sqrt{(a-x)^2 + b^2} < 2\delta\alpha.$$

Por lo tanto, $(a, b) \in B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$.

Así, en cualquier caso tenemos que $f^{-1}([0, \alpha]) \subseteq B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$.

(II) $B_{\delta\alpha}^T((x, 0)) \subseteq f^{-1}([0, \alpha])$.

Para esto, sea $w = (r, s) \in B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$. Demostraremos que $w \in f^{-1}([0, \alpha])$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $w = z = (x, 0)$.

Como $f(z) = f(x, 0) = 0$, se tiene que $w \in f^{-1}([0, \alpha])$. Por lo tanto,

$$B_{\delta\alpha}^T((x, 0)) \subseteq f^{-1}([0, \alpha]).$$

Caso II. Si $w \neq z = (x, 0)$.

En este caso tenemos que $w \in B_{\delta\alpha}((x, \delta\alpha))$. Por la Observación 3.3 se obtiene que $w \in B_{\delta}((x, \delta))$. Así, de (1.6) se tiene que $f(w) = f(r, s) = \frac{(r-x)^2+s^2}{2\delta}$. De la Observación 3.2 se sigue que $\sqrt{(r-x)^2 + s^2} = (r-x)^2 + s^2 < \text{diám}(B_{\delta\alpha}((x, \delta\alpha)))$. Luego,

$$\frac{(r-x)^2+s^2}{2\delta} < \frac{2\delta\alpha}{2\delta}.$$

En consecuencia,

$$f(w) < \alpha,$$

es decir, $w \in f^{-1}([0, \alpha])$. Por lo tanto, $B_{\delta\alpha}^T((x, 0)) \subseteq f^{-1}([0, \alpha])$.

En cualquier caso, se obtiene que $B_{\delta\alpha}^T((x, 0)) \subseteq f^{-1}([0, \alpha])$.

Finalmente, de (I) y (II) se obtiene que $f^{-1}([0, \alpha]) = B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$. $\square$

LEMA 3.42. *Consideremos el plano de Niemytzki η y la función f definida del plano de Niemytzki en $[0, 1]$ (vea (1.6)). Sea $0 < \alpha < 1$. Se tiene que $f^{-1}((\alpha, 1]) = X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$. En consecuencia, $f^{-1}((\alpha, 1]) \in \eta$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que:

$$(I) \quad f^{-1}((\alpha, 1]) \subseteq X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta.$$

Para esto, sea $z = (a, b) \in f^{-1}((\alpha, 1])$. Supongamos que $z \in \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$. Como $\alpha < f(z) \leq 1$, se tiene que $z \notin f^{-1}([0, \alpha])$. Usando el Lema 3.41 se obtiene que $z \notin B_{\delta\alpha}^T((x, 0)) = \{(x, 0)\} \cup B_{\delta\alpha}((x, \delta\alpha))$. En consecuencia, $z \neq (x, 0)$ y $z \notin B_{\delta\alpha}((x, \delta\alpha))$.

Luego, $z \in \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : (p-x)^2 + (q-\delta\alpha)^2 = \delta\alpha\}$. Por la Observación 3.3 se tiene que $z \in B_\delta((x, \delta))$. De la Observación 3.2 se tiene que: $|x-a|^2 + |b|^2 = |(a, b) - (x, 0)|^2 \leq \delta\alpha$. Por otro lado, de la definición de la función f (vea (1.6)) se obtiene que $f(z) = f(a, b) = \frac{(a-x)^2 + b^2}{2\delta} \leq \frac{2\delta\alpha}{2\delta}$. Esto implica que $f(z) \leq \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z \in X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$.

$$(II) \ X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta \subseteq f^{-1}((\alpha, 1]).$$

Para esto, sea $w \in X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$. Esto es,

$$(1.7) \quad w \notin \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta = \{(x, 0)\} \cup \overline{B_{\delta\alpha}((x, \delta\alpha))}^\eta.$$

Por otro lado, como la función está definida en $[0, 1]$ se tiene que $f(w) \leq 1$. Así, nada más resta probar que $f(w) > \alpha$. Supongamos que $f(w) \leq \alpha$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $f(w) < \alpha$.

Como $w \neq z$, entonces $f(w) > 0$. Luego $0 < f(w) < \alpha$. Entonces $w \in f^{-1}([0, \alpha))$. Por el Lema 3.41 se tiene que $w \in B_{\delta\alpha}^T((x, 0))$. Por lo tanto, $w \in \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$, lo cual es una contradicción.

Caso II. Si $f(w) = \alpha$.

Entonces como $0 < \alpha < 1$ se tendría que $f(w) = f(r, s) = \frac{(r-x)^2 + s^2}{2\delta}$. Luego, $\frac{(r-x)^2 + s^2}{2\delta} = \alpha$ por lo que $(r-x)^2 + s^2 = 2\delta\alpha$, entonces $w \in \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$, lo cual es una contradicción.

De Caso I y Caso II, se obtiene que $f(w) > \alpha$. Por lo tanto,

$$X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta \subseteq f^{-1}((\alpha, 1]).$$

Finalmente, de (I) y (II) tenemos que $f^{-1}((\alpha, 1]) = X \setminus \overline{B_{\delta\alpha}^T((x, 0))}^\eta$. $\square$

Frecuentemente sucede que especificar todos los elementos de una topología resulta complicado, por lo cual en la mayoría de los casos, se especifica una colección más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología. A dicha colección se le conoce como base o subbase de un espacio. El Lema 3.43 muestra una colección que es una subbase para la topología que hereda el intervalo cerrado $[0, 1]$, este resultado será útil para la prueba del Teorema 3.45.

LEMA 3.43. *La colección $\mathcal{S} = \{[0, \alpha) : 0 < \alpha < 1\} \cup \{(\alpha, 1] : 0 < \alpha < 1\}$ es una subbase para la topología que hereda $[0, 1]$ considerado como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Más aún, sabemos que $\mathcal{A} = \{(a, \infty), (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para τ_u . Luego, $\mathcal{A}_{[0,1]} = \{S \cap [0, 1] : S \in \mathcal{A}\}$ es una subbase para la topología de $[0, 1]$ considerado como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Note que:

$$\mathcal{A}_{[0,1]} = \{[0, b), (a, 1] : a, b \in (0, 1)\},$$

Dado que $\mathcal{A}_{[0,1]} = \{[0, b), (a, 1] : a, b \in (0, 1)\} = \{[0, b) : 0 < b < 1\} \cup \{(a, 1] : 0 < a < 1\}$, se obtiene lo que se quería. $\square$

La siguiente caracterización también es indispensable en la prueba del Teorema 3.45.

LEMA 3.44. [5, pág. 76, 3.6] Sean (X, τ_X) , (Y, τ_Y) espacios topológicos, $\mathcal{A}$ una subbase para Y y $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ una función. Se tiene que f es continua si y sólo si para cada $S \in \mathcal{A}$, se tiene que $f^{-1}(S) \in \tau_X$.

LEMA 3.45. Consideremos el plano de Niemytzki η . La función f definida del plano de Niemytzki en $[0, 1]$ en η es continua (vea (1.6)).

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{S}$ la colección definida en el Lema 3.43. Por el Teorema 3.44 para checar la continuidad de f basta verificarla en los elementos de $\mathcal{S}$. Sea $0 < \alpha < 1$. De los Lemas 3.41 y 3.42 se sigue que $f^{-1}([0, \alpha))$ y $f^{-1}((\alpha, 1])$ son abiertos en el plano de Niemytzki η . Por lo tanto, f es una función continua. $\square$

TEOREMA 3.46. El espacio de Niemytzki η es completamente regular.

DEMOSTRACIÓN: Sean $z = (x, y) \in \eta$ y F un subconjunto cerrado del plano de Niemytzki η tal que $z \notin F$. Demostraremos que existe una función continua $f: \eta \rightarrow I$ tal que $f(z) = \{0\}$ y $f(F) = \{1\}$. Para esto, consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $y \in P$.

Dado que $P \cap (X \setminus F)$ es abierto en X y $(x, y) \in P \cap (X \setminus F) \subseteq P$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(z) \subseteq P$. Notemos que $B_\epsilon(z) \in \tau^* \cap \tau$. Así, $X \setminus B_\epsilon(z)$ es un cerrado en τ . Observe que $z \notin X \setminus B_\epsilon(z)$.

Por otro lado, como $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es un espacio completamente regular, entonces existe una función continua $f: (\mathbb{R}^2, \tau_u) \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(X \setminus B_\epsilon(z)) = \{1\}$ y $f(z) = \{0\}$. Notemos que $f|_{(X, \tau_X)}: (X, \tau_X) \rightarrow [0, 1]$ es continua. Luego, por la Proposición 3.31 se concluye que $f|_\eta: \eta \rightarrow [0, 1]$ es continua. Además, observe que $f|_\eta(F) = 1$, ya que $F \subseteq X \setminus B_\epsilon(z)$.

Caso II. Si $y \in L$.

Como $X \setminus F$ es abierto y $x \in X \setminus F$, existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que:

$$z \in B_\delta^T((x, 0)) \subseteq X \setminus F.$$

Consideremos la función $f: \eta \rightarrow I$ definida en (1.6). Por el Lema 3.45 sabemos que la función es continua. Además, satisface las propiedades requeridas.

De los casos I y II obtenemos que el plano de Niemytzki η es completamente regular. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia del inciso (i) del Teorema 3.39 y el Teorema 3.46.

COROLARIO 3.47. El espacio de Niemytzki η es $T_{3\frac{1}{2}}$.

El siguiente resultado es conocido como el Lema de Jones y es útil para construir espacios que no sean normales.

LEMA 3.48. Sean (X, τ) un espacio topológico normal y D es un subconjunto denso de X . Si S es un subespacio cerrado y discreto de X , entonces $2^{|S|} \leq 2^{|D|}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que S es un subespacio cerrado y discreto de X . Veamos que $2^{|S|} \leq 2^{|D|}$. Para probar esto, vamos a probar que existe una función uno a uno de $\mathcal{P}(S)$ a $\mathcal{P}(D)$ (vea [8], pág. 46, 7.3]).

Para cada $A \subseteq S$, como S tiene la topología discreta sobre X , se tiene que A y $S \setminus A$ son conjuntos cerrados relativos de S . Por otro lado, como S es cerrado en X se tiene que A y $S \setminus A$ son cerrados en X . Dado que X es normal y A y $S \setminus A$ son ajenos, existen conjuntos abiertos ajenos de X , U_A y V_A tales que $A \subseteq U_A$ y $S \setminus A \subseteq V_A$. Definamos $\varphi: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(D)$ por $\varphi(A) = D \cap U_A$. Demostraremos que φ es inyectiva. Para esto, sean $A, B \subseteq S$ tales que $A \neq B$. Como $A \neq B$, entonces $A \setminus B \neq \emptyset$ o $B \setminus A \neq \emptyset$. Supongamos que $x \in A \setminus B$, el otro caso es análogo. Como $x \in A$ y $x \in S \setminus B$, entonces $x \in U_A \cap V_B$. Ahora, como D es denso existe $z \in D \cap (U_A \cap V_B)$. Esto implica que $z \in D$ y $z \in U_A \cap V_B$. Como $U_B \cap V_B = \emptyset$, entonces $z \notin U_B$. Se sigue que, $z \in D \cap U_A = \varphi(A)$ y $z \notin D \cap U_B = \varphi(B)$. Por lo tanto, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. En consecuencia φ es una función inyectiva, lo cual implica que $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)|$. $\square$

Del Lema 3.48 se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.49. *El espacio de Niemytzki η no es un espacio normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $D = \{(x, y) \in X : x, y \in \mathbb{Q}\}$ y L el subespacio del plano de Niemytzki η . Por [15], pág. 49, 7.6] sabemos que D es numerable. Esto implica que $|D| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Además, dado que $|L| = |\mathbb{R}|$ por [11], pág. 170, 7.36], se concluye que $|L| = 2^{\aleph_0}$.

Por otro lado, de los incisos (i) y (iii) de la Observación 3.1 se tiene que L es cerrado y es discreto. Así, $2^{|L|} = 2^{2^{\aleph_0}} \not\leq 2^{|D|} = 2^{\aleph_0}$. Aplicando el Lema 3.48 se concluimos que X no es normal. $\square$

TEOREMA 3.50. *El plano de Niemytzki η es un espacio a lo más normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sean A y B subconjuntos cerrados ajenos del plano de Niemytzki η tal que A es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η . Por el inciso (b) del Lema 3.7 se sabe que A es π -cerrado en el plano de Niemytzki η . Consideremos los siguientes casos:

Caso I. B es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .

En este caso, como A y B son π -cerrados en el plano de Niemytzki η y el plano de Niemytzki es casi normal (vea [18]) se tiene que A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Caso II. B no es π -cerrado en el plano de Niemytzki η .

Dado que A es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η , del Lema 3.34 se sigue que A no está contenido en L . Consideremos los siguientes dos subcasos:

Subcaso II.1 $A \subseteq P$.

En este subcaso, consideremos los siguientes tres subcasos.

Subcaso II.1.1. $B \subseteq P$.

Como $A = A \cap P$ y $B = B \cap P$ se tiene que A y B son subconjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$. Así, por el inciso (iv) de la Observación 3.1 se tiene que A y B son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau_E)_P)$. Dado que $(P, (\tau_E)_P)$ es

un espacio normal (vea Observación 3.38), existen conjuntos abiertos ajenos U y V en $(P, (\tau_E)_P)$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Luego, U y V son conjuntos abiertos y ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$ (vea Observación 3.1(iv)). Dado que P es un subespacio abierto del plano de Niemytzki η (vea Observación 3.1(i)), se tiene que U y V son conjuntos abiertos en el plano de Niemytzki η . Así, A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Subcaso II.1.2 $B \subseteq L$.

Por el Lema 3.29 sabemos que L es π -cerrado en el plano de Niemytzki η . Por otro lado, como $A \subseteq P$, se tiene que $A \cap L = \emptyset$. Así, A y L son conjuntos π -cerrados ajenos en el plano de Niemytzki η . Dado que el plano de Niemytzki η es casi normal (vea 18), existen conjuntos abiertos ajenos U y V en el plano de Niemytzki η tales que $A \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Como $B \subseteq L$, se sigue que $B \subseteq V$. Por lo tanto A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Subcaso II.1.3 $B \cap L \neq \emptyset$ y $B \cap P \neq \emptyset$.

Como $A \subseteq P$ y $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $A \cap (B \cap P) = \emptyset$. Luego, A y $B \cap P$ son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$. Así, por el inciso (iv) de la Observación 3.1 se tiene que A y B son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau_E)_P)$. Nuevamente, como $(P, (\tau_E)_P)$ es normal (vea Observación 3.38), existen conjuntos abiertos ajenos U_1 y V_1 en $(P, (\tau_E)_P)$. Luego, U_1 y V_1 son conjuntos abiertos y ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$ (vea Observación 3.1(iv)). Dado que P es un subespacio abierto del plano de Niemytzki η (vea Observación 3.1(i)), se tiene que U y V son conjuntos abiertos en el plano de Niemytzki η tales que

$$(1.8) \quad A \subseteq U_1 \text{ y } B \cap P \subseteq V_1.$$

Por otro lado, observe que $B \cap L \subseteq L$ y $B \cap L$ es un conjunto cerrado en $(L, (\tau^*)_L)$. Como $A \subseteq P$, se tiene que $A \cap (B \cap L) = \emptyset$. Dado que L es un conjunto cerrado en el plano de Niemytzki η (vea Observación 3.1(i)), se tiene que $B \cap L$ es un conjunto cerrado en el plano de Niemytzki η . En consecuencia, A y $B \cap L$ son subconjuntos cerrados ajenos del plano de Niemytzki η . Así, aplicando el Subcaso II.1.2 a los conjuntos cerrados ajenos A y $B \cap L$, existen conjuntos abiertos disjuntos U_2 y V_2 en el plano de Niemytzki η tales que

$$(1.9) \quad A \subseteq U_2 \text{ y } B \cap L \subseteq V_2.$$

Sean $U = U_1 \cap U_2$ y $V = V_1 \cap V_2$. Notemos que U y V son abiertos ajenos en el plano de Niemytzki η . Además, de (1.8) y (1.9) tenemos que $A \subseteq U$ y $B = (B \cap L) \cup (B \cap P) \subseteq V$. Por lo tanto, A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Subcaso II.2 $A \cap L \neq \emptyset$ y $A \cap P \neq \emptyset$.

Iniciaremos este subcaso, probando la siguiente afirmación.

Afirmación 1. $A = \overline{A \cap P}^\eta$.

En efecto, sean $x \in A$ y U_x una vecindad de x . Como $x \in A$, se tiene que $x \in P$ o L . Si $x \in P$, se tiene que $x \in A \cap P \subseteq \overline{A \cap P}^\eta$. Ahora, si $x \in L$. Como U_x una vecindad de x , existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in B_\epsilon^T(x) \subseteq U_x$. Observe que $B_\epsilon^T(x) \cap P \neq \emptyset$. Dado que A es

un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η se tiene que $B_\epsilon^T(x) \cap \text{int}(A) \neq \emptyset$. Esto implica que $B_\epsilon^T(x) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B_\epsilon^T(x) \cap A \cap P \neq \emptyset$. Así, $U_x \cap A \cap P \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in \overline{A \cap P}^\eta$.

Sea $x \in \overline{A \cap P}^\eta$. Supongamos que $x \notin A$. Luego, $x \in X \setminus A$. Dado que $X \setminus A$ es abierto y $x \in \overline{A \cap P}^\eta$, se tiene que $(X \setminus A) \cap A \cap P \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A = \overline{A \cap P}^\eta$. Así, queda probada la Afirmación 1.

Consideremos los siguientes tres subcasos.

Subcaso II.2.1 $B \subseteq P$.

Como $A \cap B = \emptyset$, se tiene que $(A \cap P) \cap B = \emptyset$. Así, $A \cap P$ y B son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$. Por el inciso (iv) de la Observación 3.1 se tiene que A y B son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau_E)_P)$. Por la normalidad de $(P, (\tau_E)_P)$, existen conjuntos abiertos ajenos U_1 y V_1 en $(P, (\tau_E)_P)$ (vea Observación 3.38). Luego, U_1 y V_1 son conjuntos abiertos y ajenos en $(P, (\tau^*)_P)$ (vea Observación 3.1(iv)). Dado que P es un subespacio abierto del plano de Niemytzki η (vea Observación 3.1(i)), se tiene que U_1 y V_1 son conjuntos abiertos en el plano de Niemytzki η , tales que :

$$(1.10) \quad A \cap P \subseteq U_1 \text{ y } B \subseteq V_1.$$

Afirmación 2. $A = \overline{\text{int}(A) \cap P}^\eta$.

En efecto, como $\overline{\text{int}(A) \cap P}^\eta \subseteq \overline{\text{int}(A)}^\eta$ y $A = \overline{\text{int}(A)}^\eta$ se tiene que $\overline{\text{int}(A) \cap P}^\eta \subseteq \overline{\text{int}(A)}^\eta = A$.

Sean $x \in A$ y U_x una vecindad de x . Luego, existe V abierto en el plano de Niemytzki η , tal que $x \in V \subseteq U_x$. Observe que $V \cap \text{int}(A)$ es abierto en el plano de Niemytzki η . Además, como A es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η se tiene que $V \cap \text{int}(A) \neq \emptyset$. Así, como P es un subconjunto abierto denso en el plano de Niemytzki η (vea inciso (ii) de la Observación 3.1) se obtiene que $P \cap (V \cap \text{int}(A)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $P \cap (U_x \cap \text{int}(A)) \neq \emptyset$. Así, queda probada la Afirmación 2.

Por (1.10) tenemos que

$$\overline{A \cap P}^\eta \subseteq \overline{U_1}^\eta.$$

Ocupando la Afirmación 1, se obtiene que:

$$(1.11) \quad A \subseteq \overline{U_1}^\eta.$$

Afirmación 3. $\overline{U_1}^\eta \cap \overline{V_1}^\eta = \emptyset$.

Se sigue del hecho que P es normal y P es un conjunto denso y abierto en el plano de Niemytzki η (vea Observación 3.1).

Afirmación 4. $\overline{V_1}^\eta = \overline{\text{int}(\overline{V_1}^\eta)}^\eta$.

Como $\text{int}(\overline{V_1}^\eta) \subseteq \overline{\text{int}(\overline{V_1}^\eta)}^\eta$ y $\overline{V_1}^\eta = \overline{\text{int}(\overline{V_1}^\eta)}^\eta$ se tiene que $\overline{V_1}^\eta \subseteq \overline{\text{int}(\overline{V_1}^\eta)}^\eta$.

Ahora, sean $x \in \overline{(\overline{V_1}^\eta)}^\eta$ y U_x una vecindad de x . Por el supuesto, se tiene que $U_x \cap \text{int}(\overline{V_1}^\eta) \neq \emptyset$. Luego, existen $z \in U_x$ y $W \in \tau^*$ tal que $z \in W \subseteq \overline{V_1}^\eta$. Así, $z \in \overline{V_1}^\eta$. Esto implica que $U_x \cap V_1 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \overline{V_1}^\eta$. Así, queda probada la Afirmación 4.

De (1.11) y de la Afirmación 3, se tiene que $A \cap \overline{V_1}^\eta = \emptyset$. Además, por la Afirmación 4 se tiene que $\overline{V_1}^\eta$ es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η . Por lo tanto, A y $\overline{V_1}^\eta$ son dominios cerrados en el plano de Niemytzki η . Dado que el plano de Niemytzki η es casi normal, por el Diagrama 1 se tiene que el plano de Niemytzki η es suavemente normal. Luego, existen subconjuntos abiertos ajenos U_2 y V_2 en el plano de Niemytzki η tales que $A \subseteq U_2$ y $\overline{V_1}^\eta \subseteq V_2$. Sean $U = U_2$ y $V = V_1 \cap V_2$. Se tiene que U y V son conjuntos abiertos en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Por lo tanto, A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Subcaso II.2.2 $B \subseteq L$.

Por la Afirmación 1, se sabe que $A = \overline{A \cap P}^\eta$. Como $A \cap B = \emptyset$ se tiene que

$$B \cap (\overline{A \cap P}^\eta) = \emptyset.$$

Así, para cada $(x, 0) \in B$, tenemos que $(x, 0) \notin \overline{A \cap P}^\eta$. Por lo tanto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}^T((x, 0)) \cap (A \cap P) = \emptyset$. Lo cual implica que $B_{r_x}^T((x, 0)) \cap A = \emptyset$. Además, $B_{r_x}^T((x, 0)) \cap L = \{(x, 0)\}$ y $\overline{B_{r_x}^T((x, 0))}^\eta \cap L = \{(x, 0)\}$. En consecuencia, $\overline{B_{r_x}^T((x, 0))}^\eta \cap A = \emptyset$, para cada $(x, 0) \in B$. Luego, $B \subseteq \bigcup_{(x, 0) \in B} B_{r_x}^T((x, 0))$. Sea $V = \bigcup_{(x, 0) \in B} B_{r_x}^T((x, 0))$. Observemos que V es un conjunto abierto de X tal que $B \subseteq V$ y $V \cap A = \emptyset$. Se sigue que $V \cap \text{int}(A) = \emptyset$. Así, $\overline{V}^\eta \cap \text{int}(A) = \emptyset$. Luego, existe un conjunto abierto V de X tal que

$$(1.12) \quad B \subseteq V, V \cap A = \emptyset \text{ y } \overline{V}^\eta \cap \text{int}(A) = \emptyset.$$

Como todo conjunto cerrado en el plano de Niemytzki η es G_δ (vea Lema 3.35), se tiene que B es G_δ en el plano de Niemytzki η . Dado que el plano de Niemytzki η es primero numerable (vea Teorema 3.60) y B es G_δ en el plano de Niemytzki η , entonces existe una sucesión decreciente $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots$ de conjuntos abiertos de X tales que $B = \bigcap U_n$. Así, $B \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, $B \subseteq U_n \cap V$. Por lo tanto, $U_n \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos $V_n = U_n \cap V$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos abiertos tales que $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Afirmación 5. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{V_m}^\eta \cap A = \emptyset$.

Supongamos que $\overline{V_n}^\eta \cap A \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $y \in X$ tal que $y \in A$ y $y \in \overline{V_n}^\eta$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subseteq V$, por (1.12) tenemos que $y \notin \text{int}(A)$ y $y \notin V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora como, $y \in \overline{V_n}^\eta$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $y \in L$, y existe $r > 0$ tal que:

$$(1.13) \quad B_r^T(y) \cap V_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Para concluir con la prueba de la Afirmación 5, probemos lo siguiente.

Afirmación 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_r^T(y) \cap V_n \cap L = \emptyset$.

En efecto, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_r^T(y, r) \cap V_k \cap L \neq \emptyset$. Sea $z \in L \cap B_r^T(y) \cap V_k$. Dado que $B_r^T(y) \cap L = \{y\}$ se tiene que $y = z$. Así, $y \in V_k$. Ahora, como $y \in A$, se tiene que $V_k \cap A \neq \emptyset$. Dado que $V_k \cap A = U_k \cap V \cap A \subseteq V \cap A$, esto implica que $V \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción a (1.12). Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_r^T(y) \cap V_n \cap L = \emptyset$. Así, queda probada la Afirmación 6.

De la Afirmación 6, se concluye que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_r^T(y) \cap V_n \subseteq P$. Ahora, por (1.13) sabemos que $B_r^T(y) \cap V_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in B_r^T(y) \cap V_n$. Sea $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Se tiene que $z \in B_r^T(y)$ y $z \in V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $z \in B \subseteq L$. Dado que $B_r^T(y) \cap L = \{y\}$ y $z \in B_r^T(y) \cap L$, se tiene que $z = y$. En consecuencia, $y \in B$. Como $y \in A$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{V_m}^\eta \cap A = \emptyset$. Así, queda probada la Afirmación 5.

Afirmación 7. $\overline{V_m}^\eta = \text{int} \left(\overline{\overline{V_m}^\eta} \right)^\eta$.

Se prueba similar a la Afirmación 4.

Así, por la Afirmación 7, se tiene que $\overline{V_m}^\eta$ es un dominio cerrado en el plano de Niemytzki η . Luego, A y $\overline{V_m}^\eta$ son dominios cerrados ajenos de X . Ocupando nuevamente el hecho de que el plano de Niemytzki η es casi normal, por el Diagrama 1 se tiene que el plano de Niemytzki η es suavemente normal. Luego, existen conjuntos abiertos ajenos G y H de X tales que $A \subseteq G$ y $\overline{V_m}^\eta \subseteq H$. Como $B \subseteq \overline{V_m}^\eta$, tenemos dos conjuntos abiertos ajenos en el plano de Niemytzki η tales que $A \subseteq G$ y $B \subseteq H$. Así, A y B pueden ser separados.

Subcaso II.2.3 $B \cap L \neq \emptyset$ y $B \cap P \neq \emptyset$.

Como $A \cap B = \emptyset$, entonces $(A \cap P) \cap (B \cap P) = \emptyset$. Así, $A \cap P$ y $B \cap P$ son conjuntos cerrados ajenos en $(P, (\tau_E)_P)$. Por la normalidad de $(P, (\tau_E)_P)$, existen conjuntos abiertos U_1 y V_1 en $(P, (\tau_E)_P)$ y así en $(P, (\tau^*)_P)$, tales que

$$(1.14) \quad A \cap P \subseteq U_1, B \cap P \subseteq V_1, \text{ y } \overline{U_1}^\eta \cap \overline{V_1}^\eta = \emptyset.$$

Por la Afirmación 1, se sabe que $\overline{A \cap P}^\eta = A$. De (1.14) se obtiene que $A \subseteq \overline{U_1}^\eta$. Nuevamente, aplicando (1.14) tenemos que $A \cap \overline{V_1}^\eta = \emptyset$. Así, A y $\overline{V_1}^\eta$ son dominios cerrados ajenos del plano de Niemytzki. Dado que el plano de Niemytzki η es suavemente normal, existe conjuntos abiertos ajenos U_2 y V_2 en el plano de Niemytzki η tales que $A \subseteq U_2$ y $\overline{V_1}^\eta \subseteq V_2$. Así, tenemos que

$$(1.15) \quad A \subseteq U_2, B \cap P \subseteq V_2 \text{ y } U_2 \cap V_2 = \emptyset.$$

Dado que $A \cap (B \cap L) = \emptyset$ y $B \cap L \subseteq L$ es un subconjunto cerrado del plano de Niemytzki, entonces por el Subcaso II.2.2, existen conjuntos abiertos U_3 y V_3 del plano de Niemytzki tales que

$$(1.16) \quad A \subseteq U_3, B \cap L \subseteq V_3 \text{ y } U_3 \cap V_3 = \emptyset.$$

Sean $G = U_2 \cap U_3$ y $H = V_2 \cup V_3$. Observemos que G y H son conjuntos abiertos ajenos del plano de Niemytzki η . Por (1.15) y (1.16) se tiene que $A \subseteq G$ y $B \subseteq H$. Así, A y B pueden ser separados en el plano de Niemytzki η .

Esto prueba que η es a lo más normal. $\square$

3.4. Axiomas de numerabilidad. Para continuar con el estudio sobre el plano de Niemytzki η , en esta sección analizaremos conceptos relacionados con los axiomas de numerabilidad, los cuales están relacionados con la existencia de una cantidad numerable de determinados elementos de una topología, como son base de abiertos y base de entornos. Para esto, iniciemos esta subsección recordando un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

LEMA 3.51. *Sean X un espacio métrico completo y $A \subseteq X$. Si A es un subconjunto cerrado, entonces A es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A es cerrado en X . Como toda sucesión de Cauchy en A también es una sucesión de Cauchy en X y X es completo, la sucesión converge en X . Como A es cerrado en X , el límite de la sucesión pertenece al conjunto A . $\square$

OBSERVACIÓN 3.52. *Consideremos el plano de Niemytzki η . Se tiene que:*

- (iv) *El plano de Niemytzki η es completo. Observemos que se considera con la métrica que hereda como subconjunto de $(\mathbb{R}^2, d)$, donde d es la métrica Euclidiana.*
- (vi) *Por el inciso (i) de la Observación 3.1 y el Lema 3.51 se tiene que $(L, \tau^*|_L)$ es completo.*

DEFINICIÓN 3.53. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y M un subconjunto de X . Diremos que M es:*

- *de primera categoría en X si existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cada uno de los cuales es nunca denso en X tal que $X = \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
- *de segunda categoría en X si no es de primera categoría en X .*

El siguiente concepto fue nombrado así, en honor a René Louis Baire quien introdujo este concepto.

DEFINICIÓN 3.54. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que es un espacio de Baire si para cualquier sucesión $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos densos de X , su intersección $\bigcap \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X .*

El siguiente teorema es conocido como Teorema de categoría de Baire.

TEOREMA 3.55. [15, pág. 296, 48.2] *Sea X un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *X es un espacio de Baire.*
- (b) *Si $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ es una colección numerable de subconjuntos cerrados y nunca densos de X , su unión $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ tiene interior vacío.*
- (c) *Cada subconjunto abierto no vacío G de X es de segunda categoría en X .*

El siguiente Teorema 3.56 no dice que todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

TEOREMA 3.56. *Sea X un espacio métrico. Si X es completo, entonces X es de segunda categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es completo. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte. Probaremos que $\bigcup E_n \neq X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = X \setminus \overline{E_n}$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es un conjunto abierto y denso. Así, por el Teorema 3.55 de Baire, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \left(\bigcup \overline{E_n}\right)$ es un conjunto denso. En particular, $X \setminus \left(\bigcup \overline{E_n}\right) \neq \emptyset$ y como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n}$, el conjunto $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ tampoco es vacío. Por lo tanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq X$. $\square$

A continuación vamos a definir los axiomas de numerabilidad.

DEFINICIÓN 3.57. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es:*

- *primero numerable si existe una base de vecindades numerable para cada $x \in X$.*
- *segundo numerable si tiene una base numerable.*
- *separable si existe un subconjunto denso y numerable en X .*

El axioma de separabilidad es el más antiguo y es debido a Fréchet (1906).

TEOREMA 3.58. *Sea X un espacio métrico. Si X es separable, entonces tiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es separable. Como X contiene un subconjunto denso y numerable, digamos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, sabemos que la familia

$$\mathbb{B} = \left\{ B_{\frac{1}{m}}(a_n) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

es base en X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{B}_n = \{B_{\frac{1}{m}}(a_n) : m \in \mathbb{N}\}$. Note que $\mathbb{B} = \bigcup \{\mathbb{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como la unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable, se concluye que $\mathbb{B}$ es base numerable en X . $\square$

LEMA 3.59. *Consideremos el plano de Niemytzki η . Se tiene que el subespacio:*

- (a) (L, τ_L^*) *no es segundo numerable.*
- (b) (L, τ_L^*) *es un espacio de segunda categoría.*
- (c) (L, τ_L^*) *no es separable.*

DEMOSTRACIÓN:

(a) Del inciso (iii) de la Observación 3.1 se sabe que τ_L^* es la topología discreta sobre L . Por lo cual toda base para L contiene al conjunto $\{(x, 0) : (x, 0) \in L\}$, el cual es un conjunto no numerable, esto implica que ninguna base para L es numerable. Por lo tanto, (L, τ_L^*) no es segundo numerable.

(b) Observemos que L es un espacio métrico completo (vea Lema 3.51). Luego, por el Teorema 3.56, L es de segunda categoría.

(c) Como la topología inducida sobre L es la discreta se tiene que L no es separable. $\square$

TEOREMA 3.60. *El plano de Niemytzki η satisface el primer axioma de numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $p = (x, y) \in X$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. $p \in P$. En este caso consideremos:

$$\mathcal{B}_p = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(p) : n \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Se tiene que $\mathcal{B}_p$ es una base numerable en el punto p .

Caso II. $p \in L$. En este caso sea

$$\mathcal{B}_p = \left\{ B_{\frac{1}{n}}^T(p) : n \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Se obtiene que $\mathcal{B}_p$ es una base numerable en el punto p .

De los Casos I y II obtenemos que el plano de Niemytzki η es primero numerable. $\square$

TEOREMA 3.61. *El espacio de Niemytzki η no satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que la propiedad de ser segundo numerable es una propiedad hereditaria, si (X, τ^*) fuera segundo numerable, entonces L sería segundo numerable, lo cual es una contradicción (vea Lema 3.59). Por lo tanto, el plano de Niemytzki η no es segundo numerable. $\square$

TEOREMA 3.62. *El espacio de Niemytzki η es un espacio separable.*

DEMOSTRACIÓN: Como el producto de conjuntos numerables es numerable tenemos que el conjunto $D = \{(p, q) \in X : p, q \in \mathbb{Q}\}$ es numerable. Luego, el plano de Niemytzki η es separable ya que contiene al subconjunto denso y numerable D . $\square$

Para finalizar esta subsección, recordemos que un espacio topológico (X, τ) es metrizable si podemos definir una métrica d sobre X de tal forma que la topología inducida por d coincida con τ . En esta clase de espacios son equivalentes las propiedades de ser segundo numerable y separable (vea [20, pág. 182, 5.3.11]). Así, de los teorema 3.61 y 3.62 se sigue que:

COROLARIO 3.63. *El espacio de Niemytzki η no es metrizable.*

3.5. Tipos de compacidad. En esta subsección analizaremos conceptos relacionados con la compacidad en el Plano de Niemytzki. Para introducir algunos tipos de compacidad, primero veamos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.64. *Sea X un espacio topológico. Se tiene que:*

- una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X es localmente finita si para cualquier punto $x \in X$, existe una vecindad U tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito.
- una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X es llamada de puntos finito si, para cada $x \in X$ el conjunto $\{s \in S : x \in A_s\}$ es finito.

EJEMPLO 3.65. *Los siguientes son ejemplos de familias localmente finita.*

- Sea X un espacio topológico. Una colección finita de subconjuntos de X es localmente finita.
- En $(\mathbb{R}, \tau_u)$ la colección infinita $\{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ es localmente finita.
- En $(\mathbb{R}, \tau_u)$ la colección numerable $\{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ no es localmente finita.

Ahora veamos algunas propiedades relacionadas con la compacidad.

DEFINICIÓN 3.66. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es:

- paracompacto si es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito.
- numerablemente paracompacto si es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta numerable de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.
- metacompacto si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto de puntos finito.
- numerablemente metacompacto si toda cubierta abierta numerable tiene un refinamiento abierto finito de puntos.

Ahora veamos un poco de historia en relación con los conceptos dados en la Definición 3.66.

- En 1944, J. Dieudonné introdujo los espacios paracompactos como una generalización de los espacios compactos [6].
- La clase de los espacios numerablemente paracompactos fueron introducidos independientemente por Dowker en [7] y por Katětov en [13].
- A los espacios metacompactos también se le dicen débilmente paracompactos, estos espacios fueron introducidos por Arens y Dugundji en [9].

La Figura 2, muestra la relación que existe entre algunos de los conceptos dados en la Definición 3.66 (Para algunas implicaciones, vea [3]).

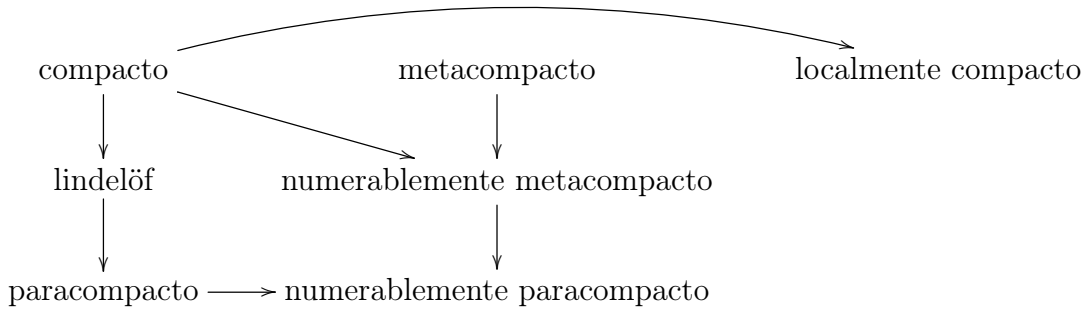


FIGURA 2. Diagrama sobre las relaciones que existen entre los tipos de compacidad proporcionados en la Definición 3.66.

A continuación vamos a mencionar dos útiles resultados en la clase de espacios paracompactos. En [4] puede encontrar un estudio detallado de los espacios paracompactos.

LEMA 3.67. [4, pág. 4, 2.2] Sea X un espacio topológico. Para cada familia localmente finita $\mathcal{A}$ de X se cumple

$$\overline{\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}} = \bigcup \{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}.$$

TEOREMA 3.68. [4, pág. 5, 2.1] *Todo espacio paracompacto es normal.*

TEOREMA 3.69. *El plano de Niemytzki η no es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el plano de Niemytzki η es localmente compacto. Sea $(x, 0) \in X$. Como el plano de Niemytzki η es localmente compacto en $(x, 0)$ existe una vecindad compacta N de $(x, 0)$. En consecuencia existe un abierto U del plano de Niemytzki η , tal que $(x, 0) \in U \subseteq N$, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que $U = B_\epsilon^T(x, 0)$. Dado que el plano de Niemytzki η es de Hausdorff y N es compacto, se tiene que N es un conjunto cerrado en el plano de Niemytzki η . Como $\overline{U}^\eta = U \cup Fr(U)$ y $\overline{U}^\eta \subseteq \overline{N}^\eta$, se tiene que $Fr(U) \subseteq N$, dado que la frontera de un conjunto es un conjunto cerrado se tiene que $Fr(U)$ es un espacio compacto en el plano de Niemytzki η .

Por otro lado, se tiene que $Fr(U) = \overline{U}^\eta \cap \overline{X \setminus U}^\eta$. Notemos que:

$$\overline{U}^\eta = \overline{B_\epsilon^T((x, \epsilon))}^\eta \cup \{(x, 0)\} \quad \text{y} \quad \overline{X \setminus U}^\eta = X \setminus B_\epsilon^T((x, \epsilon)).$$

Por lo tanto, $Fr(U) = \{q \in X : d((x, \epsilon), q) \leq \epsilon\} \setminus \{(x, 0)\} \subseteq P$, el cual no es un conjunto compacto en el plano de Niemytzki η . Por lo tanto, el plano de Niemytzki η no es localmente compacto. $\square$

TEOREMA 3.70. *El espacio de Niemytzki η no es un espacio de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$. Observemos que $\mathcal{U} = \{B_\epsilon^T(p) : p \in L\} \cup \{B_\epsilon(p) : p \in P\}$ es una cubierta abierta del plano de Niemytzki η . Notemos que cada punto de L está contenido en un abierto básico que no contiene otro punto de L . Así, dado que L contiene una cantidad no numerable de puntos toda base contiene una cantidad no numerable de elementos básicos. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ no tiene una subcubierta del plano de Niemytzki η numerable. En consecuencia, el plano de Niemytzki η no es un espacio de Lindelöf. $\square$

De la Figura 2 y el Teorema 3.70 se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 3.71. *El espacio de Niemytzki η no es compacto.*

Por el Teorema 3.68, el Teorema 3.49 y la Figura 2 se obtienen el siguiente resultado.

COROLARIO 3.72. *El espacio de Niemytzki η no es paracompacto.*

Como consecuencia del Corolario 3.72 y la Figura 2 se obtiene:

COROLARIO 3.73. *El espacio de Niemytzki η no es numerablemente paracompacto.*

Finalmente, como consecuencia del Corolario 3.73 y la Figura 2 se obtiene:

COROLARIO 3.74. *El espacio de Niemytzki η no es metacompacto y numerablemente metacompacto.*

Terminamos este escrito analizando conceptos relacionados con la conexidad sobre el plano de Niemytzki η .

3.6. Tipos de conexidad.

Iniciamos esta subsección con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.75. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es:

- *disconexo* si y sólo si existen dos subconjuntos abiertos no vacíos H y K de X tales que $H \cap K = \emptyset$ y $X = H \cup K$. En este caso, llamamos $\{H, K\}$ una *disconexión* de X , o algunas veces decimos que $\{H, K\}$ *desconecta* X .
- *conexo* si y sólo si X no es desconexo.
- *totalmente desconexo* si sus únicos conexos son el vacío y los puntos.
- *localmente conexo en x* , si para toda vecindad U de x , existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y V es conexo. El espacio X se llama *localmente conexo*, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

TEOREMA 3.76. El espacio de Niemytzki η es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que P es conexo en el plano de Niemytzki η . Luego, por [15, pág. 150, 23.4], se obtiene que $\overline{P}^\eta$ es conexo. Por otro lado, de la Observación 3.1 se tiene que P es denso en el plano de Niemytzki η . Por lo tanto, el plano de Niemytzki η es conexo. $\square$

TEOREMA 3.77. El espacio de Niemytzki η no es totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN: Dado que P es conexo y $P \neq \emptyset$, se obtiene que el plano de Niemytzki η es totalmente desconexo. $\square$

TEOREMA 3.78. El espacio de Niemytzki η es localmente conexo.

DEMOSTRACIÓN: Sean $p = (x, y) \in \eta$ y W una vecindad de p en el plano de Niemytzki η . Veamos que existe un conjunto abierto conexo V de el plano de Niemytzki η tal que $p \in V \subseteq W$. Como W una vecindad de p en el plano de Niemytzki η existe un abierto U en el plano de Niemytzki η tal que $p \in U \subseteq W$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $p \in P$. Por el inciso (i) de la Observación 3.1, sabemos que P es un conjunto abierto en el plano de Niemytzki η . Luego, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $p \in B_{\epsilon_x}(p) \subseteq P \cap U$. Dado que $B_{\epsilon_x}(p)$ es un conjunto conexo en el plano de Niemytzki η , considerando $V = B_{\epsilon_x}(p)$ obtenemos lo deseado.

Caso II. $p \in L$. En este caso, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $(x, 0) \in B_{\epsilon_x}^T(x, 0) \subseteq U$. Dado que $B_{\epsilon_x}^T(x, 0)$ es un conjunto conexo en el plano de Niemytzki η , considerando $V = B_{\epsilon_x}^T(x, 0)$ obtenemos lo deseado. $\square$

Finalmente, consideramos que este trabajo proporciona un estudio detallado sobre el plano de Niemytzki. En particular, abordamos algunos conceptos vistos en un curso básico de topología, pero a la vez abordamos otros conceptos no tan básicos, con la intención de que el lector se motive y busque más propiedades acerca de este espacio. Esperamos que este escrito resulte de utilidad y despierte el interés de nuestros lectores en conocer más acerca de este espacio topológico.

Agradecimientos: Agradecemos a la revisora o revisor por las correcciones indicadas y las sugerencias dadas, que han enriquecido la versión original de este trabajo.

Bibliografía

- [1] P. Alexander and P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Akad. Wetensch., Amsterdam 14 (1929).
- [2] J. Angoa-Amador, M. Ibarra-Contreras, M. de J. López-Toriz, A. Martínez-García, *La línea de Alexandroff-Sorgenfrey*, Capítulo 1 en Topología y Sistemas Dinámicos III, Editores J. Angoa y otros. Dirección de Fomento editorial, BUAP. Textos científicos, 2009.
- [3] Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach, Jr. *Counterexamples in Topology*, Dover publications, inc. (1995).
- [4] F. Casarrubias Segura, *Algunas Caracterizaciones de la compacidad*, Capítulo 1 en Topología y sus aplicaciones 2, Editores J. Angoa y otros. Dirección de Fomento editorial, BUAP. Textos científicos, 2013.
- [5] F. Casarrubias-Segura y A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Sociedad Matemática Mexicana, 2015.
- [6] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl., 23 (1944), 65-76.
- [7] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math., 3 (1951), 219-224.
- [8] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [9] Arens. R. Dugundji, *J. Remark on the concept of compactness*, Portugaliae Math., 9 (1950), 141-143. 65-76.
- [10] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Volumen 6, 1-529, Herldermann Verlag Berlin, 1989.
- [11] F. H. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 13, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [12] L. F. Kalantan, *π -Normal topological spaces*, Filomat 22:1 (2008), 173-181.
- [13] M. Katětov, *On real valued functions into topological spaces*, Fund. Math. 38, (1951), 85-91.
- [14] C. Madrid Casado, *Filosofía de las matemáticas: El cierre de la Topología y la Teoría del Caos*, El Basilisco, Revista de material filosófico, Núm. 41, (2009), 1-48.
- [15] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2000.
- [16] Romero Contreras, Arturo. Entrevista con Luciano Boi ¿Qué es la topología? -Matemáticas, ciencia, filosofía y arte. Tóp. Sem [online]. 2020, n.43 [citado 2025-03-06], pp. 213-265.
- [17] Sadeq Ali Saad Thabit and Hailiza Kamarulhaili, *π -Closed sets and almost normality of the Niemytzki plane topology*, J. Math. Sciences, Vol. 8, Num. 2, (2011), 73-85.
- [18] E. V. Shchepin, *Real function and near normal spaces*, Sibirskii Mat. Zurnal, 13(5), (1972), 820-830.
- [19] M. K. Singal and S. Arya, *Almost regular space*, Glasnik. Mate., 4(24), (1969), 89-99.
- [20] V. V. Tkachuk, *Curso Básico de Topología General*, UAM, 1999.
- [21] V. Zaitsev, *On certain classes of topological spaces and their bicompatifications*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 178 (1968), 778-779.

Correos electrónicos:

alicia@mixteco.utm.mx (Alicia Santiago Santos),
noetapia7@gmail.com (Noé Trinidad Tapia Bonilla).

CAPÍTULO 2

Fundamentos de la teoría de los espacios estrella P

Alejandro Ríos Herrejón

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

1. Introducción	35
2. Preliminares	36
3. Espacios estrella P	42
4. Propiedades relacionadas con la compacidad	46
5. Numerabilidad y la propiedad de Lindelöf	55
6. Amplitud numerable, celularidad numerable y extensión numerable	65
7. Una reflexión final	69
Bibliografía	70

1. Introducción

Las propiedades estrella P forman parte de la amplia familia de propiedades de cubierta, que incluyen conceptos clásicos y fundamentales de la topología, como la compacidad, la compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf. En sus orígenes, estas propiedades surgieron como herramientas para enriquecer y clarificar resultados ya conocidos mediante el uso de caracterizaciones a través de estrellas, lo que dio lugar a nuevas generalizaciones de espacios tipo Lindelöf, compacto y numerablemente compacto, entre otros. Así, los espacios estrella P se presentan como una extensión natural y rica en matices dentro del estudio de las propiedades topológicas.

El interés por los espacios estrella P comenzó a consolidarse a finales de los años ochenta y alcanzó su auge en la década de los noventa, con trabajos destacados de Roscoe, Hurewicz, Bonanzinga, Tani, Fleischman, van Douwen, Ikenaga y Tree (véanse [6], [8], [11], [14] y [15]), por mencionar algunos. En particular, conviene resaltar la valiosa contribución de Matveev con su artículo recopilatorio [16]; los constantes aportes de Song, quien ha publicado una cantidad considerable de artículos de investigación sobre el tema, de los cuales sólo una parte se recoge en la bibliografía del presente escrito (véanse [22]–[27]); así como los trabajos desarrollados por investigadores nacionales de la UNAM y de la UAM Iztapalapa, en colaboración, en algunos casos, con la Universidad de Ámsterdam (Países Bajos) y la Universidad de São Paulo (Brasil), como se observa en [1], [2], [17], [20] y [21].

Estos artículos han impulsado la profundización en esta teoría, exhibiendo su relevancia y el potencial que tiene para generar nuevas propiedades topológicas a partir de

propiedades ya conocidas. Este campo de estudio ha resultado particularmente fructífero tanto en el ámbito de la investigación como en el académico, pues al menos tres tesis se han desarrollado en torno a él: una de licenciatura [3], una de maestría [9] y una de doctorado [19]. Esto pone en evidencia la oportunidad que ofrece esta línea temática para crecer tanto en la investigación como en la formación académica dentro del área de la topología general.

El presente trabajo busca contribuir a la difusión de este campo mediante la recopilación y el análisis de resultados obtenidos tras una lectura cuidadosa de una amplia bibliografía, además de ofrecer un enfoque didáctico que facilite la comprensión de las propiedades estrella.

La división del capítulo es sencilla: la Sección 2 está dedicada a los términos y resultados de índole conjuntista y topológica necesarios para el desarrollo del texto. Después, en la Sección 3, se presenta la definición formal de espacio estrella P y se exploran algunas de sus características fundamentales. Posteriormente, las secciones 4, 5 y 6 exponen una diversidad de resultados sobre las versiones estrella de propiedades topológicas clásicas, además de establecer vínculos entre ellas. Finalmente, en la Sección 7, se presenta una breve reflexión sobre algunos aspectos que quedaron fuera de este escrito, un comentario sobre las dificultades que implica consultar la bibliografía especializada en el tema, y un mensaje de motivación. Todo ello con el deseo de que este trabajo sirva como fuente de inspiración para quienes deseen continuar explorando esta fascinante área del conocimiento.

2. Preliminares

Cualquier noción conjuntista o topológica que no se defina explícitamente en el presente escrito se entenderá, respectivamente, conforme a lo expuesto en [10] y [4]. Por otra parte, a lo largo de la exposición será necesario emplear terminología relacionada con funciones cardinales topológicas, razón por la cual se recomienda al lector consultar la referencia clásica [12].

Este apartado está dedicado a presentar los términos que pudieran prestarse a una interpretación ambigua, así como aquellos conceptos que resultan esenciales para el desarrollo del texto. No obstante, se presupone que el lector posee un conocimiento básico de ciertas nociones topológicas —como la conexidad, la pseudocompacidad, la separabilidad o la propiedad de Lindelöf, entre otras—, cuyo estudio corresponde, a grandes rasgos, al contenido de un par de cursos introductorios de licenciatura en topología general.

En relación con lo anterior, cuando sea necesario invocar algún resultado de naturaleza conjuntista o topológica, cuya demostración exceda el propósito expositivo de este trabajo, se remitirá a una referencia adecuada donde dicha demostración pueda encontrarse. De este modo, el lector interesado podrá consultar los detalles pertinentes sin que ello implique apartarnos del objetivo central del presente escrito.

Para comenzar, el símbolo ω representa, simultáneamente, el primer ordinal infinito y el primer cardinal infinito. Similarmente, ω_1 es el primer ordinal no numerable y, a la vez, el primer cardinal no numerable.

Adoptaremos la notación $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ para los conjuntos de números naturales positivos, números enteros, números racionales y números reales, respectivamente. Además, emplearemos el símbolo $\mathfrak{c}$ para referirnos al número cardinal de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathfrak{c} = 2^\omega$.

Sea X un conjunto. Los símbolos $P(X)$ y $|X|$ denotan, respectivamente, el *conjunto potencia* de X y la *cardinalidad* de X . Decimos que X es *finito* si es equipotente a algún elemento de ω ; *infinito numerable*, si es equipotente a ω , y *numerable*, si es finito o infinito numerable. Por otra parte, si κ es un número cardinal, entonces

$$[X]^{\leq \kappa} := \{A \subseteq X : |A| \leq \kappa\}, \quad [X]^{< \kappa} := \{A \subseteq X : |A| < \kappa\} \quad \text{y} \quad [X]^\kappa := [X]^{\leq \kappa} \setminus [X]^{< \kappa}.$$

Si Y es un conjunto, $f : X \rightarrow Y$ es una función, A es un subconjunto de X y B es un subconjunto de Y , entonces

$$f[A] := \{y \in Y : \exists x \in A (f(x) = y)\} \quad \text{y} \quad f^{-1}[B] := \{x \in X : \exists y \in B (f(x) = y)\}$$

son, correspondientemente, la *imagen directa* de A bajo f y la *imagen inversa* de B bajo f .

Cuando X es no vacío y $\tau_X \subseteq P(X)$, decimos que el par (X, τ_X) es un *espacio topológico* si se satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) $\emptyset \in \tau_X$ y $X \in \tau_X$,
- (2) $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$ siempre que $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, y
- (3) si $U, V \in \tau_X$, entonces $U \cap V \in \tau_X$.

En este contexto, la colección τ_X se denomina una *topología en X* y, cuando no sea necesario hacer referencia explícita a ella, simplemente decimos que X es un espacio topológico.

Para un espacio topológico X , el símbolo τ_X^+ representa la familia $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Asimismo, un conjunto $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una *familia celular* si $U \cap V = \emptyset$, siempre que $U, V \in \mathcal{U}$ son distintos. Por otra parte, si I es un conjunto no vacío y $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es un subconjunto de τ_X^+ , la expresión “ $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia celular” significa que para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos se cumple la relación $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Para un espacio topológico X , el símbolo τ_X^+ representa la familia $\tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Asimismo, un conjunto $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una *familia celular* si $U \cap V = \emptyset$, siempre que $U, V \in \mathcal{U}$ son distintos. Por otra parte, si I es un conjunto no vacío y $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es un subconjunto de τ_X^+ , la expresión “ $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia celular” significa que para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos se cumple la relación $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Sean $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ y $\mathcal{B} \subseteq P(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y el conjunto $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$ es finito. Además, $\mathcal{A}$ es *puntualmente finita* si para todo $x \in X$ se cumple que el conjunto $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ es finito. Por otro lado, $\mathcal{A}$ está *inscrita* en $\mathcal{B}$ si para cualquier $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $A \subseteq B$.

Si $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ es una familia localmente finita y $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ está inscrita en $\mathcal{A}$, no es cierto en general que $\mathcal{B}$ sea localmente finita. Verbigracia, $\{\mathbb{R}\}$ es una familia localmente finita en el espacio euclidiano $\mathbb{R}$, pero $\{(-2^{-n}, 2^{-n}) : n < \omega\}$ no es localmente finita, aunque está inscrita en $\{\mathbb{R}\}$.

En el Lema [2.1](#) se presenta una condición suficiente relacionada con un tipo especial de inscripción que garantiza que la finitud local se conserve. Cabe señalar que dicha

condición no es necesaria, ya que $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es localmente finita, está inscrita en $\{\mathbb{R}\}$, y no satisface la condición establecida en el resultado mencionado.

LEMA 2.1. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ una familia localmente finita y $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío de $P(X)$. Si existe una función inyectiva $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ con $B \subseteq f(B)$, siempre que $B \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y el conjunto $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$ es finito. También, sean $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B} : U \cap B \neq \emptyset\}$, $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ una inversa izquierda de f , y $\varphi : \mathcal{C} \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ la función determinada mediante

$$\varphi(z) := \begin{cases} g(z), & \text{si } z \in f[\mathcal{B}], \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Además, si $B \in \mathcal{D}$, entonces $f(B) \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $\varphi(f(B)) = g(f(B)) = B$. En consecuencia, φ es una función suprayectiva y, por lo tanto, $\mathcal{D}$ es finito. $\square$

El siguiente resultado establece una conexión entre los conceptos anteriores y será utilizado más adelante.

LEMA 2.2. *Si $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una familia no numerable y localmente finita, entonces existe una familia celular y localmente finita $\mathcal{V}$ que satisface $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa := |\mathcal{U}|$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{U}$.

Afirmación. Existen $\{\alpha_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \kappa$, $\{V_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \tau_X^+$ y $\{\mathcal{V}_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq [\mathcal{U}]^{<\omega}$ que tienen las siguientes características para todo $\xi < \kappa$:

- (1) $\mathcal{V}_\xi := \{U \in \mathcal{U} : V_\xi \cap U \neq \emptyset\}$,
- (2) $V_\eta \cap V_\xi = \emptyset$, siempre que $\eta < \xi$,
- (3) $V_\xi \subseteq U_{\alpha_\xi}$, y
- (4) si $\eta < \xi$, entonces $U_{\alpha_\eta} \neq U_{\alpha_\xi}$.

Por recursión transfinita, supongamos que para $\xi < \kappa$ hemos construido $\{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$, $\{V_\eta : \eta < \xi\}$ y $\{\mathcal{V}_\eta : \eta < \xi\}$ con las propiedades deseadas. Notemos que, como

$$\left| \bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{V}_\eta \right| \leq |\xi| \cdot \sup\{|\mathcal{V}_\eta| : \eta < \xi\} \leq |\xi| \cdot \omega < \kappa = |\mathcal{U}|,$$

el número ordinal

$$\alpha_\xi := \min \left\{ \alpha < \kappa : U_\alpha \notin \bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{V}_\eta \right\}$$

está bien definido.

Observemos que si $\eta < \xi$, entonces $U_{\alpha_\xi} \cap V_\eta = \emptyset$ y $U_{\alpha_\xi} \neq U_{\alpha_\eta}$ porque $U_{\alpha_\xi} \notin \mathcal{V}_\eta$ y $U_{\alpha_\eta} \in \mathcal{V}_\eta$, respectivamente. Ahora, sea x un elemento de U_{α_ξ} . También, sea $V \in \tau_X$ con $x \in V$ y tal que el conjunto $\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. De esta manera,

establecer $V_\xi := U_{\alpha_\xi} \cap V$ y $\mathcal{V}_\xi := \{U \in \mathcal{U} : V_\xi \cap U \neq \emptyset\}$ implica que $\{\alpha_\eta : \eta < \xi + 1\}$, $\{V_\eta : \eta < \xi + 1\}$ y $\{\mathcal{V}_\eta : \eta < \xi + 1\}$ poseen las cualidades requeridas.

Finalmente, si $\mathcal{V}$ es la familia $\{V_\xi : \xi < \kappa\}$ construida en la Afirmación, entonces $\mathcal{V}$ es una familia celular que satisface $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}|$ por el inciso (2). Por otra parte, como los incisos (3) y (4) constatan que la función $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $V_\xi \mapsto U_{\alpha_\xi}$ cumple lo que pide el Lema 2.1, entonces dicho resultado indica que $\mathcal{V}$ es localmente finita. $\square$

Vale la pena destacar que el Lema 2.2, combinado con la técnica expuesta en la implicación de (2) a (1) en [18, Theorem (b), p. 50], permiten obtener lo siguiente:

COROLARIO 2.3. *Si $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una familia infinita y localmente finita, entonces existe una familia celular y localmente finita $\mathcal{V}$ que satisface $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}|$.*

Para un espacio de Tychonoff (es decir, T_1 y completamente regular) X , el símbolo βX denota la *compactación de Stone–Čech* de X . Por otra parte, si X es T_2 , localmente compacto y no compacto, entonces αX representa la *compactación de Alexandroff* de X . Un análisis profundo y sistemático de las compactaciones de espacios de Hausdorff puede encontrarse en el cuarto capítulo de [18].

Si κ es un número cardinal, denotamos por $D(\kappa)$ al *espacio discreto de cardinalidad* κ , es decir, el número ordinal κ equipado con la topología $P(\kappa)$. En particular, conviene aclarar que, para nosotros, la compactación $\alpha D(\kappa)$ es el conjunto $\kappa \cup \{\kappa\}$ dotado de la topología

$$\tau_{\alpha D(\kappa)} := P(\kappa) \cup \{U \subseteq \kappa \cup \{\kappa\} : \kappa \in U \wedge |\kappa \setminus U| < \omega\}.$$

Asimismo, de acuerdo con la tradición en la literatura matemática, el símbolo $\beta\omega$ representa la compactación $\beta D(\omega)$.

De manera similar al párrafo anterior, la *extensión de Lindelöf por un punto* del espacio discreto $D(\kappa)$, denotada por $LD(\kappa)$, es el conjunto $\kappa \cup \{\kappa\}$ provisto de la topología

$$\tau_{LD(\kappa)} := P(\kappa) \cup \{U \subseteq \kappa \cup \{\kappa\} : \kappa \in U \wedge |\kappa \setminus U| \leq \omega\}.$$

La *cofinalidad* de κ , denotada por $\text{cf}(\kappa)$, es el menor número cardinal λ para el cual existe una sucesión $\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$ de números ordinales menores que κ , tal que $\sup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\} = \kappa$. Por otra parte, el *sucesor cardinal* de κ , denotado por κ^+ , es el primer número cardinal λ que satisface la relación $\kappa < \lambda$.

Cuando α y β son números ordinales con $\alpha < \beta$, el intervalo $[\alpha, \beta)$ representa el conjunto formado por todos los números ordinales γ que satisfacen $\alpha \leq \gamma < \beta$. Los intervalos $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ y (α, β) se definen análogamente. También es necesario mencionar que, a menos que se indique explícitamente lo contrario, el conjunto $[\alpha, \beta)$, considerado como espacio topológico, estará siempre equipado con la topología inducida por su orden canónico.

El resultado establecido en el Lema 2.4 ofrece una oportunidad para familiarizarnos un poco más con los términos que hemos introducido hasta el momento.

LEMA 2.4. *Sea κ un número cardinal infinito.*

- (1) *Si $\text{cf}(\kappa) > \omega$ y A es un subespacio de Lindelöf de $[0, \kappa)$, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $A \cap (\alpha, \kappa) = \emptyset$.*

(2) Si A es un subespacio numerablemente compacto de $LD(\kappa)$, entonces A es finito.

DEMOSTRACIÓN: Para el inciso (1) observemos que, como $\{[0, \alpha) : \alpha < \kappa\}$ es una cubierta abierta de $[0, \kappa)$, dicha colección también es una cubierta abierta de A . Luego, como A tiene la propiedad de Lindelöf, existe un conjunto $I \in [\kappa]^{\leq \omega}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} [0, \alpha)$. De esta manera, la condición $\text{cf}(\kappa) > \omega$ implica que $\alpha := \sup(I) + 1$ es un elemento de κ que satisface $A \cap (\alpha, \kappa) = \emptyset$.

Con respecto al inciso (2), si A es infinito y $B \in [A \cap \kappa]^\omega$, entonces B es un subespacio abierto, cerrado y discreto de $LD(\kappa)$. En consecuencia,

$$\mathcal{U} := \{\{\beta\} : \beta \in B\} \cup \{LD(\kappa) \setminus B\}$$

es una cubierta abierta de A sin subcubiertas finitas. $\square$

Decimos que $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una *familia casi ajena* (en ω) si, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, se cumple que $|A \cap B| < \omega$. Asimismo, decimos que $\mathcal{A}$ es una *familia casi ajena maximal* si $\mathcal{A}$ es un elemento $\subseteq$ -maximal de la colección

$$\{\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{B} \text{ es una familia casi ajena}\}.$$

Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en ω . Además, para cualesquiera $n \in \omega$ y $A \in \mathcal{A}$, sean

$$\mathcal{B}_n := \{\{n\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_A := \{\{A\} \cup (A \setminus F) : F \in [A]^{< \omega}\}.$$

El *espacio de Mrówka–Isbell* asociado a la familia $\mathcal{A}$ es el conjunto $\Psi(\mathcal{A}) := \omega \cup \mathcal{A}$, dotado de la topología generada por la colección $\{\mathcal{B}_x : x \in \Psi(\mathcal{A})\}$, donde, para cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$, el conjunto $\mathcal{B}_x$ es una base local para $\Psi(\mathcal{A})$ en x .

Un estudio detallado de los espacios de Mrówka–Isbell puede encontrarse en la tesis de licenciatura [4] o, alternativamente, en el octavo capítulo de [13]. Las características básicas de estos espacios topológicos se recopilan en el siguiente apartado con el propósito de ofrecer un panorama general de los mismos y poder emplearlas más adelante.

PROPOSICIÓN 2.5. *Los siguientes enunciados son ciertos cuando $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena en ω .*

- (1) $\Psi(\mathcal{A})$ es primero numerable, localmente compacto, cero-dimensional y Tychonoff.
- (2) ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$.
- (3) Cada elemento de $[\omega]^\omega$ tiene un punto de acumulación en $\Psi(\mathcal{A})$.
- (4) $\mathcal{A}$ es cerrado y discreto en $\Psi(\mathcal{A})$.
- (5) Si $\mathcal{A}$ es infinita, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es numerablemente compacto.
- (6) $\Psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal.
- (7) Si $\mathcal{A}$ es infinita y casi ajena maximal, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

Decimos que una propiedad matemática P es una *propiedad topológica* cuando es invariante bajo homeomorfismos. Dicho de otro modo, si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X y Y , entonces X tiene la propiedad P si y sólo si Y también la tiene.

Ahora bien, decimos que P es *compactamente productiva* si, para todo espacio compacto X y todo espacio topológico Y , se cumple que si Y tiene la propiedad P , entonces $X \times Y$ también la tiene.

El hecho de que la compacidad numerable sea compactamente productiva es, posiblemente, bien conocido por cualquier entusiasta de la topología general; sin embargo, las demostraciones clásicas suelen suponer de antemano que el espacio compacto también satisface la propiedad de Hausdorff (véase, por ejemplo, [7, Corollary 3.10.14, p. 205]). En vista de la relevancia de este resultado para el desarrollo del presente trabajo, presentamos a continuación una prueba sencilla de un enunciado más general, del cual se obtiene como corolario la estabilidad de la compacidad numerable bajo productos con espacios compactos.

LEMA 2.6. *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio topológico, κ es un número cardinal, $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una cubierta abierta de $X \times Y$, y para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ establecemos*

$$U(F) := \left\{ y \in Y : X \times \{y\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha \right\},$$

entonces $\{U(F) : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ es una cubierta abierta de Y .

DEMOSTRACIÓN: Primero, si $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y $y \in U(F)$, entonces la contención $X \times \{y\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$ implica que, para todo $x \in X$, existen $P_x \in \tau_X$ y $Q_x \in \tau_Y$ con la propiedad de que $(x, y) \in P_x \times Q_x \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$. Luego, por la compacidad de $X \times \{y\}$, existe $G \in [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $X \times \{y\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in G} (P_x \times Q_x)$. Después, si $Q := \bigcap_{x \in G} Q_x$, entonces $Q \in \tau_Y$, $y \in Q$ y $Q \subseteq U(F)$. En suma, $U(F) \in \tau_Y$. Por otra parte, si $y \in Y$, entonces la compacidad de $X \times \{y\}$ permite encontrar $F \in [\kappa]^{<\omega}$ de tal manera que $X \times \{y\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$, es decir, $y \in U(F)$. $\square$

Si X es un espacio topológico y κ es un cardinal infinito, decimos que X es κ -compacto si toda cubierta abierta de X de tamaño a lo sumo κ admite una subcubierta finita. Por otra parte, X es κ -Lindelöf si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta de cardinalidad a lo sumo κ .

Claramente, un espacio X es compacto si y sólo si es κ -compacto y κ -Lindelöf. Asimismo, la ω -compacidad coincide con la compacidad numerable, y tener la propiedad de Lindelöf equivale a ser ω -Lindelöf. Además, una observación que será relevante más adelante es que, de manera similar a lo que ocurre con la compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf, todo subespacio cerrado de un espacio κ -compacto o κ -Lindelöf hereda la misma propiedad.

Nuestro último objetivo en esta sección es demostrar que las nociones anteriores son compactamente productivas, para obtener como consecuencia que la compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf también lo son.

PROPOSICIÓN 2.7. *Si κ es un cardinal infinito, entonces la κ -compacidad y la propiedad κ -Lindelöf son compactamente productivas.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio compacto, Y un espacio κ -compacto y Z un espacio κ -Lindelöf. Además, sean $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una cubierta abierta de $X \times Y$ y

$\{V_\beta : \beta < \lambda\}$ una cubierta abierta de $X \times Z$, en donde λ es un cardinal infinito. También, sean $\{U(F) : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ y $\{V(G) : G \in [\lambda]^{<\omega}\}$ como en el Lema 2.6. En virtud de que Y es κ -compacto y Z es κ -Lindelöf, existen un conjunto finito $\mathcal{F} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$ y un conjunto $\mathcal{G} \subseteq [\lambda]^{<\omega}$ de cardinalidad a lo sumo κ con la propiedad de que $Y \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} U(F)$ y $Z \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{G}} V(G)$. Así, $\{U_\alpha : \alpha \in F \wedge F \in \mathcal{F}\}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{V_\beta : \beta \in G \wedge G \in \mathcal{G}\}$ es una subcubierta de $\{V_\beta : \beta < \lambda\}$ de tamaño a lo sumo κ . Por lo tanto, $X \times Y$ es κ -compacto y $X \times Z$ es κ -Lindelöf. $\square$

COROLARIO 2.8. *La compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf son compactamente productivas.*

3. Espacios estrella P

Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{C}$ un subconjunto de $P(X)$. La *estrella* de x (con respecto a $\mathcal{C}$) es el conjunto

$$\text{st}(x, \mathcal{C}) := \bigcup \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}.$$

Además, la *estrella* de A (con respecto a $\mathcal{C}$) es la colección

$$\text{st}(A, \mathcal{C}) := \bigcup_{z \in A} \text{st}(z, \mathcal{C}) = \bigcup \{C \in \mathcal{C} : C \cap A \neq \emptyset\}.$$

Las estrellas han demostrado ser una herramienta destacada en topología general, especialmente en el análisis de propiedades vinculadas con la teoría de metrización. Asimismo, han desempeñado un papel importante en problemas clásicos como la *Conjetura de Moore*, situada en el núcleo de dicha teoría y aún considerada un tema de interés vigente en el área.

En la Observación 3.1 recopilamos ciertas propiedades básicas que satisfacen las estrellas. Sus demostraciones caen en la categoría de argumentos rutinarios y, por esta razón, omitimos exponer los detalles correspondientes. Además, conviene mencionar que, a partir de este punto, haremos uso constante de dichas propiedades sin hacer referencia explícita a la observación.

OBSERVACIÓN 3.1. *Los siguientes enunciados son ciertos para cualesquiera $x, y \in X$, $A, B \in P(X)$ y $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq P(X)$.*

- (1) $\text{st}(x, \mathcal{C}) = \text{st}(\{x\}, \mathcal{C})$.
- (2) $x \in \text{st}(y, \mathcal{C})$ si y sólo si $y \in \text{st}(x, \mathcal{C})$.
- (3) Si $A \subseteq B$, entonces $\text{st}(A, \mathcal{C}) \subseteq \text{st}(B, \mathcal{C})$.
- (4) Si $\mathcal{C} \subseteq \tau_X$, entonces $\text{st}(x, \mathcal{C})$ y $\text{st}(A, \mathcal{C})$ pertenecen a τ_X .

En la Proposición 3.2 aparece el momento propicio para realizar dos tareas: en primer lugar, ejemplificar el uso de las propiedades reunidas en la Observación 3.1, y en segundo lugar, demostrar un resultado que será de suma importancia para el núcleo central de este trabajo.

PROPOSICIÓN 3.2. *Si X es un espacio topológico, $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ y $A \subseteq X$, entonces*

$$\text{st}(A, \mathcal{U}) = \text{st}(\overline{A}, \mathcal{U}).$$

DEMOSTRACIÓN: Para empezar, $\text{st}(A, \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(\bar{A}, \mathcal{U})$ porque $A \subseteq \bar{A}$. Por otra parte, si $x \in \text{st}(\bar{A}, \mathcal{U})$ y $z \in \bar{A}$ cumple $x \in \text{st}(z, \mathcal{U})$, entonces $z \in \text{st}(x, \mathcal{U})$ y $\text{st}(x, \mathcal{U}) \in \tau_X$ implican que $A \cap \text{st}(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset$. Finalmente, si $y \in A \cap \text{st}(x, \mathcal{U})$, entonces $x \in \text{st}(y, \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(A, \mathcal{U})$. $\square$

Sin más preámbulo, corresponde ahora presentar el concepto fundamental con el que estaremos trabajando durante el resto de este capítulo:

DEFINICIÓN 3.3. [17] Sean X un espacio topológico y P una propiedad topológica. Decimos que X es estrella P si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe $A \subseteq X$ con la característica de que A tiene la propiedad P y $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$. En estas circunstancias, decimos que A es un núcleo de $\mathcal{U}$.

Una terna de reflexiones respecto a la Definición 3.3 antes de continuar: primero, si P es una propiedad topológica, entonces ser estrella P es, nuevamente, una propiedad topológica. En efecto, si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos X y Y , X es estrella P , y $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de Y , entonces $\mathcal{U} := \{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de X , lo cual produce un conjunto $A \subseteq X$ de tal manera que A tiene la propiedad P y $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$. Así, $f[A]$ tiene la propiedad P y $\text{st}(f[A], \mathcal{V}) = Y$. En consecuencia, Y es estrella P .

Segundo, si X es un espacio topológico, para verificar que X no es estrella P basta con hallar una cubierta abierta de X tal que dicha cubierta no tenga núcleos que posean la propiedad P .

Tercero, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , entonces $\text{st}(X, \mathcal{U}) = X$. En particular, si X tiene la propiedad P , entonces X es estrella P . Más aún, de acuerdo con la Proposición 3.4, no es necesario limitarse a X mismo; de hecho, la condición de ser estrella P puede obtenerse al encontrar un subconjunto denso de X que tenga la propiedad P :

PROPOSICIÓN 3.4. Sean X un espacio topológico, P una propiedad topológica y D un subconjunto denso de X . Si D tiene P , entonces X es estrella P .

DEMOSTRACIÓN: Efectivamente, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , entonces la Proposición 3.2 indica que

$$\text{st}(D, \mathcal{U}) = \text{st}(\bar{D}, \mathcal{U}) = \text{st}(X, \mathcal{U}) = X.$$

$\square$

Es sensato pensar, en virtud de la Proposición 3.4, que tal vez el recíproco también sea cierto; es decir, que siempre que X es estrella P , exista un subconjunto denso de X con la propiedad P . Sin embargo, dicha conjetura es falsa. Por ejemplo, más adelante en la Sección 4 estudiaremos con detenimiento la propiedad de la finitud estrella y veremos que todos los espacios numerablemente compactos tienen dicha propiedad (véase el Corolario 4.2). En especial, si X es numerablemente compacto, infinito y T_1 , entonces X es estrella finito y no tiene subconjuntos densos finitos.

Hecha la aclaración anterior, ciertas propiedades topológicas relacionadas con la existencia de subconjuntos densos con características específicas establecen un puente natural con la Proposición 3.4. Verbigracia, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de ella:

COROLARIO 3.5. *Cualquier espacio separable es estrella numerable.*

En matemáticas, siempre que se introduce una propiedad que consideramos novedosa, se espera que esta sea efectivamente nueva, en el sentido de que no coincida con alguna ya establecida con anterioridad. Claramente, esta expectativa no aplica cuando el objetivo es presentar una noción equivalente a un concepto preexistente. En nuestro caso, es evidente que el propósito es que la idea de “espacio estrella P ” amplíe nuestro campo de estudio.

Ahora bien, lo que procede es analizar la comparación natural entre la propiedad de ser un espacio con P y la de ser un espacio estrella P . Ya se mencionó en el párrafo previo a la Proposición 3.4 que todo espacio con P es estrella P . La pregunta natural que surge es qué condiciones deben imponerse al espacio base para que ser estrella P no equivalga a tener la propiedad P , y cuáles garantizan que ambas nociones coincidan. Las Proposiciones 3.6 y 3.7 constituyen ejemplos del segundo caso: la conexidad y la pseudocompacidad, al considerar sus versiones estrella, no generan una propiedad topológica nueva.

PROPOSICIÓN 3.6. *Si X es estrella conexo, entonces X es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Si X no es conexo y $\{U, V\} \subseteq \tau_X$ es una separación de X , entonces $\mathcal{U} := \{U, V\}$ es una cubierta abierta de X . Para comprobar que X no es estrella conexo, es suficiente ver que $\mathcal{U}$ no tiene núcleos que sean conexos. Con esta idea en mente, observemos que si $A \subseteq X$ cumple $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$, entonces $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$ porque $U \neq \emptyset \neq V$, lo cual implica que $\{A \cap U, A \cap V\}$ es una separación de A ; en particular, A no es conexo. $\square$

PROPOSICIÓN 3.7. *Si X es estrella pseudocompacto, entonces X es pseudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua,

$$\mathcal{V} := \left\{ \left(\frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

y $\mathcal{U} := \{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$. En virtud de que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, resulta que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X . Luego, si A es un subespacio pseudocompacto de X tal que $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$, entonces la continuidad de la restricción $f \upharpoonright A : A \rightarrow \mathbb{R}$ produce $M > 0$ tal que $f[A] \subseteq [-M, M]$. Para verificar que f es una función acotada, nuestro deseo es probar que $f[X] \subseteq [-(M+1), M+1]$. En efecto, si $x \in X$, y $z \in A$ y $U \in \mathcal{U}$ cumplen $\{x, z\} \subseteq U$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ con $\{f(x), f(z)\} \subseteq (n/2, 1 + n/2)$ y, por ende, $|f(x) - f(z)| < 1$. En consecuencia, $f(x) \in (f(z) - 1, f(z) + 1) \subseteq [-(M+1), M+1]$. $\square$

En relación con las Proposiciones 3.6 y 3.7, algunas preguntas naturales e interesantes para los lectores y para el autor del presente escrito son: ¿qué sucede con otras propiedades de tipo conexidad? Por ejemplo, ¿la conexidad por trayectorias o la conexidad local inducen propiedades topológicas nuevas al considerar sus versiones estrella? Respecto a la pregunta correspondiente sobre las propiedades de tipo compacidad, ahondaremos en ella en las secciones 4 y 5.

Ahora bien, ya hemos visto dos casos en los que la versión estrella de una propiedad resulta ser equivalente a la propiedad original. También conviene presentar un ejemplo de una propiedad estrella que está presente, prácticamente, en todos los espacios topológicos, siempre que se les imponga una condición mínima de separación. En específico, como veremos a continuación, resulta que los núcleos cerrados y discretos están presentes en todos los espacios T_1 :

PROPOSICIÓN 3.8. *Si X es un espacio T_1 y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , entonces $\mathcal{U}$ tiene un núcleo cerrado y discreto. En particular, X es estrella discreto.*

DEMOSTRACIÓN: La idea principal del argumento yace en el siguiente enunciado:

Afirmación. Existen un número ordinal $\gamma \leq |X|$ y un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq X$ de tal manera que $\text{st}(\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}, \mathcal{U}) = X$ y $x_\alpha \in X \setminus \text{st}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U})$ para todo $\alpha < \gamma$.

Por recursión transfinita, supongamos que para un número ordinal α hemos construido el conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ con la característica deseada. Por un lado, si $\text{st}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U}) = X$, entonces la recursión termina en el paso α . Por otro lado, si $\text{st}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U}) \neq X$, entonces existe un punto $x_\alpha \in X \setminus \text{st}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U})$ y la recursión continúa. Ahora, la clave radica en que, como X es un conjunto, no es posible continuar el proceso de elección para todos los números ordinales; por lo tanto, la recursión debe detenerse en un momento que no sobrepasa a la cardinalidad de X . Dicho momento es el γ deseado.

Sea $D := \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Claramente, D es un núcleo de $\mathcal{U}$. Por otra parte, si $\alpha < \gamma$, entonces $\text{st}(x_\alpha, \mathcal{U}) \cap D = \{x_\alpha\}$, lo cual implica que D es un subespacio discreto de X . Finalmente, si $z \in X \setminus D$ y $\alpha < \gamma$ cumple $z \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{U})$, entonces $V := \text{st}(x_\alpha, \mathcal{U}) \setminus \{x_\alpha\}$ es un elemento de τ_X , $z \in V$ y $V \cap D = \emptyset$; en particular, D es cerrado en X . $\square$

La *extensión* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$e(X) := \sup\{|D| : D \text{ es un subespacio cerrado y discreto de } X\} + \omega.$$

Decimos que X tiene *extensión numerable* cuando $e(X) = \omega$. Una consecuencia de la Proposición 3.8 relacionada con este concepto es la siguiente:

COROLARIO 3.9. *Si X es un espacio T_1 con extensión numerable, entonces X es estrella numerable.*

La extensión ha resultado ser una función cardinal topológica que está en el corazón de la teoría de los espacios estrella P y aparecerá de manera recurrente a lo largo de las secciones 4, 5 y 6.

El siguiente resultado concluye esta sección y expone una característica fundamental de las propiedades estrella P . Para profundizar en este tipo de resultados básicos, se recomienda consultar el primer capítulo de [3].

PROPOSICIÓN 3.10. *Si P es una propiedad topológica compactamente productiva, entonces ser estrella P también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio compacto, Y un espacio estrella P y $\mathcal{W}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Para cada $(x, y) \in X \times Y$, existen $W(x, y) \in \mathcal{W}$, $U(x, y) \in \tau_X$ y $V(x, y) \in \tau_Y$ con $(x, y) \in U(x, y) \times V(x, y) \subseteq W(x, y)$. Luego, para cada $y \in Y$, el hecho de que $\{U(x, y) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X produce un conjunto $F_y \in [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_y} U(x, y)$. Observemos que si $y \in Y$ y $O_y := \bigcap_{x \in F_y} V(x, y)$, entonces $\mathcal{O} := \{O_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y , lo cual implica que hay un conjunto $A \subseteq Y$ de tal manera que A tiene la propiedad P y $Y = \text{st}(A, \mathcal{O})$.

Finalmente, para ver que $X \times A$ es un núcleo de $\mathcal{W}$, notemos que si $(x, y) \in X \times Y$, entonces existen $w \in A$ y $z \in Y$ con $\{y, w\} \subseteq O_z$. Después, como existe $p \in F_z$ tal que $x \in U(p, z)$, resulta que

$$\{(x, y), (x, w)\} \subseteq U(p, z) \times V(p, z) \subseteq W(p, z) \in \mathcal{W};$$

en consecuencia, $(x, y) \in \text{st}(X \times A, \mathcal{W})$. □

4. Propiedades relacionadas con la compacidad

El origen del concepto de finitud estrella se remonta al artículo de Fleischman [8]. En dicho trabajo se introduce la noción de espacio estrella finito, bajo la denominación de “starcompact space”, como una generalización de los espacios numerablemente compactos. Su estudio fue retomado posteriormente por Ikenaga y Tani [15], por van Douwen *et al.* [6] y, más tarde, por Song [26].

Este concepto, aunque sencillo, ha demostrado ser notablemente poderoso y estar estrechamente relacionado con una amplia variedad de propiedades vinculadas con la compacidad, como se expondrá a lo largo de esta sección.

Comencemos con una breve reflexión: de acuerdo con el comentario que antecede a la Proposición 3.4, todo espacio que posee una propiedad topológica P también es estrella P ; en otras palabras, P siempre implica estrella P . Por otra parte, no es difícil comprobar que, si Q es una propiedad topológica tal que P implica Q , entonces estrella P implica estrella Q . Estas observaciones, junto con hechos clásicos de topología general, producen el siguiente diagrama:

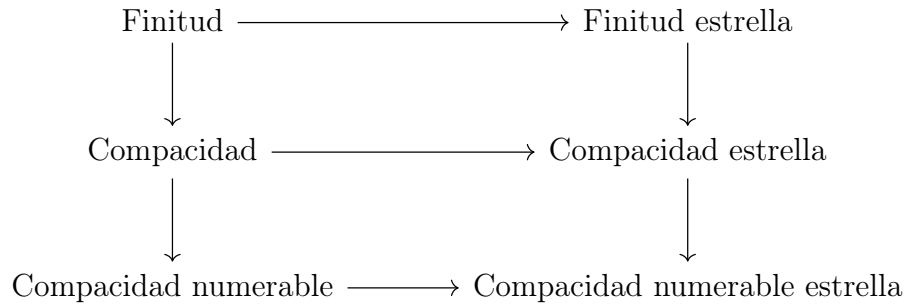


FIGURA 1. Relaciones entre propiedades clásicas y sus versiones estrella.

Nuestro primer objetivo es explorar la conexión que hay entre la compacidad numerable y la finitud estrella.

Para establecer resultados ligeramente más fuertes e introducir terminología que utilizaremos más adelante, convengamos en decir que, si κ es un cardinal infinito y X es un espacio topológico, entonces X es *estrella κ* ¹ si toda cubierta abierta de X admite un núcleo de cardinalidad menor que κ . De esta manera, los espacios estrella finitos corresponden a los espacios estrella ω , y los espacios estrella numerables a los espacios estrella ω_1 .

PROPOSICIÓN 4.1. *Si κ es un cardinal infinito y X es κ -compacto, entonces X es estrella κ .*

DEMOSTRACIÓN: Si X no es estrella κ , existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X que no tiene núcleos de tamaño menor que κ . Este hecho permite construir, recursivamente, un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ de la siguiente manera: si $\alpha < \kappa$, $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ ha sido definido y

$$U_\alpha := \text{st}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, \mathcal{U}),$$

entonces $x_\alpha \in X \setminus U_\alpha$. Observemos que si $A := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $z \in \overline{A}$ y $U \in \mathcal{U}$ satisface $z \in U$, entonces hay $\alpha < \kappa$ con $x_\alpha \in U$, lo cual implica que $z \in \text{st}(x_\alpha, \mathcal{U}) \subseteq U_{\alpha+1}$. Por esta razón, $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una cubierta abierta de $\overline{A}$, que no tiene subcubiertas finitas por la construcción de $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. De esta manera, $\overline{A}$ es un subespacio cerrado de X que no es κ -compacto y, por ende, X no es κ -compacto. $\square$

COROLARIO 4.2. *Cualquier espacio numerablemente compacto es estrella finito.*

En [8, Proposition 9, p. 4], Fleischman demuestra que un espacio estrella finito y regular es numerablemente compacto. Después, al final de su artículo, plantea como pregunta si existe un espacio estrella finito de Hausdorff que no sea numerablemente compacto y, posteriormente, señala que dicha cuestión fue respondida por Raymond S. Houston, quien ofreció una demostración elegante de que todo espacio estrella finito y T_2 es numerablemente compacto; no obstante, no incluye dicha prueba. Más tarde, en [6], los autores retoman este problema, destacan la ausencia de la demostración del enunciado mencionado y proponen el siguiente argumento para constatar la veracidad de que todos los espacios estrella finitos (a los que ellos denominan “strongly 1-starcompact spaces”) de Hausdorff son, necesariamente, numerablemente compactos:

PROPOSICIÓN 4.3. *Si X es estrella finito y T_2 , entonces X es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si X no es numerablemente compacto, existe un subespacio $D \in [X]^\omega$ que es cerrado y discreto (véase [4, Proposición 7.32, p. 227]). Sean $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración sin repeticiones de D y $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau_X$ tal que $U_n \cap D = \{x_n\}$ para todo $n < \omega$. Además, para cada $m < \omega$ sean

$$I_m := [2^m, 2^{m+1}) \cap \mathbb{N} \quad \text{y} \quad D_m := \{x_n : n \in I_m\}.$$

¹Este término no es empleado en la literatura clásica, hasta donde tiene conocimiento el autor de estas líneas; lo adoptamos aquí únicamente por conveniencia.

En vista de que $|D_m| = 2^m$ para todo $m < \omega$, la propiedad de Hausdorff produce una familia celular $\{V_n : n \in I_m\} \subseteq \tau_X$ con $x_n \in V_n$, siempre que $n \in I_m$. Luego, si para cada $m < \omega$ definimos

$$\mathcal{V}_m := \{U_n \cap V_n : n \in I_m\},$$

entonces $\mathcal{V} := \bigcup_{m < \omega} \mathcal{V}_m$ es una cubierta abierta de D y, por lo tanto, $\mathcal{U} := \mathcal{V} \cup \{X \setminus D\}$ es una cubierta abierta de X .

Para comprobar que $\mathcal{U}$ no tiene núcleos finitos, sea A un subconjunto de X de cardinalidad $m < \omega$. Como $|A| = m < 2^m = |I_m|$ y $\{U_n \cap V_n : n \in I_m\}$ es una familia celular, existe $n \in I_m$ con $(U_n \cap V_n) \cap A = \emptyset$. Finalmente, como $U_n \cap V_n$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a x_n como elemento, resulta que $x_n \notin \text{st}(A, \mathcal{U})$. En conclusión, X no es estrella finito. $\square$

No es difícil producir ejemplos de espacios estrella finitos que no son numerablemente compactos. Verbigracia, si X es el conjunto ω provisto de la topología de los segmentos iniciales

$$\tau := \{\emptyset, \omega\} \cup \{\{k \in \omega : 0 \leq k \leq n\} : n \in \omega\},$$

entonces, para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X y cualquier $x \in X$, se tiene que $\text{st}(x, \mathcal{U}) = X$; en particular, X es estrella finito. No obstante, X no es numerablemente compacto, pues $\tau \setminus \{\omega\}$ es una cubierta abierta y numerable de X que no admite subcubiertas finitas.

También conviene resaltar que X es T_0 , no es T_1 , todo subconjunto no vacío de X tiene un punto de acumulación (en particular, X es débilmente numerablemente compacto²), y X es homeomorfo a cualquiera de sus subespacios cerrados, detalles que le encargamos verificar al lector para no desviarnos del tema principal de este capítulo.

A la luz de lo anterior y de la Proposición 4.3, surge naturalmente la pregunta: ¿todo espacio estrella finito y T_1 es numerablemente compacto? Un ejemplo que responde negativamente puede encontrarse en [23], donde Song construye un espacio estrella finito y T_1 que no es *numerablemente absolutamente numerablemente compacto* (en inglés, “countably absolutely countably compact”; abreviado, “countably acc”). Allí demuestra además que todo espacio numerablemente compacto posee esta propiedad, de modo que su construcción es suficiente para nuestros fines. Sin embargo, el ejemplo que presentamos a continuación proviene de [8], en el cual el autor lo atribuye a John H. Weston:

EJEMPLO 4.4. *Existe un espacio estrella finito y T_1 que no es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$X := [0, \omega_1) \cup \{z_n : n < \omega\},$$

en donde $[0, \omega_1) \cap \{z_n : n < \omega\} = \emptyset$ y $\{z_n : n < \omega\}$ está enumerado fielmente. También, para cualesquiera $0 < \alpha < \omega_1$ y $n < \omega$, sean

$$\mathcal{B}(0) := \{\{0\}\}, \quad \mathcal{B}(\alpha) := \{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(z_n) := \{\{z_n\} \cup [\beta, \omega_1) : \beta < \omega_1\}.$$

²Es decir, cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación. Dicha noción es equivalente a la compacidad numerable en el ámbito de los espacios T_1 (véase [4, Proposición 7.32, p. 227]).

Sea τ_X la topología en X con la propiedad de que, si $x \in X$, entonces $\mathcal{B}(x)$ es una base local para X en x . Claramente, (X, τ_X) es un espacio topológico T_1 que no tiene la propiedad de Hausdorff. Además, $\{z_n : n < \omega\}$ es un subespacio infinito numerable, cerrado y discreto de X ; en particular, X no es numerablemente compacto.

Para ver que X es estrella finito, notemos que si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , entonces para cada $n < \omega$ existen $U_n \in \mathcal{U}$ con $z_n \in U_n$ y $\alpha_n < \omega_1$ tal que $\{z_n\} \cup [\alpha_n, \omega_1] \subseteq U_n$. Después, si $\alpha := \sup\{\alpha_n : n < \omega\} + 1$, entonces $\alpha \in \bigcap_{n < \omega} U_n$, lo cual implica que

$$\{z_n : n < \omega\} \cup [\alpha, \omega_1] \subseteq \text{st}(\alpha, \mathcal{U}).$$

Luego, como el intervalo $[0, \alpha]$ es compacto (véase [4, Ejemplos 7.2(3), p. 208]), existe un conjunto $\mathcal{V} \in [\mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}]^{<\omega}$ con $[0, \alpha] \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Finalmente, si $e : \mathcal{V} \rightarrow \bigcup \mathcal{V}$ es una función de elección, entonces $A := \{\alpha\} \cup e[\mathcal{V}]$ es un núcleo finito de $\mathcal{U}$. $\square$

Un concepto relacionado con la compacidad que, en mi experiencia, no suele aparecer en los cursos introductorios de topología general es la *compacidad tenue*. Decimos que un espacio topológico X es *tenuemente compacto*³ si toda familia localmente finita $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ es finita.

Es bien sabido que, si X es numerablemente compacto, entonces X es tenuemente compacto; que, si X es tenuemente compacto, entonces X es pseudocompacto; y que, si X es de Tychonoff, entonces la compacidad tenue y la pseudocompacidad son equivalentes (véase [18, § 1.11]).⁴

Lo que sigue es explorar la relación entre la finitud estrella, la pseudocompacidad y la compacidad tenue.

LEMA 4.5. *Si X es estrella finito y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta puntualmente finita de X , entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita.*

DEMOSTRACIÓN: La finitud estrella de X produce un conjunto $A \in [X]^{<\omega}$ tal que $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$. En consecuencia, $\mathcal{V} := \{U \in \mathcal{U} : \exists x \in A(x \in U)\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ porque $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in A} \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ y

$$\begin{aligned} X = \text{st}(A, \mathcal{U}) &= \bigcup_{x \in A} \text{st}(x, \mathcal{U}) = \bigcup_{x \in A} \bigcup \{U \in \mathcal{U} : x \in U\} \\ &= \bigcup \{U \in \mathcal{U} : \exists x \in A(x \in U)\} = \bigcup \mathcal{V}. \end{aligned}$$

$\square$

PROPOSICIÓN 4.6. *Si X es estrella finito, entonces X es pseudocompacto.*

³El término en inglés es “feebly compact”. Existe una inconsistencia en los textos en español respecto a su traducción, ya que, además de “tenuemente compacto”, dicho concepto también se traduce ocasionalmente como “débilmente compacto”. En mi opinión, esta discrepancia se debe a que, anteriormente, la noción de compacidad tenue era denominada en inglés como “weak compactness” (véase, por ejemplo, [8]); sin embargo, en algún momento, comenzó a transitarse del término “weak compactness” al de “feeble compactness”, aunque algunas personas aún usan el primero por costumbre. Sin prestar demasiada atención a estos contratiempos lingüísticos, lo importante es comprender las propiedades y consecuencias de la noción en sí, independientemente del nombre con el que se la denomine.

⁴Aunque en [18] se establece desde el inicio que todos los espacios tratados son de Hausdorff, en la demostración de los resultados que mencionamos dicha propiedad nunca es utilizada.

DEMOSTRACIÓN: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $U_n := f^{-1}[(n-1, n+1)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una cubierta abierta puntualmente finita de X y, por el Lema 4.5, existe un conjunto $F \in [\mathbb{Z}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $X = \bigcup_{n \in F} U_n$. De esta manera, si $M := \max\{|n| : n \in F\} + 1$ y $x \in X$, entonces existe $n \in F$ con $x \in U_n$, lo cual implica que $|f(x)| < |n| + 1 \leq M$. En suma, f es acotada. $\square$

PROPOSICIÓN 4.7. *Si X es estrella finito y T_1 , entonces X es tenuemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si X no es tenuemente compacto, existe una familia celular, localmente finita e infinita $\mathcal{U}$ (véase el Corolario 2.3). Sean $Y := X \setminus \bigcup \mathcal{U}$, $e : \mathcal{U} \rightarrow \bigcup \mathcal{U}$ una función de elección y $B := e[\mathcal{U}]$. También, para cada $x \in Y$ sea $U_x \in \tau_X$ con $x \in U_x$ y tal que $\{U \in \mathcal{U} : U_x \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Notemos que si $x \in Y$, entonces $V_x := U_x \setminus B$ es un elemento de τ_X porque $|U_x \cap B| < \omega$. Así, $\mathcal{W} := \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X , en donde $\mathcal{V} := \{V_x : x \in Y\}$. El plan es demostrar que $\mathcal{W}$ no tiene núcleos finitos.

Observemos primero que, como $B \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$, para todo $x \in X$ se satisface que $\text{st}(x, \mathcal{W}) \cap B \subseteq \text{st}(x, \mathcal{U}) \cap B$. Nuestra meta es probar que si $x \in X$, entonces $|\text{st}(x, \mathcal{U}) \cap B| \leq 1$. Por un lado, si $x \in Y$, entonces $\text{st}(x, \mathcal{U}) = \emptyset$ pues $Y \cap \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$. Por otro lado, si $x \in \bigcup \mathcal{U}$ y U es el único elemento de $\mathcal{U}$ tal que $x \in U$, entonces $\text{st}(x, \mathcal{U}) \cap B = \{e(U)\}$. Consecuentemente, para todo $A \in [X]^{<\omega}$ se tiene que

$$|\text{st}(A, \mathcal{W}) \cap B| = \left| \bigcup_{x \in A} (\text{st}(x, \mathcal{W}) \cap B) \right| \leq \sum_{x \in A} |\text{st}(x, \mathcal{W}) \cap B| \leq |A| < \omega,$$

lo cual implica que $B \not\subseteq \text{st}(A, \mathcal{W})$ porque B es un conjunto infinito; en especial, $\text{st}(A, \mathcal{W}) \neq X$. $\square$

Mencionamos en el párrafo posterior a la Proposición 4.3 que, si el conjunto ω se equipa con la topología de los segmentos iniciales, entonces el espacio topológico resultante es T_0 , estrella finito y homeomorfo a cualquiera de sus subespacios cerrados (en particular, todos sus subespacios cerrados son estrella finitos). No obstante, dicho espacio no es T_1 ni numerablemente compacto.

El problema con este ejemplo radica en su bajo nivel de separación. En efecto, de acuerdo con la Proposición 4.8, en el contexto de los espacios T_1 , la presencia de la finitud estrella en todos los subespacios cerrados de un espacio es suficiente para obtener la compacidad numerable:

PROPOSICIÓN 4.8. *Los siguientes enunciados son equivalentes cuando X es T_1 .*

- (1) X es numerablemente compacto.
- (2) Todos los subespacios cerrados de X son estrella finitos.
- (3) Todos los subespacios cerrados de X son tenuemente compactos.
- (4) Todos los subespacios cerrados de X son pseudocompactos.

DEMOSTRACIÓN: A partir de lo expuesto en esta sección, es claro que el inciso (i) implica al inciso $(i+1)$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Ahora, con respecto a (4) implica (1), si X no es numerablemente compacto, existe un subespacio $A \in [X]^\omega$ que es cerrado y discreto (véase [4, Proposición 7.32, p. 227]). Finalmente, si $\{x_n : n < \omega\}$ es una

enumeración sin repeticiones de A , entonces la función $A \rightarrow \mathbb{R}$ determinada mediante $x_n \mapsto n$ es continua y no acotada, lo cual evidencia que A no es pseudocompacto. $\square$

De vuelta al diagrama de la Figura 1, en lo que respecta a la columna izquierda, ejemplos clásicos de la topología general confirman que las flechas allí representadas no son reversibles. Por ejemplo, si κ es un cardinal infinito con $\text{cf}(\kappa) > \omega$, el espacio de ordinales $[0, \kappa)$ es numerablemente compacto ya que, si A es un subconjunto infinito numerable de $[0, \kappa)$, entonces el supremo de A es un punto de acumulación de A en $[0, \kappa)$. No obstante, dicho espacio no es compacto⁵, puesto que la cubierta abierta $\{[0, \alpha) : \alpha < \kappa\}$ no admite subcubiertas finitas.

Además, gracias a los resultados obtenidos en el Corolario 4.2, la Proposición 4.3 y el Ejemplo 4.4, hemos establecido conexiones entre la esquina inferior izquierda y la esquina superior derecha del diagrama de la Figura 1. Naturalmente, todavía queda pendiente responder dos preguntas relacionadas con la columna derecha:

- ¿Existe un espacio estrella compacto que no sea estrella finito?
- ¿Existe un espacio estrella numerablemente compacto que no sea estrella compacto?

Reservamos, por ahora, la respuesta a la segunda pregunta para la Sección 5 (véase el Ejemplo 5.7). No obstante, a continuación presentamos un ejemplo, extraído de [26], que responde afirmativamente a la primera:

EJEMPLO 4.9. *Existe un espacio de Tychonoff estrella compacto que no es estrella finito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$X := (\beta\omega \times [0, \omega_1]) \setminus ((\beta\omega \setminus \omega) \times \{\omega_1\}) = (\beta\omega \times [0, \omega_1)) \cup (\omega \times \{\omega_1\})$$

equipado con la topología que hereda como subespacio del producto $\beta\omega \times [0, \omega_1]$.

En primer término, X es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $\beta\omega \times [0, \omega_1]$, y X no es numerablemente compacto porque $\omega \times \{\omega_1\}$ es un subespacio infinito numerable, cerrado y discreto de X . En consecuencia, la Proposición 4.3 certifica que X no es estrella finito.

Para verificar que X es estrella compacto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . En virtud del Corolario 4.2, la compacidad numerable de $\beta\omega \times [0, \omega_1)$ (véase el Corolario 2.8) genera un conjunto $F \in [\beta\omega \times [0, \omega_1)]^{<\omega}$ tal que $\beta\omega \times [0, \omega_1) \subseteq \text{st}(F, \mathcal{U})$. Por otra parte, para cada $n < \omega$ existen $U_n \in \mathcal{U}$ y $\alpha_n < \omega$ con $\{n\} \times (\alpha_n, \omega_1] \subseteq U_n$. Posteriormente, si $\alpha := \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$ y $L := \beta\omega \times \{\alpha + 1\}$, entonces L es un subespacio compacto de X con $\omega \times \{\omega_1\} \subseteq \text{st}(L, \mathcal{U})$. En consecuencia, $K := F \cup L$ es un núcleo compacto de $\mathcal{U}$. $\square$

El siguiente diagrama tiene como propósito reunir parte del trabajo realizado en esta sección, de modo que sea más sencillo seguir visualmente qué se hizo y cómo se relacionan los resultados. Es importante señalar que las flechas sin comentario explícito corresponden a hechos elementales o a contraejemplos simples dentro de la topología

⁵Con mayor precisión, si λ es un número cardinal tal que $\lambda < \text{cf}(\kappa)$, entonces el espacio $[0, \kappa)$ no es λ -Lindelöf.

general. En el diagrama, F representa la finitud, C la compacidad y CN la compacidad numerable; mientras que P^* indica la versión estrella de la propiedad topológica P .

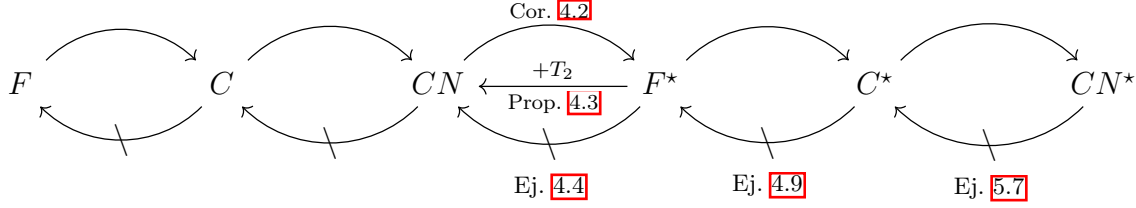


FIGURA 2. Relaciones entre las propiedades F , C y CN .

En el Corolario 2.8 explicamos que el producto de un espacio compacto con un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto; es decir, la compacidad numerable es una propiedad compactamente productiva. Por otra parte, en el contexto de las propiedades estrella, una combinación de las Proposiciones 2.7 y 3.10, junto con hechos conocidos de la topología general, permite obtener un resultado interesante:

COROLARIO 4.10. *La compacidad estrella, la σ -compacidad estrella, la κ -compacidad estrella y la propiedad κ -Lindelöf estrella son compactamente productivas.*

En virtud de que la finitud estrella es un debilitamiento de la compacidad numerable y un fortalecimiento de la compacidad estrella, es razonable preguntarse si el producto de un espacio compacto con un espacio estrella finito es, nuevamente, estrella finito. Sorprendentemente, este no es el caso, como veremos a continuación:

EJEMPLO 4.11. *Existen un espacio compacto y un espacio estrella finito de tal manera que su producto topológico no es estrella finito.*

DEMOSTRACIÓN: Nuestro objetivo es comprobar que si X es el espacio del Ejemplo 4.4 y Y es el espacio $\alpha D(\omega)$, entonces $X \times Y$ no es estrella finito. En primer lugar, para cada $n < \omega$ sean

$$U_n := \{z_n\} \cup [n, \omega_1) \quad \text{y} \quad V_n := \{k \in \omega : k > n\} \cup \{\omega\}.$$

Claramente, $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau_X$ y $\{V_n : n < \omega\} \subseteq \tau_Y$. De esta manera,

$$\mathcal{U} := \{U_n \times V_n : n < \omega\} \cup \{X \times \{n\} : n < \omega\}$$

es una cubierta abierta de $X \times Y$. Más aún, no existe un subconjunto propio $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ con $X \times Y = \bigcup \mathcal{V}$ porque si $n < \omega$, entonces

$$\{U \in \mathcal{U} : \langle z_n, \omega \rangle \in U\} = \{U_n \times V_n\} \quad \text{y} \quad \{U \in \mathcal{U} : \langle z_n, n \rangle \in U\} = \{X \times \{n\}\}.$$

Finalmente, si $A \in [X \times Y]^{<\omega}$ y $n < \omega$ satisface $A \cap (X \times \{n\}) = \emptyset$, entonces $\langle z_n, n \rangle \notin \text{st}(A, \mathcal{U})$, lo cual implica que A no es un núcleo de $\mathcal{U}$. $\square$

El Ejemplo 4.11 contrasta bastante con el Corolario 4.10. Más aún, al considerar el diagrama de la Figura 2, se observa que la finitud estrella y la finitud son las únicas propiedades que no son compactamente productivas. Un primer intento adecuado para obtener un resultado positivo consiste en debilitar la conclusión. Verbigracia:

PREGUNTA 4.12. *¿Es cierto que el producto de un espacio compacto con un espacio estrella finito es estrella tenuemente compacto?*

Si, al no considerar separación alguna (véase la Proposición 4.7), la Pregunta 4.12 aún tuviera una respuesta negativa, una alternativa podría ser reemplazar la compacidad tenue estrella por la pseudocompacidad e intentar nuevamente. En cualquier caso, dejamos estas cuestiones abiertas para que tanto los lectores como el autor puedan volver a ellas más adelante, con calma y en el momento que consideren oportuno.

Ahora bien, una lectura cuidadosa de lo que falló en el Ejemplo 4.11 revela qué ajustes deben hacerse para obtener una caracterización de la compacidad numerable en términos de productos y finitud estrella, sin necesidad de imponer condiciones de separación:

PROPOSICIÓN 4.13. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un espacio topológico X .*

- (1) X es numerablemente compacto.
- (2) $X \times K$ es numerablemente compacto para cualquier espacio compacto K .
- (3) $X \times K$ es estrella finito para cualquier espacio compacto K .
- (4) $X \times \alpha D(\omega)$ es estrella finito.

DEMOSTRACIÓN: La implicación de (1) a (2) es consecuencia del Corolario 2.8; la de (2) a (3) se deduce a partir del Corolario 4.2, y la implicación de (3) a (4) es evidente. Con respecto a la implicación de (4) a (1), supongamos que X no es numerablemente compacto y que $\{U_n : n < \omega\}$ es una cubierta abierta de X sin subcubiertas finitas. Para cada $n < \omega$ sean

$$V_n := \bigcup_{k \leq n} U_k \quad \text{y} \quad W_n := \{k \in \omega : k > n\} \cup \{\omega\}.$$

Claramente,

$$\mathcal{U} := \{V_n \times W_n : n < \omega\} \cup \{X \times \{n\} : n < \omega\}$$

es una cubierta abierta de $X \times Y$.

Ahora, sean $A \in [X \times Y]^{<\omega}$ y $n < \omega$ con $A \cap (X \times \{k \in \omega : k \geq n\}) = \emptyset$. Observemos que si no existe $k \geq n$ de tal forma que $V_{k+1} \setminus V_k \neq \emptyset$, entonces la igualdad

$$X = V_n \cup \bigcup_{k \geq n} (V_{k+1} \setminus V_k)$$

produce el absurdo $X = \bigcup_{k \leq n} U_k$. Por lo tanto, hay $k \geq n$ para el cual existe $z \in V_{k+1} \setminus V_k$. Lo que sigue es notar que si $\langle z, k \rangle \in V_m \times W_m$, entonces $k \in W_m$ implica que $k > m$ y, por ende, que $z \in V_m \subseteq V_k$, una contradicción a la elección de z . Así, $X \times \{k\}$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle z, k \rangle$ como elemento. Para terminar, la relación $A \cap (X \times \{k\}) = \emptyset$ indica que $\langle z, k \rangle \notin \text{st}(A, \mathcal{U})$, lo que impide que A sea un núcleo de $\mathcal{U}$. $\square$

Para terminar, por el momento, con los resultados relacionados con la preservación de las propiedades estrella en productos topológicos, es natural preguntarse si el producto de dos espacios estrella P es, nuevamente, estrella P . Resulta que un ejemplo clásico de la literatura permite constatar que propiedades como la finitud estrella, la

compacidad estrella, la compacidad numerable estrella, la compacidad tenue estrella y la pseudocompacidad estrella (es decir, la pseudocompacidad) no son productivas, ni siquiera finitamente.

En efecto, de acuerdo con lo establecido en la Proposición 3.7 y en esta sección, cualquier espacio T_1 que sea numerablemente compacto posee todas las propiedades anteriores, y cada una de ellas implica la pseudocompacidad. Así, si se tiene un espacio X numerablemente compacto y T_1 tal que su cuadrado X^2 no es pseudocompacto, se obtiene un ejemplo suficiente para ilustrar lo que buscamos. Un espacio de Tychonoff con estas características puede encontrarse en [13, Example 1.4.1, p. 17].

Otro comentario antes de concluir este apartado del texto: un hecho bien conocido de la topología general es que todo espacio topológico pseudocompacto y normal (de hecho, pseudonormal) es numerablemente compacto (véase [13, Corollary 1.1.12, p. 8]). A lo largo de esta sección, y en concordancia con el párrafo anterior, hemos examinado diversas propiedades que, en el marco de los espacios T_1 , se sitúan entre la compacidad numerable y la pseudocompacidad. Estas observaciones implican que, en el ámbito de los espacios T_4 , todas estas propiedades son, en realidad, equivalentes.

Finalmente, es posible generalizar la construcción del Ejemplo 4.9 para obtener un resultado acerca de la naturaleza de todos los espacios de Tychonoff. Dicho resultado está escrito en la Proposición 4.14, y con él cerramos la exposición de esta sección. Antes de comenzar, recordemos que si X es un espacio topológico, entonces el *grado de Lindelöf* de X , denotado por $l(X)$, es el mínimo cardinal infinito κ para el cual X es κ -Lindelöf.

PROPOSICIÓN 4.14. *Todo espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado de un espacio de Tychonoff estrella compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio de Tychonoff, κ un cardinal tal que $\text{cf}(\kappa) > l(X)$, y

$$Z := (\beta X \times [0, \kappa]) \setminus ((\beta X \setminus X) \times \{\kappa\}) = (\beta X \times [0, \kappa]) \cup (X \times \{\kappa\})$$

dotado de la topología que hereda como subespacio del producto $\beta X \times [0, \kappa]$.

En primer lugar, Z es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $\beta X \times [0, \kappa]$. También, $X^* := X \times \{\kappa\}$ es un subespacio cerrado de Z porque su complemento, $\beta X \times [0, \kappa)$, es abierto en Z . Más aún, la función $X \rightarrow X^*$ dada por $x \mapsto \langle x, \kappa \rangle$ es un homeomorfismo. De esta manera, X es homeomorfo a un subespacio cerrado de Z .

Con la meta de probar que Z es estrella compacto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Z . En virtud de que $\beta X \times [0, \kappa)$ es numerablemente compacto (véase el Corolario 2.8), existe un conjunto $F \in [\beta X \times [0, \kappa)]^{<\omega}$ tal que $\beta X \times [0, \kappa) \subseteq \text{st}(F, \mathcal{U})$. Ahora, sea

$$\mathcal{V} := \left\{ V \in \tau_Z : \exists \alpha < \kappa \exists W \in \tau_{\beta X} \exists U \in \mathcal{U} \left(V \subseteq U \wedge V = (W \times (\alpha, \kappa]) \cap Z \right) \right\}.$$

Como $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X^* , y X^* es homeomorfo a X , existe $\mathcal{W} \in [\mathcal{V}]^{\leq l(X)}$ con $X^* \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. Luego, si para cada $V \in \mathcal{W}$ elegimos $\alpha(V) < \kappa$, $W(V) \in \tau_{\beta X}$ y $U(V) \in \mathcal{U}$ de tal forma que $V \subseteq U(V)$ y $V = (W(V) \times (\alpha(V), \kappa]) \cap Z$, entonces

establecer

$$\alpha := \sup\{\alpha(V) : V \in \mathcal{W}\} + 1$$

garantiza que $\alpha < \kappa$, pues $\text{cf}(\kappa) > l(X)$. Así, $L := \beta X \times \{\alpha\}$ es un subespacio compacto de Z que satisface $X^* \subseteq \text{st}(L, \mathcal{W})$.

En síntesis, $K := F \cup L$ es un núcleo compacto de $\mathcal{W}$. Consecuentemente, Z es estrella compacto. $\square$

A partir de la Proposición 4.14, surge una pregunta natural, formulada por Song al final de su artículo 26:

PREGUNTA 4.15. *¿Es cierto que todo espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado G_δ de un espacio de Tychonoff estrella compacto?*

La Pregunta 4.15, hasta donde tiene conocimiento el autor de estas líneas, permanece abierta. No obstante, conviene mencionar que, en 27, Theorem 3.12, p. 299], el propio Song demuestra que todo espacio de Tychonoff es homeomorfo a un subespacio cerrado G_δ de un espacio de Tychonoff estrella σ -compacto.

5. Numerabilidad y la propiedad de Lindelöf

De acuerdo con 16, la aparición de la numerabilidad estrella puede rastrearse hasta el artículo 14 de Ikenaga. Allí, bajo el nombre de “star-Lindelöf space”, presenta el concepto de numerabilidad estrella como una generalización simultánea de los espacios de Lindelöf, los espacios separables y los espacios numerablemente compactos.

Este análisis fue retomado y generalizado posteriormente por Hiremath mediante la propiedad de Lindelöf estrella, en 11, bajo el nombre de “sLc property”. Más adelante, fue recuperado por Song en 24 y 25, junto con la compacidad numerable estrella, bajo las denominaciones de “ $\mathcal{L}$ -starcompactness” y “ $\mathcal{C}$ -starcompactness”, respectivamente.

De manera similar a las ideas expuestas en la Sección 4, las nociones de numerabilidad estrella y de la propiedad de Lindelöf estrella han demostrado ser objetos de estudio particularmente fructíferos para quienes se dedican a la topología general. Desde mi perspectiva, lo natural es iniciar la exposición de esta sección con la motivación original de Ikenaga: identificar cuáles propiedades están relacionadas con la numerabilidad estrella.

En primer lugar, todo espacio estrella finito es también estrella numerable. Por otra parte, si κ es un cardinal infinito, entonces $D(\kappa)$ es un espacio de cardinalidad κ , y la cubierta abierta $\mathcal{W} := \{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ no tiene núcleos finitos, ya que $\text{st}(A, \mathcal{W}) = A$ para todo $A \subseteq D(\kappa)$. De esta manera, $D(\omega)$ es un espacio numerable (en particular, estrella numerable) que no es estrella finito.

El hecho de que todo espacio numerablemente compacto sea estrella numerable se deduce del Corolario 4.2. Por otra parte, la relación entre la numerabilidad estrella y la propiedad de Lindelöf se expone en el siguiente par de resultados:

PROPOSICIÓN 5.1. *Si κ es un cardinal infinito y X es κ -Lindelöf, entonces X es estrella κ^+ .*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ satisface $X = \bigcup \mathcal{V}$ y $\emptyset \notin \mathcal{V}$, $e : \mathcal{V} \rightarrow \bigcup \mathcal{V}$ es una función de elección y $A := e[\mathcal{V}]$, entonces $A \in [X]^{\leq \kappa}$ y $X = \text{st}(X, \mathcal{U})$. $\square$

COROLARIO 5.2. *Cualquier espacio con la propiedad de Lindelöf es estrella numerable.*

Ahora bien, que todo espacio separable sea estrella numerable fue demostrado en el Corolario 3.5. Además, como todo espacio con una propiedad topológica P es estrella P , es evidente que cualquier espacio separable es estrella separable. La pregunta natural que surge a partir de esta reflexión es: ¿cuál es la relación entre la numerabilidad estrella y la separabilidad estrella? De acuerdo con la Proposición 5.3, ambos conceptos son equivalentes:

PROPOSICIÓN 5.3. *Si X es un espacio topológico, entonces X es estrella numerable si y sólo si X es estrella separable.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación directa es evidente en virtud de que todo espacio numerable es separable. Con respecto a la implicación restante, supongamos que X es estrella separable, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X , y sea A un subespacio separable de X tal que $X = \text{st}(A, \mathcal{U})$. Si D es un subconjunto denso y numerable de A , entonces la Proposición 3.2 indica que

$$X = \text{st}(A, \mathcal{U}) = \text{st}(A \cap \overline{D}, \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(\overline{D}, \mathcal{U}) = \text{st}(D, \mathcal{U})$$

y, por ende, que $X = \text{st}(D, \mathcal{U})$. En consecuencia, X es estrella numerable. $\square$

Con respecto a la propiedad de tener extensión numerable, en el Corolario 3.9 demostramos que todo espacio T_1 con extensión numerable es estrella numerable. El recíproco de esta implicación no es verdadero: por ejemplo, si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal en ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase [4, Observación 2.1.6, p. 31]), entonces el espacio de Mrówka–Isbell asociado, $\Psi(\mathcal{A})$, es separable (por ende, estrella numerable), y contiene un subespacio cerrado y discreto de tamaño $\mathfrak{c}$ (véase la Proposición 2.5), por lo que $e(\Psi(\mathcal{A})) = \mathfrak{c}$.

Por otra parte, no encontré en la literatura un ejemplo de un espacio con extensión numerable que no sea estrella numerable. Supongo que esto se debe a que la mayoría de nosotros suponemos de antemano cierto grado de separación en los espacios que estudiamos y, en presencia de la propiedad T_1 , es imposible encontrar un ejemplo con esas características. Dicho lo anterior, hasta donde tengo conocimiento, el Ejemplo 5.4, elaborado por quien suscribe, no aparece en la literatura clásica sobre espacios estrella P .

Antes de empezar, recordemos que la *amplitud* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$s(X) := \sup\{|D| : D \text{ es un subespacio discreto de } X\} + \omega.$$

Decimos que X tiene *amplitud numerable* cuando $s(X) = \omega$. Claramente, todo espacio con amplitud numerable tiene extensión numerable.

EJEMPLO 5.4. *Si κ es un cardinal infinito, entonces existe un espacio T_0 con amplitud a lo sumo κ que no es estrella κ .*

DEMOSTRACIÓN: La colección

$$\tau := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$$

es una topología en $\mathbb{R}$, denominada la *topología de los rayos derechos*. Sean Z el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ y $X := Z \times D(\kappa)$.

Resulta que Z es un espacio T_0 y no T_1 , lo cual implica que X también lo es. Con el objetivo de probar que X no es estrella κ , observemos que

$$\mathcal{U} := \{Z \times \{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$$

es una cubierta abierta de X . Luego, si $A \in [X]^{<\kappa}$ y $\alpha < \kappa$ satisface $A \cap (Z \times \{\alpha\}) = \emptyset$, entonces $\langle 0, \alpha \rangle \notin \text{st}(A, \mathcal{U})$.

Para ver que $s(X) \leq \kappa$, sea A un subespacio discreto de X . Notemos que si $\alpha < \kappa$, entonces $|A \cap (X \times \{\alpha\})| \leq 1$. En efecto, si existen $a, b \in X$ distintos con $\langle a, \alpha \rangle, \langle b, \alpha \rangle \in A$, entonces existen $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tales que

$$((x_a, \infty) \times \{\alpha\}) \cap A = \{\langle a, \alpha \rangle\} \quad \text{y} \quad ((x_b, \infty) \times \{\alpha\}) \cap A = \{\langle b, \alpha \rangle\}.$$

De esta manera, como $a \notin (x_b, \infty)$ y $b \notin (x_a, \infty)$, se deduce la contradicción $a \leq x_b < b \leq x_a < a$. Finalmente, la igualdad

$$A = \bigcup_{\alpha < \kappa} (A \cap (X \times \{\alpha\}))$$

constata que $|A| \leq \kappa$. □

Ahora es momento de reflexionar sobre la distinción entre los conceptos que hemos estudiado hasta el momento. Verbigracia, ¿cuál es un ejemplo de un espacio estrella Lindelöf que no sea estrella numerable? ¿Qué tan diferentes son los conceptos de la compacidad numerable estrella y la propiedad de Lindelöf estrella? ¿Y cuál es la relación entre las propiedades de la sección pasada y los nuevos conceptos que hemos introducido? Ese tipo de preguntas encontrarán respuesta en los resultados que se presentan a continuación.

En la Proposición [5.1](#) vimos que todo espacio κ -Lindelöf es estrella κ^+ . Ahora bien, un ejemplo de un espacio de Tychonoff que es estrella Lindelöf pero no estrella numerable puede encontrarse en [\[25\]](#). Para nuestra fortuna, el ejemplo de Song es lo suficientemente flexible como para, con modificaciones mínimas —que expondremos a continuación—, obtener espacios que permiten constatar que ser estrella κ -Lindelöf no implica ser estrella κ^+ . Para ello, sólo es necesario hacer una observación preliminar: el espacio de ordinales $[0, \kappa)$ es κ -Lindelöf.

EJEMPLO 5.5. *Para todo cardinal infinito, κ existe un espacio de Tychonoff estrella κ -Lindelöf que no es estrella κ^+ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean λ un número cardinal tal que $\lambda > \kappa$ y

$$X := (\beta D(\lambda) \times [0, \kappa]) \setminus ((\beta D(\lambda) \setminus D(\lambda)) \times \{\kappa\}) = (\beta D(\lambda) \times [0, \kappa]) \cup (D(\lambda) \times \{\kappa\})$$

provisto de la topología que hereda como subespacio del producto $\beta D(\lambda) \times [0, \kappa]$.

Para empezar, X es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $\beta D(\lambda) \times [0, \kappa]$. Además, como $\beta D(\lambda) \times [0, \kappa]$ tiene la propiedad de κ -Lindelöf

(véase la Proposición 2.7) y es un subconjunto denso de X , la Proposición 3.4 garantiza que X es estrella κ -Lindelöf.

Finalmente, para ver que X no es estrella κ^+ , observemos que

$$\mathcal{U} := \{\beta D(\lambda) \times [0, \alpha) : 0 < \alpha < \kappa\} \cup \{\{\alpha\} \times [0, \kappa] : \alpha \in D(\lambda)\}$$

es una cubierta abierta de X . Además, si $A \in [X]^{\leq \kappa}$ y $\alpha \in D(\lambda)$ tiene la propiedad de que $A \cap (\{\alpha\} \times [0, \kappa]) = \emptyset$, entonces $\langle \alpha, \kappa \rangle \notin \text{st}(A, \mathcal{U})$, es decir, A no es un núcleo de $\mathcal{U}$. $\square$

En vista de que la compacidad implica, simultáneamente, la compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf, es evidente que la compacidad estrella implica, a la vez, la compacidad numerable estrella y la propiedad de Lindelöf estrella. A continuación, se presentan dos ejemplos tomados de [24], que muestran que estas implicaciones no son reversibles.

EJEMPLO 5.6. *Existe un espacio de Tychonoff estrella Lindelöf que no es estrella numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$X := (\beta\omega \times [0, \omega]) \setminus ((\beta\omega \setminus \omega) \times \{\omega\}) = (\beta\omega \times [0, \omega)) \cup (\omega \times \{\omega\})$$

equipado con la topología que hereda como subespacio del producto $\beta\omega \times [0, \omega]$.

Primero, X es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $\beta\omega \times [0, \omega]$. También, X es estrella Lindelöf porque $\beta\omega \times [0, \omega)$ es un subespacio denso de X que tiene la propiedad de Lindelöf (véanse el Corolario 2.8 y la Proposición 3.4).

Ahora, para ver que X no es estrella numerablemente compacto, notemos que

$$\mathcal{U} := \{(\beta\omega \setminus \{m < \omega : m \leq n\}) \times \{n\} : n < \omega\} \cup \{\{n\} \times [n, \omega] : n < \omega\}$$

es una cubierta abierta de X con la siguiente característica: si $n \leq m < \omega$, entonces $\{n\} \times [n, \omega]$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle n, m \rangle$ como elemento.

Sea Y un subespacio numerablemente compacto de X . En virtud de la propiedad que tiene la cubierta $\mathcal{U}$ y de la compacidad numerable de Y , se satisface que

$$\{n < \omega : Y \cap (\{n\} \times [n, \omega]) \neq \emptyset\}$$

es un conjunto finito. Finalmente, si $m < \omega$ es tal que $Y \cap (\{n\} \times [n, \omega]) = \emptyset$ para todo $n \geq m$, entonces $\langle m, \omega \rangle \notin \text{st}(Y, \mathcal{U})$ y, por ende, Y no es un núcleo de $\mathcal{U}$. $\square$

Para el siguiente ejemplo, conviene recordar brevemente un hecho básico de la topología general: la imagen continua de un espacio con la propiedad de Lindelöf es, nuevamente, un espacio de Lindelöf (véase [4, Proposición 7.31, p. 226]).

EJEMPLO 5.7. *Existe un espacio de Tychonoff estrella numerablemente compacto que no es estrella Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$\begin{aligned} X &:= (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]) \setminus ((\alpha D(\mathfrak{c}) \setminus D(\mathfrak{c})) \times \{\mathfrak{c}\}) \\ &= (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]) \setminus \{\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{c} \rangle\} = (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})) \cup (D(\mathfrak{c}) \times \{\mathfrak{c}\}) \end{aligned}$$

dotado de la topología que hereda como subespacio del producto $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]$.

Claramente, X es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]$. En vista de que $\text{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ (véase [10, Proposición 10.29, p. 272]), el espacio $[0, \mathfrak{c})$ es numerablemente compacto y, por ende, el Corolario [2.8] y la Proposición [3.4] implican que X es estrella numerablemente compacto, puesto que $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})$ es un subespacio denso de X .

Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $U_\alpha := \{\alpha\} \times (\alpha, \mathfrak{c}]$. Para demostrar que X no es estrella Lindelöf, observemos que

$$\mathcal{U} := \{\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})\} \cup \{U_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

es una cubierta abierta de X . Ahora, sea Y un subespacio de Lindelöf de X . Notemos que, como $A := D(\mathfrak{c}) \times \{\mathfrak{c}\} = \{\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es un subespacio cerrado y discreto de X , $A \cap Y$ es un subespacio cerrado y discreto de Y , lo cual implica que $A \cap Y$ es numerable porque Y tiene la propiedad de Lindelöf. En consecuencia, $I := \{\alpha < \mathfrak{c} : \langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle \in Y\}$ es numerable.

El subespacio $Z := Y \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ tiene la propiedad de Lindelöf, por ser cerrado en Y , y está contenido en $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})$. De esta manera, si $\pi : \alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}) \rightarrow [0, \mathfrak{c})$ es la proyección canónica, entonces $\pi[Z]$ es un subespacio de Lindelöf de $[0, \mathfrak{c})$ y así, por el Lema [2.4], existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $\pi[Z] \cap (\beta, \mathfrak{c}) = \emptyset$. Además, como I es numerable, existe $\alpha \in (\beta, \mathfrak{c}) \setminus I$. En suma, $\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle \notin \text{st}(Y, \mathcal{U})$ y, por consiguiente, Y no es un núcleo de $\mathcal{U}$. $\square$

Es un buen momento para hacer un comentario de índole histórico: en [2] se planteó la pregunta de si todo espacio de Tychonoff pseudocompacto es estrella Lindelöf. Ese mismo año, Song respondió negativamente en [22]. Curiosamente, tres años antes, en [24], Song ya había presentado el Ejemplo [5.7]. Aunque en [24] se emplea la compactación de Alexandroff y en [22] la de Stone–Čech, los espacios construidos comparten las mismas propiedades: son de Tychonoff, estrella numerablemente compactos (y por ende, pseudocompactos), pero no estrella Lindelöf.

De vuelta a nuestra exposición, observemos que, si κ es un cardinal infinito y X es un espacio discreto κ -compacto, entonces X debe ser finito. En efecto, si existiera un conjunto $A \in [X]^\omega$, entonces la familia $\mathcal{U} := \{\{x\} : x \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ sería una cubierta abierta de X de tamaño a lo sumo κ , que no admite subcubiertas finitas.

Una consecuencia de lo anterior es que, si κ y λ son cardinales infinitos, entonces $D(\kappa)$ no es estrella λ -compacto. Lo que sucede es que si $\mathcal{U} := \{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ y A es un subespacio λ -compacto de $D(\kappa)$, entonces $A \in [D(\kappa)]^{<\omega}$ y $\text{st}(A, \mathcal{U}) = A$; en particular, $\mathcal{U}$ no tiene núcleos λ -compactos. Así, todo espacio discreto e infinito no es estrella numerablemente compacto.

Del mismo modo que el diagrama presentado en la Figura [2], el diagrama de la Figura [3] tiene como objetivo recopilar parte del trabajo realizado en esta sección, con el fin de proporcionar una ayuda visual que permita conectar lo que hemos expuesto.

En esta ocasión, N , L y S representan, correspondientemente, la numerabilidad, la propiedad de Lindelöf y la separabilidad.

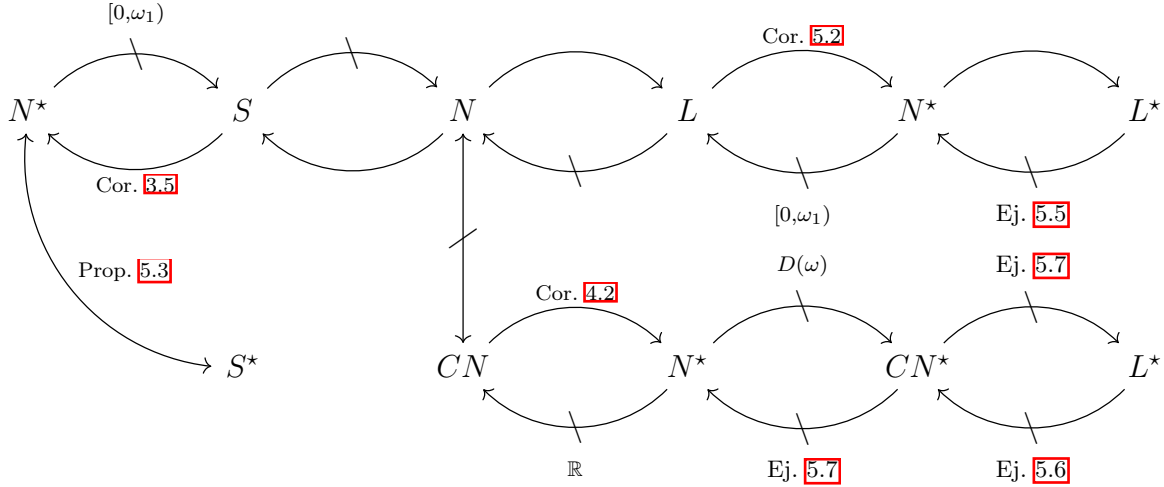


FIGURA 3. Relaciones entre las propiedades N , L , S y CN .

Conviene también aclarar que, para fines del diagrama, la negación de la flecha $N \leftrightarrow CN$ significa que ninguna de las implicaciones entre estos dos conceptos es válida en espacios topológicos en general. Por ejemplo, el espacio $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto pero no numerable, mientras que $D(\omega)$ es numerable pero no numerablemente compacto.

Una tarea pendiente de la Sección 4 es el análisis de la σ -compacidad estrella. Para el lector interesado en profundizar en esta propiedad, se recomienda consultar [27], donde, una vez más, Song expone diversas características de estos espacios. Dado que todo espacio numerable es σ -compacto, se sigue que todo espacio estrella numerable es estrella σ -compacto. Con el fin de no omitir por completo esta propiedad, planteamos enseguida la siguiente cuestión:

PROBLEMA 5.8. *¿Existe un espacio estrella σ -compacto que no sea estrella numerable?*

La *celularidad* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$c(X) := \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

Decimos que X tiene *celularidad numerable* siempre que $c(X) = \omega$.

Para el lector no familiarizado con las funciones cardinales topológicas, mencionamos que $c(X)$ está bastante alejada, en el sentido del diagrama de [12, Fig. 1, p. 15], de la cardinalidad de X , aunque siempre está dominada por ella. Con este comentario buscamos dar a entender que, en particular, ser un espacio numerable es una condición mucho más fuerte que tener celularidad numerable y, por ende, que ser un espacio estrella celularidad numerable es una condición considerablemente más débil que ser estrella numerable.

Con respecto al Problema 5.8, Song proporciona un ejemplo utilizando la técnica que hemos visto en varias ocasiones a lo largo de este texto (véase [27]). Sin embargo,

el ejemplo que presentamos a continuación apareció inicialmente en [6, Example 3.3.4, p. 101] y, posteriormente, fue retomado en [2, Theorem 2.6, p. 622]. Este ejemplo, además de contestar afirmativamente el Problema [5.8], permite demostrar un hecho notable: no sólo la σ -compacidad estrella está lejos de implicar la numerabilidad estrella, sino que ni siquiera es suficiente para obtener la celularidad numerable estrella.

EJEMPLO 5.9. *Existen un espacio de Tychonoff pseudocompacto y estrella σ -compacto que no es estrella celularidad numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $Y := \alpha D(\mathfrak{c})$ y $X := \Psi(\mathcal{A})$, el espacio de Mrówka–Isbell asociado a la colección $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal en ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase [4, Observación 2.1.6, p. 31]). Notemos que X es estrella σ -compacto, ya que es estrella numerable en virtud de ser un espacio separable (véanse las Proposiciones [2.5] y [5.3]).

El Corolario [4.10], junto con el hecho de que la pseudocompacidad es compactamente productiva (véase [13, Corollary 1.4.4, p. 19]), implica que $X \times Y$ es un espacio de Tychonoff pseudocompacto y estrella σ -compacto. Finalmente, si $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{A}$, entonces

$$\mathcal{U} := \{X \times \{\alpha\} : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{(\{A_\alpha\} \cup A_\alpha) \times (Y \setminus \{\alpha\}) : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{\{n\} \times Y : n < \omega\}$$

es una cubierta abierta de $X \times Y$ sin núcleos con celularidad numerable.

Para comprobar esto último, observemos que si $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces $X \times \{\alpha\}$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle A_\alpha, \alpha \rangle$ como elemento. Por esta razón, si $B \subseteq X$ es un núcleo de $\mathcal{U}$, la contención $\{\langle A_\alpha, \alpha \rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \text{st}(B, \mathcal{U})$ implica que $B \cap (X \times \{\alpha\}) \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$. Así, $\{B \cap (X \times \{\alpha\}) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una familia celular de cardinalidad $\mathfrak{c}$ en B ; en particular, B no tiene celularidad numerable. $\square$

En virtud del Corolario [2.8], si X es compacto y Y es numerablemente compacto o tiene la propiedad de Lindelöf, entonces $X \times Y$ conserva la misma propiedad que Y . Es razonable preguntar si un debilitamiento de la compacidad permite obtener un debilitamiento de la propiedad correspondiente. Por ejemplo, ¿es cierto que el producto de un espacio numerablemente compacto con un espacio de Lindelöf es estrella numerablemente compacto? ¿Y estrella Lindelöf? Song también se planteó estas preguntas y, en [24] y [25], presentó un ejemplo de un producto que responde negativamente a las dos cuestiones anteriores. Dicho espacio está expuesto en el Ejemplo [5.10].

Antes de continuar, vale la pena recordar un resultado elemental de la topología general: la imagen continua de un espacio numerablemente compacto también es numerablemente compacto (véase [4, Proposición 7.31, p. 226]).

EJEMPLO 5.10. *Existen un espacio de Tychonoff numerablemente compacto y un espacio de Tychonoff con la propiedad de Lindelöf de tal manera que su producto topológico no es estrella numerablemente compacto ni estrella Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X el espacio numerablemente compacto $[0, \omega_1)$ y Y el espacio de Lindelöf $LD(\omega_1)$. También, sean $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ las proyecciones

canónicas. Además, para cada $\alpha < \omega_1$, sean

$$U_\alpha := [0, \alpha] \times [\alpha, \omega_1] \text{ y } V_\alpha := (\alpha, \omega_1) \times \{\alpha\}.$$

Claramente, $\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta abierta de $X \times Y$.

Sean C un subespacio numerablemente compacto de $X \times Y$ y L un subespacio de Lindelöf de $X \times Y$. En vista de que $\pi_Y[C]$ es un subespacio numerablemente compacto de Y y $\pi_X[L]$ es un subespacio de Lindelöf de X , el Lema 2.4 produce $\beta, \gamma < \kappa$ de tal manera que $\pi_Y[C] \cap (\beta, \omega_1) = \emptyset = \pi_X[L] \cap (\gamma, \omega_1)$. Luego, si $\alpha := \max\{\beta, \gamma\} + 1$, entonces $\langle \alpha + 1, \alpha \rangle \notin \text{st}(C, \mathcal{U}) \cup \text{st}(L, \mathcal{U})$ porque V_α es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle \alpha + 1, \alpha \rangle$ como elemento y $C \cap V_\alpha = \emptyset = L \cap V_\alpha$. $\square$

Es un hecho quintaesencial de la topología general que un espacio topológico es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y posee la propiedad de Lindelöf. En virtud de que todo espacio estrella compacto es, a la vez, estrella numerablemente compacto y estrella Lindelöf, resulta casi inevitable esperar que un espacio que satisfaga simultáneamente ambas propiedades sea también estrella compacto. ¿No es así?

Los resultados que siguen actúan como la coda de una sinfonía, culminando en el Ejemplo 5.15, que rompe dicha esperanza y pone fin a esta sección.

Para empezar, un espacio topológico X es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito si, para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $\text{st}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$. Esta noción también es llamada “1-starcompact” en [6] y “ $1\frac{1}{2}$ -starcompact” en [26]. Nuestro primer paso es conectar este concepto con uno de la Sección 4:

PROPOSICIÓN 5.11. *Si X es estrella compacto, entonces X es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , existe un subespacio compacto $A \subseteq X$ tal que $\text{st}(A, \mathcal{U}) = X$. Luego, como $\mathcal{U}$ cubre al espacio A , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ con $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Claramente, $\text{st}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$. $\square$

El segundo paso, de acuerdo con [24], consiste en demostrar el resultado [16, Theorem 28, p. 28]. Para ello, necesitamos primero un lema auxiliar:

LEMA 5.12. *Sea κ un número cardinal infinito. Si X es un conjunto de cardinalidad κ y $Y \in [X]^\kappa$, entonces existe una función biyectiva $\varphi : [X]^{<\omega} \rightarrow Y$ tal que $\varphi(A) \notin A$ para todo $A \in [X]^{<\omega}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $S := [X]^{<\omega}$ y $\{Y_n : n < \omega\} \subseteq [Y]^\kappa$ una partición de Y . Para cada $n < \omega$, sea

$$S_n := \left\{ A \in S : A \cap Y_n = \emptyset \wedge \forall m < n (A \cap Y_m \neq \emptyset) \right\}.$$

Resulta que $\{S_n : n < \omega\}$ es un subconjunto de $[S]^\kappa$ y que $\{S_n : n < \omega\}$ es una partición de S . Ahora, para todo $n < \omega$, sea $\varphi_n : S_n \rightarrow Y_n$ una función biyectiva. Claramente, la función $\varphi := \bigcup_{n < \omega} \varphi_n$ tiene las propiedades deseadas. $\square$

⁶Conviene mencionar que, en esta parte, no hay un cambio de topología: el intervalo $[\alpha, \omega_1]$ sigue considerándose como subespacio de $LD(\omega_1)$; simplemente es más conciso escribir el intervalo en lugar del conjunto $\{\beta \in LD(\omega_1) : \alpha \leq \beta \leq \omega_1\}$.

PROPOSICIÓN 5.13. *Sea X un espacio regular e infinito. Si Y es un subespacio cerrado y discreto de X con $|Y| = |X|$, entonces X no es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{V_x : x \in X\}$ un subconjunto de τ_X de tal manera que, si $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y$, entonces $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq X \setminus Y$ y $\overline{V_y} \cap Y = \{y\}$. Sea $\varphi : [X]^{<\omega} \rightarrow Y$ con las características del Lema 5.12. También, si $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y$, sean

$$U_x := V_x \quad \text{y} \quad U_y := V_y \setminus \overline{\bigcup \{V_z : z \in \varphi^{-1}(y)\}}.$$

Nuestra meta es demostrar que si $\mathcal{U}$ es la cubierta abierta $\{U_x : x \in X\}$, entonces no hay $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $\text{st}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$.

En efecto, si $n < \omega$, $\{x_i : i \leq n\} \subseteq X$, $\mathcal{V} := \{U_{x_i} : i \leq n\}$ y $A := \{x_i : i \leq n\}$, la idea es probar que $\varphi(A) \notin \text{st}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U})$. Supongamos en busca de un absurdo que $\varphi(A) \in \text{st}(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U})$. Sean $z \in \bigcup \mathcal{V}$ y $U \in \mathcal{U}$ con $\{\varphi(A), z\} \subseteq U$. También, sean $j \leq n$ y $x \in X$ de tal forma que $z \in U_{x_j}$ y $U = U_x$. No puede suceder que $x \in X \setminus Y$ porque $\varphi(A) \in Y$ y $\varphi(A) \in U_x = V_x \subseteq X \setminus Y$. Luego, como $x \in Y$, $\varphi(A) \in Y$, $\varphi(A) \in U_x$ y $U_x \cap Y = \{x\}$, resulta que $\varphi(A) = x$. Finalmente, las relaciones

$$\begin{aligned} z \in U_{\varphi(A)} &= V_{\varphi(A)} \setminus \overline{\bigcup \{V_w : w \in \varphi^{-1}(\varphi(A))\}} = V_{\varphi(A)} \setminus \overline{\bigcup \{V_w : w \in A\}} \\ &= V_{\varphi(A)} \setminus \overline{\bigcup \{V_{x_i} : i \leq n\}} = V_{\varphi(A)} \setminus \overline{\bigcup \{\overline{V_{x_i}} : i \leq n\}} \end{aligned}$$

indican que $z \notin \overline{V_{x_j}}$, lo cual es absurdo pues $z \in U_{x_j} \subseteq V_{x_j}$. $\square$

A partir de la Proposición 3.7 y de la observación hecha en el tercer párrafo al inicio de la Sección 4, queda claro que todo espacio estrella numerablemente compacto es pseudocompacto. Una pregunta que no fue abordada en dicha sección es la siguiente: ¿existe un espacio pseudocompacto que no sea estrella numerablemente compacto? Gracias a la Proposición 5.13, de hecho, estamos preparados para dar un ejemplo con propiedades aún más refinadas:

EJEMPLO 5.14. *Existe un espacio de Tychonoff pseudocompacto y estrella numerable, que no es estrella numerablemente compacto y no es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{A}$ una familia infinita y casi ajena maximal en ω . Primero, como ω es un subespacio denso de $\Psi(\mathcal{A})$ —el espacio de Mrówka–Isbell asociado a $\mathcal{A}$ —, se tiene que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio separable (véase la Proposición 2.5); por lo tanto, es estrella numerable por la Proposición 5.3. Por otra parte, como $\mathcal{A}$ es un subespacio discreto de $\Psi(\mathcal{A})$ y se cumple que $|\mathcal{A}| = |\Psi(\mathcal{A})|$, resulta que $\Psi(\mathcal{A})$ no es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito. En particular, $\Psi(\mathcal{A})$ no es estrella compacto, según la Proposición 5.11.

Ahora, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\Psi(\mathcal{A})$ sin núcleos compactos. Si C es un subespacio numerablemente compacto de $\Psi(\mathcal{A})$, entonces el hecho de que $C \cap \mathcal{A}$ es un subespacio cerrado de C implica, en virtud de la compacidad numerable de C , que $C \cap \mathcal{A}$ es finito, pues este es un espacio discreto y numerablemente compacto. Lo anterior tiene como consecuencia que C es numerable, ya que $C = (C \cap \omega) \cup (C \cap \mathcal{A})$. De esta manera, C es numerablemente compacto y tiene la propiedad de Lindelöf (por ser numerable), lo cual indica que C es compacto y, por ende, que C no es un núcleo de $\mathcal{U}$. En suma, $\Psi(\mathcal{A})$ no es estrella numerablemente compacto. $\square$

De vuelta a nuestro objetivo principal para el término de esta sección, y equipados con la Proposición 5.11 y la Proposición 5.13, estamos en condiciones de presentar el ejemplo prometido.

EJEMPLO 5.15. *Existe un espacio estrella numerablemente compacto y estrella Lindelöf que no es estrella compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal en ω de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase [4] Observación 2.1.6, p. 31), $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathcal{A}$, $X_1 := \Psi(\mathcal{A})$ el espacio de Mrówka–Isbell asociado a $\mathcal{A}$, y

$$X_2 := (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]) \setminus \{\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle\} = (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})) \cup (D(\mathfrak{c}) \times \{\mathfrak{c}\})$$

equipado con la topología que hereda como subespacio del producto $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}]$ (véase el Ejemplo 5.7).

Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $p_\alpha := \{\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle, A_\alpha\}$. Asimismo, sean $Y := \{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y

$$X := \omega \cup Y \cup (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}))$$

dotado de la topología cociente inducida por la proyección natural $\pi : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X$; es decir, X es el espacio cociente generado a partir de la suma $X_1 \oplus X_2$, al identificar $\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle$ con A_α para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Para poder concentrarnos en las propiedades tipo estrella que posee X , encomendamos al lector verificar que X es T_3 . El resto de la demostración se dividirá en tres enunciados.

Afirmación 1. X no es estrella compacto.

En virtud de que $|X| = \mathfrak{c} = |Y|$ y X es T_3 , es suficiente comprobar que Y es un subespacio cerrado y discreto de X (véanse las Proposiciones 5.11 y 5.13). Primero, Y es cerrado en X porque $\pi^{-1}[X \setminus Y] = \omega \cup (\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c}))$ es un subconjunto abierto de $X_1 \oplus X_2$. Por otra parte, si $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces $U_\alpha := \{p_\alpha\} \cup A_\alpha$ es un elemento de τ_X , porque

$$\pi^{-1}[U_\alpha] = (\{A_\alpha\} \cup A_\alpha) \cup \{\langle \alpha, \mathfrak{c} \rangle\}$$

es abierto en $X_1 \oplus X_2$, que satisface $U_\alpha \cap Y = \{p_\alpha\}$.

Afirmación 2. X es estrella numerablemente compacto.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . En vista de que $\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})$ es un subespacio numerablemente compacto de $X_1 \oplus X_2$ (véase el Corolario 2.8) y $\pi : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X$ es una función continua, $C := \pi[\alpha D(\mathfrak{c}) \times [0, \mathfrak{c})]$ es numerablemente compacto. Además, como $\pi[X_2] = Y \cup C$, no es difícil comprobar que C es un subespacio denso de $\pi[X_2]$, por lo que $\pi[X_2] \subseteq \text{st}(\pi[X_2], \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(C, \mathcal{U})$.

Con respecto a $\pi[\omega]$, el plan es demostrar que existe $F \in [\pi[\omega]]^{<\omega}$ tal que $\pi[\omega] \subseteq \text{st}(F, \mathcal{U})$. Supongamos, en busca de una contradicción, que lo anterior no sucede. Por recursión es posible construir una sucesión $\{x_n : n < \omega\}$ en $\pi[\omega]$ de tal modo que $x_n \notin \text{st}(\{x_m : m < n\}, \mathcal{U})$ para todo $n < \omega$. Ahora, como X_1 es homeomorfo a $\pi[X_1]$, el conjunto infinito $\{x_n : n < \omega\}$ tiene un punto de acumulación x en $\pi[X_1]$ (véase la Proposición 2.5). Luego, si $U \in \mathcal{U}$ cumple $x \in U$, y $m < n < \omega$ satisfacen $\{x_m, x_n\} \subseteq U$, entonces $x_n \in \text{st}(x_m, \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(\{x_k : k < n\}, \mathcal{U})$, lo cual es absurdo.

Finalmente, si F es un subconjunto finito de $\pi[\omega]$ con $\pi[\omega] \subseteq \text{st}(F, \mathcal{U})$, entonces $D := C \cup F$ es un núcleo numerablemente compacto de $\mathcal{U}$.

Afirmación 3. X es estrella Lindelöf.

Nuestro objetivo es demostrar algo un poco más fuerte: X es estrella numerable. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . En primer lugar, como $\pi[\omega]$ es denso en $\pi[X_1]$ (véase la Proposición 2.5), $\pi[X_1] \subseteq \text{st}(\pi[X_1], \mathcal{U}) \subseteq \text{st}(\pi[\omega], \mathcal{U})$. Por otra parte, como el espacio C de la Afirmación 2 es numerablemente compacto, también es estrella finito (véase el Corolario 4.2), lo cual produce $F \in [C]^{<\omega}$ con $C \subseteq \text{st}(F, \mathcal{U})$. De esta manera, como $\pi[X_1] = \omega \cup Y$, se deduce que $N := \pi[\omega] \cup F$ es un núcleo numerable de $\mathcal{U}$. $\square$

Al examinar con detenimiento los detalles del Ejemplo 5.15, se revela que el espacio presentado por Song en [24] tiene propiedades topológicas más fuertes que las indicadas en el enunciado: X es T_3 , estrella numerablemente compacto y estrella numerable, pero no es $1\frac{1}{2}$ -estrella finito.

También conviene mencionar que Song dejó la siguiente pregunta en su artículo y, hasta donde tiene conocimiento quien escribe estas líneas, dicha pregunta continúa abierta:

PREGUNTA 5.16. *¿Existe un espacio T_4 , estrella numerablemente compacto y estrella Lindelöf que no sea estrella compacto?*

6. Amplitud numerable, celularidad numerable y extensión numerable

La amplitud, la celularidad y la extensión han aparecido de manera recurrente en lo que hemos presentado hasta el momento. Estas tres funciones cardinales topológicas han estado en íntima conexión con las propiedades estrella que hemos estudiado, y han permitido establecer puentes y formular preguntas interesantes relacionadas con los conceptos clásicos de la topología general.

En los artículos [20] y [21], Á. Tamariz Mascarúa y A. D. Rojas Sánchez realizaron un estudio detallado de las propiedades de la amplitud numerable estrella, la celularidad numerable estrella y la extensión numerable estrella. Lamentablemente, el espacio restante de este escrito no es suficiente para exponer con lujo de detalle el trabajo que realizaron, pero sí basta para presentar brevemente algunos de los resultados fundamentales que obtuvieron, con el fin de dejar plasmadas en estas páginas parte de las contribuciones de dos investigadores nacionales en esta área del conocimiento, con la evidente invitación al lector para revisar con más detenimiento los artículos arriba citados.

En concordancia con los términos descritos en [19], de ahora en adelante, ser *estrella AN*, *estrella ccc* y *estrella EN* significará, respectivamente, ser estrella amplitud numerable, estrella celularidad numerable y estrella extensión numerable.

Para comenzar, decimos que un espacio topológico X es *tenuemente Lindelöf* (en inglés, *feebly Lindelöf*) si toda familia localmente finita $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ es numerable. De manera similar a lo que ocurre con los términos “tenuemente compacto” y “feebly compact”, existe cierta discrepancia en su traducción dentro de la literatura; en ocasiones, el término en inglés es traducido como “débilmente Lindelöf” (véase [19]).

Esta vez, considero que es importante tener especial cuidado, ya que en la literatura reciente se dice que un espacio topológico X es *débilmente Lindelöf* si, para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $\bigcup \mathcal{V} = X$. Ahora bien, una lectura cuidadosa de [1] revela dos hechos importantes: todo espacio débilmente Lindelöf es también tenuemente Lindelöf, y existe un P -espacio de Tychonoff que es tenuemente Lindelöf pero no débilmente Lindelöf. Por esta razón, conviene siempre prestar atención a la terminología empleada en los textos que consultamos, puesto que una traducción imprecisa podría dar lugar a malentendidos.

Dicho lo anterior, el hecho de que todo espacio de Lindelöf tiene extensión numerable (véase [12]) implica que cualquier espacio estrella Lindelöf es, a su vez, estrella EN. Lo que sigue tiene como propósito demostrar que todo espacio de Hausdorff estrella EN es tenuemente Lindelöf.

PROPOSICIÓN 6.1. *Si X es T_2 , $\mathcal{U} \subseteq \tau_X^+$ es una familia localmente finita y $e : \mathcal{U} \rightarrow \bigcup \mathcal{U}$ es una función de elección, entonces $e[\mathcal{U}]$ es un subespacio cerrado y discreto de X .*

DEMOSTRACIÓN: Para todo $x \in X$ existe $V_x \in \tau_X$ tal que $\{U \in \mathcal{U} : U \cap V_x \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito. Por un lado, si $x \in e[\mathcal{U}]$, la propiedad de Hausdorff produce $W_x \in \tau_X$ con $x \in W_x$ y $W_x \cap e[\mathcal{U}] = \{x\}$. Por otro lado, si $x \in X \setminus e[\mathcal{U}]$, nuevamente el hecho de que X es T_2 genera $W_x \in \tau_X$ con $x \in W_x$ y $W_x \cap e[\mathcal{U}] = \emptyset$. $\square$

COROLARIO 6.2. *Si un espacio de Hausdorff tiene una familia localmente finita, celular y no numerable, entonces el espacio no es estrella EN.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio de Hausdorff, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tau_X^+$ una familia celular y localmente finita, $z_\alpha \in U_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$, $A := \{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{X \setminus A\}$. Observemos que, como A es un subespacio cerrado y discreto de X por la Proposición 6.1, la colección $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X .

Ahora supongamos que B es un núcleo de $\mathcal{U}$. En virtud de que U_α es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a z_α como elemento para todo $\alpha < \omega_1$, resulta que $\emptyset \notin \{B \cap U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Luego, si para cada $\alpha < \omega_1$ seleccionamos $x_\alpha \in B \cap U_\alpha$, entonces la Proposición 6.1 indica que $C := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un subespacio cerrado y discreto de X ; en particular, también lo es de B . Finalmente, como $|C| = \omega_1$ porque $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular, resulta que $e(B) > \omega$. $\square$

Una combinación del Lema 2.2 con el Corolario 6.2 implica el siguiente resultado:

COROLARIO 6.3. *Si X es T_2 y estrella EN, entonces X es tenuemente Lindelöf.*

Lo anterior indica que, en el ámbito de los espacios de Hausdorff, la propiedad de ser estrella EN queda intermedia entre la propiedad de Lindelöf estrella y la propiedad de Lindelöf tenue. Lo natural ahora es mostrar ejemplos de espacios que demuestren que las implicaciones recíprocas no son válidas, para certificar que, en efecto, ser estrella EN es una propiedad topológica distinta de las dos mencionadas.

Por cuestiones de espacio, sólo haremos el comentario de que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, el hiperespacio de Pixley-Roy asociado a la recta real $\mathbb{R}$, es un ejemplo de un espacio de Moore con celularidad numerable (y, por ende, tenuemente Lindelöf; véase la Proposición 6.5), que no es estrella EN. Los detalles pueden consultarse en [20, Proposition 39, p. 391].

Hecha la aclaración previa, a continuación presentamos un ejemplo que demuestra que ser estrella EN es distinto de ser estrella Lindelöf:

EJEMPLO 6.4. *Existe un espacio Tychonoff y estrella EN que no es estrella Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $S := \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ es un ordinal sucesor}\}$ y

$$X := ([0, \omega_1) \times [0, \omega]) \cup (S \times \{\omega\})$$

provisto de la topología que hereda como subespacio del producto $[0, \omega_1] \times [0, \omega]$.

En primer lugar, X es un espacio de Tychonoff por ser un subespacio del compacto de Hausdorff $[0, \omega_1] \times [0, \omega]$. También, si $Z := [0, \omega_1) \times [0, \omega]$, entonces Z es un subespacio σ -(numerablemente compacto) de X , lo cual implica que $e(Z) = \omega$ y, por lo tanto, que X es estrella EN (véase la Proposición 3.4) porque Z es denso en X .

Para comprobar que X no es estrella Lindelöf, observemos que

$$\mathcal{U} := \{Z\} \cup \{\{\alpha\} \times [0, \omega] : \alpha \in S\}$$

es una cubierta abierta de X . Ahora, si $\pi : [0, \omega_1) \times [0, \omega] \rightarrow [0, \omega_1)$ es la proyección canónica y L es un subespacio de Lindelöf de X , entonces $\pi[L]$ es un subespacio de Lindelöf de $[0, \omega_1)$, lo cual produce $\alpha < \kappa$ tal que $\pi[L] \cap (\alpha, \kappa) = \emptyset$. (véase el Lema 2.4). De esta forma, como $L \cap (\{\alpha + 1\} \times [0, \omega]) = \emptyset$ y $\{\alpha + 1\} \times [0, \omega]$ es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $\langle \alpha + 1, \omega \rangle$ como elemento, se deduce que $\langle \alpha + 1, \omega \rangle \notin \text{st}(L, \mathcal{U})$. $\square$

En la Proposición 3.4 vimos que si X es un espacio topológico, P una propiedad topológica y D un subconjunto denso de X , entonces, si D tiene la propiedad P , resulta que X es estrella P . Una pregunta natural a estas alturas de la exposición es si la condición sobre D puede ser debilitada a que D sea estrella P . El Ejemplo 6.4 responde negativamente a la pregunta anterior, ya que no es una estrella Lindelöf, pero tiene un subespacio denso con extensión numerable, lo cual implica, en particular, que dicho subespacio es estrella numerable (véase el Corolario 3.9) y, por consiguiente, estrella Lindelöf.

Con respecto a la propiedad de ser estrella ccc, de manera similar a lo establecido en el Corolario 6.3, resulta que dicha característica implica la propiedad de Lindelöf tenue en el ámbito de los espacios de Hausdorff:

PROPOSICIÓN 6.5. *Si X es T_2 y estrella ccc, entonces X es tenuemente Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Si X no es tenuemente Lindelöf, entonces X tiene una familia celular y localmente finita $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ (véase el Lema 2.2). Luego, si $e : \omega_1 \rightarrow \bigcup_{\alpha < \omega_1} U_\alpha$ es una función de elección, entonces la Proposición 6.1 garantiza que

$$\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{X \setminus e[\omega_1]\}$$

es una cubierta abierta de X .

Ahora bien, si A es un núcleo de $\mathcal{U}$ y $\alpha < \omega_1$, el hecho de que U_α es el único miembro de $\mathcal{U}$ que tiene a $e(\alpha)$ como elemento indica que $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. En consecuencia, $\{A \cap U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en A , lo cual implica que $c(A) > \omega$. $\square$

En el Ejemplo 5.9 presentamos un espacio de Tychonoff pseudocompacto y estrella σ -compacto que no es estrella ccc, lo cual muestra que la σ -compacidad estrella (y, por ende, la propiedad de Lindelöf estrella, la propiedad EN estrella y la propiedad de

Lindelöf tenue) no implica ser estrella ccc. Por otra parte, el hiperespacio de Pixley-Roy $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ (véase [20]) es un ejemplo de un espacio estrella ccc que no es estrella EN (y, por lo tanto, tampoco es estrella numerable, estrella σ -compacto ni estrella Lindelöf). En consecuencia, la propiedad de ser estrella ccc difiere en medida considerable de las propiedades estudiadas hasta ahora.

Lo que sigue es una caracterización de la propiedad AN estrella, tomada de [21]. Para empezar, todo espacio que es hereditariamente Lindelöf tiene necesariamente amplitud numerable. Por otro lado, existen espacios compactos (en particular, espacios de Lindelöf) que no tienen amplitud numerable, como ocurre con las compactaciones de los espacios discretos no numerables.

En general, construir espacios con amplitud numerable que no sean Lindelöf no es una tarea fácil. Esto se debe a que la diferencia entre los espacios Lindelöf con amplitud numerable y aquellos que sólo tienen amplitud numerable es bastante sutil. Un resultado que ayuda a entender mejor esta distinción es un teorema de Šapirovskiĭ, cuya demostración se puede consultar [12]:

TEOREMA 6.6. *Si X es un espacio topológico, κ un número cardinal y $s(X) \leq \kappa$, entonces existe un subespacio denso $Y \subseteq X$ tal que $hl(Y) \leq \kappa$.*

En particular, el Teorema [6.6] implica que todo espacio con amplitud numerable contiene un subespacio denso que es hereditariamente Lindelöf. Con este resultado disponible, es momento de presentar la caracterización deseada:

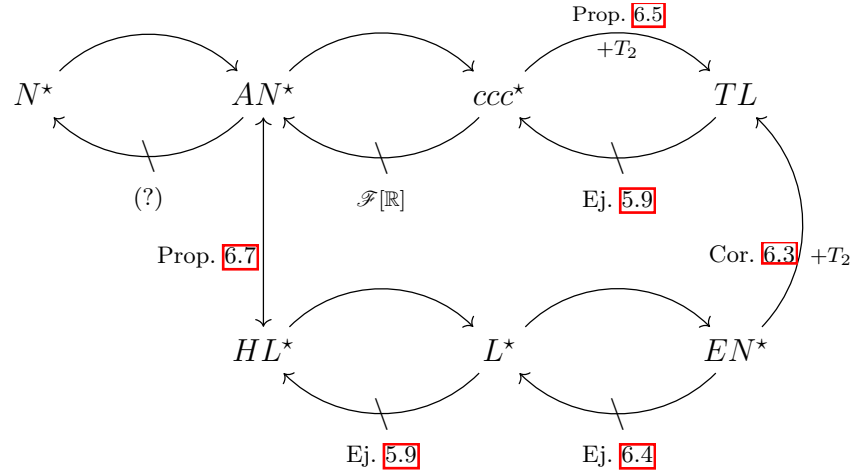
PROPOSICIÓN 6.7. *Si X es un espacio topológico, entonces X es estrella AN si y sólo si X es estrella hereditariamente Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: En virtud de que todo hereditariamente Lindelöf tiene amplitud numerable, la implicación recíproca es clara. Con respecto a la implicación directa, si X es estrella AN, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y A es un subespacio con amplitud numerable de X tal que $X = st(A, \mathcal{U})$, entonces el Teorema [6.6] produce un subespacio denso y hereditariamente Lindelöf B de A , lo cual implica, por la Proposición [3.2], que

$$X = st(A, \mathcal{U}) = st(A \cap \overline{B}, \mathcal{U}) \subseteq st(\overline{B}, \mathcal{U}) = st(B, \mathcal{U})$$

y, por ende, que $X = st(B, \mathcal{U})$. En suma, X es estrella hereditariamente Lindelöf. $\square$

De manera similar a lo hecho en los diagramas de las Figuras [2] y [3], en la Figura [4] se resume parte de lo que hemos expuesto hasta ahora. En este diagrama, HL y TL representan, correspondientemente, la propiedad de Lindelöf hereditaria y la propiedad de Lindelöf tenue.

FIGURA 4. Relaciones entre las propiedades N , HL , TL , AN , EN y ccc .

Claramente, el lector atento notará que hay una carencia en el diagrama de la Figura 4. Lo que sucede es que, para justificar por qué existen espacios estrella AN que no son estrella numerables, sería necesario extender aún más la presente sección, y el espacio disponible ya no lo permite. Todo lo mencionado a continuación puede consultarse en las referencias [19]–[21].

El resumen es el siguiente: la extensión de Katětov de un espacio topológico obtenido al modificar la topología euclidiana usual de $\mathbb{R}$ constituye un ejemplo de un espacio de Hausdorff estrella AN que no es estrella numerable. Por otra parte, bajo la Hipótesis del Continuo, es posible demostrar que $\mathbb{R}$, equipado con la topología de la densidad, es un espacio de Tychonoff estrella AN que no es estrella numerable.

En relación con lo anterior, bajo la Hipótesis de Lusin (es decir, $\mathfrak{c} = 2^{\omega_1}$), es posible construir un espacio normal, estrella EN que no es estrella AN . Además, bajo el Axioma de Martin combinado con la negación de la Hipótesis del Continuo, existe un espacio normal ccc (en particular, estrella ccc) que no es estrella Lindelöf.

Resulta evidente que, para obtener algunos de los resultados mencionados, se recurre al uso de enunciados adicionales al sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel. Para el lector interesado en un desafío sustancial relacionado con este aspecto, las siguientes preguntas permanecen abiertas:

PREGUNTA 6.8. *¿Es posible encontrar en ZFC un espacio topológico X como el descrito en alguno de los siguientes incisos?*

- (1) X Tychonoff y estrella AN , pero no estrella numerable.
- (2) X normal y estrella EN , pero no estrella Lindelöf.
- (3) X normal y estrella AN , pero no estrella numerable.

7. Una reflexión final

A lo largo de este capítulo se ha introducido y desarrollado parte de la teoría de los espacios estrella P , presentando definiciones clave, ejemplos relevantes y algunos

resultados fundamentales. No obstante, es importante señalar que varios aspectos esenciales de este campo han quedado fuera del alcance de nuestra exposición. Entre ellos destacan cuestiones relacionadas con la herencia de las propiedades estrella respecto a subconjuntos cerrados, su preservación bajo funciones continuas, así como una mayor exploración de su comportamiento frente a productos topológicos.

Asimismo, cabe mencionar que la literatura especializada en estos espacios puede resultar en ocasiones inaccesible, no sólo por su aparición en revistas con disponibilidad restringida, sino también por la variabilidad terminológica. Muchos conceptos básicos y resultados conocidos se presentan bajo diferentes nombres o notaciones, dependiendo en buena medida del autor o de la tradición matemática particular desde la cual se aborde el tema.

A pesar de ello, confío en que lo expuesto en las secciones anteriores haya sido suficiente para evidenciar la riqueza de este fragmento de la topología general y, aún más importante, para mostrar el amplio campo que queda por explorar. Agradezco sinceramente el tiempo dedicado a la lectura de este capítulo y espero haber proporcionado el contexto adecuado para la próxima mente brillante que continúe profundizando en el cautivador mundo de los espacios estrella P .

Que este capítulo sea una invitación para seguir explorando con entusiasmo y dedicación los desafíos que aún guarda esta apasionante área de estudio.

Agradecimientos: Quiero dedicar este capítulo a dos queridos pilares en mi vida académica: el Dr. Ángel Tamariz Mascarúa y el Dr. Roberto Pichardo Mendoza, a quienes considero con mucho cariño mi abuelo académico y mi padre académico, respectivamente. Gracias a su ejemplo, sus enseñanzas y su constante fuente de inspiración, encontré el impulso para escribir estas páginas.

Asimismo, agradezco a la persona encargada de la revisión de este trabajo por sus atentos comentarios, su valiosa retroalimentación y sus observaciones, las cuales han contribuido a enaltecer la calidad del presente escrito.

Bibliografía

- [1] Alas, O. T., Gutiérrez Domínguez, L. E., Wilson, R. G., *Compact productivity of Lindelöf-type properties*, Acta Math. Hungar., **167(2)** (2022), 548–560.
- [2] Alas, O. T., Junqueira, L. R., Wilson, R. G., *Countability and star covering properties*, Topol. Appl., **158(4)** (2011), 620–626.
- [3] Aldana Ceceña, D. E., *Espacios estrella P* , Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2021.
- [4] Amano Patiño, N. G., *Algunas propiedades de los espacios de Mrówka*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [5] Casarrubias Segura, F., Tamariz Mascarúa, Á., *Elementos de topología general*, Aportaciones Matemáticas, Serie *Textos*, núm. 37, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [6] van Douwen, E., Reed, G. M., Roscoe, A. W., Tree, I. J., *Star covering properties*, Topol. Appl., **39** (1991), 71–103.
- [7] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [8] Fleischman, W. M., *A new extension of countable compactness*, Fund. Math., **67** (1971), 1–9.

- [9] Gutiérrez Domínguez, L. E., *Propiedades topológicas del tipo estrella P*, Tesis de maestría, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 2020.
- [10] Hernández Hernández, F., *Teoría de conjuntos: una introducción*, 3.^a ed., Aportaciones matemáticas, Serie *Textos*, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
- [11] Hiremath, G. R., *On star with Lindelöf center property*, J. Indian Math. Soc., **59** (1993), 227–242.
- [12] Hodel, R., *Cardinal functions I*, Handbook of set-theoretic topology (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), Elsevier, pp. 1–61, 1984.
- [13] Hrušák, M., Tamariz Mascarúa, Á., Tkachenko, M. (eds.), *Pseudocompact Topological Spaces: A Survey of Classic and New Results with Open Problems*, Developments in Mathematics, vol. 55, Springer International Publishing, 2018.
- [14] Ikenaga, S., *A class which contains Lindelöf spaces, separable spaces and countably compact spaces*, Mem. Numazu Coll. Technol., **18** (1983), 105–108.
- [15] Ikenaga, S., Tani, T., *On a topological concept between countable compactness and pseudocompactness*, Research Reports of Numazu Technical College, **26** (1990), 139–142.
- [16] Matveev, M. V., *A survey on star-covering properties*, Topology Atlas, preprint No. 330, 1998.
- [17] van Mill, J., Tkachuk, V. V., Wilson, R. G., *Classes defined by stars and neighbourhood assignments*, Topol. Appl., **154** (2007), 2127–2134.
- [18] Porter, J. R., Woods, R. G., *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [19] Rojas Sánchez, A. D., *Propiedades estrella AN, estrella EN y estrella ccc*, Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
- [20] Rojas Sánchez, A. D., Tamariz Mascarúa, Á., *Spaces with star countable extent*, Comment. Math. Univ. Carolin., **57(3)** (2016), 381–395.
- [21] Rojas Sánchez, A. D., Tamariz Mascarúa, Á., *The star countable spread and star ccc property*, Colloquium Mathematicum, **158(2)** (2019), 213–232.
- [22] Song, Y-K., *A pseudocompact Tychonoff space that is not star Lindelöf*, Bull. Austral. Math. Soc., **84(3)** (2011), 452–454.
- [23] Song, Y-K., *On countable star-covering properties*, Appl. Gen. Topol., **8(2)** (2007), 249–258.
- [24] Song, Y-K., *On $\mathcal{C}$ -starcompact spaces*, Math. Bohem., **133(3)** (2008), 259–266.
- [25] Song, Y-K., *On $\mathcal{L}$ -starcompact spaces*, Czechoslov. Math. J., **56(131)** (2006), 781–788.
- [26] Song, Y-K., *On $\mathcal{K}$ -starcompact spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), **30(1)** (2007), 59–64.
- [27] Song, Y-K., *On σ -starcompact spaces*, Appl. Gen. Topol., **9(2)** (2008), 293–299.

Correo electrónico:

chanchito@ciencias.unam.mx (Alejandro Ríos Herrejón)

CAPÍTULO 3

La Lindelöfización unipuntual de espacios discretos

Fidel Casarrubias Segura

Universidad Nacional Autónoma de México, México

1. Introducción	73
2. Extensión de Lindelöf	74
3. Propiedades básicas de $L(\kappa)$	76
4. Espacios Lindelöf primario	83
5. Los compactos de Corson	91
Bibliografía	96

1. Introducción

La extensión de Alexandroff es una construcción que proporciona con cada espacio topológico X un espacio compacto de forma tal que el espacio compacto contiene a X como un subespacio topológico. Para el caso en que X no es un espacio compacto, y únicamente en este caso, la extensión de Alexandroff de X es una compactificación de X , es decir, es un espacio compacto que tiene un subespacio denso que es homeomorfo a X .

Es posible hacer una construcción análoga usando la propiedad de Lindelöf en lugar de la compacidad. La construcción resultante recibe el nombre de extensión de Lindelöf unipuntual y da lugar a un espacio Lindelöf que contiene al espacio original como un subespacio topológico. Además, únicamente cuando el espacio original no posee la propiedad de Lindelöf, lo contiene de manera densa. Es en este último caso cuando dicha extensión se denomina Lindelöfización unipuntual del espacio dado.

En esta nota estudiamos propiedades básicas de esta extensión de Lindelöf y de manera muy particular estudiamos las propiedades de la Lindelöfización unipuntual de espacios discretos de cardinalidad no numerable.

Notación y terminología. El conjunto de los números naturales es el conjunto $\mathbb{N} = \omega = \{0, 1, \dots\}$ y $\mathbb{N}^+ = \omega \setminus \{0\}$. Como es usual ω_1 denota al primer ordinal (cardinal) no numerable. Un conjunto A es numerable si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow \omega$. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $A \subseteq X$, entonces $f \upharpoonright A : A \rightarrow Y$ denota la restricción de f al subconjunto A .

Todos los espacios topológicos en esta nota se suponen no vacíos. Si (X, τ) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, entonces $\tau^* = \tau \setminus \{\emptyset\}$ y $\tau(Y, X) = \{U \in \tau : Y \subseteq U\}$;

en el caso en que $Y = \{x\}$ escribimos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$. La topología de subespacio de Y es denotada por $\tau \upharpoonright Y$.

El espacio $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales con su topología usual.

El *peso* de un espacio topológico X es el número cardinal $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } X\}$. El *peso de red* de X es el número cardinal $nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es red de subconjuntos de } X\}$. Recuerde que una *red de subconjuntos* de un espacio X es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que, para cualquier abierto U de X y cualquier elemento $x \in U$, existe un elemento $N \in \mathcal{N}$ con $x \in N \subseteq U$.

Si X es un espacio Tychonoff, entonces el espacio topológico $C_p(X)$ es el conjunto $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } X\}$ equipado con la topología de subespacio respecto del producto topológico $\mathbb{R}^X$. La topología del espacio $C_p(X)$ es llamada *topología de la convergencia puntual*.

Como es bien sabido, la topología producto de $\mathbb{R}^X$ tiene como una subbase a la colección $S = \bigcup_{x \in X} \{\pi_x^{-1}[U] : U \text{ es un abierto de } \mathbb{R}\}$, donde $\pi_x : \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}$ es la función proyección cuya regla de asociación está dada por $\pi_x(f) = f(x)$. Observemos que, como S es una subbase para el producto $\mathbb{R}^X$, cada función π_x es continua. Consecuentemente, la familia de todos los subconjuntos de $C_p(X)$ de tipo:

$$[x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n] = \left(\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}[U_i] \right) \cap C_p(X),$$

donde $x_1, \dots, x_n \in X$ y $U_1, \dots, U_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, es una *base de la topología de $C_p(X)$* . Es muy sencillo darse cuenta que

$$[x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n] = \{f \in C_p(X) : \forall i \in \{1, \dots, n\} (f(x_i) \in U_i)\}.$$

Si $f \in C_p(X)$ es un elemento cualquiera, entonces la colección de todos los conjuntos de la forma:

$$[f; x_1, \dots, x_n; \epsilon] = [x_1, \dots, x_n; (f(x_1) - \epsilon, f(x_1) + \epsilon), \dots, (f(x_n) - \epsilon, f(x_n) + \epsilon)],$$

es una *base local para f en el espacio $C_p(X)$* . Aquí $(f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$ es el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ de extremos $f(x_i) - \epsilon < f(x_i) + \epsilon$, donde $\epsilon > 0$. Es sencillo probar que

$$[f; x_1, \dots, x_n; \epsilon] = \{g \in C_p(X) : \forall i \in \{1, \dots, n\} (|f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon)\}.$$

Todas las nociones de Topología General que no sean definidas en esta nota pueden encontrarse en [4]. Para los hechos sobre los espacios de funciones $C_p(X)$, el lector puede consultar los libros [1] y [6].

2. Extension de Lindelöf

Recuerde que una consecuencia del axioma de fundación de teoría de conjuntos es que para todo conjunto X , $X \notin X$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Defina $\infty = X$ y $L(X) = X \cup \{\infty\}$. La colección*

$$\tau' = \tau \cup \{U \subseteq L(X) : \infty \in U \text{ y } X \setminus U \text{ es subespacio cerrado y Lindelöf de } X\}$$

tiene las siguientes propiedades:

- (1) τ' es una topología en $L(X)$.
- (2) $\tau' \upharpoonright X = \tau$.
- (3) El espacio topológico $(L(X), \tau')$ tiene la propiedad de Lindelöf.
- (4) X es denso en $L(X)$ si y sólo si (X, τ) no es un espacio Lindelöf.

DEMOSTRACIÓN: (1) $\emptyset \in \tau'$ porque $\emptyset \in \tau$ y $L(X) \in \tau'$ porque $X \setminus L(X) = \emptyset$ y $\emptyset$ es un subconjunto cerrado y Lindelöf de X .

Por otro lado, si $U_1, U_2 \in \tau'$ son elementos arbitrarios, entonces $\infty \in U_1 \cap U_2$ o $\infty \notin U_1 \cap U_2$. En el primer caso se tiene que $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son subespacios cerrados y Lindelöf de X . Por lo que $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ es un subespacio cerrado y Lindelöf de X . Entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau'$. Para el segundo caso hay tres posibilidades: $\infty \in U_1$ y $\infty \notin U_2$ o $\infty \notin U_1$ y $\infty \in U_2$ o $\infty \notin U_1$ y $\infty \notin U_2$. La última posibilidad implica que $U_1, U_2 \in \tau$, lo que a su vez implica que $U_1 \cap U_2 \in \tau \subseteq \tau'$. La prueba para la primera y segunda posibilidad son parecidas así sólo haremos una de ellas. Si $\infty \in U_1$ y $\infty \notin U_2$, entonces $X \setminus U_1$ es un subespacio cerrado y Lindelöf de X y $U_2 \in \tau$. Como $X \setminus U_1$ es cerrado, $X \setminus (X \setminus U_1) \in \tau$. Consecuentemente $U_1 \cap U_2 = (X \setminus (X \setminus U_1)) \cap U_2 \in \tau \subseteq \tau'$.

Finalmente, suponga que $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau'$ es arbitraria. Entonces $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ o bien $\infty \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Si $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, tenemos que $U_\lambda \in \tau$ para toda $\lambda \in \Lambda$; de esto se sigue que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau \subseteq \tau'$. Para la otra parte, si $\infty \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\infty \in U_{\lambda_0}$. Luego, $X \setminus U_{\lambda_0}$ es un subespacio Lindelöf de X . Además, para cualquier $\lambda \in \Lambda$, $X \setminus U_\lambda$ es un subespacio cerrado de X . Consecuentemente, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda)$ es un subconjunto cerrado de X . Y como $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus U_\lambda \subseteq X \setminus U_{\lambda_0}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda)$ es Lindelöf. Entonces $X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un subespacio cerrado y Lindelöf de X . Esto muestra que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau'$. Por lo tanto, τ' es cerrada bajo uniones y, de esta manera, hemos terminado la prueba de que τ' es una topología en $L(X)$.

(2) La prueba es sencilla. Dejamos los detalles al lector.

(3) Suponga que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta arbitraria de $L(X)$. Fije un elemento $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in U_0$. Entonces, $X \setminus U_0$ es un subespacio cerrado y Lindelöf de X . Como X es un subespacio topológico de $L(X)$, la colección $\mathcal{W} = \{U \cap (X \setminus U_0) : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U_0$. Por ser $X \setminus U_0$ un espacio Lindelöf, existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X \setminus U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap (X \setminus U_0))$. Consecuentemente, $\{U_0, U_1, \dots, U_n, \dots\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $L(X)$ es Lindelöf.

(4) $\Rightarrow$] Suponga que X tiene la propiedad de Lindelöf. Observe que esto implica que $X \setminus \{\infty\} = X$ es un subconjunto cerrado y Lindelöf de (X, τ) . Por ello, $\{\infty\} \in \tau'$. Como $\{\infty\} \cap X = \emptyset$, X no es un subconjunto denso de $L(X)$.

$\Leftarrow$] Suponga que X no es un subconjunto denso de $L(X)$. Luego, existe un abierto $U \in \tau' \setminus \{\emptyset\}$ tal que $X \cap U = \emptyset$. Como $\infty \notin X$ y $L(X) = X \cup \{\infty\}$, la igualdad $X \cap U = \emptyset$ implica que $U = \{\infty\}$. Así, $\{\infty\} \in \tau'$. De esto se sigue que $X = X \setminus \{\infty\}$ es un subconjunto cerrado y Lindelöf de (X, τ) . Lo que termina la prueba. $\square$

El espacio topológico $(L(X), \tau')$ definido en la proposición anterior es llamado *extensión de Lindelöf unipuntual* del espacio (X, τ) . Es importante resaltar que $L(X)$ *siempre está definido* sin importar las características del espacio X (por ejemplo no se requiere que X satisfaga algún axioma de separación). Además, X siempre es un subespacio topológico de $L(X)$, pero no siempre es un subconjunto denso. Por la proposición 2.1

sabemos que X es denso en $L(X)$ únicamente en el caso en que X no es un espacio de Lindelöf. En este último caso se acostumbra llamar a $L(X)$ *Lindelöfización unipuntual de X* ¹. En algunos textos también se usa el nombre *extensión Lindelöf unipuntual*. En esta nota haremos uso de ambos nombres. En resumen,

DEFINICIÓN 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico no Lindelöf. El espacio topológico $(L(X), \tau')$ es llamado *Lindelöfización unipuntual de X* .

En todo lo que sigue estaremos suponiendo que todo número cardinal es mayor que cero y que es un espacio discreto.

Si κ un número cardinal arbitrario, al ser un espacio discreto, κ es un espacio T_3 y localmente compacto. Además, sus subconjuntos Lindelöf son numerables.

Con esta información es posible dar una descripción más precisa de la topología de la extensión de Lindelöf unipuntual de κ .

DEFINICIÓN 2.3. Dado un número cardinal κ , la extensión de Lindelöf unipuntual de κ es el espacio topológico $(L(\kappa), \tau')$ donde $L(\kappa) = \kappa \cup \{\infty\}$ y

$$\tau' = \mathcal{P}(\kappa) \cup \{U \subseteq L(\kappa) : \infty \in U \wedge |\kappa \setminus U| \leq \omega\}.$$

Observemos que si κ es un cardinal numerable, entonces el espacio discreto κ tiene la propiedad de Lindelöf, lo cual implica que $L(\kappa)$ no contiene a κ como subespacio denso y, además, que $L(\kappa)$ es un espacio discreto. Más aún, de acuerdo con el siguiente resultado, es posible identificar con precisión quién es el espacio $L(\kappa)$.

PROPOSICIÓN 2.4. Los siguientes enunciados son ciertos.

- (1) Si $\kappa < \omega$, entonces $L(\kappa)$ es homeomorfo a $\kappa + 1$.
- (2) Si $\kappa = \omega$, entonces $L(\kappa)$ es homeomorfo a ω .

Si $\kappa > \omega$, entonces el espacio discreto $(\kappa, \mathcal{P}(\kappa))$ no tiene la propiedad de Lindelöf. Por consiguiente, κ es un subespacio denso de su extensión de Lindelöf unipuntual $L(\kappa)$. En la sección siguiente estudiaremos las propiedades básicas del espacio $L(\kappa)$ para cardinales no numerables.

3. Propiedades básicas de $L(\kappa)$

Ya sabemos que, cuando κ es un cardinal numerable, el espacio $L(\kappa)$ es un espacio discreto, de tal forma que es un espacio muy rico en propiedades. En esta sección nos enfocaremos más en analizar las propiedades básicas de las Lindelöfizaciones de cardinales no numerables.

PROPOSICIÓN 3.1. Para todo cardinal $\kappa > 0$, el espacio $L(\kappa)$ es T_4 , colectivamente normal y paracompacto. Además, todos sus subconjuntos numerables son cerrados y todos sus subconjuntos compactos son finitos.

¹Aquí se usa la palabra «Lindelöfización» como en ocasiones se usa la palabra *compactificación* para aludir a los espacios compactos que contienen un subespacio denso que es homeomorfo a un espacio no compacto dado. Entonces una *Lindelöfización* de un espacio no Lindelöf X es un espacio Lindelöf Y que tiene un subespacio denso Z que es homeomorfo a X .

DEMOSTRACIÓN: Cuando κ es un cardinal numerable, $L(\kappa)$ es un espacio discreto numerable y por ello $L(\kappa)$ es un espacio colectivamente normal, T_4 , paracompacto, y todos sus subconjuntos numerables son cerrados y todos sus subconjuntos compactos son finitos. Así que podemos suponer que $\kappa > \omega$. Por otro lado, como todo espacio Lindelöf T_3 es paracompacto y todo espacio paracompacto es un espacio colectivamente normal y T_4 . Entonces para probar la primera parte de la proposición bastará probar que el espacio $L(\kappa)$ es T_3 .

$L(\kappa)$ es un espacio Hausdorff regular. Suponga que $x, y \in L(\kappa)$ son elementos arbitrarios diferentes. Si $x, y \in \kappa$, entonces los conjuntos $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos en $L(\kappa)$ ajenos que contienen a x y y . Si $x \in \kappa$ y $y = \infty$, entonces los conjuntos $\{x\}$ y $L(\kappa) \setminus \{x\}$ son abiertos de $L(\kappa)$ ajenos y que contienen a x y y , respectivamente. El caso faltante es cuando $x = \infty$ y $y \in \kappa$, pero es evidente que la demostración para este caso es análoga a lo anterior. De esta forma hemos probado que $L(\kappa)$ es un espacio Hausdorff.

Para verificar la regularidad de $L(\kappa)$ suponga que F es un subconjunto cerrado arbitrario de $L(\kappa)$ y que $x \in L(\kappa) \setminus F$ es un elemento cualquiera. Si $x \in \kappa$, entonces los conjuntos $\{x\}$ y $L(\kappa) \setminus \{x\}$ son abiertos de $L(\kappa)$ ajenos y que contienen a $\{x\}$ y a F , respectivamente. Si $x = \infty$, entonces $F \subseteq \kappa$. Por tanto, $F \in \mathcal{P}(\kappa)$ por lo que F es un abierto de $L(\kappa)$. Además, como F es cerrado en $L(X)$ y $L(X)$ es un espacio Lindelöf, F también tiene la propiedad de Lindelöf; y debido a que F es discreto (F es un subespacio de κ), $|F| \leq \omega$. Consecuentemente, $L(\kappa) \setminus F$ es un abierto de $L(\kappa)$ que contiene a $x = \infty$ y que es ajeno de F , el cual también es abierto en $L(\kappa)$. Con esto terminamos la prueba de que $L(\kappa)$ es un espacio regular.

Todos los subconjuntos numerables de $L(\kappa)$ son cerrados. Suponga que $A \subseteq L(\kappa)$ es numerable. Si $\infty \notin A$, entonces A es un subconjunto numerable de κ . Entonces el conjunto $W = L(\kappa) \setminus A$ es un abierto de $L(\kappa)$ porque $\infty \in W$ y $\kappa \setminus W = A$ es numerable. Consecuentemente, en este caso, A es un subconjunto cerrado de $L(\kappa)$. Por otro lado, si $\infty \in A$, entonces el conjunto $A \setminus \{\infty\}$ es un subconjunto numerable de κ , y por lo hecho antes podemos concluir que $A \setminus \{\infty\}$ es cerrado en $L(\kappa)$. Como $A = (A \setminus \{\infty\}) \cup \{\infty\}$ y $L(\kappa)$ es T_1 , A es cerrado en $L(\kappa)$.

Todos los subconjuntos compactos de $L(\kappa)$ son finitos. Suponga que $C \subseteq L(\kappa)$ es un subconjunto compacto arbitrario. Si C es infinito, podemos elegir $N \subseteq C$ un subconjunto infinito numerable. Entonces $N \setminus \{\infty\}$ es un subconjunto infinito numerable. Por lo hecho líneas arriba, $N \setminus \{\infty\}$ es un subconjunto cerrado de $L(\kappa)$. Por lo cual es un subconjunto cerrado del subespacio compacto C . Esto implica que $N \setminus \{\infty\}$ es un subconjunto compacto de $L(\kappa)$ lo que es imposible porque $N \setminus \{\infty\}$ siendo subespacio de κ es un discreto infinito. Esta contradicción permite concluir que C es un conjunto finito. $\square$

La línea de Sorgenfrey es el ejemplo clásico que muestra que la propiedad de Lindelöf no siempre se preserva en productos finitos. Una propiedad curiosa de $L(\kappa)$ es que todas sus potencias finitas y su potencia numerable tienen la propiedad de Lindelöf. Esta cualidad también la tienen los espacios Lindelöf Σ .

DEFINICIÓN 3.2. *Un espacio Tychonoff (X, τ) es un espacio Lindelöf Σ si existen una cubierta $\mathcal{C}$ de X formada por subconjuntos compactos y una colección numerable $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que para cada $C \in \mathcal{C}$ y cada $U \in \tau(C, X)$ existe $N \in \mathcal{N}$ de modo que $C \subseteq N \subseteq U$.*

En ocasiones se dice que la colección $\mathcal{C}$ de la definición anterior es una *cubierta compacta de X* y que la colección $\mathcal{N}$ es una *red módulo la cubierta $\mathcal{C}$* .

En el artículo [5] el lector puede encontrar una prueba de que la propiedad de ser un espacio Lindelöf Σ es preservada por productos numerables, por imágenes continuas, subespacios cerrados, y por uniones e intersecciones numerables, y la demostración de que todos los espacios Lindelöf Σ tienen la propiedad de Lindelöf.

Todos los espacios Tychonoff numerables X son espacios Lindelöf Σ porque las colecciones $\mathcal{C} = \mathcal{N} = \{\{x\} : x \in X\}$ son tanto una cubierta compacta de X como una red numerable módulo la cubierta $\mathcal{C}$. En particular, cualquier espacio discreto numerable es un espacio Lindelöf Σ .

Cualquier espacio Tychonoff σ -compacto $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ (aquí, cada C_n es un subespacio compacto de X) es un espacio Lindelöf Σ porque podemos tomar como cubierta y red para $\mathcal{C}$ a los conjuntos $\mathcal{C} = \mathcal{N} = \{C_n : n \in \omega\}$. En particular, cualquier espacio compacto de Hausdorff es Lindelöf Σ .

Para ningún cardinal no numerable κ , el espacio $L(\kappa)$ es Lindelöf Σ . La proposición 3.1 y la siguiente propiedad de los espacios Lindelöf Σ nos permiten confirmarlo.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si X es un espacio Lindelöf Σ y todos sus subespacios compactos son finitos, entonces X es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta para X y $\mathcal{N}$ una red numerable módulo $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{N} \subseteq \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ y la familia $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$ es numerable, podemos suponer que $\mathcal{N}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Sea $\mathcal{M} = \{N \in \mathcal{N} : N \text{ es un conjunto finito}\}$. Para verificar que X es numerable, bastará probar que $X = \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$.

Supongamos por el contrario que $X \neq \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$. Fijemos un elemento $x_0 \in X \setminus \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta de X , podemos fijar $C_0 \in \mathcal{C}$ de modo que $x_0 \in C_0$. Sea $\mathcal{N}_0 = \{N \in \mathcal{N} : C_0 \subseteq N\}$ y $\{N_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{N}_0$. Definamos $\mathcal{N}_1 = \{\bigcap_{i=0}^n N_i : n \in \omega\}$. Como $\mathcal{N}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$. Además, para cada $U \in \tau(C_0, X)$ existe $N \in \mathcal{N}_1$ tal que $C_0 \subseteq N \subseteq U$.

Debido a que $x_0 \in C_0$, todos los elementos de $\mathcal{N}_1$ son conjuntos infinitos. Como C_0 es un conjunto finito, para cada $n \in \omega$, podemos seleccionar $x_n \in (\bigcap_{i=0}^n N_i) \setminus C_0$ de modo tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Defina $K = \{x_n : n \in \omega\}$. Si $U \in \tau(C_0, X)$ es arbitrario, entonces existe $n \in \omega$ tal que $C_0 \subseteq \bigcap_{i=0}^n N_i \subseteq U$. Entonces $K \setminus U \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$. Por tanto $K \setminus U$ es un conjunto finito para cada $U \in \tau(C_0, X)$. Por consiguiente, $C_0 \cup K$ es un subconjunto compacto infinito de X , lo que es una contradicción. $\square$

Por la proposición 3.1, si $\kappa > \omega$, entonces todos los subconjuntos compactos de $L(\kappa)$ son finitos. Si suponemos que $L(\kappa)$ es un espacio Lindelöf Σ , entonces la proposición anterior implica que $L(\kappa)$ es numerable y contradice que $\kappa > \omega$. Todo esto prueba el siguiente corolario.

COROLARIO 3.4. *Para todo $\kappa > \omega$, $L(\kappa)$ no es Lindelöf Σ .*

Para cardinales numerables κ , $L(\kappa)$ es un conjunto numerable y por eso tanto $L(\kappa)$ como cualquiera de sus subespacios tienen la propiedad Lindelöf Σ .

Cuando $\kappa > \omega$, de la proposición 3.1 se infiere que algunos subespacios Lindelöf Σ de $L(\kappa)$ son conjuntos finitos. El siguiente corolario precisa cuál es la posible cardinalidad de los subespacios Lindelöf Σ de $L(\kappa)$.

COROLARIO 3.5. *Para todo $\kappa > 0$, los subespacios Lindelöf Σ de $L(\kappa)$ son únicamente los subespacios numerables.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la afirmación para cardinales $\kappa > \omega$. Suponga que Y es un subespacio Lindelöf Σ de $L(\kappa)$. Considere un subconjunto compacto C de Y . Claramente, C también es un subconjunto compacto de $L(\kappa)$. Por lo que C es finito. Entonces todos los subconjuntos compactos de Y son finitos. Por la proposición 3.3, Y es numerable.

Para el recíproco recuerde que ya se probó que cualquier espacio Tychonoff numerable tiene la propiedad Lindelöf Σ . $\square$

En [2] Arhangel'skiĭ describió un «fenómeno» curioso que aparece en el residuo de cualquier compactificación Hausdorff bX de un espacio metrizable X : en $bX \setminus X$ siempre hay un subespacio $L\Sigma$ tal que para todo abierto U de $bX \setminus X$ que contiene a K el complemento $(bX \setminus X) \setminus U$ es Lindelöf Σ . Arhangel'skiĭ llamó estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ a este comportamiento. Para ser más precisos,

DEFINICIÓN 3.6. *Un espacio de Tychonoff X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ si existe un subespacio Lindelöf Σ A con la propiedad de que para cada abierto $U \in \tau(A, X)$, el complemento $X \setminus U$ es también un subespacio Lindelöf Σ . Se dice que el subespacio A es un núcleo Lindelöf Σ o núcleo $L\Sigma$ de X .*

Cualquier espacio Lindelöf Σ tiene una estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ porque cualquier subconjunto finito no vacío es un núcleo $L\Sigma$. La estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ también la tienen las Lindelöfificaciones $L(\kappa)$.

PROPOSICIÓN 3.7. *Todo espacio $L(\kappa)$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como cualquier discreto numerable es un espacio Lindelöf Σ , cuando κ es un cardinal numerable, $L(\kappa)$ tiene la estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Entonces sólo debemos probar el enunciado para cardinales κ no numerables.

Suponga que $\kappa > \omega$ y defina $A = \{\infty\}$. Es claro que A es un subespacio compacto de $L(\kappa)$. Por lo cual es un espacio Lindelöf Σ . Además, si U es un abierto de $L(\kappa)$ que contiene a A , $L(\kappa) \setminus U = \kappa \setminus U$ es numerable, por lo que es un espacio Lindelöf Σ . $\square$

En [3] el lector puede encontrar un estudio sistemático de las propiedades de los espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. En particular, se puede encontrar la prueba de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.8. *La clase de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ es cerrada bajo imágenes continuas y subespacios cerrados. Además, cualquier espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ es un espacio Lindelöf.*

El producto de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ no siempre conserva esta propiedad. Para cualquier cardinal $\kappa > \omega$, el cuadrado de $L(\kappa)$ es un ejemplo de ello. No obstante, cuando $L(\kappa)$ se multiplica por un espacio Lindelöf Σ , la situación cambia.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea κ un cardinal no numerable.*

- (1) *El producto $L(\kappa) \times L(\kappa)$ no es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*
- (2) *Para cada espacio Lindelöf Σ , $L(\kappa) \times X$ tiene estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Suponga para generar una contradicción que sí existe un núcleo $L\Sigma$ en $Y = L(\kappa) \times L(\kappa)$, digamos K . Sea $\pi_1 : L(\kappa) \times L(\kappa) \rightarrow L(\kappa)$ la proyección de Y al primer factor. Como la imagen continua de espacios Lindelöf Σ es un espacio Lindelöf Σ , $\pi_1[K]$ es un subespacio Lindelöf Σ de $L(\kappa)$. Por consiguiente es numerable. Fije $y \in L(\kappa) \setminus \pi_1[K]$ y defina $U = Y \setminus (\{y\} \times L(\kappa))$. Claramente, $K \subseteq U$ y U es abierto en Y . Note ahora que el complemento $Y \setminus U$ de U es el espacio $\{y\} \times L(\kappa)$, el cual es homeomorfo a $L(\kappa)$. Por lo tanto, $Y \setminus U$ no es un espacio Lindelöf Σ , lo que contradice que K es un núcleo Lindelöf Σ de Y .

(2) El subespacio $Z = \{\infty\} \times X$ de $L(\kappa) \times X$ es homeomorfo a X y, por ello, es Lindelöf Σ . Resulta que Z es un núcleo $L\Sigma$ de $L(\kappa) \times X$. Para verificarlo considere cualquier abierto W de $L(\kappa) \times X$ con $Z \subseteq W$. Como Z es Lindelöf, existe una colección numerable de abiertos básicos $\{U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $L(\kappa) \times X$ tal que $Z \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \times V_n) \subseteq W$. Para cada n , U_n es un abierto de $L(\kappa)$ que contiene a ∞ , entonces $|L(\kappa) \setminus U_n| \leq \omega$ para cada n . Por consiguiente, $|L(\kappa) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n| \leq \omega$. Sea $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Entonces $(L(\kappa) \setminus U)$ es un subespacio discreto numerable de $L(\kappa)$, de lo cual $(L(\kappa) \setminus U) \times X$ Lindelöf Σ porque es la unión numerable de subespacios homeomorfos a X (el cual es Lindelöf Σ). Observe que $(L(\kappa) \times X) \setminus W$ es un subespacio cerrado de $(L(\kappa) \setminus U) \times X$, de donde $(L(\kappa) \times X) \setminus W$ es Lindelöf Σ . $\square$

Otra importante propiedad que comparten los espacios Lindelöf Σ y las extensiones Lindelöf unipuntuales $L(\kappa)$ es la estabilidad. La estabilidad se define de la siguiente forma.

Una *condensación* es cualquier función continua biyectiva $f : X \rightarrow Y$. Diremos que X *se condensa sobre* Y si existe una condensación con dominio X y contradominio Y . El *i-peso* de un espacio Tychonoff X es el número cardinal

$$iw(X) = \min\{w(Y) : Y \text{ es un espacio Tychonoff y } X \text{ se condensa sobre } Y\}.$$

Dado un cardinal infinito λ , se dice que un espacio Tychonoff X es λ -*estable* si para cualquier imagen continua Tychonoff Y de X , la condición $iw(Y) \leq \lambda$ implica que $nw(Y) \leq \lambda$. Se dice que X es un *espacio estable* si y sólo si X es λ -estable para todo cardinal infinito λ .

Un hecho conocido es que todo espacio con la propiedad de Tychonoff satisface la desigualdad $iw \leq nw$ (véase, por ejemplo, [6, 156, p. 19]). Por otra parte, es evidente que cualquier espacio estable cumple la relación $nw \leq iw$. En consecuencia, si X es un espacio estable, entonces $iw(X) = nw(X)$.² Esta igualdad cobrará relevancia más adelante, particularmente en la proposición 3.11 y en el corolario 3.15.

²Más aún, a partir de lo anterior, no es difícil comprobar que si Y es imagen continua de un espacio estable, entonces $iw(Y) = nw(Y)$.

PROPOSICIÓN 3.10. *Todos los compactos de Hausdorff son estables.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que X es un espacio compacto Hausdorff cualquiera y que λ es un cardinal infinito arbitrario. Suponga también que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua suprayectiva arbitraria, donde Y es un espacio Tychonoff tal que $iw(Y) \leq \lambda$. Obviamente, como X es un espacio compacto, Y también lo es. Fijemos una condensación $g : Y \rightarrow Z$, donde Z es un espacio Tychonoff tal que $w(Z) \leq \lambda$. Como g es biyectiva y continua, Y es compacto y Z es Hausdorff, resulta que g es una función cerrada, y, por consiguiente, un homeomorfismo. De esto se sigue que $w(Y) = w(Z) \leq \lambda$. Como $nw(Y) \leq w(Y)$, tenemos que $nw(Y) \leq \lambda$; por lo que X es un espacio λ -estable. Debido a que λ es arbitrario, podemos concluir que X es un espacio estable. $\square$

Nuestra siguiente tarea consiste en generalizar el enunciado de la proposición 3.10, mediante un argumento ligeramente más elaborado, con el cual demostraremos que, en efecto, todos los espacios Lindelöf Σ también son estables:

PROPOSICIÓN 3.11. *Todo espacio Lindelöf Σ es un espacio estable. Consecuentemente, si X es Lindelöf Σ , entonces $iw(X) = nw(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio Lindelöf Σ , λ un cardinal infinito arbitrario y Y cualquier imagen continua Tychonoff de X tal que $iw(Y) \leq \lambda$. Como la propiedad Lindelöf Σ se preserva bajo imágenes continuas Tychonoff, Y es Lindelöf Σ . Entonces podemos fijar una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de Y y una red numerable $\mathcal{N}$ módulo $\mathcal{C}$. Fije ahora una condensación $f : Y \rightarrow Z$ donde Z es un espacio Tychonoff de modo que $w(Z) = iw(Y)$. Como $w(Z) = iw(Y) \leq \lambda$, podemos fijar una base $\mathcal{B}$ de Z de modo que $|\mathcal{B}| \leq \lambda$. Debido a que f es una condensación, a que $\mathcal{B}$ es una base de Z y a que Z es T_2 , para cualesquiera $y, y_0 \in Y$ elementos diferentes, existen $B, C \in \mathcal{B}$ elementos ajenos tales que $y \in f^{-1}[B]$ y $y_0 \in f^{-1}[C]$.

Defina $\mathcal{F} = \{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{M} = \{\bigcap \mathcal{G} : \mathcal{G} \in [\mathcal{N} \cup \mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$. No es difícil probar que $|\mathcal{M}| \leq \lambda$. Más aún, $\mathcal{M}$ es una red de subconjuntos de Y . Efectivamente, sean $y' \in Y$ y U abierto en Y con $y' \in U$ arbitrarios. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta de Y , existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $y' \in C$. Observe que el subespacio $C \setminus U$ es compacto. Entonces, para cada $y \in C \setminus U$, existen elementos ajenos $F_y, H_y \in \mathcal{F}$ tales que $y \in F_y$ y $y' \in H_y$. Como la colección $\{F_y : y \in C \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $C \setminus U$, existen $y_1, \dots, y_m \in C \setminus U$ tales que $C \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^m F_{y_i}$. El conjunto $U \cup \bigcup_{i=1}^m F_{y_i}$ es abierto y $C \subseteq U \cup \bigcup_{i=1}^m F_{y_i}$, entonces como $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq U \cup \bigcup_{i=1}^m F_{y_i}$. Observe que $y' \in N \cap (\bigcap_{i=1}^m H_{y_i}) \in \mathcal{M}$. Además, $N \cap (\bigcap_{i=1}^m H_{y_i}) \subseteq N \subseteq U \cup \bigcup_{i=1}^m F_{y_i}$, $N \cap (\bigcap_{i=1}^m H_{y_i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^m H_{y_i}$ y $(\bigcap_{i=1}^m H_{y_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^m F_{y_i}) = \emptyset$. Entonces $y' \in N \cap (\bigcap_{i=1}^m H_{y_i}) \subseteq U$. Por tanto, la familia $\mathcal{M}$ es una red de subconjuntos de Y de cardinalidad $\leq \lambda$. Esto muestra que $nw(Y) \leq \lambda$. Consecuentemente, X es λ -estable. Como λ es arbitrario podemos concluir que X es un espacio estable. $\square$

En virtud de que el espacio $L(\omega)$ es Lindelöf Σ , por ser numerable y tener la propiedad de Tychonoff, la proposición 3.11 garantiza que $L(\omega)$ es estable. A continuación, demostraremos que, para todo $\kappa > \omega$, el espacio $L(\kappa)$ también es estable.

Para ello, en la proposición 3.14 se probará que todos los espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$, que admitan un núcleo $L\Sigma$ compacto, son espacios estables. Obsérvese que $L(\kappa)$ pertenece a esta clase de espacios topológicos, como se muestra en la prueba de la proposición 3.7.

Antes de proceder con lo anterior, es necesario recordar una generalización natural del carácter puntual en un espacio topológico, así como un resultado auxiliar relacionado con su comportamiento respecto a subespacios compactos:

DEFINICIÓN 3.12. Sean X un espacio topológico y $Z \subseteq X$. Se dice que una colección $\mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X)$ es una base de Z en X si para cualquier $W \in \tau(Z, X)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Z \subseteq U \subseteq W$. El carácter de Z en X es el número cardinal

$$\chi(Z, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X) \text{ es una base de } Z \text{ en } X\}.$$

LEMA 3.13. Sean λ un cardinal infinito y X un espacio topológico tal que $w(X) \leq \lambda$. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces $\chi(K, X) \leq \lambda$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base para X de cardinalidad $\leq \lambda$. Sea $\mathcal{B}_K$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ que cubren a K . Es claro que $|\mathcal{B}_K| \leq \lambda$.

Veamos que la familia $\mathcal{B}_K$ es una base de K en X . En efecto, sea $U \in \tau(K, X)$ un elemento cualquiera. Para cada $x \in K$, sea U_x un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq U$. Defina $V_K = \bigcup\{U_x : x \in K\}$. Entonces $V_K \subseteq U$ y existe $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subseteq V_K$. Claramente, $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \in \mathcal{B}_K$, lo que muestra que $\mathcal{B}_K$ es una base de K en X . Por lo tanto, $\chi(K, X) \leq \lambda$. $\square$

Ahora si probamos el resultado prometido.

PROPOSICIÓN 3.14. Sea X un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Si X tiene un núcleo $L\Sigma$ compacto, entonces X es un espacio estable.

DEMOSTRACIÓN: Sean K un núcleo compacto de X y λ un cardinal infinito cualquiera. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua suprayectiva, donde Y es un espacio Tychonoff, y sea $g : Y \rightarrow Z$ una condensación, donde Z es Tychonoff y $w(Z) \leq \lambda$. Como Y es imagen continua de X , Y es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ (véase la proposición 3.8). Más aún, $f[K]$ es un núcleo $L\Sigma$ compacto.

Entonces $K^* = g[f[K]] \subseteq Z$ es un subespacio compacto y por el lema 3.13, $\chi(K^*, Z) \leq \lambda$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \leq \lambda\}$ una base de K^* en Z . Defina $V_\alpha = g^{-1}[U_\alpha]$ y considere la familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \leq \lambda\}$, entonces $\bigcap \mathcal{V} = f[K]$. Si definimos a los subespacios $Y_\alpha = Y \setminus V_\alpha$, entonces: $Y = \bigcup_{\alpha \leq \lambda} (Y_\alpha \cup f[K])$. Observe que todo Y_α es un espacio Lindelöf Σ , y como $f[K]$ es compacto, $Y_\alpha \cup f[K]$ es Lindelöf Σ para toda $\alpha \leq \lambda$. Consecuentemente, cada $Y_\alpha \cup f[K]$ es un espacio estable, debido a la proposición 3.11.

Por otro lado, para todo $\alpha \leq \lambda$, $g \upharpoonright Y_\alpha \cup f[K] : Y_\alpha \cup f[K] \rightarrow g[Y_\alpha \cup f[K]]$ es una condensación tal que $g[Y_\alpha \cup f[K]]$ es un espacio Tychonoff y $w(g[Y_\alpha \cup f[K]]) \leq \lambda$. Entonces $iw(Y_\alpha \cup f[K]) \leq \lambda$ para toda $\alpha \leq \lambda$. Debido a que cada subespacio $Y_\alpha \cup f[K]$ es estable, tenemos que $nw(Y_\alpha \cup f[K]) \leq \lambda$ para toda $\alpha \leq \lambda$. Fije, para cada $\alpha \leq \lambda$, una red $\mathcal{N}_\alpha$ de subconjuntos del espacio $Y_\alpha \cup f[K]$ de tal forma que $|\mathcal{N}_\alpha| = nw(Y_\alpha \cup f[K])$. Defina $\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha \leq \lambda} \mathcal{N}_\alpha$. No es difícil probar que $\mathcal{N}$ es una red de subconjuntos de Y y que $|\mathcal{N}| \leq \lambda$. Esto último nos dice que $nw(Y) \leq \lambda$ y muestra que X es un espacio λ -estable; y como λ es arbitrario, podemos concluir que X es un espacio estable. $\square$

COROLARIO 3.15. *Para todo $\kappa > \omega$, $L(\kappa)$ es un espacio estable. En particular, $iw(L(\kappa)) = nw(L(\kappa)) = \kappa$.*

4. Espacios Lindelöf primario

En esta sección se demostrará que toda potencia numerable de un espacio $L(\kappa)$ tiene la propiedad de Lindelöf. Observemos que basta con verificar esta afirmación para los casos en que $\kappa > \omega$, ya que, si κ es numerable, entonces el espacio $L(\kappa)$ es discreto numerable y, por tanto, un espacio Lindelöf Σ ; en consecuencia, todas sus potencias numerables también son espacios Lindelöf.

Al final de la sección definiremos a los espacios Lindelöf primarios. Esta clase de espacios topológicos tiene una fuerte relación con las potencias numerables de Lindelöfificaciones unipuntuales de cardinales no numerables. *A partir de esta sección, todos los espacios se suponen Tychonoff.*

Para demostrar que las potencias finitas de $L(\kappa)$ tienen la propiedad de Lindelöf, se demostrará primero que $L(\kappa)^\omega$ es un espacio de Lindelöf; y para hacer esto último se requiere de algunos resultados auxiliares.

- DEFINICIÓN 4.1. (1) *Diremos que una colección $\mathcal{V}$ de subespacios de un espacio X es punto-numerable si para cada elemento $x \in X$ la colección $\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ es numerable.*
- (2) *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$. Diremos que una colección $\mathcal{V} \subseteq \tau^*$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ si $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$ y para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.*
- (3) *Un espacio topológico X es meta-Lindelöf si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto punto-numerable.*

En cualquier espacio discreto X la colección $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in X\}$ es un refinamiento abierto de cualquier cubierta abierta de X y debido a que $\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ tiene cardinalidad uno para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{V}$ es punto-numerable. En conclusión, *cualquier espacio discreto es un espacio meta-Lindelöf.*

Por otro lado, si X es un espacio Lindelöf, entonces cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene una subcubierta numerable $\mathcal{V}$. Es muy fácil probar que $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto punto-numerable de $\mathcal{U}$. Así, *cualquier espacio Lindelöf es un espacio meta-Lindelöf.* Sin embargo, no todo espacio meta-Lindelöf es un espacio Lindelöf; por ejemplo, el espacio discreto ω_1 es un espacio meta-Lindelöf que no es Lindelöf (recuerde que estamos suponiendo que todos los números cardinales tienen la topología discreta).

Enseguida probaremos que si en un espacio meta-Lindelöf se puede garantizar que todo subespacio discreto y cerrado es numerable, entonces el espacio es Lindelöf. El que todos los subespacios discretos y cerrados sean numerables tiene un nombre.

DEFINICIÓN 4.2. *Diremos que un espacio topológico tiene extensión numerable si y sólo si todos sus subconjuntos discretos y cerrados son numerables.*

LEMA 4.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio topológico X :*

- (1) *X es Lindelöf.*

(2) X es meta-Lindelöf y tiene extensión numerable.

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Rightarrow$ (2). Ya hemos verificado que todo espacio Lindelöf es meta-Lindelöf. Verifiquemos que X tiene extensión numerable. Supongamos que Y es un subespacio discreto y cerrado de X . Como X es Lindelöf, Y también es un espacio Lindelöf. Debido a que la topología de subespacio de Y es la discreta, la colección $\{\{y\} : y \in Y\}$ está contenida en $\tau \upharpoonright Y$ y cubre a Y . Como Y es Lindelöf, la cubierta abierta anterior tiene una subcubierta numerable. Esto implica la numerabilidad del conjunto Y . Así, podemos concluir que el espacio X tiene extensión numerable.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X no es Lindelöf. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X que no tiene subcubiertas numerables; equivalentemente, $\mathcal{U}$ no tiene refinamientos abiertos numerables.

Debido que X es meta-Lindelöf, $\mathcal{U}$ sí tiene un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ punto-numerable.

Construiremos por recursión dos colecciones $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ y $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tales que

- $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V} : x_\alpha \in V\}$ para cada $\alpha < \omega_1$.
- $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} (\bigcup \mathcal{V}_\beta)$ para cada $\alpha < \omega_1$.

Seleccionemos un elemento cualquiera $x_0 \in X$. Debido a que $\mathcal{V}$ es punto-numerable, la colección $\mathcal{V}_0 = \{V \in \mathcal{V} : x_0 \in V\}$ es una colección numerable. Como $\mathcal{V}_0$ es numerable y $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas numerables, necesariamente $\bigcup \mathcal{V}_0 \neq X$. Seleccionemos un elemento $x_1 \in X \setminus \bigcup \mathcal{V}_0$. Defina $\mathcal{V}_1 = \{V \in \mathcal{V} : x_1 \in V\}$. Note que $\mathcal{V}_1$ es numerable.

Supongamos ahora que $1 < \alpha < \omega_1$ y que tenemos construidos $x_0, x_1, \dots, x_\beta$ y colecciones $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ con las siguientes propiedades:

- $\mathcal{V}_\beta = \{V \in \mathcal{V} : x_\beta \in V\}$ para cada $\beta < \alpha$.
- $x_\beta \notin \bigcup_{\lambda < \beta} (\bigcup \mathcal{V}_\lambda)$ para cada $\beta < \alpha$.

Defina $\mathcal{W} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta$. Entonces $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ y además $\mathcal{W}$ es numerable (porque cada $\mathcal{V}_\beta$ lo es). Entonces $X \neq \bigcup \mathcal{W}$. Luego, podemos fijar un elemento $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{W}$. Defina $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V} : x_\alpha \in V\}$. Por construcción $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} (\bigcup \mathcal{V}_\beta)$. Con esto terminamos la construcción de las colecciones $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ y $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ deseadas.

Probemos ahora que el conjunto D es un subespacio cerrado y discreto de X : sea $x \in X \setminus D$ un elemento arbitrario. Como $\mathcal{V}$ cubre a X (pues es refinamiento), existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Si $V \cap D = \emptyset$, entonces $x \in V \subseteq X \setminus D$. Si $V \cap D \neq \emptyset$, entonces podemos fijar un elemento $x_\alpha \in D \cap V$. Luego, $V \in \mathcal{V}_\alpha$. De donde, para todo $\beta \neq \alpha$, $x_\beta \notin V$. Sea $W = V \setminus \{x_\alpha\}$. Entonces $x \in W \subseteq X \setminus D$ y W es un abierto de X . En cualquier caso hemos probado que x es punto interior de $X \setminus D$. Como $x \in X \setminus D$ es arbitrario, $X \setminus D$ es abierto, es decir, D es un subconjunto cerrado de X . Por otra parte, si $x_\alpha \in D$ es arbitrario, entonces como $\mathcal{V}$ cubre a X , existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x_\alpha \in V$. Luego, $V \in \mathcal{V}_\alpha$. Entonces $x_\beta \notin V$ para todo $\beta \neq \alpha$. Consecuentemente, existe un abierto V de X tal que $V \cap D = \{x_\alpha\}$. Esto prueba que D es un subespacio discreto de X .

Note ahora que el hecho de que D tiene cardinalidad no numerable contradice el hecho de que X es un espacio con extensión numerable. Por lo tanto, X es un espacio Lindelöf. $\square$

Según el lema anterior, dado un cardinal no numerable κ , para probar que $L(\kappa)^\omega$ es un espacio Lindelöf bastará demostrar que es un espacio Tychonoff meta-Lindelöf y que tiene extensión numerable. El espacio $L(\kappa)^\omega$ es Tychonoff porque es el producto de espacios Tychonoff. Para demostrar que $L(\kappa)^\omega$ es meta-Lindelöf, probaremos que es completamente tamizado (véase la proposición 4.5).

DEFINICIÓN 4.4. *Se dice que un espacio topológico X es completamente tamizado³ (o completamente filtrado) si toda colección de abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ σ -ajeno; es decir, si existe una colección de abiertos $\mathcal{V}$ σ -ajena tal que $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$ y tal que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$.*

Recuerde que una familia es σ -ajena si es igual la unión de una cantidad numerable de familias ajenas (es decir, familias en donde cualesquiera dos elementos diferentes tienen intersección vacía).

Para ser breves, diremos que la familia $\mathcal{V}$ está inscrita en la familia $\mathcal{U}$ si y sólo si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ con $V \subseteq U$. De esta manera, en la definición anterior, la familia $\mathcal{V}$ está inscrita en $\mathcal{U}$.

PROPOSICIÓN 4.5. *Cualquier espacio completamente tamizado es un espacio meta-Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta arbitraria de un espacio completamente tamizado X , entonces existe $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$ familia de abiertos σ -ajena tal que $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U} = X$ y tal que $\mathcal{V}$ está inscrita en $\mathcal{U}$.

Entonces, $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ y, además, para cada $x \in X$, la colección $\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ coincide con la unión $\bigcup_{n \in \omega} \{V \in \mathcal{V}_n : x \in V\}$, la cual es numerable, ya que, cada conjunto $\{V \in \mathcal{V}_n : x \in V\}$ tiene cardinalidad a lo sumo 1, dado que, al ser $\mathcal{V}_n$ una familia ajena, el punto x pertenece a los más a un elemento de dicha familia. De esta manera, hemos probado que la colección $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto punto-numerable de la cubierta $\mathcal{U}$. Por lo tanto, X es un espacio meta-Lindelöf. $\square$

Enseguida probaremos que las potencias finitas de $L(\kappa)$ son espacios completamente tamizados.

PROPOSICIÓN 4.6. *Para todo $\kappa > \omega$ y todo natural $n > 0$, el espacio $L(\kappa)^n$ es completamente tamizado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal no numerable arbitrario. Probaremos que $L(\kappa)^n$ es completamente tamizado por inducción matemática. Suponga que $n = 1$ y que $\mathcal{U}$ es cualquier colección de abiertos no vacíos del espacio $L(\kappa)$. Tenemos dos casos:

Caso (1): $\infty \in \bigcup \mathcal{U}$.

Fijemos $V \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in V$. Definamos

$$\mathcal{V} = \{V\} \cup \{\{x\} : x \in U \cap \kappa \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

Entonces $\mathcal{V}$ es una colección de abiertos no vacíos y es la unión de dos familias. Observe que cada una de ellas es una familia ajena. Además, $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$ y para cada $W \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U$.

³Del inglés: *completely screenable*.

Caso (2): $\infty \notin \bigcup \mathcal{U}$.

En este caso simplemente defina $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una colección de abiertos, es una familia ajena, $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$ y para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

Todo lo anterior muestra que la propiedad es cierta para $n = 1$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}^+$ y que $L(\kappa)^n$ es completamente tamizado. Sea $\mathcal{U}$ una colección arbitraria de abiertos no vacíos del espacio $L(\kappa)^{n+1}$.

Consideremos la función continua $\pi : L(\kappa)^{n+1} \rightarrow L(\kappa)^{n+1}$ dada por

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, \infty).$$

Es fácil darse cuenta que $\pi[L(\kappa)^{n+1}] = L(\kappa)^n \times \{\infty\}$. De esta manera, el subespacio $F = \pi[L(\kappa)^{n+1}]$ es un subconjunto cerrado de $L(\kappa)^{n+1}$ y además es homeomorfo al espacio $L(\kappa)^n$. Como estamos suponiendo que $L(\kappa)^n$ es completamente tamizado, el subespacio F es completamente tamizado.

Observe ahora que si definimos, para cada $\alpha \in \kappa$, a $V_\alpha = L(\kappa)^n \times \{\alpha\}$, entonces cada conjunto V_α es abierto en $L(\kappa)$ (porque κ es un espacio discreto) y además $L(\kappa)^{n+1} \setminus F = \bigcup_{\alpha \in \kappa} V_\alpha$. Más aún, observe que la familia de abiertos $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia ajena. También es fácil darse cuenta que cada V_α es homeomorfo al espacio $L(\kappa)^n$; por lo que cada conjunto V_α es un espacio completamente tamizado con la topología de subespacio. Entonces, para cada $\alpha \in \kappa$, existe una familia $\mathcal{V}_\alpha$ de abiertos no vacíos de V_α que es σ -ajena, que está inscrita en la familia $\mathcal{U}_\alpha = \{V_\alpha \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ y tal que $\bigcup \mathcal{V}_\alpha = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$.

Supongamos que, para cada $\alpha \in \kappa$, $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{V}_\alpha^m : m \in \omega\}$ donde la familia $\mathcal{V}_\alpha^m$ es una familia ajena de subconjuntos abiertos de V_α . Definamos $\mathcal{V}^m = \bigcup \{\mathcal{V}_\alpha^m : \alpha \in \kappa\}$ para cada $m \in \omega$. Entonces cada familia $\mathcal{V}^m$ está formada de abiertos de $L(\kappa)^{n+1}$, está inscrita en la familia $\mathcal{U}$ y es una familia ajena. Consideremos ahora la colección $\mathcal{V}' = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{V}^m$. Resulta que $\mathcal{V}'$ es una familia σ -ajena formada por subconjuntos abiertos del espacio $L(\kappa)^{n+1}$ tal que $(\bigcup \mathcal{U}) \cap (L(\kappa)^{n+1} \setminus F) = \bigcup \mathcal{V}'$.

Por otra parte, como el subespacio F es un espacio completamente tamizado, para la colección de abiertos $\mathcal{U}_F = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}\}$ existe una familia σ -ajena $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n$ de subconjuntos abiertos de F , que está inscrita en la familia $\mathcal{U}_F$, y para la cual sucede que $\bigcup \mathcal{W} = \bigcup \mathcal{U}_F$. Obviamente la familia $\mathcal{U}_F$ está inscrita en la familia $\mathcal{U}$, por lo que la familia $\mathcal{W}$ también está inscrita en $\mathcal{U}$. Por esto para cada $W \in \mathcal{W}$ podemos fijar un elemento $O(W) \in \mathcal{U}$ de modo que $W \subseteq O(W)$.

Debido a que $\pi(z) = z$ para todos los elementos $z \in F$, tenemos que $W \subseteq \pi^{-1}[W]$ para toda $W \in \mathcal{W}$. Además como la función $\pi : L(\kappa)^{n+1} \rightarrow L(\kappa)^{n+1}$ es continua y $F = \pi[L(\kappa)^{n+1}]$, la función $\pi : L(\kappa)^{n+1} \rightarrow F$ también es continua. Entonces la familia $\mathcal{D} = \{\pi^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}\}$ consiste de subconjuntos abiertos de $L(\kappa)^{n+1}$ y es σ -ajena porque cada una de las colecciones $\mathcal{D}_n = \{\pi^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}_n\}$ es una familia ajena (ya que $\mathcal{W}_n$ lo es) y $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$.

Defina ahora $\mathcal{V}'' = \{\pi^{-1}[W] \cap O(W) : W \in \mathcal{W}\}$. Claramente la familia $\mathcal{V}''$ consta de abiertos de $L(\kappa)^{n+1}$ y está inscrita en la familia $\mathcal{U}$. Si definimos $\mathcal{V}''_n = \{\pi^{-1}[W] \cap O(W) : W \in \mathcal{W}_n\}$ para cada $n \in \omega$, entonces $\mathcal{V}''_n$ es una familia ajena y además $\mathcal{V}'' = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}''_n$. De esta manera, $\mathcal{V}''$ es una familia σ -ajena. Además, $(\bigcup \mathcal{U}) \cap F \subseteq \bigcup \mathcal{V}''$.

Para finalizar, defina $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cup \mathcal{V}''$. Entonces $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de la familia $\mathcal{U}$ que es σ -ajeno. Lo que termina la prueba de que $L(\kappa)^{n+1}$ es un espacio completamente tamizado.

Por lo tanto, por el método de inducción matemática, $L(\kappa)^n$ es un espacio completamente tamizado para todo entero positivo n . $\square$

COROLARIO 4.7. *Para todo $\kappa > \omega$ y todo natural $n > 0$, $L(\kappa)^n$ es meta-Lindelöf.*

COROLARIO 4.8. *Para todo $\kappa > \omega$, $L(\kappa)^\omega$ es un espacio completamente tamizado.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa > \omega$ y $\mathcal{U}$ una familia arbitraria de abiertos no vacíos del espacio $L(\kappa)^\omega$. Para cada $f \in \bigcup \mathcal{U}$, existe $U_f \in \mathcal{U}$ tal que $f \in U_f$. Fijemos un abierto canónico W_f tal que $f \in W_f \subseteq U_f$. Note que si $W_f = L(\kappa)^\omega$ para algún $f \in \bigcup \mathcal{U}$, entonces $U_f = L(\kappa)^\omega$ y la familia $\{W_f\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que es σ -ajeno. Lo que termina la prueba en este caso.

Para el caso en que ningún W_f es igual a $L(\kappa)^\omega$, defina $\mathcal{W} = \{W_f : f \in \bigcup \mathcal{U}\}$. Entonces $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que está formado por abiertos básicos del producto $L(\kappa)^\omega$ (abiertos básicos que son diferentes a $L(\kappa)^\omega$). Es claro que si probamos la existencia de un refinamiento abierto de $\mathcal{W}$ que sea σ -ajeno, éste también será un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ σ -ajeno.

Por nuestra hipótesis sobre los elementos W_f , para cada $W_f \in \mathcal{W}$ existe un entero positivo n y abiertos W_j no vacíos y diferentes a $L(\kappa)$ tales que $W_f = \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}[W_j]$. Defina $i(W_f) = n$.

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $p_n : L(\kappa)^\omega \rightarrow L(\kappa)^n$ la proyección de $L(\kappa)^\omega$ a sus primeros n factores $L(\kappa) \times \cdots \times L(\kappa)$. Defina también, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, al conjunto $\mathcal{W}_n = \{W_f \in \mathcal{W} : i(W_f) = n\}$. Es claro que $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{W}_n$. Para cada $W \in \mathcal{W}_n$, existe V abierto en $L(\kappa) \times \cdots \times L(\kappa)$ (n factores) tal que $W = p_n^{-1}[V]$.

Resulta que la colección $\{p_n[W] : W \in \mathcal{W}_n\}$ está formada por abiertos de $L(\kappa)^n$. Como el espacio $L(\kappa)^n$ es completamente tamizado, para la familia $\{p_n[W] : W \in \mathcal{W}_n\}$ existe un refinamiento abierto $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{D}_n$ σ -ajeno. Defina ahora $\mathcal{V}_n = \{p_n^{-1}[D] : D \in \mathcal{D}_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Es claro que, como $\mathcal{D}_n$ es una familia ajena, $\mathcal{V}_n$ también lo es. Resulta que $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{V}_n$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{W}$ que es σ -ajeno. Lo que termina la prueba en el segundo caso.

Por lo tanto, el espacio $L(\kappa)^\omega$ es completamente tamizado. $\square$

El siguiente resultado es un corolario de la proposición 4.5 y del corolario 4.8.

COROLARIO 4.9. *Para todo $\kappa > \omega$, $L(\kappa)^\omega$ es un espacio meta-Lindelöf.*

Para poder terminar la prueba de que $L(\kappa)^\omega$ es Lindelöf (para $\kappa > \omega$), sólo nos hace falta probar que tiene extensión numerable.

PROPOSICIÓN 4.10. *Para todo cardinal no numerable κ , el espacio $L(\kappa)^\omega$ tiene extensión numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\kappa > \omega$. Denotaremos por $q_n : L(\kappa)^\omega \rightarrow L(\kappa)$ la proyección al factor n -ésimo del producto $L(\kappa)^\omega$.

Supongamos por el contrario que existe un subespacio no numerable D de $L(\kappa)^\omega$ que es cerrado y discreto. Contruiremos por recursión una sucesión $(D_n)_{n \in \omega}$ de subconjuntos no numerables de D y una sucesión $(c_n)_{n \in \omega}$ de elementos de $L(\kappa)$ con las siguientes propiedades:

- $D \supseteq D_0 \supseteq D_1 \supseteq \dots$
- para cada U abierto en $L(\kappa)$ con $c_n \in U$, $|D_n \setminus q_n^{-1}[U]| \leq \omega$.

Para construir a D_0 y a c_0 consideremos los siguientes dos casos:

Si $q_0[D]$ es un subconjunto numerable, entonces como D no es numerable y $D = D \cap q_0^{-1}[q_0[D]] = \bigcup_{c \in q_0[D]} D \cap q_0^{-1}\{c\}$, debe existir $c_0 \in q_0[D] \subseteq L(\kappa)$ tal que $D \cap q_0^{-1}\{c_0\}$ es no numerable. Definamos en este caso $D_0 = D \cap q_0^{-1}\{c_0\}$. Verifiquemos que c_0 y D_0 cumplen la segunda propiedad. Suponga que U es un abierto arbitrario de $L(\kappa)$ que contiene a c_0 . Como $D_0 \subseteq q_0^{-1}\{c_0\}$, tenemos que $q_0[D_0] \subseteq \{c_0\} \subseteq U$. Así, $D_0 \subseteq q_0^{-1}[U]$. De lo que se tiene que $|D_0 \setminus q_0^{-1}[U]| \leq \omega$.

Por otro lado, si ocurre que $q_0[D]$ es un subconjunto no numerable, entonces definimos $c_0 = \infty$ y fijamos, para cada $d \in q_0[D]$, un único elemento $x_d \in D \cap q_0^{-1}\{d\}$, y definimos $D_0 = \{x_d : d \in q_0[D]\}$. Verifiquemos que c_0 y D_0 cumplen la segunda propiedad. Suponga que U es un abierto arbitrario de $L(\kappa)$ que contiene a c_0 . Como $c_0 = \infty$, $|L(\kappa) \setminus U| \leq \omega$. De donde, $|q_0[D_0] \setminus U| \leq \omega$. Debido a que $x_d \in D_0 \cap q_0^{-1}[U]$ si y sólo si $d \in q_0[D_0] \setminus U$ (y a que $d \neq d'$ si y sólo si $x_d \neq x_{d'}$), los conjuntos $D_0 \setminus q_0^{-1}[U]$ y $q_0[D_0] \setminus U$ tienen la misma cardinalidad. Entonces $|D_0 \setminus q_0^{-1}[U]| \leq \omega$ como se deseaba probar.

Suponga ahora que $n > 0$ y que tenemos contruidos elementos $c_0, \dots, c_{n-1}$ de $L(\kappa)$ y subconjuntos no numerables $D_0, \dots, D_{n-1}$ de D tales que

- $D \supseteq D_0 \supseteq D_1 \supseteq \dots \supseteq D_{n-1}$
- para cada U abierto en $L(\kappa)$ con $c_k \in U$, $|D_k \setminus q_k^{-1}[U]| \leq \omega$, para cada $k = 0, \dots, n-1$.

Tenemos los siguientes dos casos para $q_n[D_{n-1}]$:

- (1) El conjunto $q_n[D_{n-1}] \subseteq L(\kappa)$ es numerable. En este caso debe existir un elemento $c_n \in L(\kappa)$ tal que el conjunto $D_{n-1} \cap q_n^{-1}\{c_n\}$ es no numerable. Entonces definimos $D_n = D_{n-1} \cap q_n^{-1}\{c_n\}$.
- (2) El conjunto $q_n[D_{n-1}] \subseteq L(\kappa)$ es numerable. En este caso fijamos para cada $d \in q_n[D_{n-1}]$ un único elemento $x_d \in D_{n-1} \cap q_n^{-1}\{d\}$ y definimos $D_n = \{x_d : d \in q_n[D_{n-1}]\}$ y $c_n = \infty$.

En ambos casos es muy sencillo probar que $D_n \subseteq D_{n-1}$ es no numerable y que, para cada abierto U de $L(\kappa)$ que contiene a c_n , se tiene que $|D_n \setminus q_n^{-1}\{c_n\}| \leq \omega$. Esto termina nuestra construcción recursiva.

Definamos ahora $c \in (L(\kappa))^\omega$ como el único elemento tal que $q_n(c) = c_n$ para cada $n \in \omega$. Afirmamos que c es punto de acumulación del conjunto D . En efecto, consideremos un abierto cualquiera W de $L(\kappa)^\omega$ que contiene a c . Entonces existen $n \in \omega$ y abiertos $U_0, \dots, U_n$ de $L(\kappa)$ tales que $c \in \bigcap_{i=0}^n q_i^{-1}[U_i] \subseteq W$. Como $D_n \setminus q_i^{-1}[U_j] \subseteq D_i \setminus q_i^{-1}[U_i]$ es numerable para cada $i = 0, \dots, n$, tenemos que $D_n \setminus (\bigcap_{i=0}^n q_i^{-1}[U_i]) = \bigcup_{j=0}^n (D_n \setminus q_j^{-1}[U_j])$ es numerable. Pero D_n no es numerable así que $D_n \cap (\bigcap_{i=0}^n q_i^{-1}[U_i])$ no es un conjunto numerable. Consecuentemente, $W \cap D$ es no numerable porque

$D_n \cap \left(\bigcap_{i=0}^n q_i^{-1}[U_i] \right) \subseteq D_n \cap W \subseteq D \cap W$. Debido a que W es arbitrario, c es un punto de acumulación de D , pero siendo D cerrado tenemos que $c \in D$; y como D es un subespacio discreto de $L(\kappa)^\omega$ debe existir W abierto de $L(\kappa)^\omega$ tal que $W \cap D = \{c\}$, lo que contradice lo antes probado. Por lo tanto, el espacio $L(\kappa)^\omega$ tiene extensión numerable. $\square$

Aplicando el lema 4.3, el corolario 4.9 y la proposición 4.10, obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 4.11. *Para todo $\kappa > \omega$, $L(\kappa)^\omega$ es un espacio Lindelöf.*

Debido a que cada potencia finita $L(\kappa)^n$ es imagen continua de la potencia numerable $L(\kappa)^\omega$ tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 4.12. *Para todo $\kappa > \omega$ y todo número natural $n > 0$, $L(\kappa)^n$ es un espacio Lindelöf.*

Las potencias numerables $L(\kappa)^\omega$ para cardinales no numerables κ son espacios muy importantes.

DEFINICIÓN 4.13. *Un espacio topológico (X, τ) es Lindelöf primario o primariamente Lindelöf si X es la imagen continua de un subespacio cerrado de $L(\kappa)^\omega$ para algún cardinal no numerable κ .*

Obviamente, para todo cardinal no numerable κ , el espacio $L(\kappa)^\omega$ y todas sus potencias finitas $L(\kappa)^n$ son espacios Lindelöf primario. Además, como cualquier espacio $L(\kappa)^\omega$ tiene la propiedad de Lindelöf, tenemos lo siguiente.

COROLARIO 4.14. *Todo espacio Lindelöf primario es un espacio Lindelöf.*

La clase de espacios Lindelöf primario tiene propiedades muy parecidas la de los espacios Lindelöf Σ . Por ejemplo, enseguida probaremos que es cerrada bajo subespacios cerrados, imágenes continuas, uniones y productos numerables.

PROPOSICIÓN 4.15. *La unión numerable de espacios Lindelöf primario es un espacio Lindelöf primario.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$, donde X_n es un espacio Lindelöf primario para cada $n \in \omega$. Fije, para cada $n \in \omega$, un cardinal no numerable κ_n , un subespacio cerrado $F_n \subseteq L(\kappa_n)^\omega$ y una función continua suprayectiva $f_n : F_n \rightarrow X_n$.

Si $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$, entonces $L(\kappa_n)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $L(\kappa)$. De esto se sigue que $L(\kappa_n)^\omega$ es homeomorfo un subespacio cerrado de $L(\kappa)^\omega$, por lo que F_n es homeomorfo un subespacio cerrado G_n de $L(\kappa)^\omega$, para cada $n \in \omega$. Entonces el subespacio $F = \bigoplus_{n \in \omega} F_n$ es homeomorfo al subespacio cerrado $G = \bigoplus_{n \in \omega} G_n$ de $\bigoplus_{n \in \omega} L(\kappa)^\omega$. Fije un homeomorfismo $g : G \rightarrow F$.

Observe ahora que $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ es imagen continua de F bajo el mapeo continuo $f(x) = f_n(x)$ para cada $x \in F_n$.

Por otro lado, cualquier subconjunto numerable $A = \{\alpha_m : m \in \omega\}$ de κ es cerrado y abierto en $L(\kappa)$, así que la función $t : L(\kappa) \rightarrow \omega$ dada por

$$t(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \in L(\kappa) \setminus A, \\ m + 1, & \text{si } \alpha = \alpha_m, \end{cases}$$

es continua y suprayectiva. Consecuentemente, el espacio $L(\kappa) \times \omega$ es una imagen continua del espacio $L(\kappa) \times L(\kappa)$. Esto último implica que $(L(\kappa) \times \omega)^\omega$ es imagen continua de $(L(\kappa) \times L(\kappa))^\omega = (L(\kappa)^2)^\omega$, el cual es homeomorfo a $L(\kappa)^\omega$. Entonces, el espacio $(L(\kappa) \times \omega)^\omega$ es imagen continua de $L(\kappa)^\omega$. Pero $(L(\kappa) \times \omega)^\omega$ es homeomorfo a $L(\kappa)^\omega \times \omega^\omega$. Así, $L(\kappa)^\omega \times \omega^\omega$ es imagen continua de $L(\kappa)^\omega$. Como $L(\kappa)^\omega \times \omega$ es imagen continua de $L(\kappa)^\omega \times \omega^\omega$, obtenemos que el espacio $L(\kappa)^\omega \times \omega$ es imagen continua de $L(\kappa)^\omega$. También sabemos que $L(\kappa)^\omega \times \omega$ es homeomorfo a $\bigoplus_{n \in \omega} L(\kappa)^\omega$. Así, $\bigoplus_{n \in \omega} L(\kappa)^\omega$ es imagen continua de $L(\kappa)^\omega$.

Fije una función continua suprayectiva $h : L(\kappa)^\omega \rightarrow \bigoplus_{n \in \omega} L(\kappa)^\omega$ y considere al subconjunto $H = h^{-1}[G]$ de $L(\kappa)^\omega$. Como G es cerrado en $\bigoplus_{n \in \omega} L(\kappa)^\omega$, H es cerrado en $L(\kappa)^\omega$. Entonces X es imagen continua bajo $f \circ g \circ h$ del subconjunto cerrado H de $L(\kappa)^\omega$. Esto muestra que X es un espacio Lindelöf primario. $\square$

PROPOSICIÓN 4.16. *El producto numerable de espacios Lindelöf primario es un espacio Lindelöf primario.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X = \prod_{n \in \omega} X_n$, donde X_n es un espacio Lindelöf primario para cada $n \in \omega$. Fijemos, para cada $n \in \omega$, un cardinal no numerable κ_n y un subespacio cerrado $F_n \subseteq L(\kappa_n)^\omega$ tal que X_n es imagen continua de F_n . Defina $\kappa = \sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$, entonces F_n es homeomorfo a un subespacio cerrado de $L(\kappa)^\omega$ para cada $n \in \omega$. Es claro que $F = \prod_{n \in \omega} F_n$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $(L(\kappa)^\omega)^\omega$. Como $(L(\kappa)^\omega)^\omega$ es homeomorfo a $L(\kappa)^\omega$ y X es imagen continua de F , podemos concluir que X es Lindelöf primario. $\square$

PROPOSICIÓN 4.17. *Tanto las imágenes continuas como los subespacios cerrados de espacios Lindelöf primario son espacios Lindelöf primario.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que X es un espacio Lindelöf primario arbitrario y que Y es una imagen continua de X . Fije un cardinal no numerable κ y un subespacio cerrado F de $L(\kappa)^\omega$ tal que X es imagen continua de F . Entonces Y es imagen continua de F , lo que permite concluir que Y es Lindelöf primario.

Suponga ahora que G es un subespacio cerrado arbitrario de X . Fije una función continua suprayectiva $f : F \rightarrow X$. Como f es continua, la imagen inversa $H = f^{-1}[G]$ es un subespacio cerrado de F y por tanto de $L(\kappa)^\omega$. Observe ahora que $f \upharpoonright H : H \rightarrow G$ es una función continua suprayectiva del subespacio cerrado H de $L(\kappa)^\omega$ sobre G . Esto muestra que G es un espacio Lindelöf primario. $\square$

PROPOSICIÓN 4.18. *Cualquier intersección de una cantidad numerable de espacios Lindelöf primario es un espacio Lindelöf primario.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que X es un espacio y que X_n es un subespacio Lindelöf primario de X para cada $n \in \omega$. Es bien sabido que la intersección $\bigcap_{n \in \omega} X_n$ es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $\prod_{n \in \omega} X_n$ (vea [4]). Por las proposiciones 4.16 y 4.17, la intersección $\bigcap_{n \in \omega} X_n$ es un espacio Lindelöf primario. $\square$

5. Los compactos de Corson

Para un conjunto no vacío A , se define $\Sigma(A) := \{x \in \mathbb{R}^A : |x^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega\}$. Cuando $\Sigma(A)$ es considerado como subespacio del producto topológico de $\mathbb{R}^A$, este espacio recibe el nombre de Σ -producto de rectas reales (basados en 0). Una propiedad básica de los Σ -productos es que son subespacios densos del correspondiente producto $\mathbb{R}^A$.

Los subespacios compactos de los Σ -productos $\Sigma(A)$ son estudiados por sus importantes propiedades. Para los fines de esta nota, este tipo de espacio compacto es relevante porque tienen una relación muy fuerte con los espacios de funciones de las Lindelöfificaciones uno puntuales.

DEFINICIÓN 5.1. *Un compacto Hausdorff es llamado compacto de Corson si es homeomorfo a algún subespacio de $\Sigma(A)$ para algún conjunto infinito A .*

Cuando A es un conjunto infinito numerable, $\Sigma(A) = \mathbb{R}^A$ y $\mathbb{R}^A$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\omega$. De esto se sigue que todos los compactos metrizablees son compactos de Corson. Por ejemplo, $[0, 1]^\omega$ y 2^ω son compactos de Corson.

Hay un comportamiento interesante que nos importa destacar y que puede observarse en el cardinal ω .

El espacio discreto ω es homeomorfo a su Lindelöfificación unipuntual $L(\omega)$ (vea [2.4](#)). Además, para cualquier espacio discreto X ocurre que $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ (vea la página [74](#) para la definición de los espacios de funciones $C_p(X)$). Entonces $C_p(L(\omega)) \simeq C_p(\omega) = \mathbb{R}^\omega = \Sigma(\omega)$. Así, los compactos de $\Sigma(\omega)$ son precisamente los subespacios compactos del espacio de funciones $C_p(L(\omega))$. Este comportamiento ocurre en general y muestra la importancia de las Lindelöfificaciones unipuntuales $L(\kappa)$: *cualquier compacto de Corson es homeomorfo a un subespacio de un espacio de funciones $C_p(L(\kappa))$ para algún cardinal no numerable κ .*

La prueba de la afirmación anterior consiste en demostrar que $C_p(L(\kappa))$ es homeomorfo a $\Sigma(\kappa)$ (para el caso en que $\kappa = \omega$ esto ya fue demostrado líneas arriba). Necesitamos algunos resultados auxiliares y varias propiedades de los espacios de funciones $C_p(X)$. Usaremos por ejemplo que los espacios $C_p(X)$ son grupos topológicos (para detalles remitimos al lector a los libros [\[1\]](#), [\[6\]](#)).

LEMA 5.2. *Para cada cardinal infinito κ , $\Sigma(\kappa)$ es homeomorfo al producto $\Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa \geq \omega$ un cardinal arbitrario y $s(\kappa) = \kappa \cup \{\kappa\}$. Claramente, κ y $s(\kappa)$ tienen la misma cardinalidad, así que podemos fijar una biyección $\phi : \kappa \rightarrow s(\kappa)$. Dotando a $s(\kappa)$ con la topología discreta, podemos decir que ϕ es un homeomorfismo (recuerde que κ también tiene la topología discreta). Este homeomorfismo induce un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{s(\kappa)}$ y $\mathbb{R}^\kappa$ (vea [\[4\]](#)); a saber, la función $\phi^* : \mathbb{R}^{s(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ definida por $\phi^*(x) = x \circ \phi$.

Además, $\phi^*[\Sigma(s(\kappa))] = \Sigma(\kappa)$. Efectivamente, sea $x \in \Sigma(s(\kappa))$ un elemento arbitrario. Entonces, $|x^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$. Como ϕ es inyectiva, $|\phi^{-1}[x^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]]| = |x^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]|$. Luego, $|(x \circ \phi)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$. Por tanto, $\phi^*(x) \in \Sigma(\kappa)$. Recíprocamente, suponga que $y \in \Sigma(\kappa)$ es un elemento arbitrario. Defina $x = y \circ \phi^{-1}$. Es claro que $x \in \mathbb{R}^{s(\kappa)}$ y que $\phi^*(x) = y$. Así que sólo resta verificar que $x \in \Sigma(s(\kappa))$.

Pero como $y \in \Sigma(\kappa)$, tenemos que $|y^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$. Por ser ϕ una biyección, $|\phi[y^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]]| = |y^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]|$. Entonces $|\phi[y^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]]| \leq \omega$. Pero $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$. Por tanto, $|(y \circ \phi^{-1})^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$; es decir, $x \in \Sigma(s(\kappa))$.

Como $\phi^* : \mathbb{R}^{s(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ es un homeomorfismo y $\phi^*[\Sigma(s(\kappa))] = \Sigma(\kappa)$, concluimos que $\Sigma(\kappa)$ es homeomorfo a $\Sigma(s(\kappa))$.

Para terminar, verificaremos que $\Sigma(s(\kappa))$ es homeomorfo a $\Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$. Un homeomorfismo es el siguiente.

La función inclusión $i : \kappa \rightarrow s(\kappa)$ es una función continua. Entonces la función $i^* : \mathbb{R}^{s(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ dada por $i^*(x) = x \circ i$ es una función continua. Además, $i^*[\Sigma(s(\kappa))] \subseteq \Sigma(\kappa)$. Para la prueba de lo anterior, simplemente adapte la prueba hecha para ϕ^* . Note que se usó la inyectividad de ϕ y que i es inyectiva.

Las proyecciones naturales asociadas al producto topológico $\mathbb{R}^{s(\kappa)}$ son siempre funciones continuas, en particular, la proyección asociada a $\kappa \in s(\kappa)$, $p_\kappa : \mathbb{R}^{s(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}$, es continua. Entonces la función $\psi : \Sigma(s(\kappa)) \rightarrow \Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$ definida como $\psi(f) = (i^*(f), p_\kappa(f))$ es una función bien definida y continua. De hecho, ψ es un homeomorfismo. Para verificarlo se exhibirá a su función inversa.

Defina $e : \Sigma(\kappa) \rightarrow \Sigma(s(\kappa))$ por medio de la siguiente regla: para cada $g \in \Sigma(\kappa)$, $e(g) : s(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida como

$$e(g)(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = \kappa, \\ g(\alpha), & \text{si } \alpha \in \kappa. \end{cases}$$

Como $e(g)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq g^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$, la función e está bien definida. Para verificar la continuidad de e , suponga que $p_\alpha : \mathbb{R}^{s(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $\alpha \in s(\kappa)$) y $\pi_\alpha : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ ($\alpha \in \kappa$) son las proyecciones naturales asociadas a los productos topológicos $\mathbb{R}^{s(\kappa)}$ y $\mathbb{R}^\kappa$. La función e es continua porque para toda $\alpha \in \kappa$, $p_\alpha \circ e : \Sigma(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ es igual a $\pi_\alpha \upharpoonright \Sigma(\kappa)$ y, $p_\kappa \circ e$ es la función constante 0, las cuales son funciones continuas.

Para cada número real $r \in \mathbb{R}$, defina la función $d_r : s(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$d_r(\alpha) = \begin{cases} r, & \text{si } \alpha = \kappa, \\ 0, & \text{si } \alpha \in \kappa. \end{cases}$$

Como $d_r^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq \{\kappa\}$, $d_r \in \Sigma(s(\kappa))$ para toda $r \in \mathbb{R}$. Ahora, defina $d : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma(s(\kappa))$ por medio de $d(r) = d_r$. La función d es continua porque, para cada $\alpha \in \kappa$, $p_\alpha \circ d$ es la función constante cero y, además, $p_\kappa \circ d = \text{id}_\mathbb{R}$.

Para finalizar, suponga que q_1 y q_2 son la primera y segunda proyección asociadas al producto topológico $\Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$. Defina la función $\eta : \Sigma(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma(s(\kappa))$ por medio de $\eta = e \circ q_1 + d \circ q_2$. Observe que si $(x, r) \in \Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$ es un elemento arbitrario, entonces $\eta(x, r)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq e(x)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \cup d_r^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$. Entonces $|\eta(x, r)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$, es decir, η es una función bien definida.

Como las proyecciones q_1 y q_2 son funciones continuas, las composiciones $e \circ q_1$ y $d \circ q_2$ son funciones continuas. Entonces su suma η es una función continua.

Resulta que η es la inversa de ψ (dejamos al lector verificarlo). Por lo tanto, $\Sigma(s(\kappa))$ es homeomorfo a $\Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$. Esto termina la prueba del lema. $\square$

Recuerde que para cualquier espacio X y cualquier $f \in C(X)$ la colección de todos los conjuntos de la forma:

$$[f; x_1, \dots, x_n; \epsilon] = \{g \in C_p(X) : \forall i \in \{1, \dots, n\} (|f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon)\},$$

es una base local de f en el espacio de funciones $C_p(X)$ (vea la página 74 para más detalles).

LEMA 5.3. *Para todo número cardinal $\kappa > \omega$, el espacio $C_p(L(\kappa))$ es homeomorfo al producto topológico $\{f \in C_p(L(\kappa)) : f(\kappa) = 0\} \times \mathbb{R}$.*

Aquí, $I = \{f \in C_p(L(\kappa)) : f(\kappa) = 0\}$ tiene la topología de subespacio respecto de $C_p(L(\kappa))$.

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un número cardinal no numerable arbitrario. Para cada $r \in \mathbb{R}$, sea $c_r : L(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante de valor r . Claramente, $c_r \in C_p(L(\kappa))$ para cada r , de modo que la función $c : C_p(L(\kappa)) \rightarrow C_p(L(\kappa))$ definida como $c(f) = c_{f(\kappa)}$ es una función bien definida y continua (dése cuenta que $p_\alpha \circ c : C_p(L(\kappa)) \rightarrow \mathbb{R}$ es igual la función $p_\infty \upharpoonright C_p(L(\kappa))$ para cada $\alpha \in L(\kappa)$ ⁴). Aquí, p_α es la α -ésima proyección asociada al producto $\mathbb{R}^{L(\kappa)}$.

Debido a que c es continua, la función $\text{id}_{C_p(L(\kappa))} - c$ también es continua. Además, para cada $f \in C_p(L(\kappa))$, $f - c_{f(\kappa)} \in I$. Entonces $\text{id}_{C_p(L(\kappa))} - c : C_p(L(\kappa)) \rightarrow I$ está bien definida y es continua.

Considere ahora la función $\phi : C_p(L(\kappa)) \rightarrow I \times \mathbb{R}$ definida por $\phi(f) = (f - c_{f(\kappa)}, f(\kappa))$. Claramente, ϕ es una función continua. De hecho, ϕ es un homeomorfismo. Efectivamente, la función continua $\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow C_p(L(\kappa))$ dada por $\psi(f, r) = f + c_r$ es inversa de ϕ . Esto prueba que $C_p(L(\kappa))$ es homeomorfo a $\{f \in C_p(L(\kappa)) : f(\kappa) = 0\} \times \mathbb{R}$. $\square$

LEMA 5.4. *Para todo cardinal $\kappa > \omega$, $C_p(L(\kappa))$ es homeomorfo a $\Sigma(\kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa > \omega$ arbitrario. Suponga que el conjunto $I = \{h \in C_p(L(\kappa)) : h(\kappa) = 0\}$ tiene la topología de subespacio respecto del espacio de funciones $C_p(L(\kappa))$.

Sea $i : \kappa \rightarrow L(\kappa)$ la función inclusión. Como κ es discreto, i es continua. Entonces la función $i^* : \mathbb{R}^{L(\kappa)} \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ dada por $i^*(f) = f \circ i = f \upharpoonright \kappa$ es una función continua. De donde, la función $j^* = i^* \upharpoonright C_p(L(\kappa)) : C_p(L(\kappa)) \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$ es continua.

Afirmación. $j^*[I] = \Sigma(\kappa)$.

Demostración de la afirmación. Suponga que $f \in I$ es cualquier elemento. Note que

$$(f \upharpoonright \kappa)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\alpha \in \kappa : |f(\alpha)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}^+$ arbitrario. Como $f(\kappa) = 0$ y f es continua, existe V una vecindad de κ en $L(\kappa)$ tal que $f[V] \subseteq (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. De esta manera, $\{\alpha \in \kappa : |f(\alpha)| \geq \frac{1}{n}\} \subseteq L(\kappa) \setminus V$. En consecuencia, $|\{\alpha \in \kappa : |f(\alpha)| \geq \frac{1}{n}\}| \leq |L(\kappa) \setminus V| \leq \omega$. Como $n \in \mathbb{N}^+$ es arbitrario, entonces $|(f \upharpoonright \kappa)^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]| \leq \omega$. Entonces $j^*(f) = f \upharpoonright \kappa \in \Sigma(\kappa)$.

⁴Recuerde que $L(\kappa) = \kappa \cup \{\infty\}$ y que $\infty = \kappa$.

Suponga ahora que $g \in \Sigma(\kappa)$ es arbitrario. Defina $f : L(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha), & \text{si } \alpha \in \kappa, \\ 0, & \text{si } \alpha = \kappa. \end{cases}$$

Claramente, $f(\kappa) = 0$ y $f \upharpoonright \kappa = g$. Entonces, para probar que $g \in j^*(I)$, y terminar la prueba de la afirmación, sólo hace falta probar que f es continua. Pero f es continua en cada $\alpha \in \kappa$ puesto que, para toda $\alpha \in \kappa$, $\{\alpha\}$ es una vecindad de α en $L(\kappa)$. Para verificar que f es continua en κ , suponga que U es un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in U$. El conjunto $V = f^{-1}\{0\} = \{\alpha \in L(\kappa) : f(\alpha) = 0\}$ cumple que $f[V] \subseteq U$. Además, debido a que $f \upharpoonright \kappa = g \in \Sigma(\kappa)$, tenemos que $|L(\kappa) \setminus V| \leq \omega$, así que V es una vecindad de κ en $L(\kappa)$. Por lo tanto, f es continua en κ . $\square$

Resulta que la función $j^* \upharpoonright I : I \rightarrow \Sigma(\kappa)$ es un homeomorfismo. En efecto, es claro que $j^* \upharpoonright I$ es una función continua. Por la afirmación anterior, $j^* \upharpoonright I$ es suprayectiva. $j^* \upharpoonright I$ es inyectiva porque si $f, g \in I$ son dos funciones distintas, existe $\alpha \in L(\kappa)$ de modo que $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Como $f(\kappa) = 0 = g(\kappa)$, entonces $\alpha \in \kappa$. Luego, $f \upharpoonright \kappa \neq g \upharpoonright \kappa$.

Finalmente, veamos que $j^* \upharpoonright I$ es una función abierta. Supongamos que $U \subseteq I$ es un abierto cualquiera. Sea $g \in j^*[U]$ cualquier elemento. Fije $f \in U$ tal que $f \upharpoonright \kappa = g$ y una vecindad canónica $[f; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon]$ de f en $C_p(L(\kappa))$ tal que $V = [f; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon] \cap I \subseteq U$.

Como $f \in I = \{h \in C_p(L(\kappa)) : h(\kappa) = 0\}$, tenemos que $[f; \kappa; \varepsilon] \cap I = I$. Entonces,

$$[f; \kappa, \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon] \cap I = [f; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon] \cap ([f; \kappa; \varepsilon] \cap I) = [f; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon] \cap I.$$

Esto muestra que podemos suponer que $\kappa \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

A su vez, esto último implica que $j^*[V] = [g; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \varepsilon] \cap \Sigma(\kappa) \subseteq j^*[U]$. En consecuencia, $j^*[U]$ es abierto en $\Sigma(\kappa)$. Por lo que $j^* \upharpoonright I$ es un homeomorfismo.

Para finalizar, dése cuenta que, como $I \cong \Sigma(\kappa)$, $I \times \mathbb{R} \cong \Sigma(\kappa) \times \mathbb{R}$. Luego, por 5.2 y 5.3, $C_p(L(\kappa)) \cong I \times \mathbb{R} \cong \Sigma(\kappa) \times \mathbb{R} \cong \Sigma(\kappa)$. $\square$

La siguiente caracterización no trivial de los compactos de Corson usa las Lindelöfificaciones unipuntuales $L(\kappa)$.

COROLARIO 5.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio compacto Hausdorff X :*

- (1) X es un compacto de Corson.
- (2) X es homeomorfo a un subespacio compacto de $C_p(L(\kappa))$ para algún cardinal no numerable κ .

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Rightarrow$ (2)] Si X es un compacto de Corson, entonces existe un cardinal infinito κ y un subespacio Y de $\Sigma(\kappa)$ tal que $X \cong Y$. Defina $\lambda = \max\{\kappa, \omega_1\}$ y $\varphi : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}^\lambda$ por medio de la regla:

$$\varphi(x)(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha), & \text{si } \alpha \in \kappa, \\ 0, & \text{si } \alpha \in \lambda \setminus \kappa, \end{cases}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^\kappa$.

La función φ es una inmersión. Además, es fácil probar que $\varphi[\Sigma(\kappa)] \subseteq \Sigma(\lambda)$. Por lo tanto, Y se puede encajar en $\Sigma(\lambda)$, y en consecuencia también lo hace X . Como λ es un cardinal no numerable, por el lema 5.4, $\Sigma(\lambda)$ es homeomorfo a $C_p(L(\lambda))$. De todo lo anterior podemos concluir que X es homeomorfo a algún subespacio compacto de $C_p(L(\lambda))$.

(2) $\Leftarrow$ (1)] Si X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(L(\kappa))$ para algún cardinal no numerable κ , entonces, por ser κ no numerable, $C_p(L(\kappa)) \cong \Sigma(\kappa)$. Por lo tanto, X es homeomorfo a un subespacio compacto de $\Sigma(\kappa)$, lo cual implica que X es un compacto de Corson. $\square$

Una propiedad muy conocida de los compactos de Corson es que son espacios monolíticos.

DEFINICIÓN 5.6. *Sea λ un cardinal infinito.*

- (1) *Diremos que un espacio X es λ -monolítico si $nw(\bar{Y}) \leq \lambda$ para todo subespacio $Y \subseteq X$ con $|Y| \leq \lambda$.*
- (2) *Diremos que X es monolítico si y sólo si X es λ -monolítico para todo cardinal infinito λ .*

Arhangel'skiĭ demostró que un espacio de Tychonoff X es λ -estable si y sólo si $C_p(X)$ es λ -monolítico (vea [1]). Como el peso de red es una función cardinal monótona, todo subespacio de un espacio λ -monolítico también es λ -monolítico. Este comentario, el resultado anterior de Arhangel'skiĭ, el lema 5.4 y los corolarios 3.15 y 5.5, demuestran lo siguiente.

COROLARIO 5.7. (1) *Para todo cardinal no numerable κ , $\Sigma(\kappa)$ es un espacio monolítico.*

- (2) *Todo compacto de Corson es un espacio monolítico.*

La demostración de la siguiente caracterización queda fuera de los alcances de esta nota. El lector puede hallar una prueba en [7]. La razón de enunciarla es que ella involucra a los espacios Lindelöf primario que, como ya sabemos, tienen una estrecha relación con las Lindelöfificaciones unipuntuales $L(\kappa)$ de cardinales no numerables.

PROPOSICIÓN 5.8. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio compacto Hausdorff X :*

- (1) *X es un compacto de Corson.*
- (2) *$C_p(X)$ es Lindelöf primario.*

Otra propiedad muy famosa de los compactos de Corson es que sus espacios de funciones son espacios Lindelöf; esta propiedad la obtenemos como un corolario de 5.8 y 4.14. De hecho, como la propiedad Lindelöf primario se preserva por potencias numerables tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 5.9 (Gul'ko). *Si X es un compacto de Corson, entonces $C_p(X)^\omega$ y $C_p(X)^n$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, tienen la propiedad de Lindelöf.*

Agradecimientos: El autor desea agradecer, por su excelente trabajo, a la persona que revisó y dictaminó el presente capítulo; sus valiosas ideas y comentarios fueron de gran beneficio para la versión final del mismo.

Bibliografía

- [1] Arhangel'skiĭ, A. V., *Topological Function Spaces*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [2] Arhangel'skiĭ, A. V., *Remainders of metrizable spaces and a generalization of Lindelöf Σ -spaces*, Fund. Math., **215** (2011), 87–100.
- [3] Casarrubias-Segura, F., Paniagua-Ramírez, C. G., *On Charming spaces and some related subclasses*. Topology proceedings. **47** (2016). 101-114.
- [4] Engelking R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [5] Tkachuk, V. V., *Lindelöf Σ -spaces: an omnipresent class*, RACSAM, **104** (2) (2010), 221–224. DOI:10.5052/RACSAM.2020.15.
- [6] Tkachuk, V. V., *A C_p -Theory Problem Book. Topological and Function Spaces*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2011.
- [7] Tkachuk, V. V., *A C_p -Theory Problem Book. Compactness in Function Spaces*, Problem books in mathematics, Springer-Verlag New York, 2015.

Correo electrónico:

`fcasarrubiass@ciencias.unam.mx` (Fidel Casarrubias Segura).

CAPÍTULO 4

Asignaciones de vecindad y $[\theta, \kappa]$ -compacidad

Iván Martínez Ruiz, *FCFM-BUAP*

Oleg Okunev, *FCFM-BUAP*, Alejandro Ramírez Páramo, *FCE-BUAP*

1. Introducción y Preliminares	97
2. Sobre asignaciones de vecindad y $[\theta, \kappa]$ -compacidad	98
3. Clases definidas por asignaciones de vecindad	100
4. $[\theta, \kappa]$ -compacidad	103
Bibliografía	110

1. Introducción y Preliminares

Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$, las clases dual y dual débil para $\mathcal{P}$, denotadas por $[\mathcal{P}]^*$ y $[\mathcal{P}]'$, respectivamente se definen como sigue:

- (1) $X \in [\mathcal{P}]^*$, si para cualquier asignación de vecindades φ para X , existe Y subespacio de X tal que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}$ y $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$.
- (2) $X \in [\mathcal{P}]'$, si para cualquier asignación de vecindades φ para X , existe Y subespacio de X tal que Y satisface la propiedad $\mathcal{P}$ y $X = cl_X(\bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\})$.

Las nociones de *clases dual* y *dual débil*, fueron introducidas, respectivamente, en [5] por van Mill, Tkachuk y Wilson, y en [1], por Alas, Tkachuk, Wilson, en la primera década de los años 2000. Sus ideas están inspiradas en la forma en la que van Douwen y Pfeffer definen, a través de asignación de vecindades, a los D -espacios (vea [6]): Un espacio topológico X es D -espacio si para cualquier asignación de vecindades, φ (las notaciones y definiciones serán dadas en la sección de preliminares), existe $Y \subseteq X$ tal que Y es cerrado y discreto y $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$. Actualmente existen algunos trabajos en los que se analizan las clases dual y dual débil para diversas propiedades topológicas, por ejemplo los textos de Xuan y Song [10] y [11].

En el presente trabajo, entre otros, exponemos algunos resultados referentes a las clases dual y dual débil para la propiedad $[\theta, \kappa]$ -compacidad. Fuera de lo usual, en la segunda sección damos la definición de asignación de vecindades y, buscando caracterizar con esta noción a la clase de los espacios $[\theta, \kappa]$ -compactos, exponemos algunos resultados obtenidos en esta dirección. Además, introducimos las nociones de espacio débilmente $[\theta, \kappa]$ -compacto y casi $[\theta, \kappa]$ -compacto (vea Definición 2.7). En la tercera sección generalizamos a las nociones de clase dual y clase dual débil, por medio de un operador al que llamamos operador cerradura (Definición 3.1). De este modo, en la Definición 3.2, presentamos una definición genérica de clases de espacios topológicos, a

través del empleo de asignaciones de vecindades y el operador cerradura. La cuarta y última sección del trabajo está dedicada a establecer algunas relaciones sobre las clases que se obtienen de la Definición 3.2, aplicada a la propiedad de $[\theta, \kappa]$ -compacidad y usando como operador cerradura, a la clausura topológica usual.

Las nociones sobre teoría de conjuntos y topología son como en las referencias [4] y [2], respectivamente. Para mayor comodidad del lector, a continuación presentamos algunas notaciones y recordamos las nociones que utilizaremos con mayor frecuencia.

Dados un conjunto E y un cardinal κ , denotamos por $\mathcal{P}(E)$ al conjunto potencia de E ; *i.e.* al conjunto de todos los subconjuntos de E .

Denotamos por:

- (1) $[E]^{\leq \kappa}$, a la colección de subconjuntos de E con cardinalidad menor o igual a κ .
- (2) $[E]^{< \kappa}$, a la colección de subconjuntos de E con cardinalidad menor a κ .
- (3) $[E]^\kappa$, a la colección de subconjuntos de E con cardinalidad igual a κ .

En adelante, entendemos por espacio a un espacio topológico. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$, $A \subseteq X$ y $U \subseteq X$.

- (1) U es una vecindad de x si $x \in U \in \tau$.
- (2) Empleamos $cl_X(A)$ o $\bar{A}$ para denotar a la clausura (topológica usual) de A en X .
- (3) La θ -clausura de A , denotada por $cl_\theta(A)$, es el conjunto de los $x \in X$, tales que para toda vecindad, U , de x , se tiene que $cl_X(U) \cap A \neq \emptyset$.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ familias de subconjuntos del espacio topológico (X, τ) , diremos que

- (1) $\mathcal{U}$ es cubierta abierta para X , si $\bigcup \mathcal{U} = X$ y $\mathcal{U} \subseteq \tau$.
- (2) $\mathcal{V}$ es subcubierta de $\mathcal{U}$, si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V} = X$.

DEFINICIÓN 1.1. *Un espacio topológico, X , es:*

- (1) *Compacto, si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.*
- (2) *H -cerrado, si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{< \omega}$ tal que $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = X$.*
- (3) *Lindelöf, si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*
- (4) *Casi Lindelöf, si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $\bigcup \{cl_X(V) : V \in \mathcal{V}\} = X$.*
- (5) *Débilmente Lindelöf, si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = X$.*

En lo sucesivo denotaremos $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{HC}$ y $\mathcal{WL}$ a las propiedades compacto, Lindelöf, H -cerrado y débilmente Lindelöf, respectivamente.

Diremos que una propiedad $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica si para cualquier espacio topológico, X , que satisface $\mathcal{P}$, se verifica que todo espacio homeomorfo a él cumple $\mathcal{P}$.

Cualquier propiedad topológica, $\mathcal{P}$, determina la clase de todos los espacios con la propiedad $\mathcal{P}$, la cual denotamos $[\mathcal{P}]$.

2. Sobre asignaciones de vecindad y $[\theta, \kappa]$ -compacidad

DEFINICIÓN 2.1. ([6]) *Una asignación de vecindades para el espacio topológico (X, τ) es una función $\varphi : X \rightarrow \tau$, tal que para cada $x \in X$, $x \in \varphi(x)$.*

Notemos que toda cubierta abierta de un espacio topológico dado X induce una asignación de vecindades. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, para algún cardinal κ . Ahora si $x \in X$, entonces el conjunto $\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ no es vacío, ya que $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de X . Pongamos $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$. Puesto que α_x es el elemento mínimo del conjunto $\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$, tenemos que α_x es único. De aquí, si definimos, para cada $x \in X$, $\varphi(x) = U_{\alpha_x}$, entonces φ es una asignación de vecindades.

Para ilustrar el empleo de las asignaciones de vecindades, en el siguiente resultado, daremos una caracterización para una clase de espacios vía asignaciones de vecindades. Antes recordamos una noción que, además, será parte central en la sección siguiente.

DEFINICIÓN 2.2. ([8]) Sean $\theta \leq \kappa$ cardinales infinitos. Un espacio topológico X es llamado:

- (1) $[\theta, \kappa]$ -compacto, si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ tiene una subcubierta de cardinalidad $< \theta$.
- (2) inicialmente κ -compacto, si X es $[\omega, \kappa]$ -compacto.
- (3) finalmente θ -compacto, si X es $[\theta, \kappa]$ -compacto, para cualquier cardinal κ .

El lector interesado en la temática de los espacios $[\theta, \kappa]$ -compactos, puede consultar cualquiera de las referencias [8], [7].

TEOREMA 2.3. Sean X un espacio topológico y θ un cardinal infinito. Los enunciados siguientes son equivalentes:

- (1) X es finalmente θ -compacto.
- (2) Para cualquier asignación de vecindades, φ , para X existe $Y \in [X]^{<\theta}$ tal que $X = \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$.

DEMOSTRACIÓN: [(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que X es finalmente θ -compacto y sea φ una asignación de vecindades de X . Dado que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X , existe $\mathcal{V} = \{\varphi(x_\alpha) : \alpha \in \lambda\} \subseteq \mathcal{U}$, con $\lambda < \theta$ tal que $X = \bigcup \mathcal{V}$. Ahora, tomamos $Y = \{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Claramente $Y \in [X]^{<\theta}$ y $X = \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$.

[(2) $\Leftarrow$ (1)] Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . Sea φ una asignación de vecindades para X inducida por $\mathcal{U}$.

Dado que φ es una asignación de vecindades para X , tenemos por hipótesis que existe $Y \in [X]^{<\theta}$ de tal manera que $\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\} = X$. Finalmente, dado que $\{\varphi(y) : y \in Y\} \subseteq \mathcal{U}$ y $|\{\varphi(y) : y \in Y\}| \leq |Y| < \theta$, concluimos que X es finalmente θ -compacto. $\square$

A continuación presentamos algunas consecuencias del teorema anterior.

COROLARIO 2.4. X es compacto si y solo si para cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \in [X]^{<\omega}$, tal que $X = \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$.

DEMOSTRACIÓN: Basta con observar que un espacio es compacto si y solo si es finalmente θ -compacto, con $\theta = \omega$. $\square$

COROLARIO 2.5. X es Lindelöf si y solo si para cualquier asignación de vecindades φ , existe $Y \in [X]^{\leq \omega}$, tal que $X = \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del hecho de que un espacio topológico, X , es Lindelöf si y solo si X es finalmente θ -compacto, con $\theta = \omega_1$. $\square$

Hasta el momento los autores no conocemos una respuesta a la siguiente.

PREGUNTA 2.6. ¿Es posible caracterizar la $[\theta, \kappa]$ -compacidad, para cualesquiera cardinales $\theta \leq \kappa$, empleando asignaciones de vecindades?

El Teorema 2.3 y sus corolarios pueden extenderse a clases de espacios que satisfacen la siguiente.

DEFINICIÓN 2.7. Un espacio topológico X es llamado

- (1) Débilmente $[\theta, \kappa]$ -compacto (casi $[\theta, \kappa]$ -compacto), si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\theta}$ tal que $cl_X(\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}) = X$ (resp. $\bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}\} = X$).
- (2) Débilmente inicialmente κ -compacto (casi inicialmente κ -compacto) si X es débilmente $[\omega, \kappa]$ -compacto (casi $[\omega, \kappa]$ -compacto), si para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\theta}$ tal que $cl_X(\bigcup\{U : U \in \mathcal{V}\}) = X$ (resp. $\bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}\} = X$).
- (3) Débilmente finalmente θ -compacto (casi finalmente θ -compacto), si para todo cardinal κ , X es débilmente $[\theta, \kappa]$ -compacto (respectivamente, casi $[\theta, \kappa]$ -compacto).

Dejamos al lector la tarea de demostrar el teorema siguiente y sus corolarios.

TEOREMA 2.8. Sean X un espacio topológico y θ un cardinal infinito. Los enunciados siguientes son equivalentes:

- (1) X es débilmente finalmente θ -compacto (casi finalmente θ -compacto).
- (2) Para cualquier asignación de vecindades, φ , para X , existe $Y \in [X]^{<\theta}$ tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$ (resp. $X = \bigcup\{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\}$).

COROLARIO 2.9. Sea X un espacio topológico.

- (1) X es H -cerrado si y solo si para cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \in [X]^{<\omega}$, tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$.
- (2) X es casi Lindelöf si y solo si para cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \in [X]^{\leq \omega}$, tal que $X = \bigcup\{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\}$.
- (3) X es débilmente Lindelöf si y solo si para cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \in [X]^{\leq \omega}$, tal que $X = cl_X(\bigcup\{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\})$.

3. Clases definidas por asignaciones de vecindad

DEFINICIÓN 3.1. Diremos que $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es un operador cerradura si satisface las condiciones siguientes:

- (1) Para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \subseteq c(A)$.
- (2) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(X)$, si $A \subseteq B$, entonces $c(A) \subseteq c(B)$.

Entre otros, $c = Id$ (el operador identidad), $c = \overline{(\cdot)}$ (operador clausura topológica) o $c = cl_\theta$ (operador θ -clausura), son operadores cerradura.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.

- (1) La clase c -dual de $\mathcal{P}$, respecto de asignación de vecindades, denotada $[\mathcal{P}]^c$, consiste de aquellos espacios X que tienen la propiedad de que dada cualquier asignación de vecindades, φ , para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = c(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$ y $Y \in [\mathcal{P}]$.
- (2) La clase cc -dual de $\mathcal{P}$, respecto de asignación de vecindades, denotada $[\mathcal{P}]^{cc}$, consiste de aquellos espacios X que tienen la propiedad de que dada cualquier asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\{c(\varphi(y)) : y \in Y\}$ y $Y \in [\mathcal{P}]$.

Con los siguientes ejemplos resaltaremos el carácter genérico de la definición previa.

EJEMPLO 3.3. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.

- (1) Para $c = Id$. En este caso, tenemos que $X \in [\mathcal{P}]^c$ si dada cualquier asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. Esta clase de espacios se introdujo en [5], bajo la notación $[\mathcal{P}]^*$ y fue nombrada como clase dual de $\mathcal{P}$.
- (2) Para $c = \overline{(\cdot)}$, obtenemos que $X \in [\mathcal{P}]^c$ si dada cualquier asignación de vecindades, φ , para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. Esta clase de espacios se introdujo en [1], bajo el nombre de clase dual- $\mathcal{P}$ débil de $\mathcal{P}$ y fue denotada como $[\mathcal{P}]'$.
- (3) Consideremos $\mathcal{P} = Lindel\ddot{o}f$ y $c = \overline{(\cdot)}$. $X \in [\mathcal{L}]^c$ si dada cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$ y $Y \in [\mathcal{P}]$. Ahora, $X \in [\mathcal{L}]^{cc}$ si dada cualquier asignación de vecindades, φ , existe $Y \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\}$ y $Y \in [\mathcal{L}]$.

A continuación presentamos una lista de preguntas, genéricas, que dan lugar a diversos estudios para cada propiedad $\mathcal{P}$.

PREGUNTA 3.4. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica.

- (1) ¿Quién es la clase c -dual de $\mathcal{P}$, $[\mathcal{P}]^c$?
- (2) ¿Qué relación guardan las clases $[\mathcal{P}]$, $[\mathcal{P}]^c$ y $[\mathcal{P}]^{cc}$?
- (3) ¿Bajo qué condiciones las clases $[\mathcal{P}]$, $[\mathcal{P}]^c$ y $[\mathcal{P}]^{cc}$ son iguales?
- (4) Estudiar las propiedades c -dual y cc -dual de manera relativa.

El resultado siguiente establece la relación inmediata que existe entre las clases $[\mathcal{P}]$, $[\mathcal{P}]^c$ y $[\mathcal{P}]^{cc}$. Supongamos que $[\mathcal{P}]$ y $[\mathcal{Q}]$ son clases de espacios, la expresión $[\mathcal{P}] \rightarrow [\mathcal{Q}]$, debemos entenderla como el hecho de que todo espacio que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, tiene la propiedad $\mathcal{Q}$.

LEMA 3.5. Para cualquier propiedad topológica $\mathcal{P}$:

$$[\mathcal{P}] \rightarrow [\mathcal{P}]^{cc} \rightarrow [\mathcal{P}]^c.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente se verifica que $[\mathcal{P}] \rightarrow [\mathcal{P}]^{cc}$.

Veamos que $[\mathcal{P}]^{cc} \rightarrow [\mathcal{P}]^c$. Sea φ una asignación de $X \in [\mathcal{P}]^{cc}$. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in [\mathcal{P}]$ y $X = \bigcup\{c(\varphi(y)) : y \in Y\}$. Puesto que para cada $x \in Y$, $\varphi(x) \subseteq \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\}$, entonces (para cada $x \in Y$) $c(\varphi(x)) \subseteq c(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$; luego, $X = \bigcup\{c(\varphi(y)) : y \in Y\} \subseteq c(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$. Así, $X \in [\mathcal{P}]^c$. $\square$

Tomando como operador cerradura, c , a la clausura topológica usual (y hasta que no digamos lo contrario); a continuación aplicaremos lo visto en la presente sección a la propiedad FIN . Un espacio X tiene la propiedad FIN , si X es finito.

Por el Lema 3.5, tenemos que:

$$[FIN] \rightarrow [FIN]^{cc} \rightarrow [FIN]^c.$$

Notemos que en este caso $[FIN]^{cc} = [FIN]^c$. En efecto, supongamos que $X \in [FIN]^c$ y sea φ una asignación de vecindades para X . Entonces existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\}) = \bigcup\{cl_X(\varphi(x)) : x \in F\}$. Así, $X \in [FIN]^{cc}$.

Dejamos al lector la labor de verificar que, bajo las condiciones dadas, la clase $[FIN]^c$ es justamente la clase de los espacios H -cerrados (vea Corolario 2.9); y que $[FIN]^*$ es la clase de los espacios compactos (vea Corolario 2.4); donde $[FIN]^*$ es la clase dual de la propiedad FIN (vea Ejemplo 3.3). Notemos, de paso, que cualquier espacio compacto e infinito no pertenece a la clase $[FIN]$; por ejemplo, $[0, 1]$, con la topología que hereda como subespacio de la recta real $\mathbb{R}$ satisface estar en la clase $[FIN]^*$ y no pertenece a la clase $[FIN]$.

No es difícil verificar que $[FIN]^* \rightarrow [FIN]^c$. El espacio siguiente muestra que no siempre ocurre que $[FIN]^c \rightarrow [FIN]^*$. Recordamos al lector que el operador c es el operador clausura topológica usual.

EJEMPLO 3.6. *Existe un espacio $X \in [FIN]^c$ tal que $X \notin [FIN]^*$.*

En efecto, sea $X = \{0\} \cup [1, \infty)$ topologizado de la siguiente manera. Las vecindades de los puntos de $[1, \infty)$ son las usuales de este conjunto visto como subespacio de $\mathbb{R}$. Las vecindades de 0 tiene la forma: $\{0\} \cup \bigcup\{(k, k+1) : k \geq m \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Para verificar que $X \in [FIN]^c$, sea φ una asignación de vecindades para X , entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\{0\} \cup \bigcup\{(k, k+1) : k \geq k_0 \text{ y } k \in \mathbb{N}\} \subseteq \varphi(0)$. Dado que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in [1, k_0]\}$ cubre al intervalo $[1, k_0] \subseteq [1, \infty)$, el cual es compacto con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$, existe $\mathcal{V} = \{\varphi(x_i) : x_i \in [1, k_0], i \in \{1, \dots, m\}\} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $[1, k_0] \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Sea $F = \{0, x_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$, entonces $F \in [X]^{<\omega}$.

Veamos que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\})$. Sea $y \in X$ arbitrario y sea V cualquier vecindad de y en X . Claro que si $y \in \varphi(x)$ para algún $x \in F$, entonces $y \in cl_X(\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\})$. Supongamos entonces que $y \in X \setminus (\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\})$. Puesto que $[1, k_0] \subseteq \bigcup \mathcal{V} = \bigcup\{\varphi(x_i) : i \in \{1, \dots, m\}\}$ y dado que $y \notin \varphi(0)$, tenemos que $y \in \mathbb{N}$ y $y > k_0$.

Finalmente, dado que $\emptyset \neq V \cap (y, y+1) \subseteq V \cap (\{0\} \cup \{(k, k+1) : k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq k_0\}) \subseteq V \cap \varphi(0) \subseteq V \cap \bigcup\{\varphi(x) : x \in F\}$. Por tanto $V \cap (\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\}) \neq \emptyset$; de aquí que $y \in cl_X(\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\})$. Con todo, $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(x) : x \in F\})$. De aquí que $X \in [FIN]^c$.

Ahora, vamos a verificar que X no está en la clase $[FIN]^*$. Notemos que $\mathbb{N}$ es un subconjunto cerrado y discreto. En efecto, para verificar que $\mathbb{N}$ es cerrado, mostraremos que $X \setminus \mathbb{N}$ es abierto. Claramente se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\{0\} \cup \bigcup\{(k, k+1) : k \geq m \text{ y } k \in \mathbb{N}\}) \subseteq X \setminus \mathbb{N}$. Tomemos $x \in X \setminus \mathbb{N}$, con $x \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (n, n+1)$, entonces si $r = (\min\{|x - n|, |x - (n+1)|\})/2$, tenemos que $x \in (x-r, x+r) \subseteq X \setminus \mathbb{N}$. Así, $X \setminus \mathbb{N}$ es abierto, y por ende, $\mathbb{N}$ es cerrado. Consideremos

ahora $n \in \mathbb{N}$, por demostrar que existe U vecindad de n tal que $U \cap \mathbb{N} = \{n\}$. Si $n = 1$, claro que $U = [1, 3/2)$ satisface lo deseado. Ahora si $n \geq 2$, entonces $U = (n - 1/2, n + 1/2)$ cumple que $U \cap \mathbb{N} = \{n\}$. En suma, $\mathbb{N}$ es cerrado y discreto. De aquí que X no es compacto.

A continuación veremos que $X \notin [FIN]^*$. Consideremos la asignación de vecindades φ para X , definida como sigue. $\varphi(1) = [1, 3/2)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$, $\varphi(n) = (n - 1/2, n + 1/2)$. Finalmente, para cada $x \in X \setminus \mathbb{N}$, $\varphi(x) = X \setminus \mathbb{N}$. Evidentemente φ es una asignación de vecindades para X .

Veamos ahora que si $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $X \setminus \bigcup \{\varphi(x) : x \in F\} \neq \emptyset$. En efecto, si $F \in [X]^{<\omega}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in F$, $x < m$; luego, dado que $\varphi(m)$ es el único elemento de la asignación que contiene a m , tenemos que $m \notin \bigcup \{\varphi(x) : x \in F\}$. Así, $X \notin [FIN]^*$.

En resumen, la relación para las clases que genera la propiedad FIN es:

$$[FIN] \rightarrow [FIN]^* \rightarrow [FIN]^{cc} = [FIN]^c.$$

DEFINICIÓN 3.7. Sea c un operador cerradura y X un espacio topológico. Diremos que $D \subseteq X$ es c -denso en X si $c(D) = X$.

Observemos que si c es el operador clausura topológica usual, entonces un conjunto D del espacio X es c -denso si y solo si D es denso en X .

LEMA 3.8. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica. Si X tiene un subconjunto c -denso con la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $X \in [\mathcal{P}]^c$.

DEMOSTRACIÓN: Sean D un subconjunto c -denso en X tal que $D \in [\mathcal{P}]$ y sea φ una asignación de vecindades para X . Dado que φ es una asignación de vecindades, tenemos que para cada $x \in X$, $x \in \varphi(x)$; luego, $D \subseteq \bigcup \{\varphi(d) : d \in D\}$. Ahora, como c es operador cerradura, tenemos que $X = c(D) \subseteq c(\bigcup \{\varphi(d) : d \in D\})$ y por hipótesis $D \in [\mathcal{P}]$. Así, $X \in [\mathcal{P}]^c$. $\square$

Para cerrar esta sección debemos comentar que al emplear el operador θ -clausura en lugar del operador clausura topológica usual, no se generan clases de espacios topológicos diferentes a las que se obtienen con el operador clausura topológica. Esto se debe al hecho de que si U es un conjunto abierto del espacio X , entonces $cl_\theta(U) = cl_X(U)$. Una tarea interesante, que por ahora no hemos hecho, es trabajar con las clases vistas hasta el momento, empleando al operador cerradura c definido como sigue: Dado X un espacio topológico y $A \subseteq X$, definimos $c(A) = cl_\theta(cl_X(A))$.

4. $[\theta, \kappa]$ -compacidad

En la presente sección, denotamos por $\mathcal{C}_\theta^\kappa$ a la propiedad $[\theta, \kappa]$ -compacidad y con $\mathcal{C}_\theta$ denotamos a la clase de los espacios finalmente θ -compactos. Además, en lo sucesivo, solo emplearemos al operador clausura topológica como operador cerradura. A continuación centraremos nuestra atención en analizar algunas relaciones entre las clases siguientes:

- (1) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]$. $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ significa X es $[\theta, \kappa]$ -compacto.
- (2) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^*$. $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^*$ si para cualquier asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ y $\bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\} = X$.

- (3) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a$. $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a$ si para cualquier asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ y $\bigcup \{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\} = X$.
- (4) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$. $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$ si para cualquier asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ y $cl_X(\bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}) = X$.

Debido a que el operador cerradura, c , con el que trabajamos en esta sección es la clausura topológica, tenemos que para la propiedad $\mathcal{C}_\theta^\kappa$:

- (1) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a = [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^{cc}$, y
- (2) $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w = [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^c$

TEOREMA 4.1. Sean $\theta \leq \kappa$ cardinales infinitos, $[\mathcal{C}_\theta^\kappa] \rightarrow [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^* \rightarrow [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a \rightarrow [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$.

DEMOSTRACIÓN: Evidentemente si $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$, entonces $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^*$.

Para $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^* \rightarrow [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a$. Supongamos ahora que $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^*$. Por demostrar que $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a$. Si φ una asignación de vecindades para X , entonces existe Y subespacio de X tal que $Y \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ y $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$. Pero claramente, para cada $y \in Y$, $\varphi(y) \subseteq cl_X(\varphi(y))$; de aquí que $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\} \subseteq \bigcup \{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\}$. Por lo tanto, $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a$.

Para $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^a \rightarrow [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$. Se sigue del Lema 3.5 y la observación previa a este teorema. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia del Lema 3.8, junto con el hecho de que estamos considerando al operador clausura topológica usual como operador cerradura (Definición 3.1) y, en este caso, un conjunto c -denso en un espacio X es simplemente un conjunto denso.

TEOREMA 4.2. Si X tiene un subespacio denso D el cual es $[\theta, \kappa]$ -compacto, entonces $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$.

Debido a que θ y κ son cardinales arbitrarios, del Teorema 4.1, se desprenden diversas interrogantes que involucran, por supuesto, a los inicialmente κ -compactos y a los finalmente θ -compactos. Por ejemplo:

PREGUNTA 4.3. ¿Será que en el Teorema 4.1 las flechas son reversibles?

Volveremos con esta interrogante más adelante.

Una cuestión natural, de la que no habíamos hablado antes es: ¿Existe alguna relación entre las clases definidas en la Definición 2.7 y las clases dadas al inicio de esta sección? En el teorema siguiente veremos que la clase de los espacios débilmente $[\theta, \kappa]$ -compactos y la clase $[\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$ coinciden bajo un par de condiciones adicionales que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN 4.4. ([9]) Un espacio X es desarrollable si existe una sucesión de cubiertas abiertas para X , $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de tal manera que para cada $x \in X$, la sucesión $\{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para x en X . Donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $St(x, \mathcal{U}_n) = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_n : x \in U\}$

Recordemos que un espacio topológico, X , es Baire, si la intersección numerable de subconjuntos densos y abiertos en X es un conjunto denso en X (vea [2]).

TEOREMA 4.5. *Si X es un espacio Baire y desarrollable tal que $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$, entonces X tiene un subespacio denso Y tal que $Y \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis existe una sucesión, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$, la sucesión $\{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para x en X .

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una asignación, ϕ^n como sigue:

$\phi^n(x) = St(x, \mathcal{U}_n)$, para cada $x \in X$. Dado que $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]^w$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe Y_n subconjunto de X , tal que $Y_n \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$ y $cl_X(\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}) = X$.

Sea $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente Y satisface la propiedad $\mathcal{C}_\theta^\kappa$. La prueba estará completa una vez que demostremos la siguiente.

Afirmación: Y es denso en X .

Para ver esto, sea $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}$. Como X es un espacio de Baire y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}$ es un conjunto denso y abierto en X , tenemos que D es denso en X .

Ahora, sean $x \in X$ y W_x una vecindad de x en X . Como D es denso, existe $d \in D \cap W_x$. Luego, del hecho de que X es desarrollable, existe $n_d \in \mathbb{N}$, de tal manera que $d \in St(d, \mathcal{U}_{n_d}) \subseteq W_x$. Puesto que $D \subseteq \{\phi^{n_d}(y) : y \in Y_{n_d}\}$, existe $y_d \in Y_{n_d}$ de tal manera que $d \in \phi^{n_d}(y_d) = St(y_d, \mathcal{U}_{n_d})$; lo cual implica que $y_d \in St(d, \mathcal{U}_{n_d}) \subseteq W_x$. Por tanto $y_d \in W_x \cap Y$. Así Y es denso en X . La prueba está completa. $\square$

PROPOSICIÓN 4.6. *Si X es un espacio débilmente finalmente θ -compacto, entonces $X \in [\mathcal{C}_\theta]^w$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea φ una asignación de vecindades para X . Dado que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X , existe $Y \in [X]^{<\theta}$ tal que $X = cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y\})$. Puesto que $|Y| < \theta$, tenemos que $Y \in [\mathcal{C}_\theta]$. Con todo tenemos que $X \in [\mathcal{C}_\theta]^w$. $\square$

COROLARIO 4.7. *Sea X un espacio Baire y desarrollable. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

- (1) X es débilmente finalmente θ -compacto.
- (2) $X \in [\mathcal{C}_\theta]^w$.

DEMOSTRACIÓN: $[(1) \Rightarrow (2)]$. Se sigue de la proposición anterior.

$[(2) \Rightarrow (1)]$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . Tomemos una asignación de vecindades inducida por $\mathcal{U}$, digamos φ . Por el teorema anterior, existe $Y \subseteq X$ tal que Y es denso y $Y \in [\mathcal{C}_\theta]$. De aquí que existe $Y' \in [Y]^{<\theta}$ tal que $Y \subseteq \bigcup\{\varphi(y) : y \in Y'\}$. Luego, $X = cl_X(Y) \subseteq cl_X(\bigcup\{\varphi(y) : y \in Y'\})$. Finalmente, dado que $\{\varphi(y) : y \in Y'\} \in [\mathcal{U}]^{<\theta}$, concluimos que X es débilmente finalmente θ -compacto. $\square$

LEMA 4.8. *Si X no es $[\theta, \kappa]$ -compacto, entonces existen un cardinal $\theta \leq \lambda \leq \kappa$ y una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$, de X , tal que:*

- (1) Para todo $\alpha < \lambda$, $U_\alpha \neq X$.
- (2) Para todo $\alpha, \beta \in \lambda$, $\alpha < \beta$, implica que $U_\alpha \subseteq U_\beta$.

DEMOSTRACIÓN: Denotemos $\mathcal{O}$ a la colección de cubiertas abiertas de X . Como X no es $[\theta, \kappa]$ -compacto, existe $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{O}$, con $|\mathcal{W}_0| \leq \kappa$ de tal forma que para todo $W' \in [\mathcal{W}_0]^{<\theta}$, $\mathcal{W}' \notin \mathcal{O}$. Entonces el conjunto

$$A = \{|\mathcal{W}| : \mathcal{W} \in [\mathcal{O}]^{\leq \kappa}, \text{ tal que para todo } \mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\theta}, \mathcal{W}' \notin \mathcal{O}\}$$

no es vacío, así que podemos considerar a $\lambda = \min(A)$. Sea $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$ tal que para todo $\mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\theta}$, $\mathcal{W}' \notin \mathcal{O}$ y $|\mathcal{W}| = \lambda$. Evidentemente $\theta \leq |\mathcal{W}|$ (si por el contrario $|\mathcal{W}| < \theta$, entonces $\mathcal{W} \in [\mathcal{W}]^{<\theta}$ y $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$, lo cual es absurdo).

Notemos que:

- (1) Para cada $W \in \mathcal{W}$, se tiene que $W \neq X$. Si para algún $W \in \mathcal{W}$, $W = X$, entonces $\mathcal{W}' = \{W\}$ es una subcolección de $\mathcal{W}$ con cardinalidad $< \theta$ la cual satisface que $\bigcup \mathcal{W}' = X$, lo cual no puede ocurrir.
- (2) Para todo $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$, con $|\mathcal{W}'| < \lambda$, ocurre que $\bigcup \mathcal{W}' \neq X$. En efecto, si para algún $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$, con $|\mathcal{W}'| < \lambda$ ocurre que $\bigcup \mathcal{W}' = X$, entonces dado que cualquier, $\mathcal{V}$, subconjunto de $\mathcal{W}'$ es un subconjunto de $\mathcal{W}$, tenemos que para todo, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}'$, con $|\mathcal{V}| < \theta$ ocurre que $X \neq \bigcup \mathcal{V}$, lo cual implica que $|\mathcal{W}'| \in A$ y por tanto, $\lambda \leq |\mathcal{W}'|$, lo cual es absurdo.

Como $|\mathcal{W}| = \lambda$, podemos escribir $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Ahora definimos, recursivamente, $U_0 = W_0$ y, para cada $\alpha \in \lambda$, $U_\alpha = \bigcup \{W_\beta : \beta < \alpha\}$ y consideramos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , con $|\mathcal{U}| = \lambda$. Además, por 2., tenemos que para todo $\alpha < \lambda$, $U_\alpha \neq X$; aún más, por cómo se han definido a los elementos de $\mathcal{U}$, tenemos que si $\alpha, \beta \in \lambda$, con $\alpha < \beta$, entonces $U_\alpha \subseteq U_\beta$. La prueba está completa. $\square$

TEOREMA 4.9. Si θ es regular, $[\mathcal{C}_\theta^{\theta^+}]^* = [\mathcal{C}_\theta^{\theta^+}]$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in [\mathcal{C}_\theta^{\theta^+}]^*$. Por demostrar que $X \in [\mathcal{C}_\theta^{\theta^+}]$.

Si X no es $[\theta, \theta^+]$ -compacto, entonces (por el lema anterior) existen un cardinal infinito $\theta \leq \lambda \leq \theta^+$ y una cubierta abierta, $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$, de X tal que:

- (i) Para todo $\alpha < \lambda$, $U_\alpha \neq X$.
- (ii) Si $\alpha, \beta \in \lambda$, con $\alpha < \beta$, entonces $U_\alpha \subseteq U_\beta$.

Ahora bien, como $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ es cubierta abierta de X , podemos definir, para cada $x \in X$, $\varphi(x) = U_{\alpha_x}$, donde $\alpha_x = \min\{\alpha \in \lambda : x \in U_\alpha\}$. Claro que φ es una asignación de vecindades para X .

Puesto que $X \in [[\theta, \theta^+]\text{-compacto}]^*$, existe Y subespacio de X tal que $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$ y Y es $[\theta, \theta^+]$ -compacto. Claramente $\{\varphi(y) : y \in Y\}$ cubre a Y y $|\{\varphi(y) : y \in Y\}| \leq \theta^+$; así que debe existir $Y_0 \in [Y]^{<\theta}$ tal que $Y \subseteq \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y_0\}$.

Denotemos $\beta_0 = \sup\{\alpha_y : y \in Y_0\}$.

Tenemos dos casos:

- (1) $\lambda = \theta$: En este caso, cada $\alpha \in \lambda$ es un elemento de θ ; de modo que para cada $y \in Y$, $\alpha_y \in \theta$; de aquí que, por la regularidad de θ , $\beta_0 < \theta$.
- (2) $\lambda = \theta^+$: Cada $\alpha \in \lambda$ es un elemento de θ^+ ; de modo que para cada $y \in Y$, $\alpha_y \in \theta^+$. Así, por la regularidad de θ^+ , $\beta_0 < \theta^+$.

Recordemos que con β_0 tenemos asociado a $U_{\beta_0} \in \mathcal{U}$.

Entonces, (por (ii)), tenemos que $\varphi(y) \subseteq U_{\beta_0}$, para cada $y \in Y_0$. De donde, $Y \subseteq \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y_0\} \subseteq U_{\beta_0}$. Así que $Y \subseteq U_{\beta_0}$. Entonces, para cada $y \in Y$, tenemos que $y \in U_{\beta_0}$; de este hecho junto con (ii) y la definición de φ , tenemos que (para cada $y \in Y$) $\varphi(y) \subseteq U_{\beta_0}$ y por lo tanto $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\} \subseteq U_{\beta_0}$. Lo que contradice (i). Por tanto $X \in [\mathcal{C}_\theta^\kappa]$. $\square$

Recordemos que la extensión de un espacio topológico X , denotada $e(X)$, se define como $\sup\{|A| : A \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\} + \omega$.

TEOREMA 4.10. *Sea θ un cardinal infinito. Si $X \in [\mathcal{P}]$, para $\mathcal{P} \in \{[\mathcal{C}_\theta], [\mathcal{C}_{\theta^+}]\}$, entonces $e(X) \leq \theta$.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es un subconjunto cerrado y discreto de X , entonces para cada $a \in A$, existe U_a vecindad de a en X , tal que $A \cap U_a = \{a\}$. Claramente la colección $\mathcal{U} = \{X \setminus A\} \cup \{U_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de X ; luego, dado que $X \in [\mathcal{P}]$, tenemos que existe $B \subseteq A$, con $|B| < \theta$, en caso de que $\mathcal{P} = \mathcal{C}_\theta$, o bien $|B| < \theta^+$ (lo cual implica que $|B| \leq \theta$), en caso de que $\mathcal{P} = \mathcal{C}_{\theta^+}$ tal que $X = (X \setminus A) \cup \bigcup \{U_b : b \in B\}$. Notemos que de cualquiera de los dos casos, podemos concluir que $|B| \leq \theta$.

Ahora bien, dado que $A \subseteq \bigcup \{U_b : b \in B\}$, tenemos que $A = B$. De donde $|A| \leq \theta$.

De lo previo concluimos que θ es cota superior del conjunto

$$\{|A| : A \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\}$$

y dado que θ es infinito, concluimos que $e(X) \leq \theta$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.11. *Si $X \in [\mathcal{C}_\theta]^*$, entonces $e(X) \leq \theta$; para θ un cardinal infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $e(X) > \theta$, entonces $e(X) \geq \theta^+$ y dado que $e(X)$ es un supremo, existe $Y \subseteq X$ cerrado y discreto en X con $|Y| = \gamma \geq \theta^+$, digamos $Y = \{y_\alpha : \alpha \in \gamma\}$. Puesto que Y es cerrado y discreto, para cada $y \in Y$, existe una vecindad V_y , de y en X , tal que $V_y \cap Y = \{y\}$. Consideremos la asignación siguiente: Para cada $y \in Y$, $\varphi(y) = V_y$ y para cada $x \in X \setminus Y$, $\varphi(x) = X \setminus Y$. Por hipótesis existe $L \in [\mathcal{C}_\theta]$ tal que $X = \bigcup \{\varphi(l) : l \in L\}$. Dado que $L \cap Y$ es cerrado y discreto en L y $L \in [\mathcal{C}_\theta]$, tenemos que $|L \cap Y| \leq \theta < \gamma$, así que existe $\alpha_0 \in \gamma$ tal que $y_{\alpha_0} \notin L \cap Y$. Luego, dado que $\varphi(y_{\alpha_0})$ es el único elemento de la signación que contiene a y_{α_0} , tenemos que $y_{\alpha_0} \notin \bigcup \{\varphi(l) : l \in L\}$. Lo cual es una contradicción. La prueba está completa. $\square$

Regresando al Problema 4.3. De manera general; es decir, para cualquier cardinal θ , por el momento los autores no tenemos comentarios o resultados. Pero a continuación veremos qué pasa en los casos en que $\theta = \omega$ y $\theta = \omega_1$.

Para $\theta = \omega$: Por un lado, del Corolario 2.4, tenemos que la clase $[\mathcal{C}_\omega]$ es justamente la clase de los espacios compactos. Por otro lado, en [5], van Mill, Tkachuk y Wilson demostraron que la clase $[\mathcal{C}_\omega]^*$ es la misma clase $[\mathcal{C}_\omega]$.

Ahora, debido a que la clausura topológica distribuye sobre uniones finitas, tenemos que las clases $[\mathcal{C}_\omega]^a$ y $[\mathcal{C}_\omega]^w$ coinciden.

Finalmente, el espacio X del Ejemplo 3.6, pertenece a la clase $[\mathcal{C}_\omega]^a$ y no es compacto, de modo que $X \notin [\mathcal{C}_\omega]^*$.

En resumen:

$$[\mathcal{C}_\omega] = [\mathcal{C}_\omega]^* \rightarrow [\mathcal{C}_\omega]^a = [\mathcal{C}_\omega]^w.$$

Para $\theta = \omega_1$. El siguiente resultado es debido a Alas, Tkachuk y Wilson.

TEOREMA 4.12. ([1]) *Existe un espacio Tychonoff dualmente σ -compacto X el cual es pseudocompacto, pero no compacto.*

Es un hecho conocido que todo espacio pseudocompacto y Lindelöf es compacto; luego, el espacio X del teorema anterior no es Lindelöf; es decir, $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]$. Ahora, dado que todo σ -compacto es Lindelöf, lo que tenemos es que $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$. Esto es, $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$ y $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]$.

En el ejemplo siguiente tenemos a un espacio $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$, el cual no pertenece a la clase $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$. En los dos ejemplos siguientes, $\langle x, y \rangle$, denota al par ordenado de elementos x, y .

EJEMPLO 4.13. *Existe un espacio Urysohn $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$ tal que $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$. Sea $X = [(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)] \setminus \{(\omega_1, n) : n \in \omega\}$ y topologizamos a X como sigue:*

- (1) *Todo punto de $\omega_1 \times \omega$ es aislado.*
- (2) *Las vecindades de puntos de la forma $\langle \alpha, \omega \rangle \in \omega_1 \times \{\omega\}$, son del tipo, para $n \in \omega$, $U_n(\langle \alpha, \omega \rangle) = \{\langle \alpha, m \rangle : n \leq m \leq \omega\}$.*
- (3) *Las vecindades del punto $\langle \omega_1, \omega \rangle$ tienen la forma, para $\alpha \in \omega_1$:*

$$U_\alpha(\langle \omega_1, \omega \rangle) = \{\langle \omega_1, \omega \rangle\} \cup \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta < \omega_1 \text{ y } n < \omega\}.$$

Dejamos al lector la tarea de verificar que X es un espacio Urysohn. Nótese, además, que el conjunto $\{\langle \alpha, \omega \rangle : \alpha \in \omega_1\}$ es cerrado y discreto en X .

Sea φ una asignación de vecindades para X . Por demostrar que $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$. Puesto que $\langle \omega_1, \omega \rangle \in \varphi(\langle \omega_1, \omega \rangle)$, existe $\lambda \in \omega_1$ tal que $U_\lambda \subseteq \varphi(\langle \omega_1, \omega \rangle)$. Puesto que $\lambda \times (\omega + 1) \subseteq X$ es un conjunto numerable, entonces $Y = \lambda \times (\omega + 1) \cup \{\langle \omega_1, \omega \rangle\}$ es un conjunto numerable y por lo tanto $Y \in [\mathcal{C}_\theta]$. Además, debido a que los puntos de la forma $\langle \alpha, \omega \rangle$, con $\alpha \geq \lambda$ pertenecen a $cl_X(U(\langle \omega_1, \omega \rangle))$, concluimos que $X = cl_X(\varphi(\langle \omega_1, \omega \rangle)) \cup \bigcup \{cl_X(\varphi(y)) : y \in \lambda \times (\omega + 1)\}$. Así, $X \in [\mathcal{C}_\theta]^a$.

Para verificar que $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$, consideremos la asignación siguiente:

- (1) $\varphi(\langle \alpha, n \rangle) = \{\langle \alpha, n \rangle\}$, y
- (2) $\varphi(\langle \alpha, \omega \rangle) = U_0(\langle \alpha, \omega \rangle)$
- (3) $\varphi(\langle \omega_1, \omega \rangle) = U_\omega(\langle \omega_1, \omega \rangle)$.

Ahora bien, si $Y \subseteq X$ es tal que $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$, entonces $Y \cap \{\langle \alpha, \omega \rangle : \alpha \in \omega_1\}$ es un subconjunto cerrado y discreto en Y ; luego, por el Corolario ??, obtenemos que $Y \cap \{\langle \alpha, \omega \rangle : \alpha \in \omega_1\}$ es numerable. De donde, existe $\alpha_0 \in \omega_1$ tal que $\langle \alpha_0, \omega \rangle \notin Y$. Puesto que $\varphi(\langle \alpha_0, \omega \rangle)$ es el único elemento que contiene a $\langle \alpha_0, \omega \rangle$, tenemos que $\langle \alpha_0, \omega \rangle \in X \setminus \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$. Así, $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^*$.

Hemos visto que las clases $[\mathcal{C}_\omega]^a$ y $[\mathcal{C}_\omega]^w$, coinciden. El ejemplo siguiente muestra que este hecho no se verifica en las clases $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$ y $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.

EJEMPLO 4.14. *Existe un espacio Tychonoff $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$ tal que $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$.*

En efecto, denotemos $\omega_1^* = \omega_1 + 1$ a la Lindelöfización de ω_1 con la topología discreta (esto es, todo punto de ω_1 es aislado y U es vecindad de ω_1 si $\omega_1^* \setminus U$ es numerable).

Tomamos, además, $\omega + 1$ con su topología usual del orden. El espacio X que estamos buscando es el subespacio $[\omega_1^* \times (\omega + 1)] \setminus \{\langle \omega_1, \omega \rangle\}$ de $\omega_1^* \times (\omega + 1)$.

Veamos que $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$. Sea φ una asignación de vecindades para X . Dado que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es cubierta abierta de X , $\omega_1^* \times \omega \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y $\omega_1^* \times \omega$ es Lindelöf, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$, digamos $\mathcal{V} = \{\varphi(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $\omega_1^* \times \omega \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Finalmente, dado que $\omega_1^* \times \omega$ es denso en X , tenemos que $X = cl_X(\bigcup \{\varphi(y_n) : n \in \omega\})$. Como $Y = \{y_n : n \in \omega\} \in \mathcal{C}_{\omega_1}$, por ser numerable, concluimos que $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.

Resta probar que $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$. Consideremos, para cada $\langle \alpha, \beta \rangle \in X$:

- (1) Si $\alpha \in \omega_1$ y $\beta \in \omega + 1$, entonces $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) = \{\alpha\} \times (\omega + 1)$;
- (2) Si $\alpha = \omega_1$ y $\beta \in \omega$, $\varphi(\langle \omega_1^*, n \rangle) = \omega_1^* \times \{\beta\}$.

Claro que φ es una asignación de vecindades para X .

Afirmación: Si $Y \subseteq X$ es tal que $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$, entonces $X \setminus \bigcup \{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\} \neq \emptyset$. En efecto, si $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$, entonces $Y \cap (\omega_1 \times \{\omega\})$ debe ser numerable, así que existe $\alpha_0 \in \omega_1$ tal que $\langle \alpha_0, \omega \rangle \notin Y \cap (\omega_1 \times \{\omega\})$. Veamos que para cualquier $y \in Y$, $\langle \alpha_0, \omega \rangle \notin cl_X(\varphi(y))$. Sea $y \in Y$, tenemos dos casos:

- (1) $y = \langle \alpha, \omega \rangle$, entonces $\varphi(y) = \{\alpha\} \times (\omega + 1)$, pero claramente $(\{\alpha\} \times (\omega + 1)) \cap (\{\alpha_0\} \times (\omega + 1)) = \emptyset$.
- (2) $y = \langle \omega_1, n \rangle$, entonces $\varphi(y) = \omega_1^* \times \{n\}$; sin embargo, es claro que $U = \{\alpha_0\} \times (n + 1, \omega]$ es una vecindad de $\langle \alpha_0, \omega \rangle$ tal que $U \cap \varphi(y) = \emptyset$.

Con todo, concluimos que $\langle \alpha_0, \omega \rangle \notin cl_X(\varphi(y))$. Así, $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$ y $X \notin [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$.

Con lo visto hasta aquí, tenemos el diagrama siguiente, y podemos decir que las flechas, en general, no son reversibles.

$$[\mathcal{C}_{\omega_1}] \rightarrow [\mathcal{C}_{\omega_1}]^* \rightarrow [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a \rightarrow [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w.$$

TEOREMA 4.15. Sea X un espacio topológico.

- (1) Si X tiene un subespacio denso y Lindelöf, entonces $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.
- (2) Si X es débilmente Lindelöf, entonces $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.
- (3) Si X es casi Lindelöf, entonces $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$.

DEMOSTRACIÓN: Para 1. Por hipótesis existe $Y \subseteq X$ tal que $cl_X(Y) = X$ y Y es Lindelöf; luego, $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$. Ahora, si φ es una asignación de vecindades para X , entonces $Y \subseteq \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$; luego, dado que Y es denso, tenemos que $X = cl_X(Y) \subseteq cl_X(\bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\})$. Así, $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.

Para 2. Sea φ una asignación de vecindades para X . Puesto que $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es cubierta abierta de X y éste es débilmente Lindelöf, existe $Y \in [X]^{<\omega}$ tal que $X = cl_X(\bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\})$. Como Y es numerable, tenemos que $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$; luego, $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.

3. Sea φ una asignación de vecindades para X , entonces $\mathcal{U} = \{\varphi(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X ; luego, dado que X es casi Lindelöf, existe $Y \in [X]^{<\omega}$ tal que $X = \bigcup \{cl_X(\varphi(y)) : y \in Y\}$. Dado que Y es numerable, tenemos que $Y \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]$. Con todo, concluimos que $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$. $\square$

Dado que todo conjunto numerable pertenece a la clase $[\mathcal{C}_{\omega_1}]$ y dado que todo espacio que satisface la CCC es un espacio débilmente Lindelöf, de las condiciones 1. y 2. tenemos el siguiente.

COROLARIO 4.16. Si X es un espacio separable o CCC, entonces $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$.

De los ejemplos 4.13 y 4.14, nacen un par de interrogantes:

- (1) ¿Coinciden la clase de los espacios débilmente Lindelöf y $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$?
- (2) ¿La clase de los espacios casi Lindelöf coincide con la clase $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$?

Las respuesta a este par de interrogantes es (en ambos casos) negativa. En el Corolario 2.10 de [3], los autores proporcionan un espacio dualmente σ -compacto (recordemos que X es dualmente σ -compacto, si para toda asignación de vecindades φ para X , existe $Y \subseteq X$ tal que Y es σ -compacto y $X = \bigcup \{\varphi(y) : y \in Y\}$) que no es débilmente Lindelöf. Puesto que todo espacio dualmente σ -compacto pertenece a la clase $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$ y por ende a la clase $[\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$, concluimos que si X es el espacio del Corolario 2.10 de [3], entonces $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^a$ (y por tanto $X \in [\mathcal{C}_{\omega_1}]^w$) y X no es débilmente Lindelöf y por tanto, también X no es casi Lindelöf.

Bibliografía

- [1] O. T. Alas, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Covering properties and neighbourhood assignments*, Top. Proc. 30, 1 (2006) 25–38.
- [2] R. Engelking, *General topology*, Polish Sci. Public; Warsaw, 1977.
- [3] R. Z. Buzyakova, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson *A question for nice kernels of neighbourhoods assignments*, Comm. Math. Univ. Car. 48 (2007) 689–697.
- [4] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, Inc., Second Edition 1978.
- [5] J. van Mill, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Classes defined by stars and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 154 (2007) 2127–2134.
- [6] E. K. van Douwen, W. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81 (1979) 371–377.
- [7] R. D. Ramírez Hernández, *Espacios inicialmente κ -compactos*, Tesis de Maestría, FCFM-BUAP.
- [8] R. M. Stephenson, *Initially κ -compact and related spaces*, Handbook of set theoretic topology. Edited by K. Kunen and J. E. Vaughan, Elsevier Science Publishers B. V. (1984) 603–632.
- [9] C. W. Vickery, *Developments and metrization*, Annals of Mathematics, 36 (1935), 854–871.
- [10] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Weak duals and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 255 (2019) 141–147.
- [11] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Dually properties and cardinal inequalities*, Topol. Appl. 234 (2018) 1–6.

CAPÍTULO 5

Un primer acercamiento al Problema de Efimov

Alexis Chávez Cortés

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México

Alejandro Ríos Herrejón

Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

1. Introducción	111
2. Preliminares	112
3. Sistemas inversos	118
4. Sistemas inversos simples y sistemas inversos coiniciales	123
5. Ultrafiltros	129
6. Sucesiones dobles y coinicialidad	133
7. Un espacio de Efimov bajo el Principio Diamante	140
Bibliografía	147

1. Introducción

A finales de la década de 1920, Alexandroff y Urysohn plantearon en [1] la siguiente pregunta: *¿existe un espacio compacto infinito que carezca de sucesiones convergentes no triviales?*¹

Más adelante, Tychonoff [17] en 1935 y Čech [5] en 1937 ofrecieron una respuesta afirmativa mediante construcciones distintas de un mismo objeto: la compactación de Stone–Čech de los números naturales, $\beta\omega$. No obstante, su estructura resultaba tan vasta y atípica que surgió inmediatamente una nueva cuestión: *¿es necesario recurrir a métodos tan elaborados para obtener un compacto infinito sin sucesiones convergentes no triviales?*

Fue precisamente en este contexto que Efimov [7], en 1969, formuló su célebre problema. Motivado por el estudio de cuándo las compactaciones de Stone–Čech de espacios discretos pueden encajarse en compactos específicos, propuso una dicotomía para los compactos infinitos. Por un lado, existen aquellos que admiten sucesiones convergentes no triviales; por otro, los que poseen un subespacio homeomorfo a $\beta\omega$. La cuestión que planteó Efimov fue si estos dos comportamientos agotan todas las posibilidades:

¹En el contexto del presente trabajo, supondremos que todo espacio compacto es, además, un espacio de Hausdorff. Sin embargo, conviene destacar que, en general, para decir que un espacio topológico es compacto no es necesario imponer restricción alguna sobre sus propiedades de separación.

Problema de Efimov: *¿Todo espacio compacto infinito contiene una sucesión convergente no trivial o una copia de $\beta\omega$?*

Un espacio compacto infinito que evita, simultáneamente, sucesiones convergentes no triviales y subespacios homeomorfos a $\beta\omega$ se denomina hoy un *espacio de Efimov*. La existencia de tales espacios dentro del sistema axiomático de ZFC se mantiene como un problema abierto. Bajo ciertos axiomas adicionales —como la Hipótesis del Continuo— es posible construir ejemplos, pero hasta la fecha de redacción de este texto no se conoce demostración alguna que funcione sin suposiciones extrínsecas.

El Problema de Efimov se sitúa en la frontera entre la topología general y la teoría de conjuntos, revelando que incluso objetos tan familiares como los espacios compactos pueden esconder estructuras sorprendentemente complejas. Su estudio constituye un desafío sobresaliente que continúa impulsando la investigación activa más de cincuenta años después de su formulación.

El objetivo de este texto es introducir al lector en este tema mediante una exposición sistemática de los rudimentos de la teoría de los sistemas inversos, con el fin de exponer de manera completa y detallada la construcción de un espacio de Efimov creado a partir del Principio Diamante, de acuerdo con el enfoque que Geschke presentó en [9].

2. Preliminares

El propósito de esta sección es introducir algunos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos y la topología general que resultan imprescindibles para el desarrollo del presente trabajo. Si bien es deseable que el lector cuente con nociones básicas en estas áreas, los términos de especial relevancia para nuestros fines se explican a continuación. Asimismo, conviene señalar que aquellos conceptos que no aparezcan definidos explícitamente en este apartado deben interpretarse conforme a lo expuesto en [13] y [4], respectivamente.

Para empezar, el símbolo ω denota, simultáneamente, el primer ordinal infinito y el primer cardinal infinito. Similarmente, el primer ordinal no numerable y el primer cardinal no numerable se representan, a la vez, con el símbolo ω_1 . Además, $\mathfrak{c}$ es el número cardinal de la recta real; en particular, $\mathfrak{c} = 2^\omega$.

Un número ordinal α es *sucesor* si existe un número ordinal β con $\beta + 1 = \alpha$. Por otro lado, α es *límite* si es positivo (i.e., $\alpha > 0$) y no es sucesor; es decir, para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $\beta + 1 < \alpha$.

Observemos que si α y β son números ordinales que satisfacen $\alpha < \beta$, entonces $\beta \setminus \alpha$ es el conjunto $\{\gamma < \beta : \alpha \leq \gamma\}$.

Si κ es un número ordinal infinito, la *cofinalidad* de κ , denotada por $\text{cf}(\kappa)$, es el menor ordinal γ para el cual existe una función $f : \gamma \rightarrow \kappa$ tal que, para todo $\beta < \kappa$, existe $\alpha < \gamma$ con $f(\alpha) > \beta$.

Sea X un conjunto. Los símbolos $P(X)$ y $|X|$ denotan, respectivamente, el *conjunto potencia* de X y la *cardinalidad* de X . También, la *identidad* en X es la función $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ determinada mediante $\text{Id}_X(x) := x$. Por otra parte, si κ es un número cardinal, entonces

$$[X]^\kappa := \{A \subseteq X : |A| = \kappa\} \quad \text{y} \quad [X]^{<\kappa} := \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}.$$

Si Y es un conjunto, $f : X \rightarrow Y$ es una función, A es un subconjunto de X y B es un subconjunto de Y , entonces

$$f[A] := \{y \in Y : \exists x \in A (f(x) = y)\} \text{ y } f^{-1}[B] := \{x \in X : \exists y \in B (f(x) = y)\}$$

son, respectivamente, la *imagen directa* de A bajo f y la *imagen inversa* de B bajo f . Además, si $y \in Y$, la *fibra* de y bajo f es el conjunto

$$f^{-1}\{y\} := f^{-1}[\{y\}] = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Finalmente, la *restricción* de f al conjunto A es la función

$$f|_A := \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Un conjunto no vacío X es un *espacio topológico* si existe una familia $\tau_X \subseteq P(X)$, denominada una *topología* en X , que verifica las siguientes propiedades:

- (1) $\emptyset \in \tau_X$ y $X \in \tau_X$,
- (2) $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_X$ siempre que $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, y
- (3) si $U, V \in \tau_X$, entonces $U \cap V \in \tau_X$.

Si κ es un número cardinal positivo, el *espacio discreto* de cardinalidad κ , denotado por $D(\kappa)$, es el conjunto κ equipado con la topología discreta; esto es, $\tau_{D(\kappa)} = P(\kappa)$.

Sea X un espacio topológico. El símbolo $\text{CL}(X)$ denota la familia de los subconjuntos cerrados de X , es decir, $\text{CL}(X) := \{X \setminus U : U \in \tau_X\}$. Por otra parte, $\text{CO}(X) := \text{CL}(X) \cap \tau_X$, es la colección de subconjuntos que son, simultáneamente, abiertos y cerrados en X .

Para cada $x \in X$, decimos que x es un *punto aislado* de X si $\{x\} \in \tau_X$. Adicionalmente, $\mathcal{V}(x)$ denota la colección $\{U \in \tau_X : x \in U\}$.

Una *base* para X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \tau_X$ tal que, para cualesquiera $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$. Por otra parte, si $x \in X$, una *base local* para x en X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}(x)$ con la propiedad de que, para todo $U \in \mathcal{V}(x)$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq U$.

El *peso* de X es el número cardinal

$$w(X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \omega.$$

Decimos que X es *segundo numerable* cuando $w(X) = \omega$.

Asimismo, si $x \in X$, el *carácter local* de X en x es el número cardinal

$$\chi(x, X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base local para } x \text{ en } X\}.$$

También, el *carácter* de X es el número cardinal

$$\chi(X) := \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Decimos que X es *primero numerable* cuando $\chi(X) = \omega$. Evidentemente, todo espacio segundo numerable es primero numerable.

El espacio X es *cero-dimensional* si admite una base contenida en $\text{CO}(X)$. Verbigracia, cualquier espacio discreto es cero-dimensional, ya que los conjuntos unipuntuales constituyen la base deseada.

Decimos que X es T_1 si $\{\{x\} : x \in X\} \subseteq \text{CL}(X)$. También, X es T_2 si, para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Asimismo, X es *regular* si, para cualesquiera $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$, existe $V \in \mathcal{V}(x)$ con

$\overline{V} \subseteq U$. Por otra parte, X es *completamente regular* si, para cualesquiera $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$, existe una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$. Así, X es T_3 si es regular y T_1 , y se denomina *espacio de Tychonoff* si es completamente regular y T_1 .

El espacio X es *compacto* si es T_2 y, para todo $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$ que satisface $X = \bigcup \mathcal{U}$, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ con $X = \bigcup \mathcal{V}$. Dicho de otra manera, X es compacto si tiene la propiedad de Hausdorff y toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

Sean κ un número ordinal positivo y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos. El *producto cartesiano* de $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es el conjunto

$$\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha := \left\{ x : \kappa \rightarrow \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \mid \forall \alpha < \kappa (x(\alpha) \in X_\alpha) \right\}.$$

También, para cada $\beta < \kappa$, la función $p_\beta : \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ dada por $p_\beta(x) := x(\beta)$, es la β -ésima *proyección canónica*.

El *producto topológico* de $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es el conjunto $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, equipado con la topología que tiene por base a la colección

$$\left\{ \bigcap_{\alpha \in F} p_\alpha^{-1}[U_\alpha] : F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \forall \alpha \in F (U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}) \right\}.$$

Adicionalmente, si X es un espacio topológico, el símbolo X^κ representa el espacio producto $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, en donde $X_\alpha := X$ para todo $\alpha < \kappa$. Asimismo, la potencia X^0 se entiende como el conjunto $\{\emptyset\}$ dotado de la topología discreta.

En la siguiente proposición recopilamos las propiedades relacionadas con los conceptos anteriores que necesitaremos para el desarrollo del texto. Dado que todas ellas forman parte de un curso básico de topología general, y que la demostración de cada una, sin excepción, puede encontrarse en [4], omitimos los detalles para no apartarnos del objetivo principal de este escrito.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean X un espacio topológico, κ un número ordinal positivo y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos. Los siguientes enunciados son ciertos.*

- (1) *Si Y es un subespacio de X y X es T_2 , primero numerable, segundo numerable o cero-dimensional, entonces Y también lo es.*
- (2) *Si κ es numerable y cada X_α es primero numerable o segundo numerable, entonces $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ también lo es.*
- (3) *Si cada X_α es T_2 , compacto o cero-dimensional, entonces $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ también lo es.*

Para los incisos siguientes, X será un espacio compacto.

- (4) *X es T_3 .*
- (5) *Si Y es un subespacio cerrado de X , entonces Y es compacto.*
- (6) *Si $\mathcal{F} \subseteq \text{CL}(X)$ es una familia centrada² y no vacía, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*
- (7) *(Lema de Šura–Bura) Si $\mathcal{F} \subseteq \text{CL}(X)$ es una familia no vacía, $U \in \tau_X$ y $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$, entonces existe $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq U$.*

COROLARIO 2.2. *Si α es un número ordinal numerable, entonces el espacio $D(2)^\alpha$ es compacto, cero-dimensional y segundo numerable.*

²Es decir, si $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Otro término común en la literatura para referirse a este concepto es *familia con la propiedad de la intersección finita*.

Asimismo, convendrá disponer de la siguiente terna de resultados, que combinan varias de las propiedades topológicas mencionadas hasta ahora y que se utilizarán más adelante en el texto:

LEMA 2.3. *Si X es un espacio T_1 y cero-dimensional, $A \in \text{CO}(X)$ y $x, y \in A$ son distintos, entonces existen $B, C \in \text{CO}(X)$ tales que $x \in B$, $y \in C$, $B \cup C = A$ y $B \cap C = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero, como X es T_1 , existe $U \in \mathcal{V}(x)$ con $y \notin U$. Luego, como X es cero-dimensional, existe $D \in \text{CO}(X)$ tal que $x \in D \subseteq U$. Así, los conjuntos $B := A \cap D$ y $C := A \setminus D$ son elementos de $\text{CO}(X)$ que satisfacen $x \in B$, $y \in C$, $B \cup C = A$ y $B \cap C = \emptyset$. $\square$

LEMA 2.4. *Sea X un espacio T_1 , primero numerable y cero-dimensional. Si z no es un punto aislado de X , entonces existen una familia decreciente $\{A_n : n < \omega\} \subseteq \text{CO}(X)$ y un conjunto $\{a_n : n < \omega\} \subseteq X$ con las siguientes características:*

- (1) $a_n \in A_n \setminus A_{n+1}$ para cada $n < \omega$, y
- (2) $\{A_n : n < \omega\}$ es una base local para z en X , $A_0 = X$ y $\bigcap_{n < \omega} A_n = \{z\}$.

DEMOSTRACIÓN: Para empezar, por la primero numerabilidad de X , existe una base local $\{B_k : k < \omega\}$ para z en X tal que $B_0 = X$. Observemos que, como X es T_1 , se cumple que $\bigcap_{k < \omega} B_k = \{z\}$. Sea $C_0 := X$. Luego, como X es cero-dimensional, para cada $k \in \omega \setminus 1$ existe un conjunto $C_k \in \text{CO}(X)$ con $z \in C_k \subseteq B_k \cap \bigcap_{l \in k \setminus 1} C_l$. En consecuencia, $\{C_k : k < \omega\}$ es una base local decreciente para z en X y $\bigcap_{k < \omega} C_k = \{z\}$.

Ahora notemos que, si $k < \omega$, no puede suceder que $C_m = C_k$ para todo $m \in \omega \setminus k$, ya que, de lo contrario, $\{z\} = \bigcap_{m < \omega} C_m = \bigcap_{m \in k+1} C_m$ implicaría que $\{z\} \in \tau_X$, lo cual es falso. Por lo tanto, existe una sucesión estrictamente creciente (k_n) en ω tal que $C_{k_0} = X$ y $C_{k_{n+1}} \subsetneq C_{k_n}$ para todo $n < \omega$. Finalmente, si $a_n \in C_{k_n} \setminus C_{k_{n+1}}$ y $A_n := C_{k_n}$ para todo $n < \omega$, entonces $\{A_n : n < \omega\}$ y $\{a_n : n < \omega\}$ tienen las propiedades deseadas. $\square$

OBSERVACIÓN 2.5. *Si X , z y $\{A_n : n < \omega\}$ son como en el lema 2.4, y (n_k) es una sucesión estrictamente creciente en ω , entonces $\{A_{n_k} : k < \omega\}$ es una base local para z en X .*

LEMA 2.6. *Sea X un espacio T_2 , primero numerable y cero-dimensional. Además, sean z un punto no aislado de X y $\{A_n : n < \omega\}$ como en el lema 2.4. Si (n_k) es una sucesión estrictamente creciente en ω y, para cada $k < \omega$, se tiene un conjunto $B_k \in \text{CL}(X)$ con $B_k \subseteq A_{n_k}$, entonces $\{z\} \cup \bigcup_{k < \omega} B_k$ es un subconjunto cerrado de X .*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in \overline{\bigcup_{k < \omega} B_k} \setminus \{z\}$, entonces existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(z)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Así, como $\{A_{n_k} : k < \omega\}$ es una base local para z en X (véase la observación 2.5), existe $l < \omega$ con $A_{n_l} \subseteq V$, lo cual implica que $A_{n_k} \subseteq V$ para todo $k \geq l$. Por lo tanto, $x \notin \overline{\bigcup_{k \geq l} B_k}$, ya que $U \in \mathcal{V}(x)$ y $U \cap \bigcup_{k \geq l} B_k = \emptyset$. En conclusión, $x \in \overline{\bigcup_{k < l} B_k} = \bigcup_{k < l} B_k \subseteq \{z\} \cup \bigcup_{k < \omega} B_k$. $\square$

Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $z \in X$. Decimos que z es un *punto de acumulación* de A (en símbolos, $z \in A'$) si para todo $V \in \mathcal{V}(z)$ se satisface

que $(V \setminus \{z\}) \cap A \neq \emptyset$. Los dos hechos siguientes, relacionados con este concepto, también pueden encontrarse en [4] y serán empleados más adelante:

PROPOSICIÓN 2.7. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Los siguientes enunciados son ciertos.*

- (1) *Si X es T_1 y $z \in X$, entonces $z \in A'$ si y sólo si $V \cap A$ es un conjunto infinito para cada $V \in \mathcal{V}(z)$.*
- (2) *Si X es compacto y A es infinito, entonces $A' \neq \emptyset$.*

Por otra parte, si (x_n) es una sucesión en un espacio topológico X , decimos que z es un *punto de acumulación* de (x_n) si $\{n < \omega : x_n \in V\}$ es un conjunto infinito para todo $V \in \mathcal{V}(z)$. La sucesión (x_n) es *inyectiva* si $x_m \neq x_n$ para cualesquiera $m < n < \omega$. Asimismo, (x_n) es *discreta* si es inyectiva y el conjunto $\{x_n : n < \omega\}$ es un subespacio discreto de X . El siguiente par de resultados explora la interacción entre los conceptos anteriores.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si X es primero numerable, (x_n) es una sucesión en X y z es un punto de acumulación de (x_n) , entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente a z en X .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{B_k : k < \omega\}$ una base local decreciente para z en X . Además, sea $n_0 < \omega$ tal que $x_{n_0} \in B_0$. Supongamos que, para algún $k < \omega$, hemos construido una sucesión estrictamente creciente $\{n_i : i \leq k\} \subseteq \omega$ tal que $x_{n_i} \in B_i$ para todo $i \leq k$. En virtud de que $\{n < \omega : x_n \in B_{k+1}\}$ es un conjunto infinito, existe $n_{k+1} > n_k$ con $x_{n_{k+1}} \in B_{k+1}$. Claramente, (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) que converge a z en X . $\square$

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean X un espacio topológico, (x_n) una sucesión en X y $z \in X$. Si X es T_1 y z es un punto de acumulación del conjunto $\{x_n : n < \omega\}$, entonces z es un punto de acumulación de la sucesión (x_n) .*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente notar que, si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces el hecho de que $V \cap \{x_n : n < \omega\}$ sea infinito (véase la proposición 2.7(1)) fuerza a que $\{n < \omega : x_n \in V\}$ también lo sea. $\square$

Sean X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X . La función al conjunto cociente $q : X \rightarrow X/\sim$ determinada mediante $q(x) := [x]_\sim$ se conoce como la *proyección natural*. El *espacio cociente inducido por $\sim$* es el conjunto cociente $X/\sim$ dotado de la topología $\tau_\sim := \{V \subseteq X/\sim : q^{-1}[V] \in \tau_X\}$.

Si A es un subconjunto de X , la relación $\sim_A$ dada por $x \sim_A y$ si y sólo si $x = y$ o $x, y \in A$ es una relación de equivalencia, y el espacio cociente correspondiente se denota por X/A . Para nuestros fines, será importante más adelante contar con el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.10. *Si X es T_3 y $A \in \text{CL}(X)$, entonces el espacio cociente X/A es T_2 .*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in X$ tales que $x \not\sim_A y$ (esto es, $q(x) \neq q(y)$); en particular, se tiene que $x \neq y$ y $\{x, y\} \not\subseteq A$. Supongamos sin perder generalidad que $x \notin A$.

Si $y \notin A$, entonces, como X es T_2 , existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ con $U \cap V = \emptyset$. Así, $q[U \setminus A] \in \mathcal{V}(q(x))$, $q[V \setminus A] \in \mathcal{V}(q(y))$ y $q[U \setminus A] \cap q[V \setminus A] = \emptyset$.

Por otra parte, si $y \in A$, entonces, dado que X es regular, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \tau_X$ con $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De esta manera, $q[U] \in \mathcal{V}(q(x))$, $q[V] \in \mathcal{V}(q(y))$ y $q[U] \cap q[V] = \emptyset$. En suma, X/A tiene la propiedad de Hausdorff. $\square$

Si X es un espacio de Tychonoff, el símbolo βX representa la *compactación de Stone-Čech* de X ; en especial, $\beta\kappa$ es la compactación de Stone-Čech del espacio discreto $D(\kappa)$. Una introducción a dicha compactación puede encontrarse en el décimo capítulo de [12]. Además, un estudio detallado y profundo se presenta en [18].

Decimos que los espacios topológicos X y Y son *homeomorfos* si existe una función biyectiva, abierta y continua de X sobre Y . Dicha función se llama un *homeomorfismo*.

Si X es un espacio topológico, decimos que X *contiene una copia de* $\beta\omega$ si existe un subespacio de X que es homeomorfo a $\beta\omega$. Similarmente, X *contiene una copia de* $\omega + 1$ si existe un subespacio de X que es homeomorfo a $\{0\} \cup \{2^{-n} : n < \omega\}$, visto como subespacio del espacio euclidiano $\mathbb{R}$. En este último caso, también se suele decir que X *contiene una sucesión convergente no trivial*.

A continuación, presentamos un par de resultados vinculados a las sucesiones convergentes no triviales:

PROPOSICIÓN 2.11. *Si un espacio topológico X contiene una sucesión convergente no trivial, entonces X admite una sucesión discreta y convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Efectivamente, si S es una sucesión convergente no trivial en X y $f : \{0\} \cup \{2^{-n} : n < \omega\} \rightarrow S$ es un homeomorfismo, entonces $(f(2^{-n}))$ es una sucesión discreta que converge a $f(0)$ en X . $\square$

PROPOSICIÓN 2.12. *Si X es un espacio de Hausdorff que no contiene sucesiones convergentes no triviales y (x_n) es una sucesión convergente en X , entonces (x_n) es semiconstante³, es decir, existe $m < \omega$ tal que $x_n = x_m$ para todo $n \in \omega \setminus m$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z \in X$ tal que (x_n) converge a z en X . Supongamos, en busca de una contradicción, que (x_n) no es semiconstante. Observemos primero que, como (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_i}) tal que $z \notin \{x_{n_i} : i < \omega\}$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $z \notin \{x_n : n < \omega\}$.

Nuestro siguiente objetivo es construir recursivamente una sucesión estrictamente creciente (n_i) en ω con $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ siempre que $i < j < \omega$. Para empezar, definimos $n_0 := 0$. Supongamos ahora que, para algún $i < \omega$, hemos construido la colección $\{n_j : j \leq i\}$ con las propiedades deseadas.

Si el conjunto $\{x_n : n \geq n_i + 1\}$ es finito, entonces existe $m \geq n_i + 1$ tal que $I := \{n \geq n_i + 1 : x_n = x_m\}$ es infinito. Luego, si $\sigma : \omega \rightarrow I$ es una función suprayectiva y estrictamente creciente, entonces $(x_{\sigma(k)})$ es una subsucesión de (x_n) . Más aún, $(x_{\sigma(k)})$ converge simultáneamente a x_m y a z en X , lo que implica que $x_m = z$ y contradice

³El término en inglés es *eventually constant*; por esta razón, hay personas que traducen este concepto como «eventualmente constante». No obstante, esta traducción es técnicamente incorrecta puesto que las palabras «eventually» en inglés y «eventualmente» en español tienen significados distintos.

que $z \notin \{x_n : n < \omega\}$. Así, el conjunto $\{x_n : n \geq n_i + 1\}$ es infinito y, por consiguiente, existe $n_{i+1} \geq n_i + 1$ con $x_{n_{i+1}} \notin \{x_{n_j} : j \leq i\}$. Esto completa la construcción recursiva.

Finalmente, como la función

$$f : \{z\} \cup \{x_{n_i} : i < \omega\} \rightarrow \{0\} \cup \{2^{-i} : i < \omega\}$$

descrita por $f(z) := 0$ y $f(x_{n_i}) := 2^{-i}$ es un homeomorfismo, se sigue que (x_{n_i}) es una sucesión convergente no trivial en X , lo cual es imposible. $\square$

Cerramos la sección con un concepto que, al ser el núcleo del presente artículo, conviene resaltarlo en un entorno adecuado:

DEFINICIÓN 2.13. *Un espacio topológico X es un espacio de Efimov si es infinito, compacto y no contiene una copia de $\beta\omega$ ni una copia de $\omega + 1$.*

3. Sistemas inversos

Sean κ un número ordinal límite, $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos y $\{\pi_{\beta,\alpha} : X_\beta \rightarrow X_\alpha \mid \alpha \leq \beta < \kappa\}$ una colección de funciones continuas. Decimos que $\{(X_\alpha, \pi_{\beta,\alpha}) : \alpha \leq \beta < \kappa\}$ es un *sistema inverso* si, para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \kappa$, se satisface que $\pi_{\gamma,\alpha} = \pi_{\beta,\alpha} \circ \pi_{\gamma,\beta}$ y $\pi_{\alpha,\alpha} = \text{Id}_{X_\alpha}$. En estas circunstancias, a los elementos de la colección $\{\pi_{\beta,\alpha} : \alpha \leq \beta < \kappa\}$ se les denomina *funciones de ligadura* o *funciones de enlace* (en inglés, *bonding maps*).

Para simplificar la notación y mejorar el flujo de la exposición, en lo que sigue entenderemos que la expresión “ Σ_κ es un sistema inverso” significa que κ es un número ordinal límite, y que Σ_κ coincide con un conjunto de la forma $\{(X_\alpha, \pi_{\beta,\alpha}) : \alpha \leq \beta < \kappa\}$, donde dicha familia constituye un sistema inverso.

Si Σ_κ es un sistema inverso, el *límite inverso* de Σ_κ es el subespacio X_κ del producto topológico $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ dado por

$$X_\kappa := \left\{ x \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha : \forall \alpha < \beta < \kappa \left(\pi_{\beta,\alpha}(x(\beta)) = x(\alpha) \right) \right\}.$$

Además, para cada $\alpha < \kappa$, definimos una función $\pi_{\kappa,\alpha} : X_\kappa \rightarrow X_\alpha$ mediante la regla $\pi_{\kappa,\alpha}(x) := x(\alpha)$, es decir, $\pi_{\kappa,\alpha}$ es la función p_α restringida al subespacio X_κ . Observemos que $\pi_{\beta,\alpha} \circ \pi_{\kappa,\beta} = \pi_{\kappa,\alpha}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta < \kappa$.

Los sistemas inversos desempeñan un papel fundamental en la construcción de espacios de Efimov, debido a sus propiedades estructurales. Con el propósito de familiarizar al lector con las técnicas básicas empleadas en el estudio de sistemas y límites inversos, presentamos a continuación cuatro resultados significativos en esta área.

El primero establece que la subbase canónica del espacio producto, al ser relativizada al límite inverso, determina una base para la topología de dicho espacio. Por otra parte, el segundo habla de los límites inversos generados a partir de familias decrecientes de espacios topológicos. A continuación, el tercero caracteriza la convergencia de sucesiones en el límite inverso a partir de la convergencia de cada una de sus proyecciones. Finalmente, el cuarto, uno de los resultados más relevantes en el estudio de sistemas inversos que involucran espacios compactos, muestra la influencia de esta característica topológica en las propiedades del límite inverso.

PROPOSICIÓN 3.1. Si Σ_κ es un sistema inverso, entonces

$$\left\{ \pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha] : \alpha < \kappa \wedge U_\alpha \in \tau_{X_\alpha} \right\}$$

es una base para X_κ .

DEMOSTRACIÓN: Sean $U \in \tau_{X_\kappa}$, $x \in U$, $F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y, para cada $\beta \in F$, $U_\beta \in \tau_{X_\beta}$ de tal modo que $x \in X_\kappa \cap \bigcap_{\beta \in F} p_\beta^{-1}[U_\beta] \subseteq U$. Si $\alpha := \max(F) + 1$ y

$$U_\alpha := \pi_{\kappa,\alpha}^{-1} \left[\bigcap_{\beta \in F} \pi_{\alpha,\beta}^{-1}[U_\beta] \right],$$

entonces $U_\alpha \in \tau_{X_\kappa}$, $x \in U_\alpha$ y $U_\alpha \subseteq U$. □

PROPOSICIÓN 3.2. Si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia decreciente de espacios topológicos (es decir, X_β es un subespacio de X_α , siempre que $\alpha \leq \beta < \kappa$) y, para cualesquiera $\alpha \leq \beta < \kappa$, $\pi_{\beta,\alpha} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ denota la función inclusión, entonces $\{(X_\alpha, \pi_{\beta,\alpha}) : \alpha \leq \beta < \kappa\}$ es un sistema inverso con la propiedad de que su límite inverso X_κ es homeomorfo a $\bigcap_{\alpha < \kappa} X_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $X := \bigcap_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Una observación crucial, que se desprende del hecho de que cada función de ligadura es una función inclusión, es que si $x \in \bigcap_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, entonces $x \in X_\kappa$ si y sólo si x es una función constante. Este antecedente permite definir una función $f : X_\kappa \rightarrow X$ mediante la regla $f(x) := x(0)$. Nuestro objetivo es demostrar que f es el homeomorfismo deseado.

Para empezar, si $x, y \in X_\kappa$ satisfacen $f(x) = f(y)$, entonces $x(0) = y(0)$, lo cual implica que $x = y$, pues ambas son funciones constantes. Por otra parte, si $p \in \bigcap_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ y establecemos $x := \kappa \times \{p\}$, entonces $x \in X_\kappa$ y $f(x) = p$. De esta manera, f es una función biyectiva.

Ahora, como para todo $U \in \tau_{X_0}$ se cumple que

$$f^{-1}[U \cap X] = \pi_{\kappa,0}^{-1}[U],$$

la función f es continua. Finalmente, para comprobar que f es abierta mediante la proposición [3.1](#), notemos que si $\alpha < \kappa$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$, entonces

$$f \left[\pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha] \right] = X \cap U_\alpha,$$

donde $X \cap U_\alpha$ es un elemento de τ_X . En síntesis, f es un homeomorfismo. □

En [\[4\]](#), Proposición 3.4.7, p. 87] se prueba que, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos, (x_n) es una sucesión en X , $z \in X$ y (x_n) converge a z en X , entonces $(f(x_n))$ converge a $f(z)$ en Y . Lo anterior será clave para demostrar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.3. Sean Σ_κ un sistema inverso, (x_n) una sucesión en X_κ y $z \in X_\kappa$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) (x_n) converge a z en X_κ .
- (2) $(x_n(\alpha))$ converge a $z(\alpha)$ en X_α para todo $\alpha < \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: La implicación de (1) a (2) se sigue de la continuidad de cada función $\pi_{\kappa,\alpha}$ y de lo comentado en el párrafo anterior. Para la implicación recíproca, observemos que si $U \in \mathcal{V}(z)$, $\alpha < \kappa$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ satisfacen $z \in \pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$ (véase la proposición 3.1), entonces, como $U_\alpha \in \mathcal{V}(z(\alpha))$, existe $m < \omega$ con $\{x_n(\alpha) : n \in \omega \setminus m\} \subseteq U_\alpha$, lo cual implica que $\{x_n : n \in \omega \setminus m\} \subseteq U$. Así, (x_n) converge a z en X_κ . $\square$

En la demostración de la proposición 3.4 se utilizarán, sin mención explícita, los incisos (1), (3), (5) y (6) de la proposición 2.1.

PROPOSICIÓN 3.4. *Los siguientes enunciados son ciertos para un sistema inverso Σ_κ formado por espacios de Hausdorff.*

(1) *El límite inverso X_κ es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. En particular, X_κ es T_2 .*

Más aún, cuando Σ_κ está constituido por espacios compactos, los siguientes enunciados también son válidos.

(2) *X_κ es un espacio compacto y no vacío.*

(3) *Si cada función de ligadura es suprayectiva, entonces $\pi_{\kappa,\alpha}$ es una función suprayectiva para todo $\alpha < \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $X := \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ y $J := \{(\beta, \alpha) \in \kappa \times \kappa : \alpha < \beta < \kappa\}$. También, para cada $(\beta, \alpha) \in J$, sea

$$X(\beta, \alpha) := \{x \in X : \pi_{\beta,\alpha}(x(\beta)) = x(\alpha)\}.$$

La prueba se dividirá en una terna de enunciados.

Afirmación 1. Para todo $(\beta, \alpha) \in J$, el conjunto $X(\beta, \alpha)$ es cerrado en X .

Si $(\beta, \alpha) \in J$ y $x \in X \setminus X(\beta, \alpha)$, entonces, como $\pi_{\beta,\alpha}(x(\beta)) \neq x(\alpha)$ y X_α es T_2 , existen $U, V \in \tau_{X_\alpha}$ con $\pi_{\beta,\alpha}(x(\beta)) \in U$, $x(\alpha) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, si

$$W := (\pi_{\beta,\alpha} \circ p_\beta)^{-1}[U] \cap p_\alpha^{-1}[V],$$

entonces $W \in \tau_X$, $x \in W$ y $W \subseteq X \setminus X(\beta, \alpha)$. En consecuencia, $X(\beta, \alpha) \in \text{CL}(X)$.

La Afirmación 1, junto con la igualdad $X_\kappa = \bigcap_{(\beta,\alpha) \in J} X(\beta, \alpha)$, garantiza que X_κ es un subconjunto cerrado de X . Además, X_κ es T_2 , pues X lo es.

En lo que sigue, supondremos que Σ_κ está formado por espacios compactos.

Afirmación 2. La familia $\{X(\beta, \alpha) : (\beta, \alpha) \in J\}$ es centrada.

Sean $n \in \omega \setminus 1$, $\{(\beta_k, \alpha_k) : k < n\} \subseteq J$, $\beta := \max\{\beta_k : k < n\} + 1$, $z \in X_\beta$,

$$e \in \prod_{\gamma \in \kappa \setminus \beta} X_\gamma \quad \text{y} \quad x := \left\{ (\alpha, \pi_{\beta,\alpha}(z)) : \alpha < \beta \right\} \cup e.$$

Claramente, x pertenece a X . Más aún, si $k < n$, entonces

$$\pi_{\beta_k, \alpha_k}(x(\beta_k)) = \pi_{\beta_k, \alpha_k}(\pi_{\beta, \beta_k}(z)) = \pi_{\beta, \alpha_k}(z) = x(\alpha_k).$$

Así, $x \in \bigcap_{k < n} X(\beta_k, \alpha_k)$.

De esta manera, como X es un espacio compacto y $X_\kappa = \bigcap_{(\beta,\alpha) \in J} X(\beta, \alpha)$, las Afirmaciones 1 y 2 constatan que X_κ es compacto y no vacío.

En cuanto al inciso (3), sean $\gamma < \kappa$ y $y \in X_\gamma$. Nuestro objetivo es demostrar que la fibra $\pi_{\kappa,\gamma}^{-1}\{y\}$ es no vacía. Notemos que, como

$$\pi_{\kappa,\gamma}^{-1}\{y\} = \bigcap_{(\beta,\alpha) \in J} \left(X(\beta,\alpha) \cap p_\gamma^{-1}\{y\} \right)$$

y la familia $\{X(\beta,\alpha) \cap p_\gamma^{-1}\{y\} : (\beta,\alpha) \in J\}$ está contenida en $\text{CL}(X)$, basta probar el siguiente enunciado mediante una ligera adaptación de la técnica empleada en la demostración de la Afirmación 2:

Afirmación 3. La colección $\{X(\beta,\alpha) \cap p_\gamma^{-1}\{y\} : (\beta,\alpha) \in J\}$ es centrada.

En efecto, sean $n \in \omega \setminus 1$, $\{(\beta_k, \alpha_k) : k < n\} \subseteq J$, $\beta := \max(\{\beta_k : k < n\} \cup \{\gamma\}) + 1$, $z \in \pi_{\beta,\gamma}^{-1}\{y\}$,

$$e \in \prod_{\delta \in \kappa \setminus \beta} X_\delta \quad y \quad x := \left\{ (\alpha, \pi_{\beta,\alpha}(z)) : \alpha < \beta \right\} \cup e.$$

Evidentemente, $x \in \bigcap_{k < n} (X(\beta_k, \alpha_k) \cap p_\gamma^{-1}\{y\})$. $\square$

En contraste con la proposición 3.4, si el sistema inverso está indexado por ω , es posible obtener un fortalecimiento de su tercer inciso. Para ello, es necesario contar primero con un lema auxiliar:

LEMA 3.5. *Los siguientes enunciados son equivalentes para todo sistema inverso Σ_ω y cada $x \in \prod_{n < \omega} X_n$.*

- (1) $\pi_{m,n}(x(m)) = x(n)$ para cualesquiera $n < m < \omega$ (es decir, $x \in X_\omega$).
- (2) $\pi_{n+1,n}(x(n+1)) = x(n)$ para todo $n < \omega$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente, (1) implica (2). Para ver que (2) implica (1), supongamos que, para algún $m < \omega$, hemos verificado que si $n < m$, entonces $\pi_{m,n}(x(m)) = x(n)$. Luego, para cada $n < m+1$ se cumple que

$$\pi_{m+1,n}(x(m+1)) = \pi_{m,n}(\pi_{m+1,m}(x(m+1))) = \pi_{m,n}(x(m)) = x(n).$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea Σ_ω un sistema inverso. Si cada función de ligadura es suprayectiva, entonces, para cada $n < \omega$, existe una función $f_n : X_n \rightarrow X_\omega$ tal que $\pi_{\omega,n} \circ f_n = \text{Id}_{X_n}$. En particular, $\pi_{\omega,n}$ es suprayectiva y f_n es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $n < \omega$ y $x \in X_n$. Para especificar $f_n(x)$, necesitamos determinar $f_n(x)(m)$ para cada $m < \omega$. Si $m \leq n$, establecemos $f_n(x)(m) := \pi_{n,m}(x)$. Cuando $m > n$, procedemos por recursión: primero, existe $f_n(x)(n+1) \in X_{n+1}$ tal que $\pi_{n+1,n}(f_n(x)(n+1)) = x$, porque $\pi_{n+1,n}$ es suprayectiva. Luego, si para algún $m > n$ hemos definido $f_n(x)(m)$, existe $f_n(x)(m+1) \in X_{m+1}$ tal que $\pi_{m+1,m}(f_n(x)(m+1)) = f_n(x)(m)$, pues $\pi_{m+1,m}$ es suprayectiva. Así, f_n está bien definida por el lema 3.5 y cumple que $\pi_{\omega,n} \circ f_n = \text{Id}_{X_n}$. $\square$

Además, será útil disponer del lema 3.7, que más adelante resultará crucial para demostrar el lema 6.8. Antes de presentar dicho resultado, recordemos que un subconjunto A de ω es *cofinito* si su complemento relativo a ω es finito, es decir, si $\omega \setminus A \in [\omega]^{<\omega}$.

LEMA 3.7. *Los siguientes enunciados son ciertos para un sistema inverso Σ_ω .*

- (1) Si $x, y \in X_\omega$, $m < \omega$ y $x(m) = y(m)$, entonces para todo $n < m$ se tiene que $x(n) = y(n)$.

Para el resto del enunciado, (x_n) y (y_n) serán sucesiones en X_ω , y (k_n) será una sucesión estrictamente creciente en ω tal que $x_n(k_n) = y_n(k_n)$ para todo $n < \omega$.

- (2) Para cada $m < \omega$, el conjunto $\{n \in \omega : x_n(m) = y_n(m)\}$ es cofinito.
 (3) Si $z \in X_\omega$ y para todo $V \in \mathcal{V}(z)$ se cumple que $\{n \in \omega : \{x_n, y_n\} \cap V \neq \emptyset\}$ es cofinito, entonces (x_n) y (y_n) convergen a z en X_ω .

DEMOSTRACIÓN: El enunciado del inciso (1) es verdadero puesto que $x(n) = \pi_{m,n}(x(m)) = \pi_{m,n}(y(m)) = y(n)$.

En cuanto al inciso (2), sean $m < \omega$ y $p < \omega$ con $k_p > m$. Si $n \geq p$, entonces $k_n \geq k_p > m$ y $x_n(k_n) = y_n(k_n)$ implican que $x_n(m) = y_n(m)$, según el inciso (1). En consecuencia, el conjunto $\omega \setminus p$ está contenido en $\{n \in \omega : x_n(m) = y_n(m)\}$ y, por ende, $\{n \in \omega : x_n(m) = y_n(m)\}$ es cofinito.

Para el inciso (3), en virtud de la proposición 3.3, basta comprobar que $(x_n(m))$ y $(y_n(m))$ convergen a $z(m)$ en X_m para todo $m < \omega$. Dicho esto, notemos que si $m < \omega$ y $V \in \mathcal{V}(z(m))$, entonces, por el inciso (2) y la hipótesis de (3), los conjuntos $\{n \in \omega : x_n(m) = y_n(m)\}$ y $\{n \in \omega : \{x_n, y_n\} \cap \pi_{\omega,m}^{-1}[V] \neq \emptyset\}$ son cofinitos. Así, existe $k < \omega$ de tal manera que $x_n(m) = y_n(m)$ y $\{x_n, y_n\} \cap \pi_{\omega,m}^{-1}[V] \neq \emptyset$, siempre que $n \geq k$. Por lo tanto, $\{x_n(m) : n \geq k\} \cup \{y_n(m) : n \geq k\} \subseteq V$. $\square$

Recordemos que una función entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es un *encaje topológico cerrado* si la correstricción $f : X \rightarrow f[X]$ es un homeomorfismo con la propiedad de que $f[X]$ es un subconjunto cerrado de Y . Para concluir esta sección, enunciamos y demostramos a continuación la proposición 3.8, que resulta fundamental para nuestros propósitos, ya que permitirá efectuar una sustitución necesaria para que la demostración del teorema 7.7 pueda desarrollarse sin contratiempos:

PROPOSICIÓN 3.8. Sea Σ_α un sistema inverso de tal manera que cada X_β es un subespacio cerrado de $D(2)^\beta$ y $\pi_{\gamma,\beta} : X_\gamma \rightarrow X_\beta$ es la función dada por $\pi_{\gamma,\beta}(x) = x|_\beta$, siempre que $\beta < \gamma < \alpha$. Los siguientes enunciados son ciertos.

- (1) $\{x(\beta) : \beta < \alpha\}$ es una familia creciente para todo $x \in X_\alpha$.
 (2) Si X_α es el límite inverso del sistema Σ_α , entonces la función $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow D(2)^\alpha$ descrita por $f_\alpha(x) := \bigcup_{\beta < \alpha} x(\beta)$ es un encaje topológico cerrado.
 (3) $x(\beta) = f_\alpha(x)|_\beta$ siempre que $x \in X_\alpha$ y $\beta < \alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Para el inciso (1), basta notar que si $x \in X_\alpha$ y $\beta < \gamma < \alpha$, entonces $x(\beta) = \pi_{\gamma,\beta}(x(\gamma)) = x(\gamma)|_\beta \subseteq x(\gamma)$. Por otra parte, la igualdad del inciso (3) se verifica una vez que f_α está correctamente definida, ya que, si $x \in X_\alpha$, $\beta < \alpha$ y $\gamma < \beta$, entonces $(f_\alpha(x)|_\beta)(\gamma) = f_\alpha(x)(\gamma) = (\bigcup_{\delta < \alpha} x(\delta))(\gamma) = x(\beta)(\gamma)$. A continuación, nos concentramos en probar el inciso (2).

Primero, f_α está bien definida de acuerdo con el inciso (1). Además, f_α es inyectiva, porque si $x, y \in X_\alpha$ satisfacen $x \neq y$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $x(\beta) \neq y(\beta)$. A su vez, esto proporciona $\gamma < \beta$ con $x(\beta)(\gamma) \neq y(\beta)(\gamma)$. Por lo tanto, $f_\alpha(x)(\gamma) \neq f_\alpha(y)(\gamma)$ y, en consecuencia, $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

De ahora en adelante, para cualesquiera $\beta < \gamma \leq \alpha$, $p_{\gamma,\beta} : D(2)^\gamma \rightarrow D(2)$ y $q_{\gamma,\beta} : D(2)^\gamma \rightarrow D(2)^\beta$ serán las funciones continuas determinadas mediante $p_{\gamma,\beta}(x) := x(\beta)$ y $q_{\gamma,\beta}(x) := x|_\beta$.

Para verificar la continuidad de f_α , observemos que si $\beta < \alpha$ y $x \in X_\alpha$, entonces

$$(p_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha)(x) = p_{\alpha,\beta}(f_\alpha(x)) = x(\beta+1)(\beta) = (p_{\beta+1,\beta} \circ \pi_{\alpha,\beta+1})(x).$$

Lo anterior muestra que la composición $p_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha$ coincide con la función continua $p_{\beta+1,\beta} \circ \pi_{\alpha,\beta+1}$. Así, f_α es continua, ya que su composición con cada proyección es continua.

Asimismo, la función f_α es abierta en su imagen, gracias a la proposición [3.1](#), por la siguiente razón: si $\beta < \alpha$, $U_\beta \in \tau_{X_\beta}$ y $V_\beta \in \tau_{D(2)^\beta}$ satisface $U_\beta = X_\beta \cap V_\beta$, entonces

$$f_\alpha \left[\pi_{\alpha,\beta}^{-1}[U_\beta] \right] = f_\alpha[X_\alpha] \cap q_{\alpha,\beta}^{-1}[V_\beta].$$

Finalmente, si $z \in D(2)^\alpha \setminus f_\alpha[X_\alpha]$, entonces no es cierto que $z|_\beta \in X_\beta$ para cada $\beta < \alpha$, pues $z = \bigcup_{\beta < \alpha} z|_\beta$. En efecto, si no sucediera lo anterior, la función $z^* : \alpha \rightarrow \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ dada por $z^*(\beta) := z|_\beta$ sería un elemento de X_α que satisface $f_\alpha(z^*) = z$, lo cual es imposible.

De este modo, si $\beta < \alpha$ cumple $z|_\beta \in D(2)^\beta \setminus X_\beta$, existe $F \in [\beta]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con

$$z|_\beta \in \bigcap_{\gamma \in F} p_{\beta,\gamma}^{-1}\{(z|_\beta)(\gamma)\} \subseteq D(2)^\beta \setminus X_\beta.$$

Por consiguiente,

$$z \in \bigcap_{\gamma \in F} p_{\alpha,\gamma}^{-1}\{z(\gamma)\} \subseteq D(2)^\alpha \setminus f_\alpha[X_\alpha].$$

En síntesis, f_α es un encaje topológico cerrado. □

4. Sistemas inversos simples y sistemas inversos coinciales

En el estudio de los sistemas inversos existe una clase particularmente relevante para la construcción de espacios de Efimov, pues, bajo ciertas condiciones, dichos sistemas tienen la propiedad de que el límite inverso correspondiente no contiene copias de $\beta\omega$ (véase el corolario [4.15](#) más adelante). Con este objetivo en mente, introducimos a continuación la clase de los sistemas inversos simples:

DEFINICIÓN 4.1. *Un sistema inverso Σ_κ es simple si se cumplen las siguientes condiciones para todo $\alpha < \kappa$:*

- (1) $\pi_{\beta,\alpha}$ es una función suprayectiva, siempre que $\alpha < \beta < \kappa$;
- (2) cuando α es un ordinal límite, se satisface que

$$X_\alpha = \left\{ x \in \prod_{\beta < \alpha} X_\beta : \forall \beta < \gamma < \alpha \left(\pi_{\gamma,\beta}(x(\gamma)) = x(\beta) \right) \right\};$$

es decir, X_α coincide con el límite inverso del sistema Σ_α , y

- (3) existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que:

$$(a) \left| X_{\alpha+1} \cap \pi_{\alpha+1,\alpha}^{-1}\{x_\alpha\} \right| = 2, \text{ y}$$

$$(b) \text{ para cualquier } x \in X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}, \text{ se tiene } \left| X_{\alpha+1} \cap \pi_{\alpha+1,\alpha}^{-1}\{x\} \right| = 1.$$

Una observación esencial es que, en el tercer inciso de la definición [4.1](#), se indica una distinción fundamental entre los sistemas inversos simples y los sistemas inversos tradicionales: en cada paso $\alpha < \kappa$ de la construcción, existe un único punto en X_α que es «duplicado» en el paso sucesor $X_{\alpha+1}$; en especial, para todo $\alpha < \kappa$ se verifica que $|X_{\alpha+1}| = |X_\alpha| + 1$.

Conviene también resaltar otra clase especial de sistemas inversos, que está relacionada con la clase de los sistemas inversos simples:

DEFINICIÓN 4.2. *Un sistema inverso Σ_κ es coinitial si, para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$, se satisface que $\pi_{\beta,\alpha}$ es suprayectiva pero no inyectiva.*

A continuación, se exponen algunos resultados para profundizar en los conceptos de sistema inverso simple y de sistema inverso coinitial.

PROPOSICIÓN 4.3. *Todo sistema inverso simple es un sistema inverso coinitial.*

DEMOSTRACIÓN: Si Σ_κ es un sistema inverso simple, entonces, por el inciso (1) de la definición [4.1](#), se cumple que $\pi_{\beta,\alpha}$ es una función suprayectiva para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$. Por otra parte, si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces existen $x_\alpha \in X_\alpha$ y puntos distintos $y, z \in X_{\alpha+1} \cap \pi_{\alpha+1,\alpha}^{-1}\{x_\alpha\}$. Además, dado que $\pi_{\beta,\alpha+1}$ es suprayectiva, existen $u, v \in X_\beta$ con $u \neq v$, $\pi_{\beta,\alpha+1}(u) = y$ y $\pi_{\beta,\alpha+1}(v) = z$. Así, $\pi_{\beta,\alpha}(u) = \pi_{\alpha+1,\alpha}(y) = x_\alpha = \pi_{\alpha+1,\alpha}(z) = \pi_{\beta,\alpha}(v)$, lo que demuestra que $\pi_{\beta,\alpha}$ no es inyectiva. $\square$

LEMA 4.4. *Si Σ_ω es un sistema inverso coinitial, entonces existen sucesiones (x_n) y (y_n) en X_ω tales que $x_n(n) = y_n(n)$ y $x_n(n+1) \neq y_n(n+1)$ para todo $n < \omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n < \omega$, el hecho de que $\pi_{n+1,n} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ no es inyectiva produce $a_n, b_n \in X_{n+1}$ con $a_n \neq b_n$ y $\pi_{n+1,n}(a_n) = \pi_{n+1,n}(b_n)$. Luego, como $\pi_{\omega,n}$ es suprayectiva (véase la proposición [3.6](#)), existen $x_n, y_n \in X_\omega$ de tal manera que $\pi_{\omega,n+1}(x_n) = a_n$ y $\pi_{\omega,n+1}(y_n) = b_n$. Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned} x_n(n) &= \pi_{n+1,n}(x_n(n+1)) = \pi_{n+1,n}(\pi_{\omega,n+1}(x_n)) = \pi_{n+1,n}(a_n) \\ &= \pi_{n+1,n}(b_n) = \pi_{n+1,n}(\pi_{\omega,n+1}(y_n)) = \pi_{n+1,n}(y_n(n+1)) = y_n(n) \text{ y} \\ x_n(n+1) &= \pi_{\omega,n+1}(x_n) = a_n \neq b_n = \pi_{\omega,n+1}(y_n) = y_n(n+1). \end{aligned}$$

$\square$

OBSERVACIÓN 4.5. *Sea Σ_ω un sistema inverso coinitial. Además, sean (x_n) y (y_n) sucesiones en X_ω como en el lema [4.4](#). Si $\sigma : \omega \rightarrow \omega$ es una función estrictamente creciente, entonces las sucesiones $(x_{\sigma(n)})$ y $(y_{\sigma(n)})$ satisfacen las hipótesis del lema [3.7](#).*

El lema [4.6](#), aunque de naturaleza algo técnica, será indispensable para la demostración del lema [6.8](#) más adelante.

LEMA 4.6. *Sea Σ_ω un sistema inverso coinitial tal que X_ω es T_3 y no contiene sucesiones convergentes no triviales. Además, sean (x_n) y (y_n) sucesiones en X_ω como en el lema [4.4](#). Si $I \in [\omega]^\omega$, $p < \omega$, $U^* \in \mathcal{V}(x_p)$ y $V^* \in \mathcal{V}(y_p)$, entonces existen $U \in \mathcal{V}(x_p)$ y $V \in \mathcal{V}(y_p)$ tales que $\bar{U} \subseteq U^*$, $\bar{V} \subseteq V^*$, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ y el conjunto $\{n \in I : \{x_n, y_n\} \cap (\bar{U} \cup \bar{V}) = \emptyset\}$ es infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sigma : \omega \rightarrow I$ una función suprayectiva y estrictamente creciente; es decir, $\{\sigma(n) : n < \omega\}$ constituye una enumeración estrictamente creciente de I . La prueba se dividirá en dos enunciados.

Afirmación 1. Existe $O \in \mathcal{V}(x_p)$ tal que $\{n \in \omega : \{x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}\} \cap O = \emptyset\}$ es infinito.

Supongamos, en busca de una contradicción, que para todo $O \in \mathcal{V}(x_p)$ se cumple que $\{n \in \omega : \{x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}\} \cap O \neq \emptyset\}$ es cofinito. Por la observación 4.5 y lema 3.7(3), las sucesiones $(x_{\sigma(n)})$ y $(y_{\sigma(n)})$ convergen a x_p en X_ω . En vista de que X_ω no contiene sucesiones convergentes no triviales, existe $m < \omega$ tal que $x_{\sigma(n)} = x_p = y_{\sigma(n)}$ para todo $n \geq m$ (véase la proposición 2.12). Sin embargo, esto contradice el hecho de que $x_{\sigma(m)}(\sigma(m) + 1) \neq y_{\sigma(m)}(\sigma(m) + 1)$.

Por la Afirmación 1, existe $O \in \mathcal{V}(x_p)$ tal que el conjunto $J := \{n \in \omega : \{x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}\} \cap O = \emptyset\}$ es infinito. Sea $\{n_k : k < \omega\}$ una enumeración estrictamente creciente de J .

Afirmación 2. Existe $W \in \mathcal{V}(y_p)$ tal que $\{k \in \omega : \{x_{\sigma(n_k)}, y_{\sigma(n_k)}\} \cap W = \emptyset\}$ es infinito.

Supongamos por el contrario que, para cualquier $W \in \mathcal{V}(y_p)$, el conjunto $\{k \in \omega : \{x_{\sigma(n_k)}, y_{\sigma(n_k)}\} \cap W \neq \emptyset\}$ es cofinito. Luego, por la observación 4.5 y el lema 3.7(3), las sucesiones $(x_{\sigma(n_k)})$ y $(y_{\sigma(n_k)})$ convergen a y_p en X_ω . De esta manera, como X_ω no contiene sucesiones convergentes no triviales, existe $l < \omega$ tal que $x_{\sigma(n_k)} = y_p = y_{\sigma(n_k)}$ para todo $k \geq l$ (véase la proposición 2.12). No obstante, esto contradice la relación $x_{\sigma(n_l)}(\sigma(n_l) + 1) \neq y_{\sigma(n_l)}(\sigma(n_l) + 1)$.

Por la Afirmación 2, existe $W \in \mathcal{V}(y_p)$ tal que $K := \{k \in \omega : \{x_{\sigma(n_k)}, y_{\sigma(n_k)}\} \cap W = \emptyset\}$ es infinito. Después, como X_ω es T_3 y $x_p \neq y_p$, existen $U \in \mathcal{V}(x_p)$ y $V \in \mathcal{V}(y_p)$ con $\bar{U} \subseteq U^* \cap O$, $\bar{V} \subseteq V^* \cap W$ y $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Finalmente, el conjunto infinito $L := \{\sigma(n_k) : k \in K\}$ está contenido en $\{n \in I : \{x_n, y_n\} \cap (\bar{U} \cup \bar{V}) = \emptyset\}$. $\square$

Lo que sigue en nuestra exposición es ilustrar la definición 4.1 mediante la construcción de un sistema inverso simple Σ_ω con la propiedad de que el límite inverso asociado, X_ω , es homeomorfo al espacio de Cantor $D(2)^\omega$ (véase la proposición 4.8).

Primero, establezcamos que si α es un número ordinal, $s \in D(2)^\alpha$ e $i < 2$, entonces la concatenación de s e i es la función $s \smallfrown i := s \cup \{(\alpha, i)\}$; es decir, $s \smallfrown i$ es el único punto de $D(2)^{\alpha+1}$ que satisface $(s \smallfrown i)|_\alpha = s$ y $(s \smallfrown i)(\alpha) = i$. Para alcanzar el objetivo señalado en el párrafo anterior, resulta conveniente disponer del siguiente resultado auxiliar:

LEMA 4.7. Si $m < \omega$, $n \in \omega \setminus 1$ y X es un subconjunto de $D(2)^m$ con $|X| = n$, entonces existe una familia $\{X_i : i < n + 1\}$ que tiene las siguientes características.

- (1) $X_0 = X$ y $X_i \subseteq D(2)^{m+i}$ para todo $i < n + 1$.
- (2) La función $\pi_{j,i} : X_j \rightarrow X_i$ descrita por $\pi_{j,i}(x) := x \upharpoonright_{m+i}$ está bien definida, siempre que $i \leq j < n + 1$.
- (3) $\{(X_i, \pi_{j,i}) : i \leq j < n + 1\}$ es un sistema inverso simple.⁴

⁴En el contexto del presente trabajo, no está definida la noción de sistema inverso cuando el conjunto de índices difiere de un número ordinal límite. No obstante, la adaptación de la definición para considerar un sistema inverso simple indexado por un número natural positivo resulta sencilla de intuir: cumple con todas las propiedades esperadas de un sistema inverso simple, con la peculiaridad de que la condición (2) de la definición 4.1 se verifica siempre, por vacuidad.

(4) Si $s \in X$, entonces $|\pi_{n,0}^{-1}\{s\}| = 2$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{s_j : j < n\}$ una enumeración sin repeticiones de X . Consideremos la familia $\{s(i, j, k) : i < n+1 \wedge j < n \wedge k < 2\}$ construida recursivamente de la siguiente manera: primero, para cualesquiera $j < n$ y $k < 2$, sea $s(0, j, k) := s_j$. Supongamos ahora que, para algún $i < n$, hemos descrito la colección $\{s(i, j, k) : j < n \wedge k < 2\}$. Luego, si $j < n$ y $k < 2$, entonces definimos

$$s(i+1, j, k) := \begin{cases} s(i, j, k) \smallfrown 0, & \text{si } j \neq i+1, \\ s(i, i+1, k) \smallfrown k, & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

Notemos que si $i < n+1$, $j < n$ y $k < 2$, entonces los siguientes enunciados son ciertos:

- (a) $s(i+1, j, k) \upharpoonright_{m+i} = s(i, j, k)$,
- (b) $s(n, j, 0) \upharpoonright_m = s_j = s(n, j, 1) \upharpoonright_m$, y
- (c)

$$\left| \{s(i, j, 0), s(i, j, 1)\} \right| = \begin{cases} 1, & \text{si } i \leq j, \\ 2, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Claramente, si establecemos $X_i := \{s(i, j, k) : j < n \wedge k < 2\}$ para cada $i < n$, entonces $\{(X_i, \pi_{j,i}) : i \leq j < n+1\}$ es un sistema inverso que satisface las condiciones (1)–(4). La demostración de lo anterior es por inducción finita sobre $i < n+1$, y, dado el carácter rutinario del argumento, omitimos los detalles y los dejamos como ejercicio al lector. $\square$

Un resultado central de la topología general, conocido como el *Teorema de Brouwer* [3], establece que un espacio topológico compacto, segundo numerable, cero-dimensional y sin puntos aislados es homeomorfo al espacio de Cantor $D(2)^\omega$. Una prueba de este hecho puede encontrarse en [14, Teorema 7.2, p. 23], y lo utilizaremos libremente en la demostración del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.8. *Existe un sistema inverso simple Σ_ω de tal manera que X_ω es homeomorfo a $D(2)^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : \omega \rightarrow \omega$ la función determinada mediante $g(n) := 2^n - 1$. Nuestro objetivo es construir recursivamente la familia $\{X_i : i < \omega\}$ en los intervalos indicados por $g(n)$; esto es, al considerar $\{X_i : i < g(n)+1\}$ para cada $n < \omega$. Además, conviene dejar en claro que, para cada $i < \omega$, el espacio X_i será un subespacio de la potencia $D(2)^i$.

En primer lugar, sea $X_0 := \{\emptyset\}$ dotado de la topología discreta; equivalentemente, X_0 es la potencia $D(2)^0$. A continuación, sea $X_1 := \{\emptyset \smallfrown 0, \emptyset \smallfrown 1\}$, es decir, X_1 es el espacio producto $D(2)^1$. Ahora, si para algún $n < \omega$ hemos especificado $\{X_i : i < g(n)+1\}$, entonces, para $X_{g(n)}$, el lema 4.7 produce una familia $\{X(i) : i < g(n)+2\}$ que satisface las propiedades (1)–(4). Posteriormente, al establecer $X_{g(n)+i} := X(i)$ para todo $i < g(n)+2$, se obtiene la colección $\{X_i : i < g(n+1)+1\}$ y se completa la recursión.

Por las características descritas en el lema 4.7, el conjunto $\Sigma_\omega := \{(X_n, \pi_{m,n}) : n \leq m < \omega\}$ forma un sistema inverso simple. Lo que sigue es demostrar una propiedad

notable del sistema Σ_ω que, por su importancia en nuestro contexto, conviene destacar en un entorno especial:

Afirmación. Si $n < \omega$ y $s \in X_n$, entonces $|\pi_{\omega,n}^{-1}\{s\}| \geq 2$.

Para empezar, como $\pi_{g(n),n}$ es suprayectiva, existe $t \in X_{g(n)}$ con $\pi_{g(n),n}(t) = s$. Luego, por la condición (4) del lema 4.7, existen $u, v \in X_{g(n+1)}$ que satisfacen $u \neq v$ y $\pi_{g(n+1),g(n)}(u) = t = \pi_{g(n+1),g(n)}(v)$. Así, como $\pi_{\omega,g(n+1)}$ es suprayectiva (véase la proposición 3.6), existen $y, z \in X_\omega$ con $y \neq z$, $\pi_{\omega,g(n+1)}(y) = u$ y $\pi_{\omega,g(n+1)}(z) = v$. Claramente, $\pi_{\omega,n}(y) = s = \pi_{\omega,n}(z)$.

Una consecuencia de la Afirmación es que X_ω no tiene puntos aislados. En efecto, si $U \in \tau_{X_\omega}$, $x \in U$, $n < \omega$, $U_n \in \tau_{X_n}$ cumple $x \in \pi_{\omega,n}^{-1}[U_n] \subseteq U$ (véase la proposición 3.1), y $y, z \in X_\omega$ son tales que $y \neq z$ y $\pi_{\omega,n}(y) = x(n) = \pi_{\omega,n}(z)$, entonces $\{y, z\} \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Finalmente, según los incisos (1), (2) y (3) de la proposición 2.1 y el inciso (2) de la proposición 3.4, X_ω es un espacio compacto, segundo numerable y cero-dimensional. Por lo tanto, el Teorema de Brouwer certifica que X_ω y $D(2)^\omega$ son espacios homeomorfos. $\square$

Antes de explorar cómo se vinculan los sistemas inversos con la búsqueda (o, en nuestro contexto, la exclusión) de subespacios homeomorfos a la compactación de Stone-Čech de un espacio discreto e infinito, es conviene destacar la siguiente particularidad de ciertos sistemas inversos construidos a partir del sistema inverso de la proposición 4.8:

PROPOSICIÓN 4.9. *Sea Σ_κ un sistema inverso, constituido por espacios compactos, tal que cada $\pi_{\beta,\alpha}$ es una función suprayectiva. Si el sistema inverso Σ_ω coincide con el descrito en la proposición 4.8, y X_α no tiene puntos aislados para todo $\omega < \alpha < \kappa$, entonces X_κ no tiene puntos aislados.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, notemos que, gracias a la proposición 3.4(3), $\pi_{\kappa,\alpha}$ es una función suprayectiva para todo $\alpha < \kappa$.

Veamos que si $n < \omega$ y $x \in X_n$, entonces $|\pi_{\kappa,n}^{-1}\{x\}| \geq 2$. En efecto, la Afirmación de la proposición 4.8 genera $u, v \in X_\omega$ con $u \neq v$ y $\pi_{\omega,n}(u) = x = \pi_{\omega,n}(v)$. Luego, como $\pi_{\kappa,\omega}$ es suprayectiva, existen $y, z \in X_\kappa$ que satisfacen $\pi_{\kappa,\omega}(y) = u$ y $\pi_{\kappa,\omega}(z) = v$. En consecuencia, $y \neq z$ y $\pi_{\kappa,n}(y) = x = \pi_{\kappa,n}(z)$.

Ahora, sean $U \in \tau_{X_\kappa}$, $x \in U$, $\alpha < \kappa$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ tales que $x \in \pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$ (véase la proposición 3.1). Si $\omega \leq \alpha < \kappa$, entonces, como $|U_\alpha| \geq 2$ y $\pi_{\kappa,\alpha}$ es suprayectiva, se tiene $|\pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha]| \geq 2$ y, por consiguiente, $|U| \geq 2$. Por otro lado, si $\alpha < \omega$, existen $y, z \in X_\kappa$ con $y \neq z$ y $\pi_{\kappa,\alpha}(y) = \pi_{\kappa,\alpha}(x) = \pi_{\kappa,\alpha}(z)$. De este modo, y y z son elementos distintos de U . $\square$

DEFINICIÓN 4.10. *Sean X un espacio topológico y κ un número cardinal. Una familia $\{F(\alpha, i) : (\alpha, i) \in \kappa \times 2\} \subseteq P(X)$ es un sistema diádico de longitud κ si los siguientes enunciados son ciertos:*

- (1) si $\alpha < \kappa$, entonces $F(\alpha, 0) \cap F(\alpha, 1) = \emptyset$, y
- (2) $\bigcap_{\alpha \in S} F(\alpha, p(\alpha)) \neq \emptyset$, para cualesquiera $S \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $p \in S^2$.

Además, cuando $\{F(\alpha, i) : (\alpha, i) \in \kappa \times 2\} \subseteq \text{CL}(X)$, decimos que $\{F(\alpha, i) : (\alpha, i) \in \kappa \times 2\}$ es un sistema diádico cerrado.

A continuación, presentamos varios resultados que constituyen prácticamente la base teórica para describir las propiedades de los espacios compactos que contienen una copia de la compactación de Stone–Čech de un espacio discreto e infinito. No obstante, dado que sus demostraciones son algo elaboradas y nos desviarían de la línea expositiva de este texto, en cada caso sólo proporcionaremos al lector la referencia precisa para consultar los detalles del enunciado correspondiente.

Para empezar, introducimos el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [15, Corolario 3.2, p. 8]:

TEOREMA 4.11. *Si X es un espacio compacto y λ es un número cardinal infinito, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) *Existe una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow [0, 1]^\lambda$.*
- (2) *Existen $K \in \text{CL}(X)$ y una función continua y suprayectiva $f : K \rightarrow D(2)^\lambda$.*
- (3) *Existe un sistema diádico cerrado en X de longitud λ .*

Asimismo, conviene señalar que, de acuerdo con lo que se afirma en [9, p. 3], el caso $\lambda = \omega_1$ del teorema 4.11 fue demostrado por Šapiroviĭ en [16].

Ahora, cuando el cardinal λ es una potencia de 2, el teorema 4.11 establece el puente deseado con la compactación de Stone–Čech. La demostración de este hecho puede consultarse en [15, Teorema 3.1, p. 6] y queda recogida en el siguiente resultado:

TEOREMA 4.12. *Si X es un espacio compacto, κ es un número cardinal infinito y $\lambda = 2^\kappa$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) *X contiene una copia de $\beta\kappa$.*
- (2) *Existe una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow [0, 1]^\lambda$.*
- (3) *Existen $K \in \text{CL}(X)$ y una función continua y suprayectiva $f : K \rightarrow D(2)^\lambda$.*
- (4) *Existe un sistema diádico cerrado en X de longitud λ .*

Además, el caso $\kappa = \omega$ del teorema 4.12 corresponde a un teorema de Efimov que, por su relevancia en el contexto del presente trabajo, destacamos en el corolario 4.13. Para una perspectiva histórica más amplia sobre el resultado de Efimov, se recomienda al lector consultar [11].

COROLARIO 4.13. *Si X es un espacio compacto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) *X contiene una copia de $\beta\omega$.*
- (2) *Existe una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow [0, 1]^{\mathfrak{c}}$.*
- (3) *Existen $K \in \text{CL}(X)$ y una función continua y suprayectiva $f : K \rightarrow D(2)^{\mathfrak{c}}$.*
- (4) *Existe un sistema diádico cerrado en X de longitud $\mathfrak{c}$.*

Por otra parte, el siguiente enunciado, en su formulación booleana, se debe a Sabine Koppelberg. La versión topológica de este resultado, que corresponde al teorema 4.14, resulta de especial interés en el estudio de los espacios de Efimov. No obstante, dada la complejidad de su demostración, presentamos únicamente su enunciado y sugerimos al lector acudir a [6] para obtener los detalles correspondientes.

TEOREMA 4.14. *Si Σ_κ es un sistema inverso simple, constituido por espacios compactos, entonces el cubo $[0, 1]^{\omega_1}$ no es imagen continua del límite inverso X_κ , salvo que sea imagen continua de X_0 .*

Notemos que si Σ_κ es un sistema inverso que satisface las hipótesis del teorema 4.14, y el cubo $[0, 1]^{\omega_1}$ no es imagen continua de X_0 , entonces el límite inverso X_κ no contiene una copia de $\beta\omega$.

Efectivamente, si X_κ contiene un subespacio homeomorfo a $\beta\omega$, entonces el corolario 4.13 produce una función continua y suprayectiva $X_\kappa \rightarrow [0, 1]^\mathfrak{c}$ que, al ser compuesta con la proyección canónica $[0, 1]^\mathfrak{c} \rightarrow [0, 1]^{\omega_1}$, genera una función continua y suprayectiva de X_κ sobre $[0, 1]^{\omega_1}$, lo que contradice lo establecido en el teorema 4.14.

En consecuencia, el teorema 4.14 proporciona una condición suficiente para garantizar la ausencia de copias de $\beta\omega$ en los límites inversos obtenidos a partir de sistemas inversos con ciertas propiedades. Recogemos este hecho en el siguiente corolario, que utilizaremos más adelante:

COROLARIO 4.15. *Si Σ_κ es un sistema inverso simple, constituido por espacios compactos, y el cubo $[0, 1]^{\omega_1}$ no es imagen continua de X_0 , entonces el límite inverso X_κ no contiene una copia de $\beta\omega$.*

A la luz del corolario 4.15, para obtener espacios de Efimov mediante este método, sólo es necesario preocuparse, durante la construcción del sistema inverso, por eliminar todas las sucesiones convergentes no triviales del límite inverso.

5. Ultrafiltros

Un aspecto importante del resultado principal de este trabajo es que requiere familiaridad con la noción de límite en un espacio topológico generada a partir de un ultrafiltro libre sobre ω . En esta sección presentamos los conceptos fundamentales relacionados con este tema, necesarios para comprender la construcción que llevaremos a cabo en el teorema 7.7.

DEFINICIÓN 5.1. *Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ un subconjunto de $P(X)$. Decimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X si los siguientes enunciados son ciertos.*

- (1) $X \in \mathcal{U}$ y $\emptyset \notin \mathcal{U}$.
- (2) Si $A \in \mathcal{U}$ y $B \in P(X)$ satisfacen $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{U}$.
- (3) $A \cap B \in \mathcal{U}$ siempre que $A, B \in \mathcal{U}$.
- (4) Si $A \in P(X)$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Además, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X , decimos que $\mathcal{U}$ es libre si $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

En la siguiente terna de resultados se presentan algunos hechos básicos sobre los ultrafiltros que se emplearán más adelante:

LEMA 5.2. *Los siguientes enunciados son ciertos para un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto no vacío X .*

- (1) Si $B \subseteq X$ cumple que $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{U}$, entonces $B \in \mathcal{U}$.
- (2) $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$ siempre que $A, B \in P(X)$ satisfacen $A \cup B \in \mathcal{U}$,

Más aún, cuando $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre, los siguientes enunciados también son válidos.

- (3) Si $x \in X$, entonces $\{x\} \notin \mathcal{U}$.
- (4) $[X]^{<\omega} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

(5) X es infinito y $\{X \setminus F : F \in [X]^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN: El inciso (1) es verdadero porque, de lo contrario, $X \setminus B \in \mathcal{U}$, lo que produciría la contradicción $B \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$.

La prueba del inciso (2) es por contrapuesta: si $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{U}$ y $X \setminus B \in \mathcal{U}$. Así, $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ es un elemento de $\mathcal{U}$ y, por ende, $A \cup B \notin \mathcal{U}$.

En cuanto al inciso (3), si $\{x\} \in \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{U}$, entonces $\{x\} \cap A \in \mathcal{U}$ y, por ende, $\{x\} \cap A \neq \emptyset$, es decir, $x \in A$. De esta manera, $x \in \bigcap \mathcal{U}$, lo cual es absurdo.

Para el inciso (4), si $F \in [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, la contención $\{X \setminus \{z\} : z \in F\} \subseteq \mathcal{U}$, que es verdadera por el inciso (3), garantiza que $X \setminus F = \bigcap_{z \in F} (X \setminus \{z\})$ es un elemento de $\mathcal{U}$, e impide que F pertenezca a $\mathcal{U}$.

Finalmente, en el inciso (5), como $X \in \mathcal{U}$, se deduce que X es infinito. Además, si $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $F \notin \mathcal{U}$ implica que $X \setminus F \in \mathcal{U}$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.3. Sean X y Y conjuntos. Además, sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Los siguientes enunciados son ciertos.

- (1) La familia $\mathcal{U}_f := \{B \subseteq Y : f^{-1}[B] \in \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro sobre Y .
- (2) Si f es inyectiva y $\mathcal{U}$ es libre, entonces $\mathcal{U}_f$ también es libre.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, $Y \in \mathcal{U}_f$ y $\emptyset \notin \mathcal{U}_f$ porque $f^{-1}[Y] = X \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin \mathcal{U}$. Luego, si $B \in \mathcal{U}_f$ y $C \in P(Y)$ cumplen $B \subseteq C$, entonces $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[C]$ implican que $f^{-1}[C] \in \mathcal{U}$; es decir, $C \in \mathcal{U}_f$.

Por otra parte, si $B, C \in \mathcal{U}_f$, entonces $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}[C] \in \mathcal{U}$ aseguran que $f^{-1}[B \cap C] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[C]$ es un elemento de $\mathcal{U}$; equivalentemente, $B \cap C \in \mathcal{U}_f$. Por último, si $B \in P(Y)$, entonces $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ o $X \setminus f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$, lo cual implica, respectivamente, que $B \in \mathcal{U}_f$ o $Y \setminus B \in \mathcal{U}_f$. En consecuencia, $\mathcal{U}_f$ es un ultrafiltro sobre Y .

Para el inciso (2), observemos primero que, si $y \in Y$, entonces $y \in \bigcap \mathcal{U}_f$ si y sólo si $\{y\} \in \mathcal{U}_f$ (véase el lema 5.2(1)). Por este motivo, para demostrar que $\mathcal{U}_f$ es libre basta probar que $f^{-1}\{y\} \notin \mathcal{U}$ para todo $y \in Y$. En efecto, si $y \in Y$, entonces el conjunto $f^{-1}\{y\}$ tiene a lo sumo un elemento, debido a la inyectividad de f , y no puede pertenecer a $\mathcal{U}$, según el lema 5.2(4). $\square$

La demostración de la proposición 5.4 es bastante técnica. En vista de que una exposición completa de todos los detalles nos desviaría del propósito de este escrito, nos limitamos a señalar lo siguiente: para la implicación recíproca del inciso (1), conviene consultar el inciso (3) de la definición 5.1; para la implicación correspondiente del inciso (2), es necesario emplear el lema 5.2(4); la implicación directa del inciso (1) puede encontrarse en [4, Proposición 3.5.7, p. 91], y la implicación correspondiente del inciso (2) se obtiene mediante una técnica similar a la expuesta en el resultado citado de [4].

PROPOSICIÓN 5.4. Sean X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ una familia no vacía.

- (1) $\mathcal{F}$ es centrada si y sólo si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

- (2) $\mathcal{F}$ es fuertemente centrada⁵ si y sólo si existe un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Profundizaremos en las ideas anteriores al estudiar la siguiente noción y su relación con el tema principal de este artículo:

DEFINICIÓN 5.5. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω y (x_n) una sucesión en X . La $\mathcal{U}$ -adherencia de (x_n) , denotada por $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$, es la intersección $\bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{\{x_n : n \in A\}}$.

La $\mathcal{U}$ -adherencia constituye un concepto clave en esta sección. Por este motivo, resulta conveniente demostrar el siguiente resultado, con el fin de entender mejor su interacción con la topología de X :

PROPOSICIÓN 5.6. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω y (x_n) una sucesión en X . Los siguientes enunciados son ciertos.

- (1) Si $x \in X$, entonces $x \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ si y sólo si $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$ para cualquier $V \in \mathcal{V}(x)$.
- (2) La $\mathcal{U}$ -adherencia de (x_n) tiene a lo sumo un elemento, siempre que X sea T_2 .
- (3) Si X es compacto, entonces $|\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)| = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Primero, si $x \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ y $V \in \mathcal{V}(x)$, es claro que $\{n \in \omega : x_n \in V\} \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{U}$, lo cual implica que $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$ (véase el lema 5.2(1)). Recíprocamente, si $x \notin \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ y $A \in \mathcal{U}$ cumple que $V := X \setminus \overline{\{x_n : n \in A\}}$ satisface $x \in V$, entonces $\{n \in \omega : x_n \in V\}$ no pertenece a $\mathcal{U}$, ya que $\{n \in \omega : x_n \in V\} \cap A = \emptyset$.

Ahora bien, si X es T_2 y $x, y \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ son distintos, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ con $U \cap V = \emptyset$. Por el inciso (1), se tiene que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in \mathcal{U}$ y $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$. Así, $\{n \in \omega : x_n \in U\} \cap \{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$ y, en particular, como dicho conjunto es no vacío, existe $n \in \omega$ con $x_n \in U \cap V$, una contradicción. En suma, $|\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)| \leq 1$.

Finalmente, si X es compacto, la colección $\{\overline{\{x_n : n \in A\}} : A \in \mathcal{U}\}$ es una familia centrada y no vacía contenida en $\text{CL}(X)$, lo que implica que su intersección, $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$, es no vacía. Este hecho, junto con lo establecido en el inciso (2), certifica que $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ tiene un único elemento. $\square$

Cuando la adherencia de una sucesión es un conjunto unipuntual, surge la noción de límite que anunciamos al principio de esta sección:

DEFINICIÓN 5.7. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω y (x_n) una sucesión en X . Si $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ tiene exactamente un elemento, el $\mathcal{U}$ -límite de (x_n) , denotado por $\lim_{\mathcal{U}}(x_n)$, es precisamente ese único punto, es decir, $\{\lim_{\mathcal{U}}(x_n)\} = \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$.⁶

⁵Es decir, si $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\bigcap \mathcal{G}$ es un conjunto infinito. En la literatura también se emplea la expresión *familia con la propiedad de intersección finita fuerte* para aludir a este concepto.

⁶Es importante destacar que este concepto aparece con frecuencia en la literatura matemática bajo la denominación de « p -límite», donde p es un ultrafiltro sobre ω . No obstante, dado que la naturaleza del presente escrito es de difusión matemática, optamos por la grafía $\mathcal{U}$, con el fin de que la distinción tipográfica indique al lector poco experimentado que $\mathcal{U}$ es una familia de conjuntos.

Es pertinente hacer dos observaciones antes de avanzar. Bajo las hipótesis de la definición 5.7, primero, según lo establecido en la proposición 5.6(2), si X es un espacio T_2 y $z \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$, entonces $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$. Por otra parte, de acuerdo con la proposición 5.6(3), si X es compacto, el conjunto $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ tiene exactamente un punto; es decir, la sucesión (x_n) admite un $\mathcal{U}$ -límite.

A continuación se recopilan algunas propiedades esenciales para familiarizar al lector con esta noción.

PROPOSICIÓN 5.8. *Sean X un espacio de Hausdorff, (x_n) una sucesión en X y $z \in X$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) z es un punto de acumulación de la sucesión (x_n) .
- (2) Existe un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$.

DEMOSTRACIÓN: Si existe un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$, entonces, dado $V \in \mathcal{V}(z)$, la pertenencia $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$ implica que $\{n \in \omega : x_n \in V\}$ es un conjunto infinito (véase el lema 5.2(4)).

Por otra parte, si z es un punto de acumulación de la sucesión (x_n) , entonces $\mathcal{F} := \{\{n \in \omega : x_n \in V\} : V \in \mathcal{V}(z)\}$ es una familia fuertemente centrada. Así, la proposición 5.4(2) genera un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. En consecuencia, $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.9. *Sean X un espacio de Hausdorff, (x_n) una sucesión en X y $z \in X$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (1) (x_n) converge a z en X .
- (2) Para todo ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω se satisface que $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$.

DEMOSTRACIÓN: Para (1) implica (2), si $V \in \mathcal{V}(z)$ y $m < \omega$ cumple $\{x_n : n \geq m\} \subseteq V$, entonces $\omega \setminus m \in \mathcal{U}$ por el lema 5.2(5), lo cual implica que $\{n \in \omega : x_n \in V\}$ pertenece a $\mathcal{U}$, puesto que $\omega \setminus m \subseteq \{n \in \omega : x_n \in V\}$. Por lo tanto, $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$.

Recíprocamente, si (x_n) no converge a z en X , existe $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que el conjunto $A := \{n \in \omega : x_n \in V\}$ satisface que $\omega \setminus A$ es infinito. Luego, como la familia $\{\omega \setminus A\}$ es fuertemente centrada, existe un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω con $\omega \setminus A \in \mathcal{U}$ (véase la proposición 5.4(2)). De esta manera, el hecho $A \notin \mathcal{U}$ implica que $z \neq \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.10. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Además, sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω , (x_n) una sucesión en X y $z \in X$. Los siguientes enunciados son ciertos.*

- (1) $f[\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)] \subseteq \text{adh}_{\mathcal{U}}(f(x_n))$.
- (2) Si Y es T_2 y $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$, entonces $f(z) = \lim_{\mathcal{U}}(f(x_n))$.

DEMOSTRACIÓN: Basta demostrar el inciso (1), ya que (2) es consecuencia de él y de la proposición 5.6. Dicho lo anterior, para verificar (1), si $x \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$ y $V \in \mathcal{V}(f(x))$, entonces $f^{-1}[V] \in \mathcal{V}(x)$, lo que implica que $\{n \in \omega : x_n \in f^{-1}[V]\} \in \mathcal{U}$ y, por ende, que $\{n \in \omega : f(x_n) \in V\} \in \mathcal{U}$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.11. *Sean Σ_{κ} un sistema inverso, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω , (x_n) una sucesión en X_{κ} y $z \in X_{\kappa}$. Los siguientes enunciados son ciertos.*

- (1) $\pi_{\kappa, \alpha}[\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)] \subseteq \text{adh}_{\mathcal{U}}((x_n(\alpha))$ para todo $\alpha < \kappa$.
- (2) Si cada $\alpha < \kappa$ satisface $z(\alpha) \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n(\alpha))$, entonces $z \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_n)$.

DEMOSTRACIÓN: El inciso (1) es corolario del respectivo inciso de la proposición 5.10. En cuanto al inciso (2), si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces existen $\alpha < \kappa$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ con $z \in \pi_{\kappa, \alpha}^{-1}[U_\alpha] \subseteq V$ (véase la proposición 3.1). Luego, como $U_\alpha \in \mathcal{V}(z(\alpha))$, se satisface que $\{n \in \omega : x_n(\alpha) \in U_\alpha\} \in \mathcal{U}$, lo que implica que $\{n \in \omega : x_n \in \pi_{\kappa, \alpha}^{-1}[U_\alpha]\} \in \mathcal{U}$ y, por extensión, que $\{n \in \omega : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$. $\square$

LEMA 5.12. Sean Σ_κ un sistema inverso, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre ω , (x_n) y (y_n) sucesiones en X_κ , y $x, y \in X$. Si $x = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$, $y = \lim_{\mathcal{U}}(y_n)$ y $\{n \in \omega : x_n(\alpha) = y_n(\alpha)\}$ es cofinito para todo $\alpha < \kappa$, entonces $x = y$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si $\alpha < \kappa$, $A := \{n \in \omega : x_n(\alpha) = y_n(\alpha)\}$ y $V \in \mathcal{V}(x(\alpha))$, entonces $A \in \mathcal{U}$ por el lema 5.2(5), y $\{n \in \omega : x_n(\alpha) \in V\} \in \mathcal{U}$ por la proposición 5.11(1), lo cual implica que $\{n \in A : x_n(\alpha) \in V\} \in \mathcal{U}$. De este modo, la igualdad $\{n \in A : x_n(\alpha) \in V\} = \{n \in A : y_n(\alpha) \in V\}$ y la inclusión $\{n \in A : y_n(\alpha) \in V\} \subseteq \{n \in \omega : y_n(\alpha) \in V\}$ aseguran que $\{n \in \omega : y_n(\alpha) \in V\} \in \mathcal{U}$.

Esto demuestra que $x(\alpha) \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_n(\alpha))$ para todo $\alpha < \kappa$, y permite aplicar la proposición 5.11(2) para concluir que $x \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_n)$ y, por ende, que $x = y$. $\square$

El siguiente corolario, con el cual se cierra la sección, se deduce a partir de la proposición 5.6(3) y del lema 5.12:

COROLARIO 5.13. Sean Σ_κ un sistema inverso, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre ω , y (x_n) y (y_n) sucesiones en X_κ . Si X_κ es compacto y $\{n \in \omega : x_n(\alpha) = y_n(\alpha)\}$ es cofinito para todo $\alpha < \kappa$, entonces $\lim_{\mathcal{U}}(x_n) = \lim_{\mathcal{U}}(y_n)$.

6. Sucesiones dobles y coincialidad

Al contar con la experiencia provista por el estudio breve que realizamos en la sección 5, es momento de acercar al lector a la noción de sucesión doble y al concepto de coincialidad. A lo largo de esta sección, presentaremos estos conceptos de manera rigurosa pero accesible, de modo que el lector disponga del marco conceptual necesario para seguir con claridad los desarrollos posteriores.

DEFINICIÓN 6.1. Sean X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X . Decimos que (x_n) es una sucesión doble si es discreta y, para todo ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω , se verifica que $\lim_{\mathcal{U}}(x_{2n})$ y $\lim_{\mathcal{U}}(x_{2n+1})$ existen y coinciden.⁷

A continuación se presentan algunas propiedades básicas de este tipo de sucesiones, para familiarizar al lector con esta noción.

OBSERVACIÓN 6.2. Sea X un espacio topológico. Además, sean (x_n) y (y_n) sucesiones en X de tal modo que:

- (1) $x_m \neq x_n$ y $y_m \neq y_n$, siempre que $m < n < \omega$,
- (2) $\{x_n : n < \omega\} \cap \{y_n : n < \omega\} = \emptyset$,
- (3) $\{x_n : n < \omega\} \cup \{y_n : n < \omega\}$ es un subespacio discreto de X , y

⁷Esto es, $|\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_{2n})| = 1 = |\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_{2n+1})|$ y $\text{adh}_{\mathcal{U}}(x_{2n}) \cap \text{adh}_{\mathcal{U}}(x_{2n+1}) \neq \emptyset$.

(4) para cada ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω , se satisface que $\lim_{\mathcal{U}}(x_n)$ y $\lim_{\mathcal{U}}(y_n)$ existen y coinciden.

Si para cada $n < \omega$ establecemos

$$z_n := \begin{cases} x_{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ y_{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

entonces (z_n) es una sucesión doble en X .

PROPOSICIÓN 6.3. Si X tiene la propiedad de Hausdorff y no contiene sucesiones dobles, entonces X no contiene sucesiones convergentes no triviales.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos por contraposición que X contiene una sucesión convergente no trivial. Por la proposición 2.11, existe una sucesión discreta (x_n) que converge a un punto z en X ; en especial, tanto (x_{2n}) como (x_{2n+1}) son sucesiones que convergen a z en X . Así, como para cualquier ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω se satisface que $\lim_{\mathcal{U}}(x_{2n}) = z = \lim_{\mathcal{U}}(x_{2n+1})$ (véase la proposición 5.9), se deduce que (x_n) es una sucesión doble en X . $\square$

LEMA 6.4. Sean X un espacio de Hausdorff, (x_n) una sucesión doble en X y $\sigma : \omega \rightarrow \omega$ una función estrictamente creciente. Si $z \in X$, entonces $(x_{2\sigma(i)})$ converge a z en X si y sólo si $(x_{2\sigma(i)+1})$ converge a z en X .

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente probar que si $(x_{2\sigma(i)})$ converge a z en X , entonces $(x_{2\sigma(i)+1})$ también converge a z , puesto que la implicación recíproca es similar. Dicho esto, la demostración de la implicación mencionada se llevará a cabo por reducción al absurdo.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $(x_{2\sigma(i)+1})$ no converge a z en X . Sea $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que el conjunto $A := \{i \in \omega : x_{2\sigma(i)+1} \notin V\}$ es infinito. En virtud de la proposición 5.4(2), existe un ultrafiltro libre $\mathcal{W}$ sobre ω con $A \in \mathcal{W}$, ya que $\{A\}$ es una familia fuertemente centrada. Observemos que, gracias a la proposición 5.3, la colección $\mathcal{W}_\sigma$ es un ultrafiltro libre sobre ω .

Notemos que si $W \in \mathcal{V}(z)$, entonces la igualdad $\sigma^{-1}[\{n \in \omega : x_{2n} \in W\}] = \{i \in \omega : x_{2\sigma(i)} \in W\}$, en combinación con la pertenencia $\{i \in \omega : x_{2\sigma(i)} \in W\} \in \mathcal{W}$, que es verdadera pues $z = \lim_{\mathcal{W}}(x_{2\sigma(i)})$ (véase la proposición 5.9), garantiza que $\{n \in \omega : x_{2n} \in W\} \in \mathcal{W}_\sigma$. Por lo tanto, $z = \lim_{\mathcal{W}_\sigma}(x_{2n})$.

Finalmente, como (x_n) es una sucesión doble, resulta que $z = \lim_{\mathcal{W}_\sigma}(x_{2n+1})$. De esta manera, como $V \in \mathcal{V}(z)$, el conjunto $B := \{n \in \omega : x_{2n+1} \in V\}$ pertenece a $\mathcal{W}_\sigma$ y, por ende, $\sigma^{-1}[B] = \{i \in \omega : x_{2\sigma(i)+1} \in V\}$ es un elemento de $\mathcal{W}$. En conclusión, la intersección $A \cap \sigma^{-1}[B]$ es un conjunto no vacío, lo cual es imposible. $\square$

LEMA 6.5. Sea X un espacio compacto y primero numerable. Si (x_n) es una sucesión doble en X , entonces existen $z \in X$ y una sucesión estrictamente creciente (n_i) en ω tales que $z \notin \{x_n : n < \omega\}$ y las sucesiones (x_{2n_i}) y (x_{2n_i+1}) convergen a z en X .

DEMOSTRACIÓN: Por la compacidad de X , el conjunto $\{x_n : n < \omega\}$ tiene un punto de acumulación z en X (véase la proposición 2.7(2)); en particular, $z \notin \{x_n : n < \omega\}$, pues (x_n) es discreta. Luego, por la proposición 2.9 y la proposición 5.8, existe un ultrafiltro

libre $\mathcal{U}$ sobre ω tal que $z = \lim_{\mathcal{U}}(x_n)$. Notemos que, como $P \cup (\omega \setminus P) = \omega \in \mathcal{U}$, donde $P := \{2n : n < \omega\}$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $P \in \mathcal{U}$ (véase el lema 5.2(2)).

Ahora, como

$$z \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{\{x_n : n \in A\}} \subseteq \overline{\{x_n : n \in P\}} = \overline{\{x_{2n} : n < \omega\}},$$

y (x_{2n}) es una sucesión discreta, necesariamente z es un punto de acumulación del conjunto $\{x_{2n} : n < \omega\}$, lo cual implica, en vista de la proposición 2.8 y de la proposición 2.9, que existe una sucesión estrictamente creciente (n_i) en ω tal que (x_{2n_i}) converge a z en X . Finalmente, el lema 6.4 certifica que (x_{2n_i+1}) también converge a z en X . $\square$

LEMA 6.6. Sean X un espacio compacto, primero numerable y cero-dimensional, sin puntos aislados, y (x_n) una sucesión doble en X . Además, sean z y (n_i) como en el lema 6.5. Si $\{A_n : n < \omega\}$ es como en el lema 2.4, entonces existen una subsucesión (m_i) de (n_i) y una sucesión estrictamente creciente (k_i) en ω que tienen las siguientes características:

- (1) $k_0 = 0$,
- (2) $\{x_{2m_i}, x_{2m_i+1}\} \subseteq A_{k_i}$ siempre que $i < \omega$, y
- (3) $\{x_{2m_i}, x_{2m_i+1}\} \cap A_{k_j} = \emptyset$ si $j \in \omega \setminus (i+1)$.

DEMOSTRACIÓN: Para simplificar la notación, establecemos $a_i := x_{2n_i}$ y $b_i := x_{2n_i+1}$ para todo $i < \omega$. En primer lugar, si $k_0 := 0$, el hecho de que $z \in A_{k_0}$ produce $\sigma(0) < \omega$ tal que $\{a_i : i \in \omega \setminus \sigma(0)\} \subseteq A_{k_0}$ y $\{b_i : i \in \omega \setminus \sigma(0)\} \subseteq A_{k_0}$. Claramente, $n_{\sigma(0)}$ satisface $\{a_{\sigma(0)}, b_{\sigma(0)}\} \subseteq A_{k_0}$.

Supongamos ahora que, para algún $i < \omega$, hemos descrito sucesiones estrictamente crecientes $\{\sigma(j) : j \leq i\}$ y $\{k_j : j \leq i\}$ con las propiedades deseadas. Observemos primero que, como $\{A_n : n < \omega\}$ es decreciente y $z \notin \bigcup_{j \leq i} \{a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}\}$ existe $N < \omega$ con

$$\left(\bigcup_{n \in \omega \setminus N} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} \{a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}\} \right) = \emptyset.$$

Luego, si definimos $k_{i+1} := N + k_i + 1$, la pertenencia $z \in A_{k_{i+1}}$ genera $\sigma(i+1) \in \omega \setminus (\sigma(i) + 1)$ tal que $\{a_l : l \in \omega \setminus \sigma(i+1)\} \subseteq A_{k_{i+1}}$ y $\{b_l : l \in \omega \setminus \sigma(i+1)\} \subseteq A_{k_{i+1}}$. Resulta que $n_{\sigma(i+1)}$ cumple

$$\{a_{\sigma(i+1)}, b_{\sigma(i+1)}\} \subseteq A_{k_{i+1}} \quad \text{y} \quad A_{k_{i+1}} \cap \bigcup_{j \leq i} \{a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}\} = \emptyset.$$

Esto completa la construcción recursiva. $\square$

Para el siguiente lema conviene tener presente que, si κ es un número ordinal tal que $\text{cf}(\kappa) > \omega$, entonces κ es un ordinal límite.

LEMA 6.7. Sean κ un número ordinal con $\text{cf}(\kappa) > \omega$ y Σ_κ un sistema inverso constituido por espacios de Hausdorff. Si (y_n) es una sucesión doble en X_κ , entonces existe $\beta < \kappa$ tal que, para todo $\alpha \in \kappa \setminus \beta$, la sucesión $(y_n(\alpha))$ es doble en X_α .

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n < \omega$, la proposición 3.1 genera $\beta_n < \kappa$ y $U_{\beta_n} \in \tau_{X_{\beta_n}}$ tales que

$$\pi_{\kappa, \beta_n}^{-1}[U_{\beta_n}] \cap \{y_m : m < \omega\} = \{y_n\}.$$

Sea $\beta := \sup\{\beta_n : n < \omega\} + 1$, y sea $\alpha \in \kappa \setminus \beta$. A continuación, demostramos que $(y_n(\alpha))$ es una sucesión doble en X_α .

Primero, si $n < \omega$, entonces

$$\pi_{\alpha, \beta_n}^{-1}[U_{\beta_n}] \cap \{y_m(\alpha) : m < \omega\} = \{y_n(\alpha)\},$$

lo cual prueba que $(y_n(\alpha))$ es discreta en X_α . Ahora, con el propósito de verificar que $(y_n(\alpha))$ es una sucesión doble en X_α , consideremos un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω . Dado que (y_n) es una sucesión doble, existe $y \in X_\kappa$ tal que $\lim_{\mathcal{U}}(y_{2n}) = y = \lim_{\mathcal{U}}(y_{2n+1})$. Luego, como $y \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n}) \cap \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n+1})$, la proposición 5.11(1) indica que $y(\alpha) \in \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n}(\alpha)) \cap \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n+1}(\alpha))$ y, por ende, $\lim_{\mathcal{U}}(y_{2n}(\alpha)) = y(\alpha) = \lim_{\mathcal{U}}(y_{2n+1}(\alpha))$. $\square$

En la prueba del lema 6.8 se utilizará el inciso (4) de la proposición 2.1. Cabe destacar que dicho lema constituirá una herramienta indispensable para la demostración de la proposición 6.12, que a su vez permitirá obtener el teorema 7.7.

LEMA 6.8. *Si Σ_ω es un sistema inverso coinitial y X_ω es compacto, entonces X_ω contiene una sucesión doble.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, en busca de una contradicción, que X_ω no contiene sucesiones dobles. Notemos que, por la proposición 6.3, X_ω tampoco contiene sucesiones convergentes no triviales. Ahora, sean (x_n) y (y_n) sucesiones en X_ω como en el lema 4.4. El núcleo de la demostración radica en el siguiente enunciado:

Afirmación. Existen una función estrictamente creciente $\sigma : \omega \rightarrow \omega$, $\{U_k : k < \omega\} \subseteq \tau_{X_\omega}$, $\{V_k : k < \omega\} \subseteq \tau_{X_\omega}$ y $\{I_k : k < \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ que satisfacen las siguientes condiciones para todo $k < \omega$:

- (1) $I_0 = \{n \in \omega : \{x_n, y_n\} \cap (\overline{U_0} \cup \overline{V_0}) = \emptyset\}$,
- (2) $I_{k+1} = \{n \in I_k : \{x_n, y_n\} \cap (\overline{U_{k+1}} \cup \overline{V_{k+1}}) = \emptyset\}$,
- (3) $\sigma(k+1) \in I_k$,
- (4) $x_{\sigma(k)} \in U_k$, $y_{\sigma(k)} \in V_k$ y $\overline{U_k} \cap \overline{V_k} = \emptyset$, y
- (5)

$$(\overline{U_k} \cup \overline{V_k}) \subseteq X \setminus \bigcup_{j < k} (\overline{U_j} \cup \overline{V_j}).$$

En primer lugar, si definimos $\sigma(0) := 0$, el lema 4.6 genera $U_0 \in \mathcal{V}(x_{\sigma(0)})$ y $V_0 \in \mathcal{V}(y_{\sigma(0)})$ de tal modo que $\overline{U_0} \cap \overline{V_0} = \emptyset$ y el conjunto $I_0 := \{n \in \omega : \{x_n, y_n\} \cap (\overline{U_0} \cup \overline{V_0}) = \emptyset\}$ es infinito. Supongamos ahora que, para algún $k < \omega$, hemos determinado los conjuntos $\{\sigma(j) : j \leq k\}$, $\{U_j : j \leq k\}$, $\{V_j : j \leq k\}$ y $\{I_j : j \leq k\}$ con las propiedades requeridas.

Observemos que, como I_k es un conjunto infinito, existe $\sigma(k+1) \in I_k$ tal que $\sigma(k+1) > \max\{\sigma(j) : j \leq k\}$. Además, como $\{I_j : j \leq k\}$ es una familia decreciente, se tiene que $\sigma(k+1) \in \bigcap_{j \leq k} I_j$ y, por lo tanto, $\{x_{\sigma(k+1)}, y_{\sigma(k+1)}\} \subseteq X \setminus \bigcup_{j \leq k} (\overline{U_j} \cup \overline{V_j})$. Luego, por el lema 4.6, existen $U_{k+1} \in \mathcal{V}(x_{\sigma(k+1)})$ y $V_{k+1} \in \mathcal{V}(y_{\sigma(k+1)})$ tales que $\overline{U_{k+1}} \cap \overline{V_{k+1}} = \emptyset$, $(\overline{U_{k+1}} \cup \overline{V_{k+1}}) \subseteq X \setminus \bigcup_{j \leq k} (\overline{U_j} \cup \overline{V_j})$, y el conjunto $I_{k+1} := \{n \in I_k : \{x_n, y_n\} \cap (\overline{U_{k+1}} \cup \overline{V_{k+1}}) = \emptyset\}$ es infinito. Esto completa la construcción recursiva.

Hecho lo anterior, notemos que, por la observación 4.5 y el lema 3.7(2), el conjunto $\{k \in \omega : x_{\sigma(k)}(m) = y_{\sigma(k)}(m)\}$ es cofinito para cada $m < \omega$. Por otra parte, para todo

$k < \omega$ se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}\{x_{\sigma(k)}\} &= U_k \cap (\{x_{\sigma(j)} : j < \omega\} \cup \{y_{\sigma(j)} : j < \omega\}) \quad \text{y} \\ \{y_{\sigma(k)}\} &= V_k \cap (\{x_{\sigma(j)} : j < \omega\} \cup \{y_{\sigma(j)} : j < \omega\}).\end{aligned}$$

En efecto, si $k < \omega$ y $j > k$, entonces $\sigma(j) \in I_k$ y, por ende, $\{x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)}\} \cap (\overline{U_k} \cup \overline{V_k}) = \emptyset$; en especial, $\{x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)}\} \cap (U_k \cup V_k) = \emptyset$. Cuando $j = k$, se satisface que $y_{\sigma(k)} \notin U_k$ y $x_{\sigma(k)} \notin V_k$. Finalmente, si $j < k$, como $x_{\sigma(j)} \in U_j$, $y_{\sigma(j)} \in V_j$ y $(\overline{U_k} \cup \overline{V_k}) \subseteq X \setminus \bigcup_{i < k} (\overline{U_i} \cup \overline{V_i})$, se sigue que $\{x_{\sigma(j)}, y_{\sigma(j)}\} \cap (U_k \cup V_k) = \emptyset$.

Lo expuesto en los párrafos anteriores certifica que los siguientes enunciados son ciertos.

- (1) $x_{\sigma(j)} \neq x_{\sigma(k)}$ y $y_{\sigma(j)} \neq y_{\sigma(k)}$, siempre que $j < k < \omega$,
- (2) $\{x_{\sigma(k)} : k < \omega\} \cap \{y_{\sigma(k)} : k < \omega\} = \emptyset$,
- (3) $\{x_{\sigma(k)} : k < \omega\} \cup \{y_{\sigma(k)} : k < \omega\}$ es un subespacio discreto de X_ω , y
- (4) el conjunto $\{k \in \omega : x_{\sigma(k)}(m) = y_{\sigma(k)}(m)\}$ es cofinito para cada $m < \omega$.

Además, por el corolario 5.13, para todo ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω , se tiene que $\lim_{\mathcal{U}}(x_{\sigma(k)})$ y $\lim_{\mathcal{U}}(y_{\sigma(k)})$ existen y coinciden. Finalmente, la observación 6.2 proporciona una sucesión doble en X_ω , lo que contradice la hipótesis con la que empezó la demostración. $\square$

Es bien conocido que el estudio de las funciones cardinales topológicas constituye una vía fructífera de investigación, ya que permite un análisis profundo y multifacético de los espacios topológicos y facilita comprender con mayor claridad su estructura.

Una vía menos conocida, pero igualmente interesante, es el estudio de las funciones *ordinales* topológicas; por ejemplo, los ordinales $\kappa(X)$ y $\sigma(X)$, introducidos por Arhangel'skiĭ y Franklin en [2]. En nuestro contexto surgen dos invariantes ordinales topológicos que resultan especialmente útiles:

DEFINICIÓN 6.9. Sea X un espacio compacto e infinito.

- (1) La altitud de X , denotada por $a(X)$, es el menor ordinal límite κ para el cual existe una familia estrictamente decreciente $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \text{CL}(X)$ que satisface $|\bigcap_{\alpha < \kappa} F_\alpha| = 1$.
- (2) La coinicialidad de X , denotada por $ci(X)$, es el menor ordinal límite κ para el cual existe un sistema inverso coinicial Σ_κ tal que X es homeomorfo al límite inverso X_κ .

Naturalmente, en relación con la definición 6.9, nuestra primera tarea consiste en justificar que dichos invariantes están bien definidos:

PROPOSICIÓN 6.10. Si X es un espacio compacto e infinito, entonces $a(X)$ está bien definido.

DEMOSTRACIÓN: Sean z un punto no aislado de X , $\kappa := \chi(z, X)$ y $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base local para z en X . Para cada $\alpha < \kappa$, la proposición 2.1(4) otorga $V_\alpha \in \mathcal{V}(z)$ con $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$; en particular, $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ también es una base local para z en X . Ahora, para todo $\alpha < \kappa$, sea $F_\alpha := \bigcap_{\beta \leq \alpha} \overline{V_\beta}$. Claramente, $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia

decreciente contenida en $\text{CL}(X)$. El resto de la demostración será dividido en una terna de enunciados.

Afirmación 1. $F_\alpha \neq \{z\}$ siempre que $\alpha < \kappa$.

Supongamos por el contrario que $F_\alpha = \{z\}$ para algún $\alpha < \kappa$. Una primera observación es que la colección

$$\mathcal{V} := \left\{ \bigcap_{\beta \in S} V_\beta : S \in [\alpha + 1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}$$

está contenida en $\mathcal{V}(z)$ y satisface $|\mathcal{V}| \leq |[\alpha + 1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}| < \kappa$. Por otra parte, notemos que si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces, como $\bigcap_{\beta \leq \alpha} \overline{V}_\beta = F_\alpha = \{z\} \subseteq V$, existe $S \in [\alpha + 1]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcap_{\beta \in S} V_\beta \subseteq \bigcap_{\beta \in S} \overline{V}_\beta \subseteq V$ (véase la proposición 2.1(7)). Así, $\mathcal{V}$ es una base local para z en X con $|\mathcal{V}| < \kappa$, lo cual es absurdo.

Afirmación 2. Para todo $\alpha < \kappa$, existe $\beta \in \kappa \setminus (\alpha + 1)$ tal que $F_\beta \subsetneq F_\alpha$.

Supongamos, en busca de una contradicción, que $\alpha < \kappa$ tiene la propiedad de que $F_\beta = F_\alpha$ para todo $\beta \in \kappa \setminus (\alpha + 1)$. Observemos que

$$\begin{aligned} z \in F_\alpha &= F_\alpha \cap \bigcap_{\alpha < \beta < \kappa} F_\beta = \bigcap_{\beta \leq \alpha} \overline{V}_\beta \cap \bigcap_{\alpha < \beta < \kappa} F_\beta \\ &\subseteq \bigcap_{\beta \leq \alpha} \overline{V}_\beta \cap \bigcap_{\alpha < \beta < \kappa} \overline{V}_\beta = \bigcap_{\beta < \kappa} \overline{V}_\beta \subseteq \bigcap_{\beta < \kappa} U_\beta = \{z\}; \end{aligned}$$

en consecuencia, $F_\alpha = \{z\}$, lo que contradice la Afirmación 1.

Afirmación 3. Existe una función estrictamente creciente $j : \text{cf}(\kappa) \rightarrow \kappa$ tal que $F_{j(\xi)} \subsetneq F_{j(\eta)}$, siempre que $\eta < \xi < \text{cf}(\kappa)$.

Supongamos que, para algún $\xi < \text{cf}(\kappa)$, hemos descrito el conjunto $\{j(\eta) : \eta < \xi\}$ con las propiedades deseadas. Para el número ordinal $\alpha := \sup\{j(\eta) : \eta < \xi\}$, la Afirmación 2 produce $j(\xi) \in \kappa \setminus (\alpha + 1)$ con $F_{j(\xi)} \subsetneq F_\alpha$. Por último, si $\eta < \xi$, entonces $j(\xi) > j(\eta)$ y $F_{j(\xi)} \subsetneq F_\alpha \subseteq F_{j(\eta)}$.

Finalmente, $\{F_{j(\xi)} : \xi < \text{cf}(\kappa)\}$ es una familia estrictamente decreciente contenida en $\text{CL}(X)$ que satisface $\bigcap_{\xi < \text{cf}(\kappa)} F_{j(\xi)} = \{z\}$. $\square$

En la prueba de la proposición 6.11 utilizaremos el siguiente hecho clásico de topología general, cuya demostración puede encontrarse en [4, Corolario 7.1.9(2), p. 202]: si X es un espacio compacto, Y es un espacio T_2 y $f : X \rightarrow Y$ es una condensación⁸, entonces f es un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 6.11. *Si X es un espacio compacto e infinito, entonces $\text{ci}(X)$ está bien definido y satisface la relación $\text{ci}(X) \leq a(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa := a(X)$. En virtud de la proposición 6.10, existen $z \in X$ y una familia estrictamente decreciente $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \text{CL}(X)$ que satisface $\bigcap_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \{z\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, denotemos por X_α el espacio cociente X/F_α , por $\sim_\alpha$ la relación de equivalencia correspondiente, y por $q_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ la proyección natural asociada.

⁸Es decir, f es una función continua y biyectiva.

Para cualesquiera $\alpha \leq \beta < \kappa$, sea $\pi_{\beta,\alpha} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ la función descrita por $\pi_{\beta,\alpha}([x]_\beta) := [x]_\alpha$. Observemos que, como $\sim_\beta \subseteq \sim_\alpha$ siempre que $\alpha \leq \beta < \kappa$, la función $\pi_{\beta,\alpha}$ está bien definida. Más aún, cada $\pi_{\beta,\alpha}$ es continua y satisface $\pi_{\gamma,\alpha} = \pi_{\beta,\alpha} \circ \pi_{\gamma,\beta}$ y $\pi_{\alpha,\alpha} = \text{Id}_{X_\alpha}$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \kappa$. En consecuencia, $\Sigma_\kappa := \{(X_\alpha, \pi_{\beta,\alpha}) : \alpha \leq \beta < \kappa\}$ es un sistema inverso. El resto de la prueba será dividido en una terna de enunciados.

Afirmación 1. Σ_κ es un sistema inverso coinitial.

Nuestro objetivo es demostrar que si $\alpha \leq \beta < \kappa$, entonces $\pi_{\beta,\alpha}$ es suprayectiva y no inyectiva. Primero, dado que F_β está contenido propiamente en F_α , existe un punto $y \in F_\alpha \setminus F_\beta$. Ahora, si $x \in X$ satisface $x \notin F_\alpha$, entonces $x \notin F_\beta$, lo cual implica que $q_\beta(x) = \{x\} = q_\alpha(x)$ y $\pi_{\beta,\alpha}(q_\beta(x)) = q_\alpha(x)$. Por otro lado, si $x \in F_\alpha$, entonces y y z satisfacen $q_\beta(y) \neq q_\beta(z)$ y $\pi_{\beta,\alpha}(q_\beta(y)) = q_\alpha(x) = \pi_{\beta,\alpha}(q_\beta(z))$.

Notemos que si $x \in X$, entonces $f(x) := (q_\alpha(x))_{\alpha < \kappa}$ es un elemento del límite inverso X_κ , ya que, para cualesquiera $\alpha \leq \beta < \kappa$, se tiene $\pi_{\beta,\alpha}(f(x)(\beta)) = \pi_{\beta,\alpha}(q_\beta(x)) = q_\alpha(x) = f(x)(\alpha)$. Lo anterior permite establecer una función $f : X \rightarrow X_\kappa$. Todavía más, dicha función es continua gracias a la proposición [3.1](#), pues, si $\alpha < \kappa$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$, se verifica la igualdad

$$f^{-1} \left[\pi_{\kappa,\alpha}^{-1}[U_\alpha] \right] = q_\alpha^{-1}[U_\alpha].$$

Afirmación 2. f es inyectiva.

Sean $x, y \in X$ distintos. Si para todo $\alpha < \kappa$ se satisface que $\{x, y\} \subseteq F_\alpha$, entonces la relación $\bigcap_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \{z\}$ asegura $x = y$, lo cual es falso. Por lo tanto, existe $\alpha < \kappa$ tal que $\{x, y\} \not\subseteq F_\alpha$; en particular, $x \not\sim_\alpha y$. Así, $f(x)(\alpha) \neq f(y)(\alpha)$ y, por ende, $f(x) \neq f(y)$.

Afirmación 3. f es suprayectiva.

Si p es un elemento de X_κ , entonces para cada $\alpha < \kappa$ existe $x_\alpha \in X$ tal que $p(\alpha) = q_\alpha(x_\alpha)$. Observemos que si $\alpha \leq \beta < \kappa$, entonces las igualdades

$$q_\alpha(x_\alpha) = p(\alpha) = \pi_{\beta,\alpha}(p(\beta)) = \pi_{\beta,\alpha}(q_\beta(x_\beta)) = q_\alpha(x_\beta)$$

implican que $x_\alpha \sim_\alpha x_\beta$; en especial, $x_\alpha = x_\beta$ cuando $x_\alpha \notin F_\alpha$.

Si para todo $\alpha < \kappa$ se cumple que $x_\alpha \in F_\alpha$, entonces $f(z) = p$, ya que, para cada $\alpha < \kappa$, se tiene $f(z)(\alpha) = q_\alpha(z) = F_\alpha = q_\alpha(x_\alpha) = p(\alpha)$. Por otro lado, si existe $\alpha < \kappa$ con $x_\alpha \notin F_\alpha$, entonces $x_\alpha \sim_\beta x_\beta$ para cualquier $\beta < \kappa$. Efectivamente, si $\alpha \leq \beta < \kappa$, entonces $x_\alpha = x_\beta$ implica que $x_\alpha \sim_\beta x_\beta$, mientras que si $\beta < \alpha$, se tiene de inmediato que $x_\alpha \sim_\beta x_\beta$. Así, $f(x_\alpha) = p$, pues, para todo $\beta < \kappa$, se satisface $f(x_\alpha)(\beta) = q_\beta(x_\alpha) = q_\beta(x_\beta) = p(\beta)$.

Finalmente, como cada espacio X_α es T_2 de acuerdo con la proposición [2.10](#), se deduce que X_κ también lo es (véase la proposición [3.4\(1\)](#)). En síntesis, dado que X es compacto, X_κ tiene la propiedad de Hausdorff y f es una condensación, se deduce que los espacios X y X_κ son homeomorfos. $\square$

Tras haber justificado la correcta definición de la noción de coinicialidad en un espacio compacto e infinito, es momento de exponer una de sus propiedades fundamentales, la cual resulta central para el desarrollo de este trabajo.

Sea X un espacio compacto e infinito. Notemos que si $ci(X) = \omega$ y Σ_ω es un sistema inverso coinicial para el cual X_ω es homeomorfo a X , entonces el lema 6.8 implica que X_ω contiene una sucesión doble y, en consecuencia, X también contiene una sucesión doble.

El párrafo anterior constituye la demostración de la proposición 6.12. Este resultado concluye la presente sección y establece un puente entre la noción de sucesión doble y el concepto de la coinicialidad de un espacio compacto e infinito. Cabe destacar que dicha conexión será fundamental para la demostración del teorema 7.7.

PROPOSICIÓN 6.12. *Si X es un espacio compacto e infinito que no contiene sucesiones dobles, entonces $ci(X) > \omega$.*

7. Un espacio de Efimov bajo el Principio Diamante

La meta de la presente sección es construir un espacio de Efimov mediante un principio combinatorio de trascendental importancia para la topología conjuntista. Para ello, es necesario establecer primero los términos y resultados básicos de la combinatoria de conjuntos, los cuales, junto con el material de las secciones pasadas, permitirán obtener una demostración del teorema 7.7.

Asimismo, conviene mencionar que, para el lector que desee profundizar en los conceptos conjuntistas de este apartado del texto, se recomienda consultar [8], donde se abordan en detalle estas nociones.

DEFINICIÓN 7.1. *Sean κ un ordinal límite y A un subconjunto de κ .*

- (1) *A es acotado en κ si existe $\beta < \kappa$ tal que, para todo $\alpha \in A$, se cumple $\alpha < \beta$.*
- (2) *A es cerrado en κ si, para cada ordinal límite $\delta < \kappa$, el hecho de que $A \cap \delta$ no sea acotado en δ implica que $\delta \in A$.*
- (3) *A es un club en κ si es cerrado y no acotado en κ .*
- (4) *A es estacionario en κ si $A \cap B \neq \emptyset$ para todo conjunto club $B \subseteq \kappa$.*

Un estudio sistemático de los conceptos anteriores puede encontrarse en las secciones 1.3 y 1.4 de [8]. Para nuestros propósitos, serán relevantes tres hechos, que se pueden consultar en la página 16 del texto mencionado, y que se recogen en la siguiente observación para su uso posterior:

OBSERVACIÓN 7.2. *Sean κ un ordinal límite y E un subconjunto estacionario de κ .*

- (1) *E es no acotado en κ .*
- (2) *Si C es un club en κ , entonces $C \cap E$ es estacionario en κ .*
- (3) *Si $F \subseteq \kappa$ y $E \subseteq F$, entonces F es estacionario en κ .*

A continuación presentamos la herramienta quintaesencial para el desarrollo de esta sección:

DEFINICIÓN 7.3. *Una familia $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión $\diamond$ si los siguientes enunciados son ciertos:*

- (1) $A_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$, y
- (2) si A es un subconjunto de ω_1 , entonces el conjunto

$$\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$$

es estacionario en ω_1 .

Lo anterior puede ser descrito intuitivamente de la siguiente manera: una sucesión $\diamond$ tiene la propiedad de que, dado un subconjunto de ω_1 , la sucesión *adivina* una cantidad estacionaria de veces los segmentos iniciales de dicho subconjunto.

El *Principio Combinatorio de Jensen*, también llamado *Principio Diamante*, se enuncia de la siguiente manera: existe una sucesión $\diamond$. A partir de ahora, utilizaremos el símbolo $\diamond$ para representar dicho enunciado.

Originalmente, $\diamond$ fue introducido por Ronald Jensen en 1972 en el contexto del estudio del Axioma de Constructibilidad —V=L— y de una de sus consecuencias más relevantes: la existencia de un árbol de Souslin. Él lo formuló como una herramienta combinatoria que permite anticipar de manera coherente subconjuntos de ω_1 ; desde entonces, ha desempeñado un papel central tanto en la teoría de conjuntos como en la topología conjuntista.

Por otra parte, la *Hipótesis del Continuo* (por sus siglas en inglés, CH) es el enunciado $\mathfrak{c} = \omega_1$. Históricamente, CH fue propuesta por Georg Cantor hacia 1878, en el marco de su investigación sobre los tamaños del infinito. Posteriormente, gracias al trabajo de Kurt Gödel —quien en 1940 demostró que CH no puede ser refutada dentro de ZFC— y de Paul Cohen —quien en 1963 probó que CH tampoco puede ser demostrada en ZFC—, se sabe que CH es independiente de ZFC.

Una relación fundamental entre $\diamond$ y CH, que exponemos a continuación para familiarizar al lector con el uso de las sucesiones $\diamond$, es la siguiente:

PROPOSICIÓN 7.4. *Si $\diamond$ es cierto, entonces CH es cierta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una sucesión $\diamond$. En virtud de que la desigualdad $\omega_1 \leq \mathfrak{c}$ es un resultado de ZFC, nuestro objetivo es usar la sucesión $\diamond$ para construir una función inyectiva de $P(\omega)$ en ω_1 , pues es un hecho básico de teoría de conjuntos que $P(\omega)$ y $\mathbb{R}$ están en correspondencia biyectiva; en particular, $|P(\omega)| = \mathfrak{c}$.

Notemos primero que, si A es un subconjunto de ω , entonces el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario y, por esta razón, es no acotado en ω_1 (véase la observación 7.2(1)). De esta manera, existe $\omega < \alpha < \omega_1$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$; en especial, $A = A_\alpha$.

Por lo anterior, la función $f : P(\omega) \rightarrow \omega_1$ dada por $f(A) := \min\{\alpha < \omega_1 : A = A_\alpha\}$ está bien definida. Además, si $A, B \subseteq \omega$ satisfacen $f(A) = f(B)$, entonces $A = A_{f(A)} = A_{f(B)} = B$, lo que implica que f es inyectiva y, por extensión, que $\mathfrak{c} = \omega_1$. $\square$

Existen diversas variantes del Principio Diamante en la literatura. Para nuestros propósitos, la versión que necesitamos queda establecida en el lema 7.6 y será demostrada a partir del lema 7.5, que enunciamos a continuación:

LEMA 7.5. *Para cada función biyectiva $f : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ existe un conjunto club $C \subseteq \omega_1$ con la propiedad de que todo $\alpha \in C$ es un ordinal límite que satisface $f[\alpha \times \alpha] = \alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ una función biyectiva. Observemos que si $\xi < \omega_1$, entonces para cada $\eta < \xi$ existen $\alpha_\eta, \beta_\eta < \omega_1$ tales que $f(\alpha_\eta, \beta_\eta) = \eta$. De esta manera, si

$$g(\xi) := \sup (\{\alpha_\eta : \eta < \xi\} \cup \{\beta_\eta : \eta < \xi\}) + 1,$$

el procedimiento anterior genera una función $g : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ con la característica de que $\xi \subseteq f[g(\xi) \times g(\xi)]$ para todo $\xi < \omega_1$.

Ahora, sea $s : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ la función definida por $s(\xi) := \xi + 1$. De acuerdo con [8, Lema 1.26, p. 12], existe un club C en ω_1 tal que, si $\alpha \in C$, entonces se cumplen $f[\alpha \times \alpha] \subseteq \alpha$, $g[\alpha] \subseteq \alpha$ y $s[\alpha] \subseteq \alpha$.

Si α es un elemento de C , entonces la condición $s[\alpha] \subseteq \alpha$ garantiza que α es un ordinal límite. Por otra parte, si $\xi < \alpha$, los hechos $s(\xi) \in \alpha$ y $g(s(\xi)) \in \alpha$ implican que $\xi \in s(\xi) \subseteq f[g(s(\xi)) \times g(s(\xi))] \subseteq f[\alpha \times \alpha]$. En suma, se tiene la igualdad $f[\alpha \times \alpha] = \alpha$, siempre que $\alpha \in C$. $\square$

Para simplificar la escritura de la variante del Principio Diamante que requerimos, convengamos que, si α es un número ordinal, entonces ${}^\alpha 2$ denota la colección de funciones de α en el número natural 2; es decir, $x \in {}^\alpha 2$ si y sólo si $x : \alpha \rightarrow 2$.

LEMA 7.6. *Si $\diamond$ es cierto, entonces existe un conjunto $\{(x_n^\alpha)_{n < \omega} : \alpha < \omega_1\}$ que tiene las siguientes propiedades:*

- (1) $(x_n^\alpha)_{n < \omega}$ es una sucesión en ${}^\alpha 2$ para todo $\alpha < \omega_1$, y
- (2) si $(y_n)_{n < \omega}$ es una sucesión en ${}^{\omega_1} 2$, entonces el conjunto

$$\{\alpha < \omega_1 : (y_n \upharpoonright \alpha)_{n < \omega} = (x_n^\alpha)_{n < \omega}\}$$

es estacionario en ω_1 .

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ una función biyectiva, C un conjunto club en ω_1 con las características del lema 7.5, y $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una sucesión $\diamond$. Para cualesquiera $\alpha < \omega_1$ y $n < \omega$, sea $x_n^\alpha : \alpha \rightarrow 2$ la función descrita por $x_n^\alpha(\xi) = 1$ si y sólo si $f(n, \xi) \in A_\alpha$. Claramente, $(x_n^\alpha)_{n < \omega}$ es una sucesión en ${}^\alpha 2$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Asimismo, si $(y_n)_{n < \omega}$ es una sucesión en ${}^{\omega_1} 2$, $F := \{\alpha < \omega_1 : (y_n \upharpoonright \alpha)_{n < \omega} = (x_n^\alpha)_{n < \omega}\}$, $A := \{(n, \xi) \in \omega \times \omega_1 : y_n(\xi) = 1\}$ y $E := \{\alpha < \omega_1 : f[A] \cap \alpha = A_\alpha\}$, entonces E es un subconjunto estacionario de ω_1 , lo cual implica que $C \cap E$ también lo es (véase la observación 7.2(2)).

Finalmente, notemos que si $\alpha \in C \cap E$, $n < \omega$ y $\xi < \alpha$, entonces

$$\begin{aligned} (y_n \upharpoonright \alpha)(\xi) = 1 &\longleftrightarrow y_n(\xi) = 1 \longleftrightarrow (n, \xi) \in A \cap (\alpha \times \alpha) \\ &\longleftrightarrow f(n, \xi) \in f[A] \cap \alpha \longleftrightarrow f(n, \xi) \in A_\alpha \longleftrightarrow x_n^\alpha(\xi) = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(y_n \upharpoonright \alpha)_{n < \omega} = (x_n^\alpha)_{n < \omega}$ para todo $\alpha \in C \cap E$. Por lo tanto, $C \cap E \subseteq F$, lo que implica que F es un subconjunto estacionario de ω_1 (véase la observación 7.2(3)). $\square$

Todo el esfuerzo llevado a cabo a lo largo de este artículo culmina en el teorema 7.7, que enunciamos y demostramos a continuación:

TEOREMA 7.7 (S. Geschke). *Si $\diamond$ es cierto, entonces existe un espacio de Efimov que es cero-dimensional, carece de puntos aislados y tiene coinicialidad ω_1 .*

DEMOSTRACIÓN: Nuestro objetivo es construir un sistema inverso simple Σ_{ω_1} que posea las siguientes propiedades:

- (1) X_α es un subespacio perfecto⁹ de $D(2)^\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$,
- (2) $\pi_{\beta,\alpha} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ es la función dada por $\pi_{\beta,\alpha}(x) := x|_\alpha$, siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$,
y
- (3) el sistema inverso Σ_ω coincide con el sistema inverso simple descrito en la proposición 4.8.

De ahora en adelante, para cualesquiera $\beta < \alpha < \omega_1$, $p_{\alpha,\beta} : D(2)^\alpha \rightarrow D(2)$ y $q_{\alpha,\beta} : D(2)^\alpha \rightarrow D(2)^\beta$ serán las funciones continuas determinadas mediante $q_{\alpha,\beta}(x) := x|_\beta$ y $p_{\alpha,\beta}(x) := x(\beta)$. Asimismo, $\{(x_n^\alpha)_{n < \omega} : \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto con las características del lema 7.6.

Antes de empezar la construcción, es pertinente hacer un comentario sobre el espacio X_α cuando α es un ordinal límite. Dado que Σ_{ω_1} será un sistema inverso simple, el espacio X_α queda, en principio, definido de manera automática. Sin embargo, es importante tener en cuenta que, aunque X_α , entendido como el límite inverso del sistema Σ_α , no es un subconjunto de $D(2)^\alpha$, la proposición 3.8 permite reemplazar X_α por el espacio homeomorfo $f_\alpha[X_\alpha]$, que sí constituye un subespacio perfecto de $D(2)^\alpha$ (véase la proposición 4.9).

En particular, por el tercer inciso de la proposición 3.8, la sustitución $\pi_{\alpha,\beta}^* : f_\alpha[X_\alpha] \rightarrow X_\beta$ de la función de ligadura $\pi_{\alpha,\beta} : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ queda descrita por $\pi_{\alpha,\beta}^*(f_\alpha(x)) := f_\alpha(x)|_\beta = x(\beta) = \pi_{\alpha,\beta}(x)$, y la construcción puede realizarse sin inconvenientes.

Por lo anterior, sólo necesitamos describir el procedimiento para construir el espacio $X_{\alpha+1}$ para cada $\omega \leq \alpha < \omega_1$. Con esto en mente, supongamos que para algún ordinal $\omega \leq \alpha < \omega_1$ hemos construido la familia $\{(X_\beta, \pi_{\gamma,\beta}) : \beta \leq \gamma \leq \alpha\}$ con las propiedades requeridas. Resta explicar cómo obtener el espacio $X_{\alpha+1}$. Observemos que X_α , al ser un subespacio de $D(2)^\alpha$, es un espacio T_2 , primero numerable y cero-dimensional (véanse la proposición 2.1(1) y el corolario 2.2).

Afirmación 1. Si $(x_n^\alpha)_{n < \omega}$ no es una sucesión doble en X_α , entonces existen $z \in X_\alpha$ y $C_\alpha, D_\alpha \in \text{CL}(X_\alpha)$ que tienen las siguientes propiedades:

- (1) $C_\alpha \cup D_\alpha = X_\alpha$ y $C_\alpha \cap D_\alpha = \{z\}$, y
- (2) si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces $V \setminus C_\alpha \neq \emptyset \neq V \setminus D_\alpha$.

Sean $z \in X_\alpha$, y $\{A_n : n < \omega\}$ y $\{a_n : n < \omega\}$ sucesiones con las características del lema 2.4. Claramente,

$$C_\alpha := \{z\} \cup \bigcup_{n < \omega} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}) \quad \text{y} \quad D_\alpha := \{z\} \cup \bigcup_{n < \omega} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2})$$

satisfacen la condición (1) (véase el lema 2.6).

En cuanto al inciso (2), si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces existe $m < \omega$ tal que $A_m \subseteq V$. Luego, si suponemos sin perder generalidad que m es un número par, entonces $a_m \in C_\alpha \setminus \{z\}$ y $a_{m+1} \in D_\alpha \setminus \{z\}$, lo cual implica que $a_m \in V \setminus D_\alpha$ y $a_{m+1} \in V \setminus C_\alpha$.

⁹Es decir, X_α es un subconjunto cerrado de $D(2)^\alpha$ que, al ser visto como subespacio de este, no tiene puntos aislados.

Afirmación 2. Si $(x_n^\alpha)_{n < \omega}$ es una sucesión doble en X_α , entonces existen $z \in X_\alpha$, una sucesión estrictamente creciente (m_i) en ω y conjuntos $C_\alpha, D_\alpha \in \text{CL}(X_\alpha)$ que tienen las siguientes propiedades:

- (1) $z \notin \{x_n^\alpha : n < \omega\}$,
- (2) $(x_{2m_i}^\alpha)$ y $(x_{2m_i+1}^\alpha)$ convergen a z en X_α ,
- (3) $C_\alpha \cup D_\alpha = X_\alpha$ y $C_\alpha \cap D_\alpha = \{z\}$,
- (4) $\{x_{2m_i}^\alpha : i < \omega\} \subseteq C_\alpha$ y $\{x_{2m_i+1}^\alpha : i < \omega\} \subseteq D_\alpha$, y
- (5) si $V \in \mathcal{V}(z)$, entonces $V \setminus C_\alpha \neq \emptyset \neq V \setminus D_\alpha$.

Por el lema 6.5, existen $z \in X_\alpha$ y una sucesión estrictamente creciente (n_i) en ω tales que $z \notin \{x_n^\alpha : n < \omega\}$ y las sucesiones $(x_{2n_i}^\alpha)$ y $(x_{2n_i+1}^\alpha)$ convergen a z en X_α ; en especial, la condición (1) es verdadera.

Además, si $\{A_n : n < \omega\}$ es una sucesión con las características del lema 2.4, por el lema 6.6 existen una subsucesión (m_i) de (n_i) y una sucesión estrictamente creciente (k_i) en ω que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $k_0 = 0$,
- (b) $\{x_{2m_i}^\alpha, x_{2m_i+1}^\alpha\} \subseteq A_{k_i}$ siempre que $i < \omega$, y
- (c) $\{x_{2m_i}^\alpha, x_{2m_i+1}^\alpha\} \cap A_{k_j} = \emptyset$ si $j \in \omega \setminus (i+1)$.

Notemos que, como (m_i) es una subsucesión de (n_i) , las sucesiones $(x_{2m_i}^\alpha)$ y $(x_{2m_i+1}^\alpha)$ convergen a z en X_α ; es decir, la condición (2) es satisfecha.

Ahora, para cada $i < \omega$, existen $B_i, C_i \in \text{CO}(X_\alpha)$ tales que $x_{2m_i}^\alpha \in B_i$, $x_{2m_i+1}^\alpha \in C_i$, $B_i \cup C_i = A_{k_i} \setminus A_{k_{i+1}}$ y $B_i \cap C_i = \emptyset$ (véase el lema 2.3). Claramente,

$$C_\alpha := \{z\} \cup \bigcup_{i < \omega} B_i \quad \text{y} \quad D_\alpha := \{z\} \cup \bigcup_{i < \omega} C_i$$

satisfacen la condición (3) (véase el lema 2.6). Más aún, como $\{x_{2m_i}^\alpha : i < \omega\} \subseteq C_\alpha$ y $\{x_{2m_i+1}^\alpha : i < \omega\} \subseteq D_\alpha$, la condición (4) también es cierta.

Con respecto a la condición (5), si $V \in \mathcal{V}(z)$, existe $i < \omega$ con $A_{k_i} \subseteq V$, ya que $\{A_{k_j} : j < \omega\}$ es una base local para z en X (véase la observación 2.5). Lo que sucede ahora es que $x_{2m_i}^\alpha \in B_i \subseteq A_{k_i} \subseteq V$ y $x_{2m_i+1}^\alpha \in C_i \subseteq A_{k_i} \subseteq V$ implican que $x_{2m_i}^\alpha \in C_\alpha \setminus \{z\}$ y $x_{2m_i+1}^\alpha \in D_\alpha \setminus \{z\}$ y, por extensión, que $x_{2m_i}^\alpha \in V \setminus D_\alpha$ y $x_{2m_i+1}^\alpha \in V \setminus C_\alpha$.

Equipados con la Afirmación 1 y la Afirmación 2, definamos

$$E_\alpha := \{x \in D(2)^{\alpha+1} : x \restriction_\alpha \in C_\alpha \wedge x(\alpha) = 0\} \quad \text{y} \\ F_\alpha := \{x \in D(2)^{\alpha+1} : x \restriction_\alpha \in D_\alpha \wedge x(\alpha) = 1\}.$$

Observemos que las igualdades

$$E_\alpha = q_{\alpha+1, \alpha}^{-1}[C_\alpha] \cap p_{\alpha+1, \alpha}^{-1}\{0\} \quad \text{y} \quad F_\alpha = q_{\alpha+1, \alpha}^{-1}[D_\alpha] \cap p_{\alpha+1, \alpha}^{-1}\{1\}$$

implican que E_α y F_α son subconjuntos cerrados de $D(2)^{\alpha+1}$.

Afirmación 3. Los siguientes enunciados son ciertos para el conjunto $X_{\alpha+1} := E_\alpha \cup F_\alpha$.

- (1) $X_{\alpha+1}$ es un subespacio perfecto de $D(2)^{\alpha+1}$.
- (2) La función $\pi_{\alpha+1, \alpha} : X_{\alpha+1} \rightarrow X_\alpha$ dada por $\pi_{\alpha+1, \alpha}(x) := x \restriction_\alpha$ está bien definida y es suprayectiva.

$$(3) \left| X_{\alpha+1} \cap \pi_{\alpha+1,\alpha}^{-1}\{z\} \right| = 2.$$

$$(4) \text{ Para cualquier } x \in X_\alpha \setminus \{z\}, \text{ se tiene } \left| X_{\alpha+1} \cap \pi_{\alpha+1,\alpha}^{-1}\{x\} \right| = 1.$$

Evidentemente, como E_α y F_α son cerrados en $D(2)^{\alpha+1}$, el conjunto $X_{\alpha+1}$ también lo es. Además, si $x \in X_{\alpha+1}$, entonces $x \upharpoonright_\alpha \in C_\alpha \cup D_\alpha = X_\alpha$, lo cual demuestra la validez del inciso (2).

Por otra parte, si $x \in C_\alpha \setminus \{z\}$, entonces $x \frown 0$ es el único elemento de $X_{\alpha+1}$ tal que $\pi_{\alpha+1,\alpha}(x \frown 0) = x$. De manera similar, si $x \in D_\alpha \setminus \{z\}$, entonces $x \frown 1$ es el único elemento de $X_{\alpha+1}$ que satisface $\pi_{\alpha+1,\alpha}(x \frown 1) = x$. Asimismo, $z \frown 0$ y $z \frown 1$ son los únicos elementos de $X_{\alpha+1}$ con $\pi_{\alpha+1,\alpha}(z \frown 0) = z = \pi_{\alpha+1,\alpha}(z \frown 1)$. Por consiguiente, $X_{\alpha+1}$ es una extensión simple de X_α .

Para comprobar que $X_{\alpha+1}$ no tiene puntos aislados, tomemos primero $u \in X_{\alpha+1}$ y supongamos que $u \in E_\alpha \setminus \{z \frown 0\}$. Si $S \in [\alpha]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $u \upharpoonright_\alpha$ es un elemento de $(X_\alpha \setminus D_\alpha) \cap \bigcap_{\beta \in S} p_{\alpha,\beta}^{-1}\{u(\beta)\}$. Luego, como X_α no tiene puntos aislados, existen puntos distintos v y w en el conjunto abierto mencionado. Así, como $v, w \in C_\alpha$, se sigue que $v \frown 0$ y $w \frown 0$ son elementos distintos de $X_{\alpha+1} \cap \bigcap_{\beta \in S \cup \{\alpha\}} p_{\alpha+1,\beta}^{-1}\{u(\beta)\}$, lo que implica que u no es aislado en $X_{\alpha+1}$.

Un argumento similar al expuesto en el párrafo previo muestra que todos los elementos de $F_\alpha \setminus \{z \frown 1\}$ no son puntos aislados en $X_{\alpha+1}$. Para demostrar que $z \frown 0$ y $z \frown 1$ no son aislados en $X_{\alpha+1}$, presentaremos a continuación los detalles de manera simultánea.

Si $S \in [\alpha]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces z es un elemento de $V := X_\alpha \cap \bigcap_{\beta \in S} p_{\alpha,\beta}^{-1}\{z(\beta)\}$. Por lo establecido en la Afirmación 1 y en la Afirmación 2, existen $u \in V \setminus C_\alpha$ y $v \in V \setminus D_\alpha$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} u \frown 1 &\in (X_{\alpha+1} \setminus \{z \frown 1\}) \cap \bigcap_{\beta \in S \cup \{\alpha\}} p_{\alpha+1,\beta}^{-1}\{(z \frown 1)(\beta)\} \text{ y} \\ v \frown 0 &\in (X_{\alpha+1} \setminus \{z \frown 0\}) \cap \bigcap_{\beta \in S \cup \{\alpha\}} p_{\alpha+1,\beta}^{-1}\{(z \frown 0)(\beta)\}. \end{aligned}$$

La Afirmación 3 completa la construcción del sistema inverso simple Σ_{ω_1} . Resta demostrar un cuarto enunciado antes de explicar por qué el espacio X_{ω_1} satisface todas las condiciones deseadas.

Afirmación 4. X_{ω_1} no tiene sucesiones dobles.

Supongamos, en busca de una contradicción, que (y_n) es una sucesión doble en X_{ω_1} . Por el lema 6.7, existe $\beta < \omega_1$ tal que, para todo $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta$, la sucesión $(y_n(\alpha))$ es doble en X_α . Ahora bien, como el conjunto

$$\{\alpha < \omega_1 : (y_n(\alpha))_{n < \omega} = (x_n^\alpha)_{n < \omega}\} = \{\alpha < \omega_1 : (f_{\omega_1}(y_n) \upharpoonright_\alpha)_{n < \omega} = (x_n^\alpha)_{n < \omega}\}$$

es estacionario en ω_1 (véanse la proposición 3.8 y el lema 7.6), por la observación 7.2(1) existe $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta$ tal que $(y_n(\alpha)) = (x_n^\alpha)$; en particular, (x_n^α) es una sucesión doble en X_α .

De acuerdo con la Afirmación 2, existen $z \in X_\alpha$ y una sucesión estrictamente creciente (m_i) en ω tales que $z \notin \{x_n^\alpha : n < \omega\}$ y las sucesiones $(x_{2m_i}^\alpha)$ y $(x_{2m_i+1}^\alpha)$ convergen a z en X_α . Notemos que, como $z \notin \{y_n(\alpha) : n < \omega\}$, para cada $n < \omega$ se tiene que el punto $y_n(\alpha + 1)$ es el único elemento de $X_{\alpha+1}$ que satisface $\pi_{\alpha+1,\alpha}(y_n(\alpha + 1)) = y_n(\alpha)$.

Por lo tanto, dado que $(x_{2m_i}^\alpha)^\frown 0 \in E_\alpha$ y $(x_{2m_i+1}^\alpha)^\frown 1 \in F_\alpha$ son los únicos elementos de $X_{\alpha+1}$ que extienden, correspondientemente, a $x_{2m_i}^\alpha = y_{2m_i}(\alpha)$ y $x_{2m_i+1}^\alpha = y_{2m_i+1}(\alpha)$, se sigue que

$$\{y_{2m_i}(\alpha + 1) : i < \omega\} \subseteq E_\alpha \quad \text{y} \quad \{y_{2m_i+1}(\alpha + 1) : i < \omega\} \subseteq F_\alpha.$$

Más todavía, como E_α y F_α son subconjuntos cerrados de $X_{\alpha+1}$, las cerraduras de $\{y_{2m_i}(\alpha + 1) : i < \omega\}$ y $\{y_{2m_i+1}(\alpha + 1) : i < \omega\}$ están contenidas, respectivamente, en E_α y F_α .

Por último, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre sobre ω con la propiedad de que $B := \{m_i : i < \omega\}$ pertenece a $\mathcal{U}$, el cual existe por la proposición 5.4(2), entonces, como $(y_n(\alpha + 1))$ es una sucesión doble, existe $y \in X_{\alpha+1}$ con $\lim_{\mathcal{U}}(y_{2n}(\alpha + 1)) = y = \lim_{\mathcal{U}}(y_{2n+1}(\alpha + 1))$. Luego,

$$\begin{aligned} y &\in \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n}(\alpha + 1)) \cap \text{adh}_{\mathcal{U}}(y_{2n+1}(\alpha + 1)) \\ &= \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{\{y_{2n}(\alpha + 1) : n \in A\}} \cap \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{\{y_{2n+1}(\alpha + 1) : n \in A\}} \\ &\subseteq \overline{\{y_{2n}(\alpha + 1) : n \in B\}} \cap \overline{\{y_{2n+1}(\alpha + 1) : n \in B\}} \\ &= \overline{\{y_{2m_i}(\alpha + 1) : i < \omega\}} \cap \overline{\{y_{2m_i+1}(\alpha + 1) : i < \omega\}} \subseteq E_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset, \end{aligned}$$

lo cual es la contradicción deseada.

Finalmente, observemos que X_{ω_1} es un espacio compacto, en virtud de la proposición 3.4(2). También, la proposición 4.9 certifica que X_{ω_1} no tiene puntos aislados. Por otra parte, como todo sistema inverso simple es un sistema inverso coinitial (véase la proposición 4.3), se cumple que $ci(X_{\omega_1}) \leq \omega_1$.

Asimismo, dado que X_{ω_1} es homeomorfo al subespacio $f_{\omega_1}[X_{\omega_1}]$ del producto $D(2)^{\omega_1}$ (véase la proposición 3.8), el cual es cero-dimensional por la proposición 2.1(3), el inciso (1) de dicho resultado garantiza que X_{ω_1} también es cero-dimensional.

Además, por la Afirmación 4 y la proposición 6.12, se tiene que $ci(X_{\omega_1}) > \omega$, lo que implica que $ci(X_{\omega_1}) = \omega_1$. Más aún, de acuerdo con la Afirmación 4 y la proposición 6.3, X_{ω_1} no contiene copias de $\omega + 1$, y tampoco contiene copias de $\beta\omega$, gracias al corolario 4.15. En síntesis, X_{ω_1} es un espacio de Efimov que es cero-dimensional, carece de puntos aislados y tiene coinitialidad ω_1 . $\square$

Agradecimientos: Queremos dedicar este artículo a nuestros maestros, el Dr. Fernando Hernández Hernández y el Dr. Roberto Pichardo Mendoza, quienes nos introdujeron al desafiante Problema de Efimov. Les expresamos nuestro más sincero agradecimiento por su guía, sus enseñanzas y, sobre todo, por la inspiración que nos transmitieron a lo largo de nuestro aprendizaje, sin la cual este trabajo no habría sido posible. Esperamos que este artículo refleje, aunque modestamente, la pasión por la topología que siempre nos inculcaron durante nuestros años como sus estudiantes.

Por otra parte, agradecemos también a la persona encargada del arbitraje del presente artículo por su amable retroalimentación y por señalar diversas imprecisiones, cuya corrección contribuyó a mejorar sustancialmente la calidad del texto.

Bibliografía

- [1] Alexandroff, P. S., Urysohn, P. S., *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandlingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Eerste Sectie, **14(1)** (1929), 1–96.
- [2] Arhangel'skiĭ, A. V., Franklin, S. P., *Ordinal invariants for topological spaces*, Mich. Math. J., **15(3)** (1968), 313–320.
- [3] Brouwer, L. E. J., *On the structure of perfect sets of points*, KNAW, Proceedings, **12**, 1909–1910, Amsterdam, (1910), 785–794.
- [4] Casarrubias Segura, F. y Tamariz Mascarúa, Á., *Elementos de topología general*, Aportaciones Matemáticas, Serie *Textos*, núm. 37, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [5] Čech, E., *On bicompat spaces*, Ann. of Math. (2), **38(4)** (1937), 823–844.
- [6] Chávez Cortés, A., *El enigma de Efimov: un espacio compacto imposible*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2025.
- [7] Efimov, B. E., *The imbedding of the Stone–Čech compactifications of discrete spaces into bicompat*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **189** (1969), 244–246.
- [8] Gallardo Quiroz, J. A., *El principio combinatorio de Jensen*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
- [9] Geschke, S., *The coinitalities of Efimov spaces*, Set Theory and Its Applications (L. Babinkostova et al., eds.), Contemp. Math., vol. 533, pp. 259–265, 2011.
- [10] Geschke, S., *The coinitality of a compact space*, Topol. Proc., **30(1)** (2006), 237–250.
- [11] Hart, K. P., *Efimov's problem*, Open Problems in Topology II (E. Pearl, ed.), Elsevier, pp. 171–177, 2007.
- [12] Hernández Hernández, F., *Curso de Topología: un enfoque conjuntista*, 1ª ed., Aportaciones Matemáticas, Serie *Textos*, núm. 43, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2021.
- [13] Hernández Hernández, F., *Teoría de conjuntos: una introducción*, 2ª ed., Aportaciones Matemáticas, Serie *Textos*, núm. 13, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [14] Pichardo Mendoza, R., *Rudimentos de la teoría de espacios polacos*, Topología y sus aplicaciones 4 (J. J. Angoa Amador, R. Escobedo y M. Ibarra, eds.), Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, pp. 3–26, 2016.
- [15] Ríos Herrejón, A., *Una introducción al problema de Efimov*, Tesina de maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2021.
- [16] Šapirovskii, B. E., *Maps onto Tychonoff cubes*, Russ. Math. Surv., **35(3)** (1980), 145–156.
- [17] Tychonoff, A., *Über einen Funktionenraum*, Math. Ann., **111** (1935), 762–766.
- [18] Walker, R. C., *The Stone–Čech compactification*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, vol. 83, 1974.

Correos electrónicos:

alexischavez2599@gmail.com (Alexis Chávez Córtes)

chanchito@ciencias.unam.mx (Alejandro Ríos Herrejón)

CAPÍTULO 6

El Teorema de Erdős-Rado y el Lema del Δ -sistema

Luis Enrique Aponte Pérez, Iván Martínez Ruiz,
Cesar Alonzo Moreno Espinoza, Oleg Okunev.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción	149
2. Preliminares	150
3. Teorema de Erdős-Rado	151
4. El lema del Δ -sistema	156
Bibliografía	161

1. Introducción

Dos teoremas muy famosos en teoría de conjuntos sobre combinatoria infinita, además del teorema de Ramsey, son el *Teorema de Erdős-Rado* y el *Lema del Δ -sistema*.

El *Teorema de Erdős-Rado* llamado así por Paul Erdős y Richard Rado, es un resultado que extiende el teorema de Ramsey para conjuntos no numerables. La pregunta central del teorema de Erdős-Rado aborda cómo se comportan los conjuntos infinitos cuando se dividen en varias partes. Este problema se conecta con la idea más general de que, al trabajar con conjuntos infinitos, ciertas propiedades deben necesariamente aparecer bajo condiciones específicas. En otras palabras, el teorema ofrece una garantía sobre la presencia de estructuras organizadas dentro de particiones de conjuntos infinitos.

El *Lema del Δ -sistema* es un poco más intuitivo de plantear. Dada una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ ¿podemos encontrar una subfamilia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ tal que cualesquiera dos elementos de $\mathcal{G}$ tengan la misma intersección? Siempre podemos encontrar una familia $\mathcal{G}$ con esas características, digamos $\mathcal{F} = \emptyset$. Por tanto, para que la pregunta anterior sea interesante, es necesario pedir más; por ejemplo, pedir que nuestra familia $\mathcal{G}$ sea infinita.

El objetivo de este trabajo es exponer, de manera breve, estos dos resultados. Además de las demostraciones, daremos ciertas aplicaciones de dichos resultados. En la segunda sección daremos algunas nociones y definiciones que usaremos en lo siguiente. En la tercera sección expondremos el Teorema de Erdős-Rado. Finalmente, en la cuarta sección expondremos el Lema del Δ -sistema.

2. Preliminares

En esta sección expondremos, de manera breve, algunas definiciones y nociones que usaremos durante este capítulo; sin embargo, no daremos un estudio detallado sobre estos temas. Además, supondremos que el lector tiene un mínimo de conocimiento en Teoría de Conjuntos y Topología.

Denotaremos por ω al primer ordinal infinito. Los números ordinales los denotaremos por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ y los números cardinales los denotaremos por $\kappa, \lambda, \dots$. Si κ es un número cardinal, entonces κ^+ denotará al primer cardinal más grande que κ .

Dados un conjunto E y un número cardinal κ , $[E]^{\leq \kappa}$ denotará el conjunto de todos los subconjuntos de E de cardinalidad $\leq \kappa$. Análogamente para $[E]^{< \kappa}$ y $[E]^\kappa$. Además, si α y β son números ordinales, entonces α^β denotará a la familia de todas las funciones con dominio β y rango en α .

Las nociones y las definiciones acerca de espacios topológicos que emplearemos son las mismas que se usan en [2].

DEFINICIÓN 2.1. Sean $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos de X y $x \in X$. El orden de x en $\mathcal{F}$, denotado por $\text{ord}(x, \mathcal{F})$, se define como sigue

$$\text{ord}(x, \mathcal{F}) = |\{A \in \mathcal{F} : x \in A\}|.$$

DEFINICIÓN 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- (1) Decimos que $\mathcal{C} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ es una familia celular en X si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}$ se cumple que $A \cap B = \emptyset$.
- (2) La celularidad de X , denotada por $c(X)$, se define como

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

DEFINICIÓN 2.3. Decimos que un espacio X satisface la condición de la cadena contable discreta (dcc por sus abreviaturas en inglés) si cada familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos de X es numerable.

DEFINICIÓN 2.4. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta de X . Para $A \subseteq X$, definimos el conjunto $st(A, \mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}$. Particularmente, para cada $x \in X$, denotaremos al conjunto $St(\{x\}, \mathcal{U})$ como $st(x, \mathcal{U})$.

Al conjunto $st(A, \mathcal{U})$ le llamaremos la estrella de A con respecto de $\mathcal{U}$.

De manera inductiva, para cada $k \in \omega$ definimos $st^{k+1}(A, \mathcal{U}) = st(st^k(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$.

Consideremos un conjunto $A \subseteq X$ y a una colección de cubiertas $\mathcal{F}$ de X , entonces $st(A, \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U}) = \bigcup_{\mathcal{F}} st(A, \mathcal{U})$. Claramente, como $\mathcal{U}' \subseteq \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U}$ para cada $\mathcal{U}' \in \mathcal{F}$, entonces $st(A, \mathcal{U}') \subseteq st(A, \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U})$, esto implica $\bigcup_{\mathcal{F}} st(A, \mathcal{U}) \subseteq st(A, \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U})$. Ahora, para cada $y \in st(A, \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U})$, existe $U \in \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U}$ tal que $y \in U$ y tal que $U \cap A \neq \emptyset$, luego existe $\mathcal{U}' \in \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U}$ tal que $U \in \mathcal{U}'$, así $y \in U \subseteq st(A, \mathcal{U}') \subseteq \bigcup_{\mathcal{F}} st(A, \mathcal{U})$. Por lo tanto $st(A, \bigcup_{\mathcal{F}} \mathcal{U}) = \bigcup_{\mathcal{F}} st(A, \mathcal{U})$.

Otra característica importante a resaltar es que si $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$, entonces $st^k(A, \mathcal{U}) \subseteq st^k(B, \mathcal{U})$. Para $k = 1$, sea $y \in st(A, \mathcal{U})$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$ donde $A \cap U \neq \emptyset$, pero $A \cap U \subseteq B \cap U$, así $y \in st(B, \mathcal{U})$, con lo cual $st(A, \mathcal{U}) \subseteq st(B, \mathcal{U})$. Para cada $n \in \omega$, supongamos que $st^n(A, \mathcal{U}) \subseteq st^n(B, \mathcal{U})$ para

conjuntos cualesquiera A y B . Entonces, para $k = n + 1$ se tiene que $st^{n+1}(A, \mathcal{U}) = st^n(st(A, \mathcal{U}), \mathcal{U}) \subseteq st^n(st(B, \mathcal{U}), \mathcal{U}) = st^{n+1}(B, \mathcal{U})$.

DEFINICIÓN 2.5. Diremos que una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$ tiene rango k -diagonal en X si para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} = \bigcap \{st^k(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\}$. Por otro lado, un espacio X es k -diagonal, si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$ de rango k -diagonal.

Por otro lado, de manera similar diremos que X es de rango fuertemente k -diagonal si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \omega}$, de tal manera que para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} = \bigcap \{\overline{st^k(x, \mathcal{U}_n)} \mid n \in \omega\}$.

Con lo anterior, podemos obtener el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.6. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X , entonces

$$\overline{st^k(x, \mathcal{U})} \subseteq st^{k+1}(x, \mathcal{U}).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $y \in \overline{st^k(x, \mathcal{U})}$, entonces para cada V_y vecindad abierta de y , $V_y \cap st^k(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , existe $U_y \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U_y$. Por lo anterior, $U_y \in \{U \mid U \cap st^k(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset\}$ eso implica que $y \in U_y \subseteq st^{k+1}(x, \mathcal{U})$. Así hemos demostrado que $\overline{st^k(x, \mathcal{U})} \subseteq st^{k+1}(x, \mathcal{U})$. $\square$

COROLARIO 2.7. Un espacio X que tiene rango $k + 1$ -diagonal también tiene rango fuertemente k -diagonal.

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición anterior $\overline{st^k(x, \mathcal{U})} \subseteq st^{k+1}(x, \mathcal{U})$ para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$. Como X tiene rango $k + 1$ -diagonal, entonces existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$, tal que $\bigcap \{\overline{st^k(x, \mathcal{U}_n)} \mid n \in \omega\} \subseteq \bigcap \{st^{k+1}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\} = \{x\}$ para cada $x \in X$. Pero, $x \in st^k(x, \mathcal{U}_n) \subseteq \overline{st^k(x, \mathcal{U}_n)}$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\bigcap \{\overline{st^k(x, \mathcal{U}_n)} \mid n \in \omega\} = \{x\}$ $\square$

Diremos que X es estrella numerable si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X , existe un conjunto numerable A de X tal que $st(A, \mathcal{U}) = X$.

3. Teorema de Erdős-Rado

El teorema de Erdős-Rado, establece que si tienes un conjunto infinito y lo divides de cierta manera, entonces, bajo ciertas condiciones, siempre puedes encontrar un subconjunto grande del conjunto original que queda dentro de una de las partes de la partición. El enunciado, junto a la demostración de dicho teorema, se presentará a continuación.

TEOREMA 3.1 (Erdős-Rado). Sea κ un cardinal infinito, E un conjunto con $|E| > 2^\kappa$, y suponga que $[E]^2 = \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha$, donde, para todo $\alpha \in \kappa$, $P_\alpha \subseteq \mathcal{P}(E)$. Entonces existe $\alpha < \kappa$ y un subconjunto A de E con $|A| > \kappa$ tal que $[A]^2 \subseteq P_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Sea p algún punto en E . Para cada $\alpha \in \kappa^+$, por inducción construiremos una colección $\mathcal{F}_\alpha = \{R_f^\alpha : f \in \kappa^\alpha\}$ de subconjuntos de E y una colección $\mathcal{A}_\alpha = \{x_f : f \in \kappa^\alpha\}$ de puntos en E , tal que para cada $f \in \kappa^\alpha$:

- (1) si α es un ordinal límite, $R_f^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} R_{f|_\beta}^\beta$;
- (2) $\alpha = \gamma + 1$, $R_f^\alpha = \left\{ x : x \in R_{f|_\gamma}^\gamma, x \neq x_{f|_\gamma}, \{x, x_{f|_\gamma}\} \in P_{f(\gamma)} \right\}$;
- (3) $x_f \in R_f^\alpha$ si $R_f^\alpha \neq \emptyset$ y $x_f = p$ en otro caso;
- (4) si $\beta < \gamma$, entonces $x_{f|_\beta} \notin R_f^\gamma$;
- (5) si $\beta < \alpha$ y $x \in R_f^\alpha$, entonces $\{x, x_{f|_\beta}\} \in P_{f(\beta)}$.

Para $\alpha = 0$, sea $R_0 = E$ y $x_0 = p$. Ahora sea $0 < \alpha < \kappa^+$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$ se han construido las colecciones $\mathcal{F}_\beta = \{R_f^\beta : f \in \kappa^\beta\}$ y $\mathcal{A}_\beta = \{x_f : f \in \kappa^\beta\}$ de tal forma que se verifican (1) – (5) para cada $f \in \kappa^\beta$. Se desea construir tales colecciones $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{A}_\alpha$ para α . Se tienen dos casos:

(i) α límite. Para cualesquiera $\gamma < \alpha$ y $f \in \kappa^\gamma$, defínase R_f^α como en (1) y x_f como en (3). Verifiquemos (4). Sea $\beta < \alpha$ y suponga que $x_{f|_\beta} \in R_f^\alpha$, entonces $x_{f|_\beta} \in R_{f|_\rho}^\rho$ para todo $\rho < \alpha$, en particular, $x_{f|_\beta} \in R_{f|_{\beta+1}}^{\beta+1}$. Lo que contradice (4) aplicado a $\beta + 1$. Por tanto $x_{f|_\beta} \notin R_f^\alpha$. Ahora veamos que se satisface (5). Sea $\beta < \alpha$ y $x \in R_f^\alpha$. Entonces por (5), aplicado a $\beta + 1$, se tiene que $\{x, x_{f|_\beta}\} \in P_{f(\beta)}$. Así pues, también se verifica (5).

(ii) caso $\alpha = \gamma + 1$. En este caso, se define para cada $f \in \kappa^\alpha$, R_f^α como en (2) y, x_f como en (3). Veamos que en este caso, también, se verifican (4) y (5). Sea $\beta < \alpha$, entonces $\beta \leq \gamma$; si $\beta < \gamma$ entonces por (4) aplicado a γ se tiene que $x_{f|_\beta} \notin R_f^\gamma$. Si $\beta = \gamma$ y $x_{f|_\beta} \in R_f^\gamma$, entonces $x_{f|_\beta} \neq x_{f|_\beta}$ lo cual es absurdo. Así, (4) se cumple. Para verificar (5), sea $\beta < \alpha$; nuevamente se tienen dos casos: si $\beta = \gamma$ y $x \in R_f^\gamma$, entonces $\{x, x_{f|_\beta}\} \in P_{f(\beta)}$ por la definición de R_f^γ . Si $\beta < \gamma$ y $x \in R_f^\gamma$, por (5) aplicado a γ , $\{x, x_{f|_\beta}\} \in P_{f(\beta)}$. Lo que termina con la verificación de (5).

Hemos llegado al final de la construcción de tales colecciones.

Sea $H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \mathcal{A}_\alpha$. Note que $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \kappa^+$ para cada $\alpha \in \kappa^+$; luego, como $H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \mathcal{A}_\alpha$, se tiene que $|H| \leq \sum_{\alpha \in \kappa^+} |\mathcal{A}_\alpha| \leq \kappa^+ \kappa^+ = \kappa^+ \leq 2^\kappa$. Puesto que $|E| > 2^\kappa$, existe $x_0 \in E - H$.

A continuación construiremos una sucesión $\{f_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ tal que para todo $\alpha < \kappa^+$:

(6) $f_\alpha \in \kappa^\alpha$ y $f_\alpha|_\beta = f_\beta$ para $\beta < \alpha$ y

(7) $x_0 \in R_{f_\alpha}^\alpha$.

La construcción es por inducción transfinita.

Sea $0 < \gamma < \kappa^+$ y supongamos que se tiene construida f_β para todo $\beta < \gamma$ de tal modo que se verifican (6) y (7). Por construir f_γ .

(i) γ límite. Para cada $\beta < \gamma$, definamos f_γ por $f_\gamma|_\beta = f_\beta$; de (1) y la hipótesis de inducción se sigue (7) y claramente de la definición de f_γ se verifica (6).

(ii) $\gamma = \xi + 1$. Como $x_0 \neq x_{f_\xi}$ y $[E]^\gamma = \bigcup_{\xi < \kappa} P_\xi$, existe $\delta < \kappa$ tal que $\{x_0, x_{f_\xi}\} \in P_\delta$. Defínase f_γ por $f_\gamma|_\beta = f_\beta$ y $f_\gamma(\xi) = \delta$. Claramente, f_γ verifica (6). Por otra parte, de (2) y la hipótesis de inducción se verifica (7). Con lo que se termina la construcción.

Sea $g : \kappa^+ \rightarrow \kappa$ tal que $g(\alpha) = f_{\alpha+1}(\alpha) \in \kappa$ para cada $\alpha \in \kappa^+$. Note que $\kappa^+ = \bigcup_{\beta \in \kappa} g^{-1}(\beta)$, este hecho sucede, pues si $\lambda \in \kappa^+$ entonces $\lambda \in g^{-1}(\beta_\lambda)$ (Donde $\beta_\lambda =$

$f_{\lambda+1}(\lambda)$), y como cada $g^{-1}(\beta) \subseteq \kappa^+$ para cada $\beta \in \kappa$, entonces terminamos dicha afirmación. Como κ^+ es regular, existe $\rho < \kappa$ tal que $\left| \{ \beta : g^{-1}(\beta) = \rho \} \right| = \kappa^+$. Sea $T = \{ \beta : g^{-1}(\beta) = \rho \}$. Ahora bien, para todo $\alpha \in T$, $R_{g|_\alpha} \neq \emptyset$, pues $x_0 \in R_{g|_\alpha}$. Además, si $\alpha, \beta \in T$ son tales que $\alpha > \beta$, por (3), $x_{g|_\alpha} \in R_{g|_\alpha}$ y por (4) $x_{g|_\beta} \notin R_{g|_\alpha}$ luego, $x_{g|_\alpha} \neq x_{g|_\beta}$, más aún, por (5) se tiene que $\{x_{g|_\alpha}, x_{g|_\beta}\} \in P_{f(\beta)} = P_\rho$. De donde $A = \{x_{g|_\alpha} : \alpha \in T\}$ es el conjunto deseado. $\square$

3.1. Aplicaciones del teorema de Erdős-Rado. A continuación, presentaremos algunas aplicaciones del teorema de Erdős-Rado. Particularmente, en ciertos espacios topológicos donde analizaremos su tamaño. en esta sección nos basaremos en los trabajos de *Wei-Feng Xuan*, *Wei-Xue Shi* (Ver [6] y [5]).

Un resultado inmediato del teorema de Erdős-Rado, es el siguiente corolario, basados en conjuntos numerables.

COROLARIO 3.2. *Sea X un conjunto tal que $|X| > \mathfrak{c}$ y supongamos que $[X]^2 = \bigcup \{P_n : n \in \omega\}$. Entonces existen $n_0 \in \omega$ y $S \subseteq X$ con $|S| > \omega$ tales que $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$.*

Como primer resultado de esta sección, queremos mostrar a detalle el siguiente resultado.

"Cualquier espacio topológico X que satisfaga la ccc, con rango 2-diagonal, cumple que $|X| < \mathfrak{c}$."

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea X un espacio con rango $k+1$ -diagonal. Si $|X| > \mathfrak{c}$, entonces existe un subconjunto cerrado y discreto de X que tiene una expansión discreta abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Desde que X es un espacio con rango $k+1$ -diagonal, entonces existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$, tal que $\bigcap \{st^{k+1}(x, \mathcal{U}_n) \mid n \in \omega\} = \{x\}$ para cada $x \in X$. Ahora, construiremos una sucesión $\{\mathcal{V}_m\}_{m \in \omega}$ tal que $st^{k+1}(x, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st^{k+1}(x, \mathcal{V}_m)$, dicha sucesión es:

(1) $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0$.

(2) Para cada $m \in \omega$, sea $\mathcal{V}_{m+1} = \bigcup \{V \cap U \mid V \in \mathcal{V}_m, U \in \mathcal{U}_{m+1}\}$.

Afirmamos que para cada $A \subseteq X$, $st^{k+1}(A, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st^{k+1}(A, \mathcal{V}_m)$. Sea

$$y \in st^{k+1}(A, \mathcal{V}_{m+1}),$$

entonces existe un $U \in \mathcal{V}_{m+1}$ tal que $y \in U$ y $U \cap st^k(A, \mathcal{V}_{m+1}) \neq \emptyset$, por construcción existen $V \in \mathcal{V}_m$ y $U' \in \mathcal{U}_{m+1}$ tales que $U = V \cap U' \subseteq V$, pero $\emptyset \neq U \cap st^k(A, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq V \cap st^k(A, \mathcal{V}_{m+1})$, luego $y \in st^k(A, \mathcal{V}_m)$. Así, hemos demostrado que $st^{k+1}(A, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st^{k+1}(A, \mathcal{V}_m)$. De forma similar podemos demostrar que $st(A, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st(A, \mathcal{V}_m)$. Por otro lado, por lo anterior tenemos que $st^{k+1}(x, \mathcal{V}_{m+1}) = st^k(st(x, \mathcal{V}_{m+1}), \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st^k(st(x, \mathcal{V}_{m+1}), \mathcal{V}_m) \subseteq st^k(st(x, \mathcal{V}_m), \mathcal{V}_m) = st^{k+1}(x, \mathcal{V}_m)$.

Puesto que X tiene rango $k+1$ -diagonal, $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} st^{k+1}(x, \mathcal{U}_n)$, entonces $y \in X \setminus \{x\} = [\bigcap_{n \in \omega} st^{k+1}(x, \mathcal{U}_n)]^c = \bigcup_{n \in \omega} (st^{k+1}(x, \mathcal{U}_n))^c$, así existe $n_0 \in \omega$ tal que $y \in st^{k+1}(x, \mathcal{U}_{n_0})^c$, con lo cual $y \notin st^{k+1}(x, \mathcal{U}_{n_0})$.

Así, podemos definir para cada $n \in \omega$ los siguientes conjuntos:

$$P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 \mid y \notin st(x, \mathcal{U}_n)\}$$

Por lo demostrado anteriormente, $[X]^2 = \bigcup_{n \in \omega} P_n$, luego por corolario 3.2 existen $S \subseteq X$ y $n_0 \in \omega$ tales que $|S| > \omega$ y $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$.

Ahora mostremos que el conjunto S es cerrado y discreto. Supongamos lo contrario, es decir, existe $x \in X$ punto de acumulación de S , entonces para cada U vecindad de x , $U \cap S \neq \emptyset$, particularmente existen $y, z \in S \cap U$, entonces $y \in U \subseteq st(z, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq st^{k+1}(z, \mathcal{U}_{n_0})$ una contradicción. Así S es cerrado y discreto. $\square$

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea X un espacio con rango 2-diagonal. Si $|X| > \mathfrak{c}$, entonces existe un subconjunto numerable cerrado y discreto de X .*

DEMOSTRACIÓN: Similar a la proposición anterior, construimos la colección de cubiertas abiertas $\{\mathcal{V}_m\}_{m \in \omega}$ de rango 2-diagonal tal que $st^2(x, \mathcal{V}_{m+1}) \subseteq st^2(x, \mathcal{V}_m)$. De manera similar obtenemos que $y \notin st^2(x, \mathcal{U}_{n_0})$.

Afirmamos que, para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe $j \in \omega$ tal que $st^2(x, \mathcal{V}_j) \cap st^2(y, \mathcal{V}_j) = \emptyset$. En caso contrario, para cada $m \in \omega$, existe $z \in st^k(x, \mathcal{V}_m) \cap st^k(y, \mathcal{V}_m)$, particularmente, para j existen $W, W' \in \mathcal{V}_j$ tales que $z \in W \cap W'$, $x \in W$ y $y \in W'$. Por lo anterior, $y \in W' \subseteq st^2(x, \mathcal{V}_k)$ una contradicción.

Así, podemos definir para cada $n \in \omega$ los siguientes conjuntos:

$$P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 \mid n = \min\{m \in \omega \mid st(x, \mathcal{U}_m) \cap st(y, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset\}\}$$

Por lo demostrado anteriormente, $[X]^2 = \bigcup_{n \in \omega} P_n$, luego por corolario 3.2 existen $S \subseteq X$ y $n_0 \in \omega$ tales que $|S| > \omega$ y $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$.

Ahora mostremos que el conjunto S es cerrado y discreto.

Claramente, el conjunto $\{st(x, \mathcal{U}_{n_0})\}_{x \in S}$ es una familia no numerable disjunta de subconjuntos abiertos no vacíos de X .

Ahora, demostremos por contradicción que S es cerrado y discreto, entonces S tiene un punto de acumulación $x \in X$, $\square$

COROLARIO 3.5. *Sea X un espacio que cumple la ccc y tiene rango 2-diagonal. Entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia de la proposición anterior $\square$

LEMA 3.6. *Sea X un espacio topológico. Si existe $S \subseteq X$ un conjunto no numerable cerrado y discreto, de tal manera que los puntos S pueden separarse por abiertos disjuntos a pares (es decir que existe una familia de abiertos ajenos $\mathcal{V}$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un único $s \in S$ tal que $s \in V$). Entonces, X no es estrella numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, consideremos a una familia de abiertos ajenos $\mathcal{V}$ que tiene la propiedad antes mencionada; como S es cerrado, entonces $X \setminus S$ es abierto, luego $\mathcal{F} = \mathcal{V} \cup \{X \setminus S\}$ es una cubierta de X . Sea A un subconjunto numerable de X , así consideremos al conjunto $S' = S \cap A$, entonces S' es numerable y además $A \setminus S \subseteq X \setminus S$. Sea $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} \mid s \in V \text{ para algún } s \in S'\}$, sea $V_S \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$, entonces existe un único

$s' \in V_S \cap S$ y $s' \notin X \setminus S$, así $s' \notin st(A, \mathcal{V})$ es decir $X \neq st(A, \mathcal{V})$. Por lo tanto, A no es estrella numerable. $\square$

Una consecuencia directa de los resultados anteriores es el siguiente corolario.

COROLARIO 3.7. *Sea X un espacio que es estrella numerable y que tiene rango 2-diagonal. Entonces, $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Diremos que un espacio topológico X es de Moore si cumple lo siguiente:

- X es Hausdorff regular.
- (Propiedad de desarrollo) Existe una familia numerable de cubiertas abiertas $\mathbf{F}$ de X , tal que para cada cerrado $C \subseteq X$ y $p \in X$ tal que $p \notin C$, existe $\mathcal{U} \in \mathbf{F}$ de tal manera que cada $U \in \mathcal{U}$ vecindad de p , $U \cap C = \emptyset$.

PROPOSICIÓN 3.8. *Todo espacio de Moore tiene rango 2-diagonal.*

DEMOSTRACIÓN: Por la propiedad de desarrollo, podemos elegir una familia de cubiertas con las propiedades antes mencionadas, sea $\mathbf{F} = \{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$ dicha familia. Sean $a, b \in X$ distintos, afirmamos que existe $n \in \omega$, tal que $b \notin st^2(a, \mathcal{U}_n)$. Suponiendo lo contrario, para cada $n \in \omega$ tenemos que $b \in st(a, \mathcal{U}_n) \cap st(b, \mathcal{U}_n)$ es decir $st(a, \mathcal{U}_n) \cap st(b, \mathcal{U}_n) \neq \emptyset$ así para cada $n \in \omega$, elijase $x_n \in st(a, \mathcal{U}_n) \cap st(b, \mathcal{U}_n)$. Note que la familia $\{st(a, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \omega}$ forma una base local de a , con lo cual la sucesión $s = \{x_n\}_{n \in \omega}$ converge a a , de manera análoga la misma sucesión converge a b . Puesto que X es Hausdorff, $a = b$ una contradicción $\square$

Una consecuencia inmediata de los resultados vistos en esta sección es la siguiente:

COROLARIO 3.9. *La cardinalidad de todo espacio de Moore X que es estrella numerable es a lo más $\mathfrak{c}$*

Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es discreta en un espacio topológico X , si para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que $|\{V \in \mathcal{F} \mid U \cap V \neq \emptyset\}| \leq 1$

LEMA 3.10. *Sea $\{U_n\}_{n \in \omega}$ una sucesión de rango k -diagonal, donde $k > 1$. Si $|X| > \mathfrak{c}$, entonces existe un conjunto no numerable discreto cerrado S de X tal que para cualesquiera $x, y \in S$ distintos, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $y \notin st(x, \mathcal{U}_{n_0})$.*

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \omega}$ de rango k -diagonal ($k > 1$) y supongamos sin pérdida de la generalidad que

$$st^k(x, \mathcal{U}^{n+1}) \subseteq st^k(x, \mathcal{U}^n)$$

para cada $n \in \omega$. Similar a la proposición [3.3](#) podemos definir, para cada $n \in \omega$:

$$P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 \mid x \notin st(y, \mathcal{U}_n)\}$$

Note que $[X]^2 = \bigcup_{n \in \omega} P_n$ y por corolario [3.2](#), existe $S \subseteq X$ tal que $\omega < |S|$ y $n_0 \in \omega$ tales que $S \subseteq P_{n_0}$. Por construcción para cada $x, y \in S$

$\square$

4. El lema del Δ -sistema

Iniciaremos esta sección definiendo lo que entenderemos por un Δ -sistema.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Diremos que $\mathcal{F}$ forma un Δ -sistema (o que es una familia cuasi-disjunta) si existe un conjunto R tal que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}$ distintos se cumple que $A \cap B = R$. Al conjunto R le llamaremos la raíz (o núcleo) del Δ -sistema.

Algunos otros autores prefieren el nombre de girasol (o sunflowers) al de Δ -sistema o familia cuasi-disjunta.

4.1. El Lema “débil” del Δ -sistema. Antes de enunciar el teorema del Δ -sistema, conviene mencionar una versión más débil de dicho lema, pero que en muchos casos es suficiente para satisfacer nuestras necesidades.

LEMA 4.2. Sea κ un cardinal regular no numerable y $\mathcal{F} \in [\mathcal{P}(X)]^n$, una familia de subconjuntos de X de cardinalidad n , tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$. Entonces existen un conjunto R , posiblemente vacío, y $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^\kappa$ tal que $\mathcal{F}_0$ forma un Δ -sistema con raíz R .

DEMOSTRACIÓN: Haremos la prueba por inducción natural sobre n , el tamaño de los elementos de $\mathcal{F}$.

En caso de que $n = 0$, entonces la premisa es falsa, por tanto, la conclusión es verdadera.

Supongamos que la propiedad es cierta para el caso en el que los elementos de la familia tienen tamaño n y consideremos una familia $\mathcal{F}$ de cardinalidad κ tal que todos los elementos de $\mathcal{F}$ tienen tamaño $n + 1$. Definamos

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} : \text{los elementos de } \mathcal{A} \text{ son ajenos por pares}\}.$$

Es evidente que $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío. Además, si $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{U}$, respecto de la contención $\subseteq$. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{U}$. Es claro que $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Por otro lado, sean $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ o $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $A, B \in \mathcal{B} \in \mathcal{U}$, así, $A \cap B = \emptyset$. Similarmente, ocurre que A y B son ajenos en el otro caso.

Ya que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$, por el Lema de Zorn, existe $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}$ elemento $\subseteq$ -maximal.

- (1) Si $|\mathcal{F}'| = \kappa$, entonces $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}'$ y $F = \emptyset$ satisfacen lo deseado.
- (2) Si $|\mathcal{F}'| < \kappa$, entonces afirmamos que existe $p \in \bigcup \mathcal{F}'$ que pertenece a κ elementos de $\mathcal{F}$. Supongamos (por contradicción) que no existe un elemento con dicha propiedad. Para cada $p \in \bigcup \mathcal{F}'$ sea $\mathcal{F}_p = \{F \in \mathcal{F} : p \in F\}$. Entonces $|\mathcal{F}_p| < \kappa$. Notemos que debido a que los elementos de $\mathcal{F}'$ tienen tamaño $n + 1$ y $|\mathcal{F}'| < \kappa$, entonces

$$|\bigcup \mathcal{F}'| < \kappa.$$

Por tanto,

$$|\bigcup_{p \in \bigcup \mathcal{F}'} \mathcal{F}_p| < \kappa.$$

Luego, existe $F \in \mathcal{F} \setminus \bigcup_{p \in \bigcup \mathcal{F}'} \mathcal{F}_p$, es decir, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $p \notin F$ para cada $p \in \bigcup \mathcal{F}'$. Lo anterior implica que $F \notin \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}' \cup \{F\}$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ ajena por pares, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}'$.

Sean $p \in \bigcup \mathcal{F}'$ que pertenece a κ elementos de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{F} : p \in F\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{F \setminus \{p\} : F \in \mathcal{F}_1\}$, entonces $|\mathcal{F}_2| = |\mathcal{F}_1| = \kappa$. Por tanto, $\mathcal{F}_2$ es una familia, de conjuntos de tamaño n , de cardinalidad κ , así, aplicando la hipótesis inductiva, existe $\mathcal{F}_3 \in [\mathcal{F}_2]^\kappa$ y F' un conjunto, posiblemente vacío, tal que para cualesquiera dos elementos de $\mathcal{F}_3$ su intersección es F' . Sea $\mathcal{F}_0 = \{A \cup \{p\} : A \in \mathcal{F}_3\}$, entonces $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_3| = \kappa$.

Afirmamos que $\mathcal{F}_0$ forma un Δ -sistema con raíz $R = F' \cup \{p\}$. Sean $C, D \in \mathcal{F}_0$, entonces $C = A \cup \{p\}$ y $D = B \cup \{p\}$, donde $A, B \in \mathcal{F}_3$. Entonces

$$C \cap D = (A \cup \{p\}) \cap (B \cup \{p\}) = (A \cap B) \cup \{p\} = F' \cup \{p\} = R.$$

□

TEOREMA 4.3. *Sea κ un cardinal regular no numerable y $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos finitos tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$. Entonces existen F un conjunto, posiblemente vacío, y $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^\kappa$ tal que $\mathcal{F}_0$ forma un Δ -sistema con raíz F .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n < \omega$ definamos $\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} : |F| = n\}$, entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{F}_n$. Ya que $|\mathcal{F}| = \kappa$, entonces existe $n < \omega$ tal que $|\mathcal{F}_n| = \kappa$. Luego, aplicando el lema anterior, obtenemos lo deseado. □

Es interesante notar que la hipótesis de que κ no sea numerable es necesaria, pues si definimos $U_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ y $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \omega\}$, entonces ninguna subcolección infinita de $\mathcal{F}$ forma un Δ -sistema.

4.2. El Lema del Δ -sistema.

TEOREMA 4.4. *Sean κ un cardinal infinito y θ un cardinal regular tal que $\kappa < \theta$ y para cada $\alpha < \theta$ se cumple que $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$. Entonces, para cada familia de conjuntos $\mathcal{F}$ que cumple*

$$(1) |\mathcal{F}| \geq \theta,$$

$$(2) \text{ para cada } x \in \mathcal{F}, |x| < \kappa,$$

existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}$ es un Δ -sistema y $|\mathcal{G}| = \theta$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\mathcal{F}| = \theta$. Ya que

$$|\bigcup \mathcal{F}| \leq \theta \cdot \kappa = \theta,$$

entonces podemos suponer que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \theta$. Ya que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \{A \in \mathcal{F} : \text{ordtyp}(A) = \alpha\},$$

por la regularidad de θ , existe $\rho < \kappa$ tal que $|\{A \in \mathcal{F} : \text{ordtyp}(A) = \rho\}| = \theta$. Sea

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F} : \text{ordtyp}(A) = \rho\}.$$

Ya que para cada $\alpha < \theta$ se cumple que $|\alpha|^{<\kappa} < \theta$, entonces para cada $\alpha < \theta$ hay menos de θ elementos de $\mathcal{A}$ que son subconjuntos de α . Así, si $\alpha < \theta$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \not\subseteq \alpha + 1$, es decir, existe $x \in A$ tal que $x > \alpha$. Así, $\bigcup \mathcal{A}$ es no acotado en θ .

Para cada $x \in \mathcal{A}$ y cada $\xi < \rho$ sea $x(\xi)$ el ξ -ésimo elemento de x . Por la regularidad de θ y, ya que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\xi < \rho} \{x(\xi) : x \in \mathcal{A}\}$ es no acotado en θ , entonces existe ξ tal que $\{x(\xi) : x \in \mathcal{A}\}$ es no acotado en θ . Sea ξ_0 el menor de tales ξ .

Notemos que por la elección de ξ_0 , para cada $\eta < \xi_0$ se cumple que $\{x(\eta) : x \in \mathcal{A}\}$ es acotado. Así, definamos

$$\alpha_0 = \sup\{x(\eta) + 1 : x \in \mathcal{A} \text{ y } \eta < \xi_0\},$$

el cual existe por la regularidad de θ . Notemos que $\alpha_0 < \theta$ y para cada $x \in \mathcal{A}$ y cada $\eta < \xi_0$ se cumple que $x(\eta) < \alpha_0$.

Por recursión transfinita, elijamos $x_\mu \in \mathcal{A}$ tal que

$$x_\mu(\xi_0) > \max\{\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) : \eta < \rho \text{ y } \nu < \mu\}\}.$$

Sea $\mathcal{A}' = \{x_\mu : \mu < \theta\}$. Sean $x_{\mu_1}, x_{\mu_2} \in \mathcal{A}'$, con $\mu_1 \neq \mu_2$. Veamos que $x_{\mu_1} \cap x_{\mu_2} \subseteq \alpha_0$. Supongamos que $y \in x_{\mu_1} \cap x_{\mu_2}$ y que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\eta_1, \eta_2 < \rho$ tales que $x_{\mu_1}(\eta_1) = y = x_{\mu_2}(\eta_2)$. Notemos que si $\eta_2 \geq \xi_0$, entonces por contrucción tendríamos que $x_{\mu_2}(\eta_2) \geq x_{\mu_2}(\xi_0) > x_{\mu_1}(\eta_1)$. Por tanto, $\eta_2 < \xi_0$. Luego, por elección de α_0 tenemos que $x_{\mu_2}(\eta_2) < \alpha_0$. Notemos que $\mathcal{A}' = \bigcup_{r \in [\alpha_0]^{<\kappa}} \{x_\mu : x_\mu \cap \alpha_0 = r\}$. Luego, por la regularidad de θ , existe $r_0 \in [\alpha_0]^{<\kappa}$ tal que $\mathcal{G} = \{x_\mu : x_\mu \cap \alpha_0 = r_0\}$ tiene cardinalidad θ . Para finalizar, notemos que $\mathcal{G}$ es forma un Δ -sistema con raíz r , pues si $x, y \in \mathcal{G}$, entonces $x \cap y = (x \cap y) \cap \alpha_0 = (x \cap \alpha_0) \cap (y \cap \alpha_0) = r \cap r = r$. $\square$

4.3. Aplicaciones del Lema del Δ -sistema. Existen propiedades topológicas que se comportan bien respecto al producto de espacios topológicos, por ejemplo, la compacidad; sin embargo, existen otras propiedades que no se comportan como nos gustaría, tal es el caso de la *ccc*. No es sencillo determinar cuándo el producto de ciertos espacios topológicos tiene dicha propiedad. Afortunadamente, sÅ podemos afirmar que el producto finito de espacios con la *ccc*, vuelve a tener la propiedad *ccc*. De hecho, se puede demostrar algo más fuerte, como lo muestra el siguiente resultado.

TEOREMA 4.5. *Sea $X = \prod_{t \in T} X_t$ el producto topológico de los espacios $\{X_t : t \in T\}$. Si para cada $F \in [T]^{<\omega}$ se cumple que $c(\prod_{t \in F} X_t) \leq \kappa$, entonces $c(X) \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por contradicción, que $c(X) > \kappa$, así, sea $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ una familia celular en X , podemos suponer que cada V_α es un abierto básico de X . Para cada $\alpha < \kappa^+$ sea $F_\alpha = \{t \in T : \pi_t[V_\alpha] \neq X_\alpha\}$. Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. Luego, por el Lema del Δ -sistema, existen $F \subseteq T$ un conjunto y $S \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ tales que para cualesquiera $\alpha, \beta \in S$, se cumple que $F_\alpha \cap F_\beta = F$.

Si $F = \emptyset$, entonces consideremos $\alpha, \beta \in S$ tales que $\alpha \neq \beta$. Para cada $t \in T$ elijamos $x_t \in \bigcup_{t \in T} X_t$ de tal forma que si $t \in F_\alpha$ o $t \in F_\beta$, entonces $x_t \in \pi_t[V_\alpha]$ y, en caso contrario, que $x_t \in X_t$ sea un elemento arbitrario y definamos $f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t$ de tal forma que $f(t) = x_t$. Es evidente que $f \in V_\alpha \cap V_\beta$, lo cual contradice, pues era una familia celular.

Supongamos que $F \neq \emptyset$. Para cada $t \in T \setminus F$ escojamos $x_t \in X_t$ fijo. Definamos

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t \in F \\ \{x_t\} & \text{otro caso} \end{cases},$$

entonces $\Pi_{t \in T} Y_t$ es un subespacio de $\Pi_{t \in T} X_t$. Más aún, ya que las funciones $f_t : X_t \rightarrow Y_t$ dadas por

$$f_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } t \in F \\ x_t & \text{otro caso} \end{cases}$$

son funciones continuas, entonces la función $f : \Pi_{t \in T} X_t \rightarrow \Pi_{t \in T} Y_t$ dada por $f(\{x_s : s \in T\}) = \{f_s(x_s) : s \in T\}$ es una función continua y abierta. Por tanto, $\mathcal{C} = \{f[V_\alpha] : \alpha < \kappa^+\}$ es una familia de abiertos no vacíos de $\Pi_{t \in T} Y_t$. Si $\{y_t\} \in f[V_\alpha] \cap f[V_\beta]$, con $\alpha, \beta < \kappa^+$, entonces existirían $\{x_t\} \in V_\alpha$ y $\{x'_t\} \in V_\beta$ tales que $f(\{x_t\}) = \{y_t\}$ y $f(\{x'_t\}) = \{y_t\}$, así, $f_t(x_t) = f_t(x'_t)$ para cada $t \in T$. Luego, $x_t = x'_t$ para cada $t \in F$. Como en el caso cuando, $F = \emptyset$ podemos construirnos una función $f \in X$ de tal forma que $f(t) = x_t = x'_t$ si $t \in F$ y que $f \in V_\alpha \cap V_\beta$, lo cual contradice que $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ sea celular en X . De aquí que $\mathcal{C}$ es una familia celular en $\Pi_{t \in T} Y_t$ y, por tanto, $c(\Pi_{t \in T} Y_t) > \kappa$; sin embargo, $\Pi_{t \in T} Y_t$ es homeomorfo a $\Pi_{t \in F} X_t$ y por hipótesis, $c(\Pi_{t \in F} X_t) \leq \kappa$. $\square$

Otra aplicación interesante sobre el Lema del Δ -sistema es el siguiente teorema.

DEFINICIÓN 4.6. Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ es una cubierta finita $\subseteq$ -minimal de X si $\mathcal{A}$ es una cubierta finita para X y, además, no existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ cubierta finita de X tal que $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$.

TEOREMA 4.7. (Miščenko) Sea κ un cardinal infinito, X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que para cada $x \in X$ se cumple que $\text{ord}(x, \mathcal{F}) \leq \kappa$, entonces hay a lo más κ cubiertas finitas $\subseteq$ -minimales de X por elementos de $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos por contradicción que existen más de κ cubiertas finitas $\subseteq$ -minimales de X por elementos de $\mathcal{F}$. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $\mathcal{C} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de cubiertas finitas $\subseteq$ -minimales de X por elementos de $\mathcal{F}$.

Aplicando el Lema del Δ -sistema existen $T \in [\omega_1]^{\omega_1}$ y $\mathcal{A}$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in T$ se cumple que $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es una familia finita de subconjuntos de X , así, $\mathcal{A}$ no puede ser cubierta de X , pues en caso contrario, si $\mathcal{A}$ es una cubierta de X para $\alpha, \beta \in T$, por la minimalidad de $\mathcal{A}_\alpha$ y de $\mathcal{A}_\beta$ se tiene que $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} = \mathcal{A}_\beta$, pero esto es una contradicción.

Dado que $X \neq \bigcup \mathcal{A}$, sea $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, dado que $\mathcal{A}_\alpha$ es una cubierta finita de X , entonces existe $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \setminus \mathcal{A}$ tal que $x \in A_\alpha$. Pero esto contradice que $\text{ord}(x, \mathcal{F}) \leq \kappa$ para cada $x \in X$, pues para cada $\alpha, \beta \in T$ $A_\alpha \neq A_\beta$. $\square$

Aquellos lectores que deseen conocer más detalles sobre las dos aplicaciones anteriores pueden consultar [1].

Finalmente, daremos un ejemplo de un espacio topológico cuya celularidad es a lo más el continuo.

Sean (X, τ) un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Definamos

$$\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau)} = \left\{ \bigcap \mathcal{A} : \emptyset \neq \mathcal{A} \in [\tau]^{\leq \kappa} \right\}.$$

No es difícil demostrar que la colección anterior genera una nueva topología para el conjunto X .

PROPOSICIÓN 4.8. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$ genera una topología para X de tal forma que $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$ es una base para dicha topología. Al espacio X con la topología generada por $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau)}$ le llamaremos la G_κ -modificación del espacio (X, τ) y lo denotaremos por (X, τ_{G_κ}) . En caso de que $\kappa = \omega$, entonces la llamaremos la G_δ -modificación en lugar de la G_ω -modificación.*

Sea $A \in \tau$ y definamos $\mathcal{A} = \{A\}$, entonces $A = \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau)}$. Por tanto, $\tau \subseteq \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau)}$, es decir, la G_κ -modificación de un espacio X es más fina que la topología original.

Consideremos el espacio $\mathbb{D} = \{0, 1\}$, con la topología discreta. Al espacio producto de $\mathfrak{c}^+$ copias de $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$, le llamaremos el $\mathfrak{c}^+$ -cubo de Cantor. Una base para $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ es

$$\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}] : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n < \mathfrak{c}^+ \text{ y } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \right\}.$$

Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{c}^+$ y $f \in \mathbb{D}^A$ definimos

$$G(A, f) = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : x|_A = f\}.$$

No es difícil de demostrar que,

$$\mathcal{B}_{G_\delta} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$$

es una base para la G_δ -modificación del $\mathfrak{c}^+$ -cubo de Cantor.

Sea $x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$, definimos el soporte de x como sigue:

$$\text{sup}(x) = \{\alpha < \mathfrak{c}^+ : x(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha < \mathfrak{c}^+ : x(\alpha) = 1\}.$$

Consideremos a

$$T = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : 0 < |\text{sup}(x)| < \omega\}$$

como subespacio de $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$.

TEOREMA 4.9. *Sea X , la G_δ modificación de T . Entonces $c(X) \leq \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $c(X) > \mathfrak{c}$ y sea $\mathcal{W}$ una familia celular en X . Ya que $\mathcal{B}_{G_\kappa} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$ es una base para la G_δ -modificación del $\mathfrak{c}^+$ -cubo de Cantor, entonces podemos suponer que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_{G_\kappa}$ y que $|\mathcal{W}| = \mathfrak{c}^+$.

Para cada $W \in \mathcal{W}$ existen $\emptyset \neq A_W \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$ y $f_W \in \mathbb{D}^{A_W}$ tales que $W = G(A_W, f_W) \cap T$. Ya que $\mathfrak{c}^+$ es regular y $\omega_1 < \mathfrak{c}^+$ satisface que para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$, $|\alpha^{< \omega_1}| < \mathfrak{c}^+$, entonces por el Lema del Δ -sistema (Lema 4.4), aplicado a $\{A_W : W \in \mathcal{W}\}$, existen $R \subseteq \mathfrak{c}^+$ y $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ tal que $|\mathcal{W}'| = \mathfrak{c}^+$ y para cada $W, V \in \mathcal{W}'$, diferentes, se cumple que $A_W \cap A_V = R$. Dado que $R \subseteq A_W$, con $W \in \mathcal{W}'$, entonces $R \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$. Entonces $\mathbb{D}^R$ tiene tamaño a lo más $\mathfrak{c}$. Luego, $\{f_{W|_R} : W \in \mathcal{W}'\} \subseteq \mathbb{D}^R$, así, existen $W, V \in \mathcal{W}'$

diferentes tales que $f_{W \upharpoonright R} = f_{V \upharpoonright R}$. Por la regularidad de $\mathfrak{c}^+$, sea $\alpha < \mathfrak{c}^+$ tal que $A_W \cup A_V \subseteq \alpha$. Definamos $x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ como sigue:

$$x(\xi) = \begin{cases} f_W(\xi) & \text{si} & \xi \in A_W \\ f_V(\xi) & \text{si} & \xi \in A_V \\ 1 & \text{si} & \xi = \alpha \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ya que f_W y f_V tienen soporte finito, entonces $x \in X$. Además, $x \in W \cap V$, lo cual contradice que $\mathcal{W}$ es una familia celular. $\square$

Agradecimientos: La labor del árbitro(a) es muy importante para la realización del libro. Los autores le agradecen sus comentarios.

Bibliografía

- [1] Hodel R., Cardinal functions I, in: K. Kunen, J. Vaughan (Eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–61.
- [2] Engelking R., *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).
- [3] Jech T., *Set theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Berlin, Heidelberg, third edition, 2003.
- [4] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [5] Xuan, W. F., Shi, W. X., *A NOTE ON SPACES WITH RANK 2-DIAGONAL*. Bulletin of the Australian Mathematical Society. (2014);90(1): 141-143.
- [6] Xuan, W. F., Shi, W. X., *Cardinalities of DCCC normal spaces with a rank 2-diagonal*. *Mathematica Bohemica* 141.4 (2016): 457-461.

Correos electrónicos:

luis.apontep@alumno.buap.mx (Luis Enrique Aponte Pérez),
 imartinez@fcm.buap.mx (Iván Martínez Ruiz),
 cesar.morenoes@alumno.buap.mx (Cesar Alonzo Moreno Espinoza),
 oleg@fcm.buap.mx (Oleg Okunev).

CAPÍTULO 7

Separación en espacios topológicos y marcos

José Juan Angoa-Amador, Luis Alberto Reyes Macías
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

1. Introducción	163
2. Preliminares	163
3. Sobriedad	165
4. Separación en espacios topológicos	169
5. Espacios completamente regulares	173
6. Separación en marcos	177
Bibliografía	178

1. Introducción

Son conocidos los axiomas de separación que dan nombre a los distintos clases de espacios topológicos, aquí presentaremos otras nociones de separación que son importantes en la perspectiva del espacio sin puntos. Este capítulo es una lectura minuciosa del capítulo 1 del libro [2]

2. Preliminares

Antes de abordar la separación en espacios topológicos y marcos, veamos algunas nociones que nos serán útiles.

Para cada espacio topológico X uno puede notar que en su topología, con el orden de contención se cumple la siguiente igualdad para una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ y V abierto

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap V = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V)$$

Esto motiva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1. Sea L una retícula completa, decimos que L es un marco si para cualquier familia de elementos $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ y $b \in L$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \wedge b = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge b).$$

A lo largo de este trabajo denotaremos al marco de abiertos de un espacio topológico como $\Omega(X)$.

Recordemos que dados dos espacios topológicos X , Y y una función $f : X \rightarrow Y$, decimos que f es continua si para cada abierto U de Y , $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Notamos que la preimagen como función preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas, lo cual motiva a la siguiente definición en el contexto de marcos.

DEFINICIÓN 2.2. Si L y M son marcos y $f : L \rightarrow M$ es una función, decimos que es un morfismo de marcos si:

- $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} f(a_i)$.

Como los marcos son la representación algebraica de un espacio topológico, es importante definir la noción de punto, para esto introducimos el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 2.3. Decimos que $p \in L$ es un primo si para cualesquiera $a, b \in L$ con $a \wedge b = p$ entonces $a \leq p$ o $b \leq p$.

Una caracterización más sencilla es la siguiente:

LEMA 2.4. Sea L una retícula distributiva. $p \in L$ es primo en L si y sólo si para todo $a, b \in L$ si $a \wedge b \leq p$, entonces $a \leq p$ o $b \leq p$.

DEMOSTRACIÓN: Si p es primo y $a \wedge b \leq p$, entonces $(a \wedge b) \vee p = p$, lo que implica $(a \vee p) \wedge (b \vee p) = p$. Como p es primo, se tiene $a \vee p = p$ o $b \vee p = p$, y por lo tanto $a \leq p$ o $b \leq p$.

Si $a \wedge b = p$, entonces $a \wedge b \leq p$. Por hipótesis, esto implica $a \leq p$ o $b \leq p$. Dado que $p \leq a$ y $p \leq b$ por definición de $\wedge$, concluimos que $a = p$ o $b = p$. $\square$

Un ejemplo de elementos primos surge de forma natural en los espacios topológicos, como se muestra en el siguiente lema:

LEMA 2.5. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces $X \setminus \overline{\{x\}}$ es un primo en $\Omega(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $A, B \subseteq X$ abiertos tales que $A \cap B \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$. Esto implica que $x \notin A \cap B$, lo que a su vez significa que $x \notin A$ o $x \notin B$. Por lo tanto, $A \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$ o $B \subseteq X \setminus \overline{\{x\}}$. Concluimos así que $X \setminus \overline{\{x\}}$ es primo. $\square$

Otro concepto que nos servirá posteriormente es el siguiente.

DEFINICIÓN 2.6. Sea $\mathcal{F}$ una familia de elementos de L , decimos que es un filtro si:

- (1) $1 \in \mathcal{F}$.
- (2) Si $a, b \in \mathcal{F}$ entonces $a \wedge b \in \mathcal{F}$.
- (3) Si $a \leq b$ y $a \in \mathcal{F}$ entonces $b \in \mathcal{F}$.

Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ es primo si cada vez que $a \vee b \in \mathcal{F}$ entonces $a \in \mathcal{F}$ o $b \in \mathcal{F}$. Es completamente primo si para $\{a_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigvee_{i \in I} a_i \in \mathcal{F}$ entonces existe $j \in I$ con $a_j \in \mathcal{F}$.

Nuevamente, un ejemplo en topología de filtros completamente primos son los sistemas de vecindades abiertas.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ entonces su sistema de vecindades abiertas $\mathcal{U}(x)$ es filtro completamente primo.*

DEMOSTRACIÓN:

Primeramente $\mathcal{U}(x)$ no es vacío pues $x \in X$, entonces $X \in \mathcal{U}(x)$. Si $U, V \in \mathcal{U}(x)$ entonces $x \in U$ y $x \in V$, luego $x \in U \cap V$ y consecuentemente $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$. Ahora si $U \in \mathcal{U}(x)$ y V es abierto tal que $U \subseteq V$, entonces $x \in V$ por lo que $V \in \mathcal{U}(x)$. Finalmente si $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(x)$ para una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos, entonces $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, entonces $U_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$.

□

3. Sobriedad

La sobriedad en espacios topológicos, si bien no se clasifica tradicionalmente como un axioma de separación, esta íntimamente relacionada con la estructura fundamental de un espacio. Su importancia radica en que las funciones continuas entre espacios sobrios están completamente determinadas por la preimagen de sus conjuntos abiertos, lo que a su vez permite caracterizar los propios espacios topológicos.

DEFINICIÓN 3.1. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es sobrio, si X es T_0 y los únicos puntos en $\Omega(X)$ son de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ para algún $x \in X$.*

Para clarificar la definición, veamos un ejemplo de espacio topológico sobrio y otro que no lo es.

EJEMPLO 3.2. *Consideremos al espacio de Sierpinski $S = \{0, 1\}$ cuyos abiertos son $\Omega(X)_S = \{\emptyset, \{0\}, S\}$. Este espacio es sobrio pues los elementos primos de $\Omega(X)_S$ son $\emptyset = S \setminus \overline{\{0\}}$ y $\{0\} = S \setminus \overline{\{1\}}$.*

EJEMPLO 3.3. *Sea $X = \mathbb{N}$ y $\Omega(X) = \{X \setminus A : A \text{ es finito}\}, \emptyset$. Este espacio no es sobrio pues $\emptyset$ es primo pero $\emptyset \neq \mathbb{N} \setminus A$ con A finito.*

Procedemos a caracterizar a los espacios sobrios haciendo uso de filtros completamente primos.

TEOREMA 3.4. *Un espacio topológico X es sobrio si y sólo si los filtros de vecindades abiertas son los únicos filtros completamente primos de $\Omega(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que X es sobrio y que $\mathcal{F}$ es un filtro completamente primo en $\Omega(X)$. Definimos el abierto $U_0 = \bigcup \{U \in \Omega(X) : U \notin \mathcal{F}\}$.

Demostramos que $U \in \mathcal{F}$ si y solo si $U \not\subseteq U_0$.

Si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subseteq U_0$, entonces $U_0 \in \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es completamente primo y $U_0 = \bigcup \{U : U \notin \mathcal{F}\}$, existe $U \in \mathcal{F}$ y $U \notin \mathcal{F}$, luego $U \not\subseteq U_0$. Análogamente si $U \not\subseteq U_0$ y $U \notin \mathcal{F}$, entonces $U \subseteq U_0$.

Ahora demostramos que U_0 es un primo de $\Omega(X)$. Si $U, W \in \Omega(X)$ tal que $U \cap W \subseteq U_0$, por la equivalencia tenemos que $U \cap W \notin \mathcal{F}$, entonces $U \notin \mathcal{F}$ o $W \notin \mathcal{F}$, luego $U \subseteq U_0$ o $W \subseteq U_0$.

Como X es sobrio, cada primo de $\Omega(X)$ es de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ para algún $x \in X$. Así, $U_0 = X \setminus \overline{\{x_0\}}$ para $x_0 \in X$. Este x_0 es único por que X en particular es T_0 .

Ahora, para cualquier $U \in \Omega(X)$ tenemos que:

$$U \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \not\subseteq U_0 \Leftrightarrow U \not\subseteq X \setminus \overline{\{x_0\}} \Leftrightarrow x_0 \in U.$$

Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es el filtro de vecindades abiertas de x_0 .

Asumamos que los filtros de vecindades abiertas son los únicos filtros completamente primos de $\Omega(X)$.

Sea P un primo de $\Omega(X)$. Definimos:

$$\mathcal{F}_P = \{U \in \Omega(X) : U \not\subseteq P\}$$

Podemos demostrar que $\mathcal{F}_P$ es un filtro completamente primo:

- $X \in \mathcal{F}_P$ porque $X \not\subseteq P$.
- Si $U, V \in \mathcal{F}_P$, entonces $U \not\subseteq P$ y $V \not\subseteq P$. Si $U \cap V \subseteq P$, como P es primo, implicaría $U \subseteq P$ o $V \subseteq P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $U \cap V \not\subseteq P$, así $U \cap V \in \mathcal{F}_P$.
- Si $U \in \mathcal{F}_P$ y $W \in \Omega(X)$ con $U \subseteq W$, entonces $U \not\subseteq P \Rightarrow W \not\subseteq P$, así $W \in \mathcal{F}_P$.
- Si $\bigcup A \in \mathcal{F}_P$ (para $A \subseteq \Omega(X)$), entonces $\bigcup A \not\subseteq P$. Esto significa que existe $x \in \bigcup A$ con $x \notin P$. Por lo tanto, existe $U \in A$ tal que $x \in U$. Si $U \subseteq P$, entonces $x \in P$, lo cual es una contradicción. Así $U \not\subseteq P$, y $U \in \mathcal{F}_P$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_P$ es completamente primo.

Por nuestra hipótesis, $\mathcal{F}_P$ debe ser el filtro de vecindades abiertas de algún punto $x_P \in X$. Es decir, para cualquier $U \in \Omega(X)$:

$$U \in \mathcal{F}_P \Leftrightarrow x_P \in U$$

Sustituyendo la definición de $\mathcal{F}_P$:

$$U \not\subseteq P \Leftrightarrow x_P \in U$$

Esta equivalencia implica que $P = X \setminus \overline{\{x_P\}}$. Dado que para cada primo P en $\Omega(X)$ hemos encontrado un punto $x_P \in X$ tal que $P = X \setminus \overline{\{x_P\}}$, es decir, el espacio X es sobrio. $\square$

Ahora, veamos la siguiente propiedad que permite construir un espacio sobrio a partir de un marco de abiertos, para esto, definimos para un espacio topológico X :

$$\tilde{X} := \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es completamente primo en } \Omega(X)\}$$

y para cada $U \in \Omega(X)$ definimos

$$\tilde{U} := \{\mathcal{F} \in \tilde{X} : U \in \mathcal{F}\}$$

Es claro que la familia $\tau' = \{\tilde{U} : U \in \Omega(X)\}$ es una topología.

COROLARIO 3.5. Sea X un espacio topológico sobrio, entonces $X \simeq \tilde{X}$

DEMOSTRACIÓN:

Definimos $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$, como $\phi(x) = \{U \in \Omega(X) : x \in U\}$. Es claro que $\phi(x)$ es filtro completamente primo y como X es T_0 si $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $x = y$, luego ϕ es inyectiva, como X es sobrio, ϕ es sobreyectiva, así que ϕ es biyectiva. Ahora, veamos que es morfismo abierto.

Sea $U \in \Omega(X)$, entonces $x \in U$ si y solo si $\phi(x) \in \tilde{U}$, luego $\phi[U] = \tilde{U}$, es decir ϕ es homeomorfismo. $\square$

LEMA 3.6. Sean X y Y espacios topológicos, y $\Omega(X)$, $\Omega(Y)$ sus respectivos marcos de abiertos. X es sobrio si y sólo si para todo morfismo de marcos $\phi : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ (donde $\Omega(-)$ denota el marco de abiertos), existe una función continua $f : Y \rightarrow X$ tal que $\phi(U) = f^{-1}(U)$ para todo $U \in \Omega(X)$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\phi : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ un morfismo de marcos. Para cada $y \in Y$, definimos el conjunto $\mathcal{F}_y = \{U \in \Omega(X) : y \in \phi(U)\}$.

Primero, demostramos que $\mathcal{F}_y$ es un filtro completamente primo en $\Omega(X)$:

- (1) $X \in \mathcal{F}_y$: Dado que $\phi(X) = Y$ y $y \in Y$, entonces $y \in \phi(X)$, lo que implica $X \in \mathcal{F}_y$.
- (2) Si $V, W \in \mathcal{F}_y$, entonces $y \in \phi(V)$ y $y \in \phi(W)$. Como ϕ es un morfismo, $y \in \phi(V) \cap \phi(W) = \phi(V \cap W)$. Por lo tanto, $V \cap W \in \mathcal{F}_y$.
- (3) Si $V \in \mathcal{F}_y$ y $W \in \Omega(X)$ con $V \subseteq W$, entonces $\phi(V) \subseteq \phi(W)$. Puesto que $y \in \phi(V)$, se deduce que $y \in \phi(W)$, y así $W \in \mathcal{F}_y$.
- (4) Sea $A \subseteq \Omega(X)$ tal que $\bigcup A \in \mathcal{F}_y$. Esto significa $y \in \phi(\bigcup A)$. Como ϕ es un morfismo, $\phi(\bigcup A) = \bigcup_{U \in A} \phi(U)$. Si $y \in \bigcup_{U \in A} \phi(U)$, debe existir $U_0 \in A$ tal que $y \in \phi(U_0)$. Por lo tanto, $U_0 \in \mathcal{F}_y$.

Dado que $\mathcal{F}_y$ es un filtro completamente primo y X es sobrio, existe un único punto $x_y \in X$ tal que $\mathcal{F}_y$ es el filtro de vecindades abiertas de x_y . Es decir, $U \in \mathcal{F}_y \Leftrightarrow x_y \in U$.

Definimos la función $f : Y \rightarrow X$ por $f(y) = x_y$. Para mostrar que f es continua, tomemos cualquier abierto $U \in \Omega(X)$. $y \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow f(y) \in U \Leftrightarrow x_y \in U$. Por la definición de x_y , $x_y \in U \Leftrightarrow U \in \mathcal{F}_y$. Y por la definición de $\mathcal{F}_y$, $U \in \mathcal{F}_y \Leftrightarrow y \in \phi(U)$. Así, $y \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow y \in \phi(U)$. Esto demuestra que $f^{-1}(U) = \phi(U)$. Como $\phi(U)$ es un abierto en Y , f es continua.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo en $\Omega(X)$. Queremos demostrar que $\mathcal{F}$ es el filtro de vecindades de algún punto en X .

Consideremos el espacio topológico trivial $Y = \{p\}$ con $\Omega(Y) = \{\emptyset, \{p\}\}$. Definimos $\phi : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ como:

$$\phi(U) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } U \in \mathcal{F} \\ \emptyset & \text{si } U \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

Demostremos que ϕ es un morfismo de marcos:

- (1) $\phi(X) = \{p\}$ y $\phi(\emptyset) = \emptyset$.
- (2) Si $U, V \in \Omega(X)$:
 - Si $U \cap V \in \mathcal{F}$, entonces $U, V \in \mathcal{F}$. Así, $\phi(U \cap V) = \{p\}$ y $\phi(U) \cap \phi(V) = \{p\}$.
 - Si $U \cap V \notin \mathcal{F}$, entonces $U \notin \mathcal{F}$ o $V \notin \mathcal{F}$. Así, $\phi(U) = \emptyset$ o $\phi(V) = \emptyset$. Luego, $\phi(U \cap V) = \emptyset$ y $\phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$.

(3) Sea $A \subseteq \Omega(X)$.

- Si $\bigcup A \in \mathcal{F}$, entonces existe $U_0 \in A$ con $U_0 \in \mathcal{F}$. Así, $\phi(U_0) = \{p\}$, y $\bigcup_{U \in A} \phi(U) = \{p\}$. Además, $\phi(\bigcup A) = \{p\}$.
- Si $\bigcup A \notin \mathcal{F}$, entonces $U \notin \mathcal{F}$ para todo $U \in A$. Así, $\phi(U) = \emptyset$ para todo $U \in A$, y $\bigcup_{U \in A} \phi(U) = \emptyset$. Además, $\phi(\bigcup A) = \emptyset$.

Concluimos que ϕ es un morfismo de marcos.

Por la hipótesis del lema, existe una función continua $f : \{p\} \rightarrow X$ tal que $f^{-1}(U) = \phi(U)$ para todo $U \in \Omega(X)$. Sea $x_0 = f(p)$ el único punto en la imagen de f . Para cualquier $U \in \Omega(X)$: $U \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \phi(U) = \{p\} \Leftrightarrow p \in \phi(U) \Leftrightarrow p \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow f(p) \in U \Leftrightarrow x_0 \in U$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ es el filtro de vecindades abiertas de x_0 . Dado que esto se cumple para cualquier filtro completamente primo $\mathcal{F}$ en $\Omega(X)$, concluimos que X es sobrio. $\square$

La construcción realizada en la demostración del Corolario 3.4, nos permite construir un espacio sobrio:

LEMA 3.7. *Sea X un espacio T_0 , entonces $\tilde{X}$ es sobrio.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ un filtro completamente primo de $\Omega(\tilde{X})$, queremos mostrar que es un filtro de vecindades de $\tilde{X}$, para esto definimos.

$$\mathcal{F} := \{U : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{F}}\}.$$

Veamos que $\mathcal{F}$ es completamente primo en $\Omega(X)$.

- Sean $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $\tilde{U}, \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{F}}$, como $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{F}}$, veamos que $\widetilde{U \cap V} = \tilde{U} \cap \tilde{V}$, sea $B \in \widetilde{U \cap V} \Rightarrow U \cap V \in B$, pero $U \cap V \subseteq U$, entonces $B \in \tilde{U}$, análogamente obtenemos que $B \in \tilde{V}$, luego $\widetilde{U \cap V} \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Ahora si $C \in \tilde{V} \cap \tilde{U}$, entonces $V \in C$ y $U \in C$, luego $U \cap V \in C$, luego la igualdad.
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $C \in \Omega(X)$, tal que $A \subseteq C$, entonces $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}$, si $B \in \tilde{A}$, entonces $A \in B$, pero $A \subseteq C$, entonces $C \in B$, luego $B \in \tilde{C}$, entonces $\tilde{A} \subseteq \tilde{C}$, luego $\tilde{C} \in \tilde{\mathcal{F}}$, por tanto, $C \in \mathcal{F}$.
- Ahora si $A \subseteq \Omega(X)$ tal que $\bigcup A \in \mathcal{F}$, entonces $\widetilde{\bigcup A} \in \tilde{\mathcal{F}}$, si $B \in \widetilde{\bigcup A}$, con B un filtro completamente primo, como $\bigcup A \in B$, existe $a_0 \in A$, tal que $a_0 \in B$, luego $B \in \tilde{a_0}$, por tanto $B \in \bigcup_{a \in A} \tilde{a}$, luego $\widetilde{\bigcup A} \subseteq \bigcup_{a \in A} \tilde{a}$. Ahora, si $B \in \tilde{a_0}$ para $a_0 \in B$, entonces $a_0 \subseteq \bigcup A$, luego $\bigcup A \in B$, luego $\bigcup_{a \in A} \tilde{a} \subseteq \widetilde{\bigcup A}$. Como $\widetilde{\bigcup A} = \bigcup_{a \in A} \tilde{a}$ y tenemos que $\bigcup_{a \in A} \tilde{a} \in \tilde{\mathcal{F}}$ que es completamente primo entonces existe $\tilde{a_0} \in \tilde{\mathcal{F}}$. por tanto $a_0 \in \mathcal{F}$.

Con esto $\mathcal{F}$ es completamente primo.

Luego $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{F}}$ entonces $U \in \mathcal{F}$ por lo tanto $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ entonces $U \in \mathcal{F}$, Luego $\tilde{F}$ es una vecindad abierta de $\mathcal{F}$ en $\Omega(\tilde{X})$, entonces $\tilde{X}$ es sobrio. $\square$

Finalmente obtenemos.

PROPOSICIÓN 3.8. Si $(X, \tau), (Y, \sigma) \in \text{ob}(\text{Top})$ si (X, τ) es T_0 y cumple que si τ y σ son isomorfos como marcos, entonces (X, τ) y (Y, σ) son isomorfos en Top , si y sólo si X es sobrio.

DEMOSTRACIÓN: Siempre $\tau \cong \tau'$ mediante la función $\phi : \tau \rightarrow \tau'$ definida como $\phi(U) = \tilde{U}$, sin embargo si (X, τ) no es sobrio como $(\tilde{X}, \tau')$ siempre es sobrio, entonces $(X, \tau) \not\cong (\tilde{X}, \tau')$. Ahora si (X, τ) es sobrio y $\tau \cong \sigma$, sea $\psi : \tau \rightarrow \sigma$ el isomorfismo.

Definimos $h : (\tilde{X}, \tau') \rightarrow (\tilde{Y}, \sigma')$, como $h(\mathcal{F}) = \mathcal{H} = \{\psi(U) : U \in \mathcal{F}\}$. Veamos que $h(\mathcal{F})$ es filtro completamente primo. Sean $U, V \in \mathcal{H}$, entonces $U = \psi(U')$ y $V = \psi(V')$ con $U', V' \in \mathcal{F}$, entonces $U' \cap V' \in \mathcal{F}$, luego $\psi(U' \cap V') = \psi(U') \cap \psi(V') \in \mathcal{H}$, luego $U \cap V \in \mathcal{H}$. Ahora, sea $V \in \mathcal{H}$, $C \in \sigma$ y $V \subseteq C$, entonces $V = \psi(V')$ y $C = \psi(C')$ con $V' \in \mathcal{F}$, como $V' \subseteq V' \cup C'$, entonces $V' \cup C' \in \mathcal{F}$, luego $\psi(V' \cup C') \in \mathcal{H}$, luego, $C = V \cup C = \psi(V') \cup \psi(C') \in \mathcal{H}$.

Ahora, sea $A = \{a_i : i \in I\} \subseteq \sigma$, con $\bigcup A \in \mathcal{H}$, sea $a_i = \psi(b_i)$, pero $\bigcup_{i \in I} a_i = \psi(b)$ con $b \in \mathcal{F}$, luego $\bigcup A = \bigcup_{i \in I} \psi(b_i) = \psi(\bigcup_{i \in I} b_i)$, luego $\psi(b) = \psi(\bigcup_{i \in I} b_i)$, por la inyectividad de ψ , concluimos que $\bigcup_{i \in I} b_i = b$, luego $\bigcup_{i \in I} b_i \in \mathcal{F}$, luego existe $i_0 \in I$, tal que $b_{i_0} \in \mathcal{F}$, por tanto $\psi(b_{i_0}) = a_{i_0} \in \mathcal{H}$, luego $\mathcal{H}$ es filtro completamente primo de σ . Pero

$$\mathcal{F} \in h^{-1}(\tilde{V}) \Leftrightarrow h(\mathcal{F}) \in \tilde{V} \Leftrightarrow V = \psi(U), U \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \widetilde{\psi^{-1}(V)} = h^{-1}(\tilde{V})$$

luego h es continua, y además.

$$h(\tilde{U}) = \widetilde{\psi(U)}$$

Solo resta ver que h tiene inversa, pero $\psi^{-1}(h(\tilde{U})) = \tilde{U}$. luego $(X, \tau) \cong (\tilde{X}, \tau') \cong (\tilde{Y}, \sigma')$, luego $(\tilde{Y}, \sigma') \cong (Y, \sigma)$, luego $(X, \tau) \cong (Y, \sigma)$. $\square$

4. Separación en espacios topológicos

DEFINICIÓN 4.1. Un espacio topológico X es T_0 si para todo $x, y \in X$ tal que $x \neq y$ entonces existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $x \notin U$ y $y \in U$.

Una forma cómoda de reconocer que un espacio es T_0 es a través del siguiente lema:

LEMA 4.2. Sea X un espacio topológico, X es T_0 si y solo si para todo $x, y \in X$ tal que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ entonces $x = y$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es T_0 y que $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $x \notin U$ y $y \in U$. Si $y \notin U$, entonces $y \notin \overline{\{x\}}$, pero es claro que $y \in \overline{\{y\}}$, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, de igual manera se concluye si suponemos que $x \notin U$ y $y \in U$.

Si $x \neq y$ para $x, y \in X$, entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, entonces existe $z \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$ o bien existe $z \in \overline{\{y\}} \setminus \overline{\{x\}}$ o equivalentemente existe $U \subseteq X$ abierto, tal que $x \in U$ pero $y \notin U$ o $y \in U$ pero $x \notin U$, o sea X es T_0 . $\square$

Otra propiedad interesante de los espacios T_0 es la siguiente:

LEMA 4.3. Sean X, Y espacios topológicos, Y es T_0 y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f^{-1}[U] = g^{-1}[U]$ para todo $U \subseteq Y$ abierto, entonces $f = g$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, entonces, como Y es T_0 existe $U \subseteq Y$ abierto tal que, $f(x) \in U$ pero $g(x) \notin U$, como $x \in f^{-1}[U]$, entonces $x \in g^{-1}[U]$, luego $g(x) \in U$, de igual manera se llega a una contradicción, si existe $U \subseteq Y$ abierto tal que $g(x) \in U$ pero $f(x) \notin U$. Así que $f = g$. $\square$

A continuación procedemos con algunas propiedades de los espacios T_1 .

DEFINICIÓN 4.4. *Un espacio topológico X es T_1 si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ pero $y \notin U$.*

Una caracterización clásica de los T_1 es la siguiente: para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Sin embargo, abordaremos otro axioma de separación, aunque menos conocido, que bajo ciertas condiciones se relaciona con el axioma T_1 .

DEFINICIÓN 4.5. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es simétrico si y sólo si para todo $x, y \in X$ se cumple que $x \in \overline{\{y\}}$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$.*

A continuación presentamos una equivalencia de este axioma.

LEMA 4.6. *Sea X un espacio topológico, X es simétrico si y solo si para todo $x, y \in X$, $x \in \overline{\{y\}}$ si y solo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es simétrico y $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ pero como $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$.

Ahora si $x, y \in X$ y $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, como $y \in \overline{\{y\}}$, entonces $y \in \overline{\{x\}}$, luego X es simétrico. $\square$

Como mencionamos con anterioridad, la simetría esta relacionada con el axioma T_1 , al punto que asumiendo el axioma T_0 , son equivalentes, lo cual destacamos en el siguiente lema.

LEMA 4.7. *Sea X un espacio topológico T_0 , entonces X es T_1 si y solo si X es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que X es un espacio topológico T_0 y simétrico y sean $x, y \in X$, si $y \in \overline{\{x\}}$ ver el Lema 4.6, entonces $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$, y por ser T_0 , tenemos que $x = y$, luego $\overline{\{x\}} = \{x\}$, entonces concluimos que X es T_1 .

Ahora supongamos que X es T_1 y que $x \in \overline{\{y\}}$, o sea para todo $U \in \Omega(X)$ si $x \in U$, se tiene que $y \in U$, luego $x = y$, luego $y \in \overline{\{x\}}$, por tanto X es simétrico. $\square$

Ademas, un aspecto interesante de la simetría, es que podemos caracterizarla haciendo uso de funciones continuas, lo cual hacemos ver en el siguiente resultado.

LEMA 4.8. *Sean X, Y espacios topológicos, con Y T_0 . Entonces Y es simétrico si y sólo si para $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas con $f^{-1}[U] \subseteq g^{-1}[U]$ para todo $U \subseteq Y$ abierto, se tiene que $f = g$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que Y es simétrico y que $f^{-1}[U] \subseteq g^{-1}[U]$ para todo $U \subseteq Y$ abierto.

Como Y es T_0 y supongamos que $x \in X$ es tal que $f(x) \neq g(x)$, supongamos que existe $U \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in U$ pero $g(x) \notin U$, luego, $x \in f^{-1}[U]$, pero $x \notin g^{-1}[U]$, luego $f^{-1}[U] \not\subseteq g^{-1}[U]$, esto es una contradicción.

Ahora supongamos que $g(x) \in U$, pero $f(x) \notin U$, es decir $x \in g^{-1}[U] \setminus f^{-1}[U]$, además $g(x) \notin \overline{\{f(x)\}}$, por simetría $f(x) \notin \overline{\{g(x)\}}$, luego existe $V \in \Omega(Y)$ tal que $f(x) \in V$, pero $g(x) \notin V$, luego $f^{-1}[V] \subsetneq g^{-1}[V]$ lo cual es una contradicción, luego $f = g$.

Ahora consideremos $x, y \in Y$ tal que $x \in \overline{\{y\}}$ y tomamos el subespacio $\{x, y\} = X$ de Y , sea $g : X \rightarrow Y$ el encaje y $f : X \rightarrow Y$ el morfismo constante $f(z) = x$ para todo $z \in X$. Es claro que $f^{-1}[U] \subseteq g^{-1}[U]$ para todo $U \in \sigma$, ya que: $z \in f^{-1}[U] \Leftrightarrow x \in U$ y $z \in g^{-1}[U] \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq U$ para todo $U \in \sigma$, es decir $f = g$, luego $x = y$, es decir $y \in \overline{\{x\}}$, luego Y es simétrico. $\square$

Ahora enunciemos el axioma T_2 y describiremos algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 4.9. *Un espacio topológico X es T_2 si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tal que $x \in U, y \in V$.*

Retomando la propiedad de sobriedad, notamos que los espacios T_2 en particular son sobrios, tal como lo menciona el siguiente lema.

LEMA 4.10. *Si X es un espacio topológico, si X es T_2 , entonces X es sobrio.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X T_2 y $P \in \Omega(X)$ primo, entonces $P \neq X$, luego existe $x \in X \setminus P$, pero $\{x\} = \overline{\{x\}}$ y supongamos que $P \neq X \setminus \overline{\{x\}} = X \setminus \{x\}$, existe $y \in (X \setminus \{x\}) \setminus P$, es decir existen $x, y \in X$ tales que $x, y \notin P$ además es claro que $x \neq y$, luego existen $A, B \in \Omega(X)$ ajenos tales que $x \in A$ e $y \in B$, entonces $P = (P \cup A) \cap (B \cup P)$, pero $P \neq P \cup A$ y $P \neq P \cup B$. Luego $p = X \setminus \overline{\{x\}}$. $\square$

Nuevamente introducimos una propiedad de separación poco conocida pero que se relaciona con el axioma T_2 .

DEFINICIÓN 4.11. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es R_1 si y sólo si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que si $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, entonces existen abiertos U, V disjuntos tales que $\overline{\{x\}} \subseteq U$ y $\overline{\{y\}} \subseteq V$.*

Veamos la siguiente equivalencia de T_2

LEMA 4.12. *Si X es un espacio T_1 , entonces X es R_1 si y sólo si es T_2 .*

DEMOSTRACIÓN:

Si X es T_1 y R_1 y si $x \neq y$, entonces $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y $\overline{\{y\}} = \{y\}$, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, luego existen abiertos U, V ajenos tal que $x \in U$ y $y \in V$, luego X es T_2 .

Ahora asumiendo T_2 , supongamos que $x \neq y$ y $x, y \in X$, como X es en particular T_1 , entonces $\{x\} = \overline{\{x\}}$ y $\{y\} = \overline{\{y\}}$, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, luego existen abiertos U, V ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$, entonces $\overline{\{x\}} \subseteq U$ y $\overline{\{y\}} \subseteq V$, finalmente concluimos que X es R_1 .

□

Otra propiedad relacionada a los axiomas de separación es la regularidad. Mientras que los axiomas T_0 , T_1 , T_2 separan puntos a través de abiertos, la regularidad lo que nos permite es separar puntos de cerrados haciendo uso, como es claro, de abiertos.

DEFINICIÓN 4.13. Sea X un espacio topológico, diremos que X es regular si dado $x \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tales que $x \notin A$, existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $x \in U$, $A \subseteq V$.

Ahora, obtenemos un resultado en donde se relacionan todas las propiedades:

PROPOSICIÓN 4.14. Sea X un espacio topológico T_0 y regular, entonces X es T_1 y T_2 .

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in X$ distintos, entonces por ser T_0 tenemos que existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$. Sin pérdida de generalidad asumimos la primera condición.

Consideremos $C = X \setminus U$, notemos que $x \notin C$, $y \in C$, entonces por regularidad existen abiertos disjuntos $V_1, V_2 \subseteq X$ tales que $x \in V_1$ y $C \subseteq V_2$, en particular $y \in V_2$, pero $y \notin V_1$ y $x \notin V_2$, entonces X es T_1 y como V_1 y V_2 son disjuntos, concluimos que X es T_2 .

□

Ahora, exploraremos la propiedad de regularidad en términos de orden.

DEFINICIÓN 4.15. Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ abiertos. Diremos que V está por debajo de U si $\overline{V} \subseteq U$, y lo denotaremos por $V \prec U$.

DEFINICIÓN 4.16. Sea X un espacio topológico y $V \subseteq X$ abierto. Denotamos por $V^* := \bigcup \{U \in \Omega(X) : U \cap V = \emptyset\}$

Desde la perspectiva de la teoría de retículas, V^* no es más que el pseudocomplemento de V . Pese a tener la definición del pseudocomplemento de V en terminos de orden, presentaremos una caracterización del pseudocomplemento en términos topológicos.

LEMA 4.17. Sean X un espacio topológico y $V \subseteq X$ un abierto. Entonces $V^* = X \setminus \overline{V}$.

DEMOSTRACIÓN:

Notemos que $V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$ así que basta probar que $X \setminus \overline{V}$ es el supremo de la familia $\{U \in \Omega(X) : U \cap V = \emptyset\}$. Sea $U \in \Omega(X)$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Si existe $z \in X$ tal que $z \in U \cap \overline{V}$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap \overline{V} = \emptyset$, entonces $U \subseteq X \setminus \overline{V}$, de esta forma concluimos que $V^* = X \setminus \overline{V}$.

□

Procedemos a caracterizar la relación $\prec$ en términos de abiertos.

LEMA 4.18. Sea X un espacio topológico, y $U, V \in \Omega(X)$. Entonces $V \prec U$ si y sólo si $V^* \cup U = X$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $V \prec U$, entonces $\overline{V} \subseteq U$, luego $X = \overline{V} \cup (X \setminus \overline{V}) \subseteq U \cup V^*$, por lo tanto $U \cup V^* = X$.

Ahora, supongamos que $U \cup V^* = X$. Sea $z \in \overline{V}$, en general $z \in X$, es decir $z \in U \cup V^* = U \cup (X \setminus \overline{V})$, luego $z \in U$, esto es $\overline{V} \subseteq U$, por lo tanto $V \prec U$. $\square$

Gracias a esta relación, podemos caracterizar la regularidad en términos de orden de la siguiente forma.

PROPOSICIÓN 4.19. *Sea X un espacio topológico. X es regular si y sólo si para todo abierto $U \subseteq X$, se cumple que*

$$U = \bigcup \{V \in \Omega(X) \mid V \prec U\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es regular. Sea $U \in \Omega(X)$ y $A = X \setminus U$, si $x \in U$, entonces por la regularidad existen $V_x, W \in \Omega(X)$ ajenos tales que $x \in V_x$ y $A \subseteq W$, luego $V_x \subseteq X \setminus W \subseteq U$, entonces $X = (X \setminus W) \cup W \subseteq U \cup W$, así obtenemos que $V_x \prec U$, y

$$U = \bigcup \{V_x : x \in U\} \subseteq \bigcup \{V \in \Omega(X) : V \prec U\} \subseteq U.$$

Por lo que concluimos, $U = \bigcup \{V \in \Omega(X) : V \prec U\}$.

Sea $x \in X$ con $x \notin A$ para A cerrado de X , sea $U = X \setminus A$, entonces $x \in U$ y $U \in \Omega(X)$. Como

$$U = \bigcup \{V \in \Omega(X) : V \prec U\}$$

entonces, existe $V \in \Omega(X)$ tal que $x \in V$ y $V \prec U$. Esto es por definición, $\overline{V} \subseteq U$ y $V \subseteq \overline{V} \subseteq U = X \setminus A$. Además notamos que $X \setminus \overline{V} \supseteq X \setminus (X \setminus A) = A$, es decir $A \subseteq V^*$ y como $V \cap V^* = \emptyset$, luego X es regular.

$\square$

5. Espacios completamente regulares

DEFINICIÓN 5.1. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es completamente regular si para $x \in X$ y A cerrado de X con $x \notin A$, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f[A] = \{1\}$*

Es claro que completamente regular implica regular sea $x \notin A$ con A cerrado en X y $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f[A] = \{1\}$. Si tomamos $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos en $[0, 1]$ entonces $U = f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ y $V = f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos en X tales que $x \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego X es regular.

Aprovechando la relación $\prec$ caracterizamos a los espacios completamente regulares en terminos de orden, para esto, introducimos primariamente algunas definiciones.

DEFINICIÓN 5.2. *Sea R una relación en el marco L , diremos que es interpolativa si siempre que aRb existe $c \in L$, tal que aRc y cRb*

DEFINICIÓN 5.3. *Sean X un espacio topológico y $V, U \in \Omega(X)$. Diremos $U \prec\prec V$ es definida como la más grande relación interpolativa contenida en $\prec$. Diremos que U esta completamente por abajo de V cuando $U \prec\prec V$.*

Veamos que $\prec\prec$ esta bien definida:

LEMA 5.4. *Sea R una relación transitiva en un conjunto τ . Existe una relación $R^\sim$ en τ tal que $R^\sim$ es la relación interpolativa más grande contenida en R .*

DEMOSTRACIÓN: Definimos el conjunto Γ como la colección de todas las relaciones en τ que son interpolativas y están contenidas en R :

$$\Gamma = \{S \subseteq \tau \times \tau \mid S \subseteq R \text{ y } S \text{ es interpolativa}\}$$

La relación vacía, $\emptyset$, es interpolativa (por vacuidad) y está contenida en cualquier R . Por lo tanto, $\emptyset \in \Gamma$, lo que asegura que Γ no es un conjunto vacío.

Definimos $R^\sim$ como la unión de todas las relaciones en Γ :

$$R^\sim = \bigcup_{S \in \Gamma} S$$

Por esta construcción, $R^\sim$ es la unión de subrelaciones de R , lo que implica que $R^\sim \subseteq R$. Además, $R^\sim$ contiene a todas las relaciones interpolativas que están dentro de R , garantizando que es la relación interpolativa más grande contenida en R .

Ahora, solo resta demostrar que $R^\sim$ es interpolativa. Sean $(U, V) \in R^\sim$. Por la definición de la unión, esto significa que existe al menos una relación $S_0 \in \Gamma$ tal que $(U, V) \in S_0$. Dado que S_0 es una relación interpolativa (por su definición al ser parte de Γ), existe un elemento $W \in \tau$ tal que $(U, W) \in S_0$ y $(W, V) \in S_0$. Como $S_0 \subseteq R^\sim$ (ya que $R^\sim$ es la unión de todos los elementos de Γ), se sigue que $(U, W) \in R^\sim$ y $(W, V) \in R^\sim$. Por lo tanto, $R^\sim$ es interpolativa. $\square$

Consideremos al conjunto $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}\}$, tenemos que $D \subseteq [0, 1]$, esto nos conduce a la siguiente equivalencia,

LEMA 5.5. *Sean X un espacio topológico y $U, V \subseteq X$ abiertos, Definimos URV si existe $\{U_d \in \Omega(X) : d \in D\}$ tal que:*

- (1) $U_0 = U, U_1 = V$ y
- (2) $U_d \prec U_e$ si $d < e$ con $d, e \in D$.

Entonces $R = \prec\prec$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que si $U' \subseteq U, V \subseteq V'$ y URV , entonces $U'RV'$. Por hipótesis $U_0 = U$ y $V = U_1$ y además URV , luego $\overline{U} \subseteq V$, o sea $\overline{U}_0 \subseteq V$, por otro lado si denotamos por $U'_0 = U'$ y $U'_1 = V'$, entonces $\overline{U'_0} = \overline{U'} \subseteq \overline{U} \subseteq V \subseteq V' = U'_1$, entonces $U'_0 \prec U'_1$, ahora sea $d < e < 1$ con $d, e \in D$. Como URV , entonces $U_d \prec U_e$, o sea $\overline{U_d} \subseteq U_e$, si denotamos $U'_d = U_d$ y $U'_e = U_e$, entonces $U'_d \prec U'_e$. Luego $U' \prec\prec V'$.

Veamos que R es interpolativa, sea $d \in D$, con $0 < d < 1$. Si $(U_d)_0 = U_d$, $(U_d)_1 = V$ y para $e \in D$, como $d = \frac{k}{2^n}$ con $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, y $e = \frac{r}{2^m}$ con $r \in \{0, \dots, 2^m\}$, entonces $d + e = \frac{k2^m + rr2^n}{2^{n+m}}$, tenemos que $0 \leq k2^m + r2^n \leq 2^m2^n + 2^n2^m < 2^{n+m}$, luego $d + e \in D$, podemos definir $(U_d)_e = U_{d+e}$ y se cumple que U_dRV , ahora si $(U_d)_0 = U$ y $(U_d)_1 = U_d$ y para $e \in D$ definimos $(U_d)_e = U_{de}$ notemos que $de \in D$, y obtenemos que $U \prec\prec U_d$, luego R es interpolativa.

Sean $U, V \in \Omega(X)$ tal que $(U, V) \in S$ con $S \subseteq \prec$ interpolativa transitiva, veamos que $USV \Rightarrow U \prec\prec V$. Sea $W \in \Omega(X)$ tal que USW y WSV definimos $U_{\frac{1}{2}} = W$ y $U_0 = U$

y $U_1 = V$. Ahora, usando que S es interpolativa, sean $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}} \in \Omega(X)$ tales que $U_0 S U_{\frac{1}{4}}$ y $U_{\frac{1}{4}} S U_{\frac{1}{2}}$ y $U_{\frac{3}{4}}$ tal que $U_{\frac{1}{2}} S U_{\frac{3}{4}}$ y $U_{\frac{3}{4}} S U_1$. Por tanto, si tenemos $\{U_0, U_1\} \subseteq \Omega(X)$, podemos definir la colección de abiertos, $\{U_0, U_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}, U_1\}$

Ahora el paso $n + 1$. Supongamos que tenemos una colección de abiertos

$$\{U_0, U_{\frac{1}{2^n}}, U_{\frac{2}{2^n}}, \dots, U_{\frac{k}{2^n}}, \dots, U_1\}$$

tales que $U_{\frac{k}{2^n}} S U_{\frac{k+1}{2^n}}$, o sea $U_{\frac{k}{2^n}} \prec U_{\frac{k+1}{2^n}}$ para $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, entonces definimos $U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}} \in \Omega(X)$ tal que $U_{\frac{k}{2^n}} S U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$ y $U_{\frac{k+1}{2^n}} S U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$, entonces los abiertos

$$\{U_0, U_{\frac{1}{2^n}}, U_{\frac{2}{2^n}}, \dots, U_{\frac{k}{2^n}}, U_{\frac{1}{2^{n+1}}}, \dots, U_{\frac{k}{2^{n+1}}}, \dots, U_1\}$$

cumplen $U_{\frac{k}{2^{n+1}}} \prec U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$ para $k \in \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$, entonces URV . Así que $\prec \prec \subseteq R$ pero por ser interpolativa concluimos la igualdad. $\square$

Ahora, podemos ver el anterior Lema 5.5 en una versión más topológica

LEMA 5.6. Si $U \prec \prec V$ y $\phi : X \rightarrow [0, 1]$, definida como $\phi(x) = \inf\{d : x \in U_d\}$, entonces ϕ es continua en X .

DEMOSTRACIÓN:

Veamos los siguientes casos y notemos que si $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin U_d$ para todo $d \in D$, $\inf \emptyset = 1$, por vacuidad. Como veremos adelante de todas formas ϕ es continua en este caso.

- (1) Sea $x_0 \in X$, tal que $\phi(x_0) = 1$, y sea $(a, 1] \subseteq (0, 1]$ un abierto de $[0, 1]$ tal que $\phi(x_0) \in (a, 1]$. Sean $d, e \in (a, 1) \cap D$ con $a < d < e \leq 1$, entonces $\overline{U_d} \subseteq U_e$, además notar que si $d, e \in D$ y $d < e$, entonces $U_d \subseteq U_e$, ya que si $d < e$, entonces $U_d \subseteq \overline{U_d} \subseteq U_e$. ahora si $x_0 \in U_e$, entonces $1 \leq e$ lo cual no es cierto, así que $x_0 \notin U_e$, luego $x_0 \in X \setminus U_e \subseteq X \setminus \overline{U_d} = V$, Veamos que $\phi[V] \subseteq (a, 1]$, sea $x \in V$, luego si $x \in U_r$, entonces $r \geq d$, ya que si $r < d$, entonces $x \in U_d$, lo cual no es posible, entonces $\phi(x) \geq d > a$, luego $\phi(x) \in (a, 1]$, luego ϕ es continua en x_0 .
- (2) Sea $\phi(x_0) = 0$ y tomamos $[0, a)$ un abierto de $[0, 1]$ tal que $\phi(x_0) \in [0, a)$, tomamos $V = \bigcup \{U_d : x_0 \in U_d\}$. Si $x \in V$, entonces existe U_d tal que $x_0 \in U_d$ y $x \in U_d$, entonces $\phi(x) \leq d < a$, luego ϕ es continua en x_0 .
- (3) Si $\phi(x_0) = a$, donde $a \in (0, 1)$, sea $a \in (c, d) \subset (0, 1)$ y sean $d_1 \in (c, a) \cap D$, y $d_2 \in (a, d) \cap D$, entonces $(c < d_1 < a, a < d_2 < d)$, entonces, $\overline{U_{d_1}} \subseteq U_{d_2}$, luego $X \setminus U_{d_2} \subseteq X \setminus \overline{U_{d_1}}$. Como $c < d_1 < a < d_2$, si $x_0 \in \overline{U_{d_1}} \subseteq U_{d_2}$, entonces $a \leq d_2$ lo cual no es posible así que $x_0 \in X \setminus \overline{U_{d_1}}$. Recordar la definición de ϕ , luego existe $d_3 \in D$ tal que $a \leq d_3 < d_2 < d$ tal que $x_0 \in U_{d_3}$, entonces $x_0 \in U_{d_2}$, por tanto $x_0 \in (X \setminus \overline{U_{d_1}}) \cap U_{d_2} = V$. Veamos que $\phi[V] \subseteq (c, d)$. Sea $x \in V$, si $r = \phi(x)$, entonces $x \in U_r$, si $r \leq d_1$, entonces $x \in U_{d_1} \subseteq \overline{U_{d_1}}$, contradicción, como $x \in U_{d_2}$, entonces $r \leq d_2$, luego $\phi(x) = r \in (d_1, d_2] \subseteq (c, d)$. luego ϕ es continua en x_0 , luego ϕ es continua.

$\square$

Con lo mencionado anteriormente, procedemos a caracterizar la regularidad completa en términos de orden.

TEOREMA 5.7. *Sea X un espacio topológico, entonces X es completamente regular si y sólo si para todo $U \in \Omega(X)$, se cumple que*

$$U = \bigcup \{V : V \prec\prec U\}$$

DEMOSTRACIÓN: 1. Supongamos que X es completamente regular y $U \in \Omega(X)$. Sea $x \in X$ con $x \in U$, entonces $x \notin X \setminus U$, luego existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f[\{x\}] = 0$ y $f[X \setminus U] = \{1\}$

Entonces para $d \in D$, definimos

$$U_d = f^{-1}[[0, \frac{1+d}{2}]], B_d = f^{-1}[[0, \frac{1+d}{2}]]$$

Observemos que si $d = \frac{k}{2^n}$ con $k \in \{0, \dots, 2^n\}$, entonces $\frac{1+d}{2} = \frac{\frac{2^n+k}{2^n}}{2} = \frac{2^n+k}{2^{n+1}} \leq 1$, de esta forma $U_d \in \Omega(X)$ y B_d es cerrado en X y $U_d \subseteq B_d$, entonces $\overline{U_d} \subseteq B_d$, pero si $d, e \in D$ y $d < e$, se sigue que $U_d \subseteq B_d \subseteq U_e$, luego $\overline{U_d} \subseteq U_e$ y entonces $U_0 \prec\prec U_1$, notemos que $U_0 = f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$ y que $U_1 = f^{-1}[[0, 1]] \subseteq U$, ya que si $x \in U_1$, $f(x) \in [0, 1]$ es decir $f(x) \neq 1$, pero si $x \notin U$, tendríamos que $x \in X \setminus U$, luego $f(x) = 1$, por tanto $x \in U$ y $x \in U_0$. Si denotamos por $U(x) \in \Omega(X)$, tal que $x \in U(x)$ y sabemos que para todo $x \in X$, tenemos que $U(x) \prec\prec U$, luego

$$U = \bigcup \{U(x) : x \in U\} \subseteq \bigcup \{V : V \prec\prec U\} \subseteq U$$

Ya que si $V \prec\prec U$, entonces $V \subseteq U$. Luego concluimos la igualdad.

2. Ahora supongamos la igualdad

$$U = \bigcup \{V : V \prec\prec U\}.$$

para $U \in \Omega(X)$ y sea A cerrado con $x \notin A$. Sea $U = X \setminus A$, entonces $U \in \Omega(X)$ y $x \in U$. Como $U = \bigcup \{V : V \prec\prec U\}$, entonces, existe $V \prec\prec U$, con $x \in V$. Como $x \in U_d$ para todo $d \in D$, entonces $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ definida en Lema 5.6, entonces $\phi(x) = 0$, sin embargo como para todo $y \in A$, si $\phi(y) = r < 1$, entonces $y \in U_r$, pero $U_r \subseteq U = X \setminus A$, lo que no puede ser, luego $\{d : y \in U_d\} = \emptyset$, así que $\phi(y) = 1$, luego $\phi[A] = \{1\}$. Es decir X es completamente regular. $\square$

Para finalizar esta sección, caracterizaremos la normalidad en espacios topológicos.

DEFINICIÓN 5.8. *Sea X un espacio topológico, diremos que X es normal si para cada par de cerrados disjuntos $A, B \subseteq X$ existe abiertos disjuntos U, V tal que $A \subseteq U, B \subseteq V$.*

Reformulamos la normalidad como sigue en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.9. *Un espacio topológico X es normal si y solo si para cada par de abiertos S, T tal que $S \cup T = X$, existen abiertos disjuntos, U, V tal que $S \cup U = X = T \cup V$.*

DEMOSTRACIÓN: Asumamos normalidad. Sean S, T abiertos en X tales que $S \cup T = X$, consideramos entonces los cerrados $A = X \setminus S, B = X \setminus T$ y notamos que $A \cap B = \emptyset$, por normalidad existen abiertos disjuntos $U, V \in \Omega(X)$ tal que $A \subseteq U,$

$B \subseteq V$. Como $A \cup S = X$, entonces $U \cup S = X$. Procedemos de forma similar para notar que $V \cup T = X$.

Por otro lado, asumiendo la condición, sean A, B cerrados disjuntos en X y consideramos $S = X \setminus A, T = X \setminus B$. Notamos que $S \cup T = X$, entonces por la condición, existe abiertos disjuntos $U, V \in X$ tal que $S \cup U = X = T \cup V$. Como $A \subseteq X = S \cup U$, pero $S = X \setminus A$, entonces $A \subseteq U$. De manera análoga $B \subseteq V$, es decir, X es normal. $\square$

6. Separación en marcos

Finalmente en esta sección, buscamos traducir axiomas de separación en espacios topológicos que son bien comportados con respecto a su retícula de abiertos.

Comencemos con regularidad.

DEFINICIÓN 6.1. Sean L un marco y $a, b \in L$ diremos que a esta por debajo de b , en símbolos $a \prec b$, si y solo si existe $c \in L$ tal que $a \wedge c = 0, c \vee b = 1$.

Ahora definimos:

DEFINICIÓN 6.2. Sea L un marco, diremos que L es regular si para todo $a \in L$, se tiene que:

$$a = \bigvee \{b \in L : b \prec a\}$$

Ahora, haciendo algo análogo a la regularidad completa, introducimos la definición en marcos.

DEFINICIÓN 6.3. Sea $S \subseteq L \times L$ es interpolativa y transitiva si:

Para todo $(a, b) \in S$, existe $c \in L$ tal que $(a, c) \in S$ y $(c, b) \in S$ y si $(a, b), (c, d) \in S$, entonces $(a, d) \in S$.

Igual que en el caso de una topología la unión de relaciones interpolativas y contenidas en una relación transitiva es interpolativa.

LEMA 6.4. La relación $\prec$, en L es transitiva.

DEMOSTRACIÓN: Ya que si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces existen $c_1, c_2 \in L$ tales que $a \wedge c_1 = 0, b \vee a = 1, b \wedge c_2 = 0$ y $b \vee c = 1$, entonces $a \wedge (c_1 \wedge c_2) = 0 \wedge c_2 = 0$ y como $(a \vee c) = (a \vee c) \wedge 1$ $\square$

Podemos definir

DEFINICIÓN 6.5. $\Gamma = \{S \subseteq L \times L : S \subseteq \prec \text{ y es transitiva e interpolativa}\}$, entonces $\prec \prec = \bigcup \Gamma$.

Igual que en el marco de abiertos podemos asumir que $\prec \prec$ es interpolativa.

DEFINICIÓN 6.6. Sea L un marco, diremos que L es completamente regular si para todo $a \in L$, se cumple

$$a = \bigvee \{b \in L : b \prec \prec a\}$$

Y finalmente definimos normalidad en el contexto de marcos.

DEFINICIÓN 6.7. Sea L un marco, diremos que L es normal si para todo $a, b \in L$ tal que $a \vee b = 1$ existen $u, v \in L$ tales que $a \vee u = 1 = b \vee v$ y $u \wedge v = 0$.

Bibliografía

- [1] Picado, J., & Pultr, A. (2011). *Frames and Locales: topology without points*. Springer Science & Business Media.
- [2] Picado, J., & Pultr, A. (2021). *Separation in point-free topology*. Switzerland: Birkhäuser.

Correos electrónicos:

jangoa@fcfm.buap.mx (J. Juan Angoa-Amador),

rm224470131@alm.buap.mx (Luis Alberto Reyes Macías)

CAPÍTULO 8

Ejemplos que tienen como límite inverso generalizado el conjunto de Cantor

David Maya Escudero

Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México

Mónica Sánchez Garrido

Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México

1. Introducción	179
2. Preliminares	180
3. Resultados principales y ejemplos	183
Bibliografía	196

1. Introducción

Desde que en 2004, W. S. Mahavier en [9] introdujo el límite inverso con funciones semicontinuas superiormente como límite inverso con subconjuntos cerrados de $[0, 1] \times [0, 1]$, se volvió rápidamente un tema de interés entre la comunidad de topólogos por ser tan fascinante como complejo. Una de las propiedades que ha resultado ser muy interesante en esta área es la conexidad, ya que no siempre es fácil comprobar si un límite inverso generalizado es o no conexo. Actualmente existen muchos artículos sobre la conexidad de los límites inversos generalizados, aquí mencionamos sólo algunas referencias que se pueden consultar si este tema es del interés del lector, [6], [7], [8], [10].

Los autores de [2] y [3] también quisieron poner su granito de arena en este mundo de los límites inversos generalizados, pero desde un punto de vista opuesto a la conexidad, lo totalmente desconexo. Es por eso que empezaron a querer saber cuándo un límite inverso generalizado es totalmente desconexo. Después cambiaron un poquito el rumbo y se preguntaron bajo qué condiciones el límite inverso generalizado es el conjunto de Cantor. En resumen, probaron que si X es un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ es una función semicontinua superiormente que es unión de funciones continuas de X en X , y $Dom(F)$ es un conjunto totalmente desconexo, entonces $\varprojlim F$ es el conjunto de Cantor, ver [2], [3], [4]. En [1], L. Alvin, S. Greenwood y J. P. Kelly, generalizan este trabajo hallando las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales si X es un espacio métrico compacto no vacío, $F : X \rightarrow 2^X$ es una función semicontinua superiormente (no necesariamente unión de funciones) y $Dom(F)$ es un conjunto totalmente desconexo, el $\varprojlim F$ es el conjunto de Cantor.

En este capítulo daremos ejemplos de sucesiones inversas de tal manera que su límite inverso generalizado resulte ser el conjunto de Cantor, analizaremos cómo obtener el límite inverso generalizado por medio de las herramientas que se nos presentan en [1] y en [2], [3], [4] con el objetivo de hacer accesible esta sofisticada herramienta.

2. Preliminares

Dado X un espacio métrico compacto no vacío, 2^X es la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de X dotada con la topología de Vietoris.

Sean X y Y espacios topológicos. Una función $F : X \rightarrow 2^Y$ es *semicontinua superiormente en el punto* $x \in X$ si siempre que para cada conjunto abierto V de Y tal que $F(x) \subseteq V$, existe un conjunto abierto U en X de tal manera que $x \in U$ y si $t \in U$, entonces $F(t) \subseteq V$. La función F es *semicontinua superiormente* si es semicontinua superiormente en cada punto de X . El conjunto $\Gamma(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ es llamado la *gráfica de F* .

Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios topológicos no vacíos y $n \in \mathbb{N}$. Usamos $\bar{x}$ para denotar un punto $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y $\bar{x}_n$ para referirnos a $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in$

$\prod_{i=1}^n X_i$. Dado $i \in \mathbb{N}$, x_i es la i -ésima coordenada de $\bar{x}$ o $\bar{x}_n$.

Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos no vacíos y $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $F_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es semicontinua superiormente. La sucesión $\{X_i, F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es llamada *sucesión inversa*. El *límite inverso generalizado* de la sucesión inversa $\{X_i, F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es el espacio

$$\{\bar{x} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in F_i(x_{i+1}), \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

con la topología heredada de la topología producto de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y este espacio se denota por $\varprojlim (X_i, F_i)$.

En este capítulo siempre estaremos trabajando con sucesiones inversas constantes, es decir, existen X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente tales que $X_i = X$ y $F_i = F$ para cada $i \in \mathbb{N}$, en este caso denotamos su límite inverso generalizado por $\varprojlim (X, F)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ se definen los siguientes conjuntos:

- $G'_n = \{\bar{x}_{n+1} \in \prod_{i=1}^{n+1} X : x_i \in F(x_{i+1}), 1 \leq i \leq n\};$
- $Dom_n(F) = \{x_1 \in X : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in G'_n\};$
- $Dom(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Dom_n(F).$

En [1], los autores definen y denotan al $Dom(F)$ de una manera distinta a la que presentamos, sin embargo, ambas definiciones coinciden.

En [1, Remark 2.2] y [2, Proposition 2.1] se pueden encontrar algunas de las siguientes propiedades:

OBSERVACIÓN 2.1. *Sean X un espacio métrico, compacto, no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Entonces,*

- (1) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Dom_n(F)$ es métrico compacto no vacío;*
- (2) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Dom_{n+1}(F) \subseteq Dom_n(F)$;*
- (3) *$Dom(F)$ es un espacio métrico compacto no vacío;*
- (4) *Para cada $x \in Dom(F)$, $F(x) \subseteq Dom(F)$;*
- (5) *Si $x \in Dom(F)$, entonces existe $y \in Dom(F)$ tal que $x \in F(y)$;*
- (6) *Si $x \in Dom(F)$, existe $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \varprojlim (X, F)$ tal que $x = x_1$;*
- (7) *Dado $\bar{x} \in \varprojlim (X, F)$, se tiene que $x_i \in Dom(F)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Si $\mathcal{F}$ es una colección de funciones continuas de X en sí mismo tal que $F : X \rightarrow 2^X$ es una función semicontinua superiormente definida como $F(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$, diremos que F es *unión de funciones de $\mathcal{F}$* . Las siguientes condiciones son consecuencia directa de las definiciones.

OBSERVACIÓN 2.2. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones tal que $F : X \rightarrow 2^X$ es unión de funciones de $\mathcal{F}$. Entonces:*

- (1) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $Dom_{n+1}(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(Dom_n(F))$;*
- (2) *Para cada $f \in \mathcal{F}$, $f(Dom(F)) = Dom(F)$.*

Sean $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de espacios métricos compactos no vacíos y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i \subseteq X_i \times X_{i+1}$ un conjunto cerrado. Se define el *producto de Mahavier* como:

$$\star_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \prod_{i=1}^{n+1} X_i : (x_i, x_{i+1}) \in A_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Ahora presentaremos algunas definiciones que son necesarias para entender los teoremas de caracterización que se dan en [1]. En dicho artículo se presentan otras definiciones que aquí omitimos para no saturar al lector, pero recomendamos leer [1] para más información. Los autores de [1] dividen el artículo en tres casos, cuando $Dom(F)$ es finito, cuando $Dom(F)$ es numerable, y cuando $Dom(F)$ es no numerable. En el caso de $Dom(F)$ finito y en el caso de $Dom(F)$ numerable dan definiciones diferentes aunque muy parecidas, aquí también dividiremos de la misma manera las definiciones y notación.

2.1. Si $Dom(F)$ es finito. Una *gráfica dirigida* G es un par (V, E) donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices y E es un conjunto de aristas dirigidas donde e_{ij} denota que existe una arista que comienza en el vértice v_i y termina en el vértice v_j .

Una gráfica dirigida es *fuertemente conexa* si existe un camino finito entre cualesquiera dos vértices. A la subgráfica fuertemente conexa más grande de una gráfica se le llama *componente* de la gráfica dirigida.

Una componente C es llamada *cíclica* si $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ donde existe una arista de c_i a c_j si y sólo si $j = i + 1 \pmod{n}$. Determinadas las componentes de una gráfica dirigida G , se puede indicar la manera en que las componentes se relacionan mediante una nueva gráfica H llamada *la gráfica de componentes*. El conjunto de vértices para H es la colección de componentes de G , y existirá una arista dirigida de un vértice de H a otro por cada arista dirigida en G de un vértice en la primer componente a un vértice en la segunda componente.

Una componente C es *fuentes* si existen únicamente aristas que salgan de C en H ; la componente C es *de hundimiento* si existen únicamente aristas que lleguen a C en H ; y la componente C es *independiente* si no existen aristas que salgan de C en H y no existen aristas que lleguen a C en H .

Si $\text{Dom}(F) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $n > 1$, se puede definir un espacio desplazamiento de tipo finito para $F|_{\text{Dom}(F)}$, el cual se denota por $SFT(\text{Dom}(F))$, aquí no lo vamos a definir, pero puede consultar [1] para conocer la definición de espacio desplazamiento de tipo finito para $F|_{\text{Dom}(F)}$. Lo que sí vamos a necesitar fuertemente y es por eso que lo vamos a definir es lo siguiente:

Una gráfica dirigida asociada a $SFT(\text{Dom}(F))$ se define de la siguiente manera

- El conjunto de vértices es $\text{Dom}(F)$
- Si $x_j \in F(x_i)$, entonces habrá una arista de x_i a x_j

Una gráfica dirigida asociada para un nuevo espacio desplazamiento de tipo finito para $F|_{\text{Dom}(F)}$, $\underline{SFT}(\text{Dom}(F))$, es generada mediante la gráfica asociada a $SFT(\text{Dom}(F))$ salvo que las aristas cambian de dirección.

2.2. Si $\text{Dom}(F)$ es numerable. En [1], se define la *gráfica dirigida* G_F para $F|_{\text{Dom}(F)}$ y se le asocia un espacio desplazamiento, $SHIFT(\text{Dom}(F))$, de la siguiente manera: cada punto de $\text{Dom}(F)$ será un vértice en la gráfica dirigida. Habrá una arista de a a b si y sólo si $b \in F(a)$.

De manera parecida se construye la *gráfica dirigida inversa*, $\overleftarrow{G}_F$, y se le asocia un espacio desplazamiento, $\underline{SHIFT}(\text{Dom}(F))$, como: cada punto de $\text{Dom}(F)$ será un vértice en la gráfica dirigida. Habrá una arista de a a b si y sólo si $a \in F(b)$.

También cuando el dominio es numerable se considera la gráfica de componentes H , que no es otra cosa más que una gráfica donde ahora los vértices son las componentes. Una *componente* en G_F es la subgráfica más grande de G_F que es fuertemente conexa, donde *fuertemente conexa* significa que entre cualesquiera vértices existe un camino finito.

Una componente C es *fuentes* si existen únicamente aristas que salgan de C en H ; la componente C es *de hundimiento* si existen únicamente aristas que lleguen a C en H ; y la componente C es *independiente* si no existen aristas que salgan de C en H y no existen aristas que lleguen a C en H .

Hasta aquí las definiciones en el caso de dominio finito y dominio numerable son casi idénticas, pero ahora veremos nuevas definiciones,

Una componente C es un *predecesor* de D si existe un camino de C a D , también se puede decir que D es un *sucesor* de C . Cuando decimos *inmediato predecesor* o (*resp. inmediato sucesor*) es porque existe una arista de C a D en la gráfica de componentes H .

Una *cadena* en H es una sucesión $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de componentes tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, C_n es el inmediato predecesor de C_{n+1} .

3. Resultados principales y ejemplos

Un resultado que es de gran ayuda para este trabajo lo prueban W. J. Charatonik y Ş. Şahan en [5].

TEOREMA 3.1. ([5, Teorema 3]) Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Entonces,

$$\lim_{\leftarrow}(X, F) = \lim_{\leftarrow}(Dom(F), F|_{Dom(F)}).$$

El Teorema [3.1] nos dice que el límite $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ es exactamente igual a únicamente calcular el límite inverso generalizado considerando a $Dom(F)$ como espacio factor y a la función F pero restringida al $Dom(F)$. Veremos más adelante en los ejemplos que obtener $\lim_{\leftarrow}(Dom(F), F|_{Dom(F)})$ es mucho más fácil. De hecho, por el Teorema [3.1] usaremos indistintamente $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ y $\lim_{\leftarrow}(Dom(F), F|_{Dom(F)})$.

Un resultado que se obtiene de inmediato es el siguiente:

PROPOSICIÓN 3.2. Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Si $Dom(F)$ es totalmente desconexo, entonces $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ es totalmente desconexo.

También se sabe que bajo las condiciones en las que estamos trabajando en todo este capítulo (X métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ semicontinua superiormente), se tiene que $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ es un espacio métrico compacto y no vacío. Por lo que se tiene el siguiente corolario:

COROLARIO 3.3. Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Si $Dom(F)$ es totalmente desconexo, entonces $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ es un espacio métrico compacto totalmente desconexo y no vacío.

En [1], [2], [3] y [4] lo único que hacía falta demostrar para probar que si $Dom(F)$ es totalmente desconexo, entonces $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ es el conjunto de Cantor, es que $\lim_{\leftarrow}(X, F)$ no tiene puntos aislados.

En [4] se prueba lo siguiente:

TEOREMA 3.4. ([4, Teorema 10]) Sean X es un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente que es unión de funciones continuas de X en X . Si $Dom(F)$ es un conjunto totalmente desconexo con más de un punto, entonces $\lim_{\leftarrow} F$ es el conjunto de Cantor,

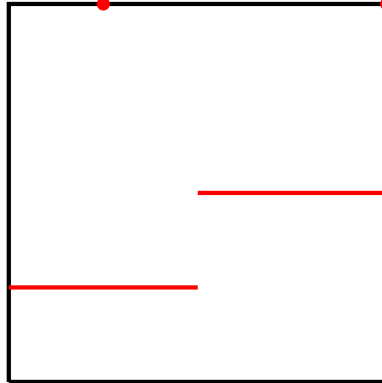
Por otra parte, en [1] demuestran que:

TEOREMA 3.5. ([1, Teorema 3.2]) Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Si $\text{Dom}(F)$ es finito con más de un punto, entonces $\varprojlim F$ es el conjunto de Cantor si y sólo si $\varprojlim SFT(\text{Dom}(F))$ tiene la propiedad de que ninguna componente cíclica de su gráfica dirigida es independiente o de hundimiento; o equivalentemente, $SFT(\text{Dom}(F))$ tiene la propiedad de que ninguna componente cíclica de su gráfica dirigida es independiente o fuente.

Veamos un ejemplo para ver cómo se aplican los Teoremas 3.4 y 3.5 si es que se pueden aplicar.

EJEMPLO 3.6. Sean $X = [0, 1]$ y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{4}\} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}) \\ \{\frac{1}{4}, 1\} & \text{si } x = \frac{1}{4} \\ \{\frac{1}{4}\} & \text{si } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \{\frac{1}{2}\} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \{\frac{1}{2}, 1\} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



Notemos que $G'_1 = \{(\frac{1}{4}, x) : x \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \{(\frac{1}{2}, x) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(1, \frac{1}{4}), (1, 1)\}$. De donde $\text{Dom}_1(F) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

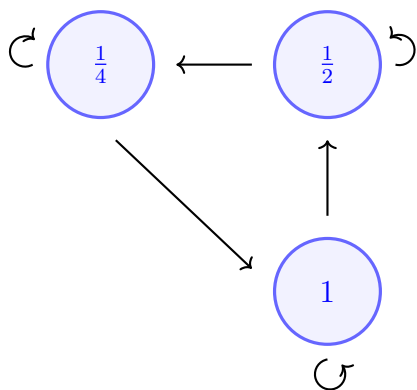
Por definición, $\text{Dom}(F) \subseteq \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

Dado que $\frac{1}{4} \in F(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{2} \in F(\frac{1}{2})$ y $1 \in F(1)$ entonces podemos generar los puntos $\bar{x}_{\frac{1}{4}} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$, $\bar{x}_{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$ y $\bar{x}_1 = (1, 1, 1, \dots)$. Esto implica que $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \in \text{Dom}(F)$. Luego $\text{Dom}(F) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

Tenemos un dominio finito con más de un punto. Este límite inverso generalizado no podemos analizarlo mediante el Teorema 3.4 ya que F no es unión de funciones. Sin embargo, si podemos ver si el límite inverso generalizado es o no el conjunto de Cantor mediante el Teorema 3.5. Véamos ahora quién es la gráfica asociada a $SFT(\text{Dom}(F))$.

Dado que $F\left(\frac{1}{4}\right) = \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$, dibujaremos una arista de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$ y otra de $\frac{1}{4}$ a 1. Luego, como $F\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, dibujaremos una arista de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$ y otra de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$. Finalmente, del hecho de que $F(1) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ se sigue que debemos dibujar una arista de 1 a $\frac{1}{2}$ y otra de 1 a 1.

La gráfica dirigida asociada a $SFT(Dom(F))$ queda como sigue:



Notemos que hay una única componente, pero no es cíclica ya que está la arista de 1 a 1, pero también la arista de 1 a $\frac{1}{2}$. Al no haber componentes cíclicas independientes o fuente en la gráfica dirigida, el Teorema 3.5 se cumple por vacuidad. Por lo tanto, $\lim_{\leftarrow} F$ es el conjunto de Cantor.

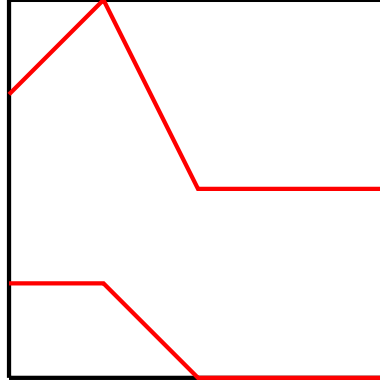
Veamos otro ejemplo con dominio finito

EJEMPLO 3.7. ([3] Ejemplo 2.6) Sean $X = [0, 1]$ y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por $F(x) = \{f(x), g(x)\}$ donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2} - x & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{3}{2} - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Observemos que F es unión de f y g así que una vez que veamos que el dominio es totalmente desconexo con más de un punto podremos aplicar el Teorema 3.4, pero también podemos aplicar el Teorema 3.5. Véamos ambas maneras de analizar el límite inverso generalizado.

Del hecho que $Dom_1(F) = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, por la Observación 2.2 se sigue que $Dom_2(F) = f(Dom_1(F)) \cup g(Dom_1(F)) = [\frac{3}{4}, 1] \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{\frac{1}{4}\} \cup \{1\}$.

Luego, $Dom_3(F) = f(Dom_2(F)) \cup g(Dom_2(F)) = \{\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}\} \cup \{\frac{1}{4}, 0\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

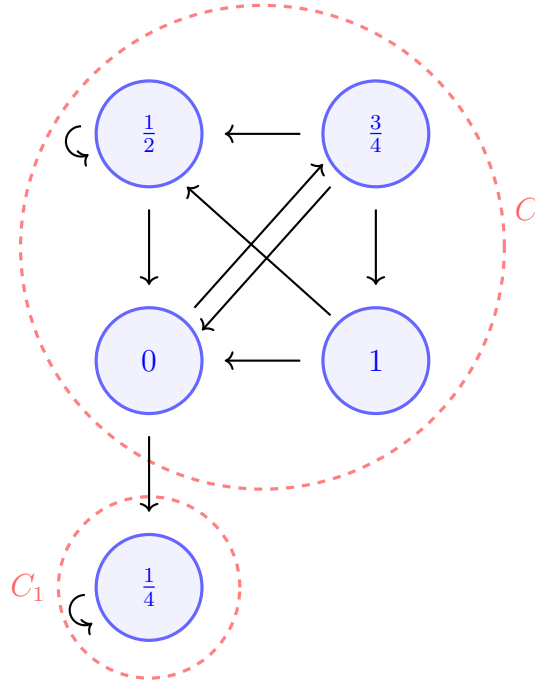
$Dom_4(F) = f(Dom_3(F)) \cup g(Dom_3(F)) = \{\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}\} \cup \{\frac{1}{4}, 0\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Si seguimos calculando $Dom_5(F), Dom_6(F), \dots$, nos daremos cuenta que $Dom_n(F) = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ para cada $n > 2$. Por lo que $Dom(F) = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Estamos en las condiciones de aplicar el Teorema 3.4, por lo que en automático tenemos que $\lim_{\leftarrow} F$ es el conjunto de Cantor.

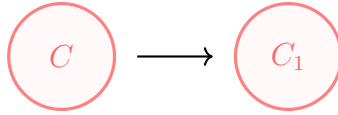
Ya sabemos quien es el límite inverso generalizado, pero comparemos de qué manera sería más fácil obtener el límite. Ahora analicemos la gráfica dirigida asociada a $SFT(Dom(F))$:

Como $F(0) = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$, entonces dibujaremos una arista de 0 a $\frac{1}{4}$ y otra de 0 a $\frac{3}{4}$. Dado que $F(\frac{1}{4}) = \{\frac{1}{4}, 1\}$, entonces dibujaremos una arista de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$ y otra de $\frac{1}{4}$ a 1. Además, $F(\frac{1}{2}) = \{0, \frac{1}{2}\}$, entonces dibujaremos una arista de $\frac{1}{2}$ a 0 y otra de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$. También tenemos que $F(\frac{3}{4}) = \{0, \frac{1}{2}\}$, por lo que dibujamos una arista de $\frac{3}{4}$ a 0 y otra de $\frac{3}{4}$ a $\frac{1}{2}$. Por último, vamos a dibujar una arista de 1 a 0 y otra de 1 a $\frac{1}{2}$ ya que $F(1) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

La gráfica dirigida asociada a $SFT(Dom(F))$ queda como:



En este ejemplo tenemos dos componentes, C y C_1 , por lo que la gráfica de componentes H es la siguiente:



Nos damos cuenta que C es una componente no cíclica y C_1 es una componente cíclica de hundimiento ya que a C_1 solo llega una arista y no sale ninguna de ella en H . De nueva cuenta en este ejemplo no hay componentes cíclicas independientes ni fuente en su gráfica dirigida, por lo que aplicando el Teorema 3.5, tenemos que el límite inverso generalizado es el conjunto de Cantor.

El siguiente teorema caracteriza el límite inverso generalizado cuando $\text{Dom}(F)$ es numerable.

TEOREMA 3.8. ([1, Teorema 4.9] y [1, Proposición 4.10].) Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Si $\text{Dom}(F)$ es numerable, entonces $\varprojlim F$ es el conjunto de Cantor si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

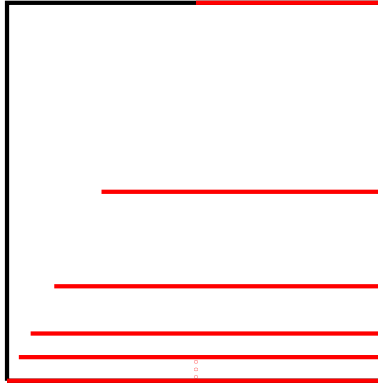
- (1) Si C es una componente cíclica independiente de $\varprojlim G_F$, entonces cada punto de C es punto límite de puntos en $\text{Dom}(F)$.
- (2) Si C es una componente cíclica de hundimiento de $\varprojlim G_F$, entonces se cumplen las siguientes:
 - (a) cada punto de C es punto límite de puntos en $\text{Dom}(F)$.

- (b) suponga que para todo $(x, y) \in \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)})$ con $x \notin C$ y $y \in C$ existe una sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Dom}(F) \setminus \{y\}$ tal que $x \in F(y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a y .
- (3) Si $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena $\overleftarrow{G}_F$, entonces una de las siguientes se cumple:
- (a) para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $x \in C_n$ tal que $|F^{-1}(x) \cap \text{Dom}(F)| > 1$.
- (b) suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n$ y $x \in C_m$, se tiene que $|F^{-1}(x)| = 1$. Además, suponga que para todo $(x, y) \in \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)})$ con $x \notin C_n$ y $y \in C_n$ existe una sucesión $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Dom}(F) \setminus \{y\}$ tal que $x \in F(y_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ converge a y .

Para que el Teorema 3.8 quede más claro, veamos un siguiente ejemplo.

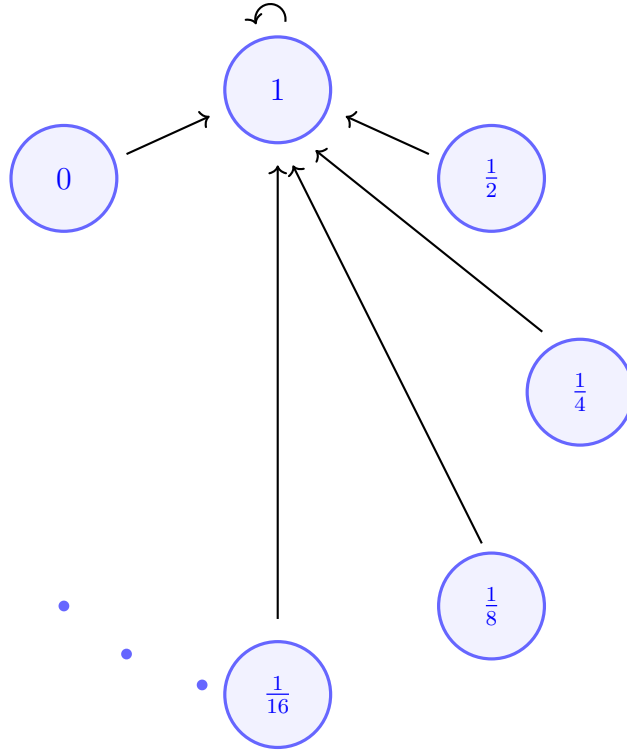
EJEMPLO 3.9. Sean $X = [0, 1]$ y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots, 0 \right\} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right], n \in \mathbb{N} \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



De la gráfica de F nos podemos dar cuenta que $\text{Dom}(F) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, 0\}$ el cual es un conjunto numerable, así que podemos aplicar el Teorema 3.8. Veamos quién es la gráfica dirigida, $\overleftarrow{G}_F$.

Como $F(1) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, 0\}$, vamos a dibujar una arista de 1 a 1, una arista de $\frac{1}{2}$ a 1, una arista de $\frac{1}{4}$ a 1, una arista de $\frac{1}{8}$ a 1, una arista de $\frac{1}{16}$ a 1, $\dots$, y una arista de 0 a 1.



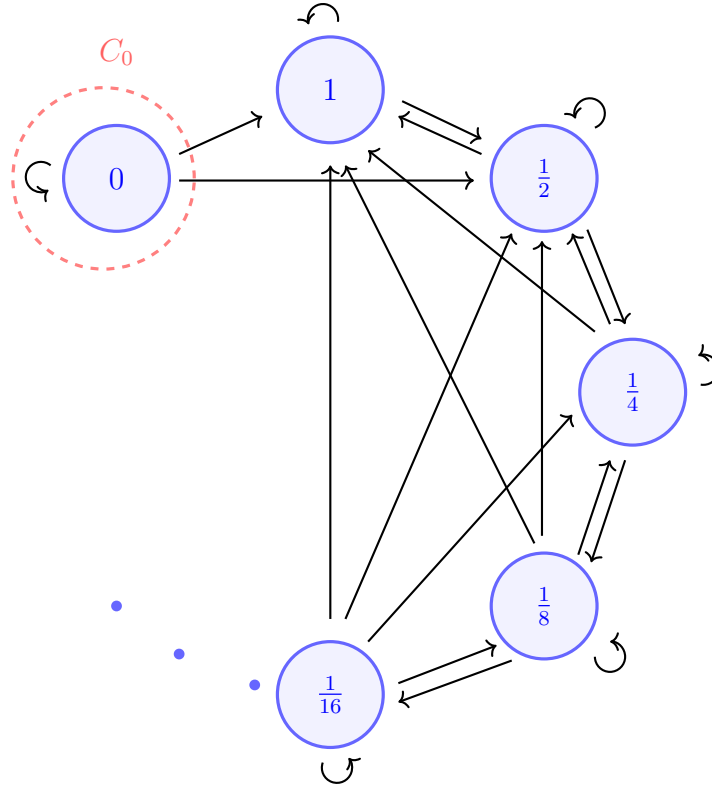
También notemos que $F\left(\frac{1}{4}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, 0\right\}$, lo cual nos lleva a que debemos dibujar una arista de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, otra arista de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$, otra arista de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{4}$, así sucesivamente hasta dibujar una arista de 0 a $\frac{1}{4}$.

De manera general, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left\{\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots, 0\right\}$, esto nos lleva a que debemos dibujar una arista de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$, otra arista de $\frac{1}{2^n}$ a $\frac{1}{2^n}$, otra arista de $\frac{1}{2^{n+1}}$ a $\frac{1}{2^n}$, así sucesivamente hasta dibujar una arista que sale de 0 y llega a $\frac{1}{2^n}$.

Como vemos, dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene que para $\frac{1}{2^n}$ vamos a dibujar una cantidad numerable de aristas que llegan justamente a $\frac{1}{2^n}$.

Sin olvidar que como $F(0) = \{0\}$, entonces únicamente vamos a dibujar una arista que sale de 0 y llega a 0. Esto nos indica que $C_0 = \{0\}$ es una componente cíclica fuente.

Por todo lo dicho anteriormente podemos dibujar la gráfica dirigida asociada a $SFT(Dom(F))$ de la siguiente manera:



Sea $C = \overleftarrow{G}_F \setminus C_0$. Notemos que los vértices de C son de la forma $\frac{1}{2^n}$, por lo que dados dos vértices $\frac{1}{2^n}$ y $\frac{1}{2^m}$ con $n < m$ tenemos un camino de $m - n$ aristas entre $\frac{1}{2^n}$ y $\frac{1}{2^m}$, así C es una componente fuertemente conexa. Entonces tenemos sólo dos componentes, C_0 y C , donde C_0 es una componente cíclica fuente y C no es cíclica. No tenemos componentes cíclicas independientes, ni componentes cíclicas de hundimiento, tampoco cadenas, así que por vacuidad se tiene que $\lim_{\leftarrow} F$ es el Conjunto de Cantor.

Pero si no conociéramos el Teorema 3.8, ¿cómo comprobar que el límite inverso generalizado de esta sucesión es el conjunto de Cantor?

Por el Corolario 3.3 ya sólo nos falta probar que cada punto de $\lim_{\leftarrow} F$ es punto límite de una sucesión de puntos de $\lim_{\leftarrow} F$.

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \lim_{\leftarrow} F$. A continuación definiremos una sucesión de puntos en el límite inverso de tal manera que ésta converga a $\bar{x}$. Para ello veámos la i -ésima entrada de $\bar{x}$.

- Si $x_i = 1$, entonces definamos el punto $\overline{x(i)}$ como sigue:

$$\overline{x(i)} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$$
- Si $x_i \neq 1$, entonces definamos el punto $\overline{x(i)}$ como sigue:

$$\overline{x(i)} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, 1, 1, 1, \dots)$$

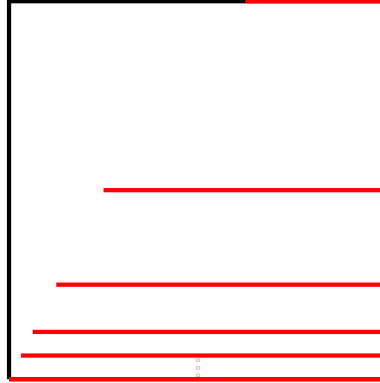
La sucesión $\{\overline{x(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es no constante y converge a $\bar{x}$. Dado que cada punto $\overline{x(n)}$ pertenece a $\lim_{\leftarrow} F$ entonces, el límite inverso generalizado es perfecto, por lo tanto, es el conjunto de Cantor.

La función del ejemplo anterior es, dentro de lo que cabe, bonita en el sentido de que no fue tan difícil probar que el límite inverso generalizado es un conjunto perfecto. Sin embargo, no siempre es sencillo describir de forma general una sucesión de puntos en el límite inverso que le converga a cada punto.

Véamos un siguiente ejemplo en el que la gráfica es muy parecida a la gráfica del Ejemplo 3.9. De hecho, a simple vista parecen ser la misma gráfica. ¿Los límites inversos generalizados correspondientes deben ser iguales?

EJEMPLO 3.10. Sean $X = [0, 1]$ y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\} & \text{si } x \in [\frac{5}{8}, 1] \\ \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] \\ \{\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots, 0\} & \text{si } x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}], n \in \mathbb{N}, n > 1 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



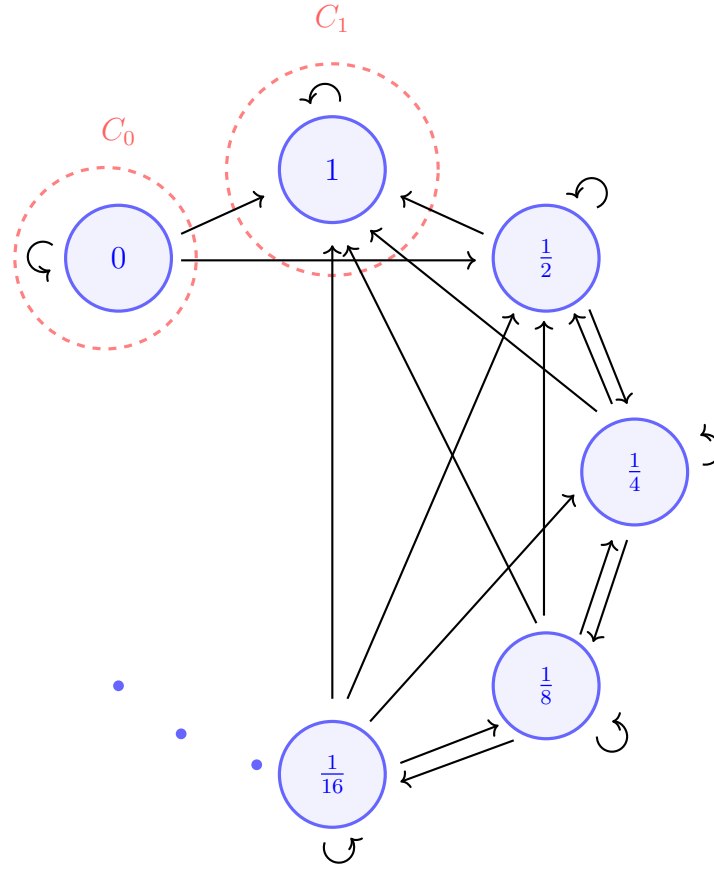
Observemos que al igual que en el Ejemplo 3.9, $Dom(F) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\}$. ¿Esto asegura que éste límite inverso generalizado es el conjunto de Cantor como en el Ejemplo 3.9?

Notemos que $F(1) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\}$ por lo que habrá que poner una arista de 1 a 1, una arista de $\frac{1}{2}$ a 1, una arista de $\frac{1}{2^2}$ a 1, una arista de $\frac{1}{2^3}$ a 1, y así sucesivamente hasta poner una arista de 0 a 1.

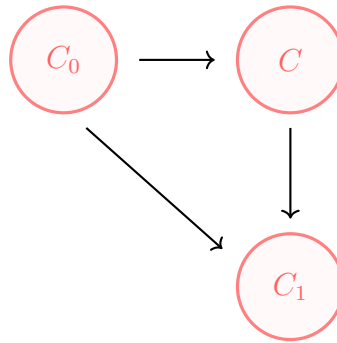
Luego, dado que $F(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\}$ hay que poner una arista de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$, una arista de $\frac{1}{2^2}$ a $\frac{1}{2}$, una arista de $\frac{1}{2^3}$ a $\frac{1}{2}$, y así hasta poner una arista de 0 a $\frac{1}{2}$.

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ se tiene que $F(\frac{1}{2^n}) = \{\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots, 0\}$, de aquí que debemos dibujar una arista de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$, otra arista de $\frac{1}{2^n}$ a $\frac{1}{2^n}$, otra arista de $\frac{1}{2^{n+1}}$ a $\frac{1}{2^n}$, así sucesivamente hasta dibujar una arista de 0 a $\frac{1}{2^n}$. De donde

Dado que $F(0) = \{0\}$, entonces vamos a dibujar una única arista que llega a 0 y sale de 0.



Por lo anterior vemos que $C_1 = \{1\}$ es una componente cíclica de hundimiento y $C_0 = \{0\}$ es una componente cíclica fuente. Además, $C = \overleftarrow{G}_F \setminus (C_0 \cup C_1)$ es una componente no cíclica, y tampoco hay cadenas en esta gráfica dirigida.



Por lo que al recurrir al Teorema [3.8](#), el inciso 2 nos dice que C_1 debería satisfacer que cada punto de C_1 es punto límite de elementos de $\text{Dom}(F)$. Sin embargo, $\text{Dom}(F) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, 0\}$, por lo que no hay sucesiones no constantes en $\text{Dom}(F)$ que convergan a 1. Por esta razón, $\varprojlim F$ no es el conjunto de Cantor.

Lo cual también se puede comprobar fácilmente, ya que $\bar{x} = (1, 1, 1, 1, \dots)$ es un punto aislado del límite inverso generalizado. Para convencernos de ello, tomemos

al abierto básico $\bar{U} = \left(\left(\frac{3}{4}, 1 \right] \times \left(\frac{3}{4}, 1 \right] \times \left(\frac{3}{4}, 1 \right] \times \prod_{i=4}^{\infty} [0, 1] \right) \cap \varprojlim F$ el cual contiene

a $\bar{x}$. Supongamos que existe $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \bar{U}$, entonces para cada i se tiene que $y_i \in \left(\frac{3}{4}, 1 \right] \cap \text{Dom}(F)$, esto implica que $y_i = 1$. Lo que nos lleva a que $\bar{x} = \bar{y}$. Comprobando que $\bar{x}$ es un punto aislado del límite inverso generalizado y en el conjunto de Cantor no hay puntos aislados.

Con este ejemplo vemos que aunque las gráficas sean muy parecidas, los límites inversos generalizados no tienen porque ser iguales. Más aún, los Ejemplos 3.6 y 3.9 nos muestran que los límites inversos generalizados pueden ser iguales aunque las gráficas no se parezcan en lo absoluto.

Ahora veamos el teorema de caracterización que nos presentan los autores de [1] cuando $\text{Dom}(F)$ es no numerable.

TEOREMA 3.11. ([1] Teorema 5.2]) Sean X un espacio métrico compacto no vacío y $F : X \rightarrow 2^X$ una función semicontinua superiormente. Entonces $\varprojlim F$ es el conjunto de Cantor si y sólo si se cumplen cada una de las siguientes:

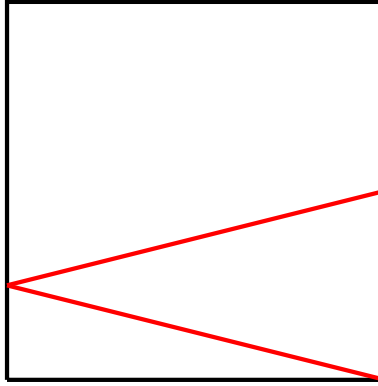
- (1) $\varprojlim F$ es totalmente desconexo,
- (2) Si C es una componente cíclica independiente de $\overleftarrow{G}_F$, entonces cada punto de C es un punto límite de puntos de $\text{Dom}(F)$,
- (3) Si C es una componente cíclica de hundimiento de $\overleftarrow{G}_F$, entonces se cumplen las siguientes:
 - (a) cada punto de C es punto límite de puntos en $\text{Dom}(F)$.
 - (b) para cada $n \in \mathbb{N}$, cada punto del conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \star_{i=1}^{n+1} \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)}) : x_{n+1} \in C, x_n \notin C\}$$
 es un punto límite de $\star_{i=1}^{n+1} \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)})$,
- (4) Si $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena $\overleftarrow{G}_F$, entonces una de las siguientes se cumple:
 - (a) para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $x \in C_n$ tal que $|F^{-1}(x) \cap \text{Dom}(F)| > 1$,
 - (b) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n$, C_m es una componente de un punto y para cada $k \geq m$ cada punto del conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \in \star_{i=1}^{k+1} \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)}) : x_i \in \bigcup \mathcal{C} \text{ para todo } i \leq k, x_k \notin C_m, x_{k+1} \in C_m\}$$
 es un punto límite de $\star_{i=1}^{k+1} \Gamma(F|_{\text{Dom}(F)})$.

Para finalizar veremos un último ejemplo.

EJEMPLO 3.12. ([2] Ejemplo 3.3]) Sean $X = [0, 1]$ y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por $F(x) = \left\{ \frac{1+x}{4}, \frac{1-x}{4} \right\}$.

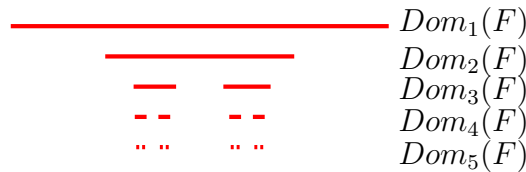


Como $G'_1 = \left\{ \left(\frac{1+x}{4}, x \right) : x \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1-x}{4}, x \right) : x \in [0, 1] \right\}$, se tiene que $Dom_1(F) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[0, \frac{1}{4} \right] = \left[0, \frac{1}{2} \right]$.

Notemos que F puede ser vista como unión de las funciones $f(x) = \frac{1+x}{4}$ y $g(x) = \frac{1-x}{4}$. Así

- $Dom_2(F) = f(Dom_1(F)) \cup g(Dom_1(F))$
 $= \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right] \cup \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right] = \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right]$
- $Dom_3(F) = f(Dom_2(F)) \cup g(Dom_2(F))$
 $= \left[\frac{9}{32}, \frac{11}{32} \right] \cup \left[\frac{5}{32}, \frac{7}{32} \right]$
 $= \left[\frac{5}{32}, \frac{7}{32} \right] \cup \left[\frac{9}{32}, \frac{11}{32} \right]$
- $Dom_4(F) = f(Dom_3(F)) \cup g(Dom_3(F))$
 $= \left[\frac{37}{128}, \frac{39}{128} \right] \cup \left[\frac{41}{128}, \frac{43}{128} \right] \cup \left[\frac{21}{128}, \frac{23}{128} \right] \cup \left[\frac{25}{128}, \frac{27}{128} \right]$
 $= \left[\frac{21}{128}, \frac{23}{128} \right] \cup \left[\frac{25}{128}, \frac{27}{128} \right] \cup \left[\frac{37}{128}, \frac{39}{128} \right] \cup \left[\frac{41}{128}, \frac{43}{128} \right]$
- $Dom_5(F) = f(Dom_4(F)) \cup g(Dom_4(F))$
 $= \left[\frac{149}{512}, \frac{151}{512} \right] \cup \left[\frac{153}{512}, \frac{155}{512} \right] \cup \left[\frac{165}{512}, \frac{167}{512} \right] \cup \left[\frac{169}{512}, \frac{171}{512} \right] \cup \left[\frac{85}{512}, \frac{87}{512} \right]$
 $\cup \left[\frac{89}{512}, \frac{91}{512} \right] \cup \left[\frac{101}{512}, \frac{103}{512} \right] \cup \left[\frac{105}{512}, \frac{107}{512} \right]$
 $= \left[\frac{85}{512}, \frac{87}{512} \right] \cup \left[\frac{89}{512}, \frac{91}{512} \right] \cup \left[\frac{101}{512}, \frac{103}{512} \right] \cup \left[\frac{105}{512}, \frac{107}{512} \right] \cup \left[\frac{149}{512}, \frac{151}{512} \right] \cup$
 $\left[\frac{153}{512}, \frac{155}{512} \right] \cup \left[\frac{165}{512}, \frac{167}{512} \right] \cup \left[\frac{169}{512}, \frac{171}{512} \right]$

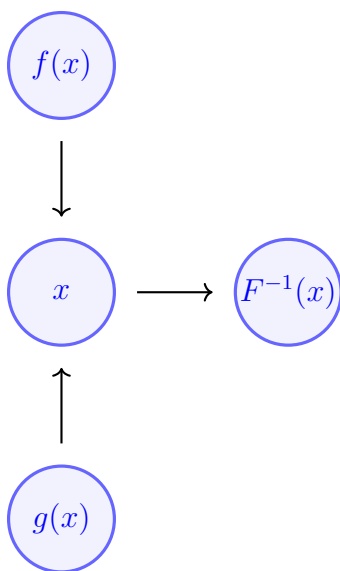
Nos damos cuenta que en general, si $n \geq 2$ podemos escribir a $Dom_n(F)$ como unión de 2^{n-2} intervalos cada uno de tamaño $\frac{1}{4^{n-1}}$.



Si continuamos con el proceso de obtener $Dom_n(F)$ para $n > 5$, e intersectamos a todos estos conjuntos obtenemos $Dom(F)$, pero ésta es justamente la construcción del conjunto de Cantor, por lo que $Dom(F)$ es el conjunto de Cantor. Por el Teorema 3.4, es fácil decir que $\lim_{\leftarrow} F$ es el conjunto de Cantor.

Ahora, por el Teorema 3.11 tendríamos que comprobar varias cosas, la primera es probar que $\varprojlim F$ es totalmente desconexo lo cual es cierto por la Proposición 3.2. También tenemos que analizar las componentes cíclicas independientes y de hundimiento, y las cadenas, en caso de haber.

Dibujar la gráfica dirigida en este caso no es tan sencillo, lo que si podemos saber es que dado que F es unión de f y g , a cada $x \in \text{Dom}(F)$, le llegan únicamente dos aristas, una que sale de $f(x)$ y la otra que sale de $g(x)$. También de la gráfica de F podemos ver que para cada $x \in \text{Dom}(F)$, se tiene que $|F^{-1}(x)| = 1$, por lo que de x sale una única arista de x hacia $F^{-1}(x)$.



Aunque lo anterior nos da algo de información, no nos indica cuantas componentes hay en $\varprojlim F$, tampoco nos dice si las componentes son cíclicas, son de hundimiento, fuente o independiente. Tendríamos que analizar más a fondo el comportamiento de cada elemento de $\text{Dom}(F)$, lo cual para nada es fácil.

En este Capítulo hemos analizado los Teoremas 3.4, 3.5, 3.8 y 3.11 mediante varios ejemplos, los cuales nos muestran cómo aplicar dichos resultados. Siempre nos podemos encontrar con sucesiones inversas un poco más complicadas que otras, un caso particular es el Ejemplo 3.12. Nos complacería saber que hemos dejado al lector con la “espinita” de conocer cuántas componentes cíclicas hay y cuáles de ellas son de hundimiento, fuentes o independientes, y más aún, si nos escribe para contarnos que ya ha terminado de analizar a $\varprojlim F$.

Agradecimientos: Los autores agradecen los comentarios y sugerencias hechas por el revisor o la revisora y que mejoraron sustancialmente la presentación del escrito.

Bibliografía

- [1] L. Alvin, S. Greenwood, J. P. Kelly, *Cantor sets as generalized inverse limits*, Fundamenta Mathematicae, **266** (2024), 1-24.
- [2] J. G. Anaya, F. Capulín, E. Castañeda-Alvarado, M. Sánchez-Garrido, *Inverse limits of upper semi-continuous functions, connectedness and the Cantor set*, Topology Appl. **303** (2021).
- [3] F. Capulín, F. R. Ruiz del Portal, M. Sánchez-Garrido, *The Cantor set as an inverse limit of upper semicontinuous functions that are the union of mappings*, Topology Proc. **60** (2022), 71-80.
- [4] F. Capulín, F. R. Ruiz del Portal, M. Sánchez-Garrido, *The cantor set and inverse limits of upper semi-continuous functions*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, **30**, vol. 3, (2024), p. 78.
- [5] W. J. Charatonik, Ş. Şahan, *Inverse limits with bonding functions whose graphs are connected*, Topology Appl. **210** (2016), 16-21.
- [6] S. Greenwood, J. Kennedy, *Connected generalized inverse limits*, Topology Appl. **159** (2012), no.1, 57-68.
- [7] S. Greenwood, J. Kennedy, M. Lockyer, *Connectedness and inverse limits with set-valued functions on intervals*, Topol. Appl. **221** (2017), 69-90.
- [8] W.T. Ingram, W. S. Mahavier, *Inverse limits of upper semicontinuous set valued functions*, Houston Journal of Mathematics **32** (2006), 119-130.
- [9] W. S. Mahavier, *Inverse limits with subsets of $[0, 1] \times [0, 1]$* , Topology Appl. **141** (2004), 225-231.
- [10] V. Nall, *Connected inverse limits with a set-valued function*, Topol. Proc. **40** (2012), 167-177.

Correos electrónicos:

dmayae@uaemex.mx, dmayae@outlook.com (David Maya)

msanchezga830@profesor.uaemex.mx (Mónica Sánchez Garrido)

CAPÍTULO 9

El hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles

Florencio Corona Vázquez

Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, México

Raúl Escobedo, Eduardo García Muñoz

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción	197
2. Preliminares	197
3. El hiperespacio de conjuntos de no corte	200
4. Un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco	201
5. Compacidad y conexidad	203
Bibliografía	214

1. Introducción

En el artículo [1], se define el hiperespacio de conjuntos de no corte, con la restricción de que los elementos de dicho hiperespacio tienen interior vacío. En este capítulo, nos centramos en el estudio del hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles sin imponer esta condición. Presentamos un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco y demostramos que si este hiperespacio es compacto o conexo para algún árbol, entonces el árbol es el arco. Además, determinamos el número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte de un árbol.

2. Preliminares

En esta sección, presentamos algunos conceptos y definiciones que son utilizados a lo largo del texto.

Notación. Para un subconjunto A de un espacio X escribimos $\overline{A}$, $\text{fr}(A)$ y $X \setminus A$, para denotar la cerradura, la frontera y el complemento de A en X , respectivamente. Si B es un subconjunto de X disjunto de A decimos que B **no interseca a** A , de lo contrario decimos que B **interseca a** A .

DEFINICIÓN 2.1. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** de un espacio dado es un continuo que está contenido en dicho espacio.

Es importante destacar que la propiedad de ser un continuo se preserva bajo homeomorfismos. En efecto, si X es un continuo con métrica d y $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo (es decir, h es una biyección continua con inversa continua), entonces Y es

un espacio compacto y conexo. Además, la función $D : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ dada por $D(a, b) = d(h^{-1}(a), h^{-1}(b))$ es una métrica para la topología de Y .

EJEMPLO 2.2. *Un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Como este intervalo es un continuo, un arco también lo es.*

EJEMPLO 2.3. *Una curva cerrada simple es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria:*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como S^1 es un continuo, una curva cerrada simple también lo es.

Por identificar, decimos *el arco* para referirnos a cualquier espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, y *la curva cerrada simple* para referirnos a cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria.

DEFINICIÓN 2.4. *Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan solo en uno o en sus dos puntos extremos.*



FIGURA 1. Arco

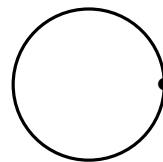


FIGURA 2. Curva cerrada simple

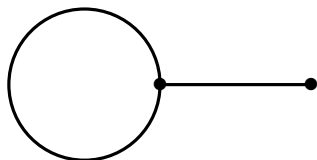


FIGURA 3. Paleta

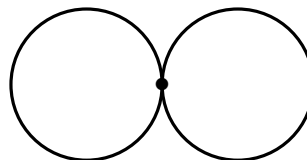


FIGURA 4. Ocho

DEFINICIÓN 2.5. *Un **árbol** es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.*

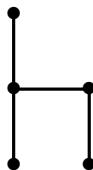


FIGURA 5. La silla

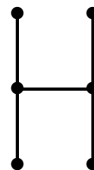


FIGURA 6. Letra H

DEFINICIÓN 2.6. *Dado un entero positivo n , un **n -odo simple** es una gráfica finita, que se puede escribir como la unión de n arcos que tienen un punto de origen común,*

v , y no se intersecan en ningún otro punto. El punto v es llamado **vértice** del n -odo simple.

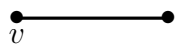


FIGURA 7. 1-odo simple

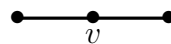


FIGURA 8. 2-odo simple

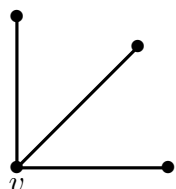


FIGURA 9. 3-odo simple

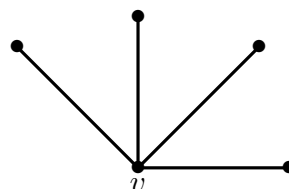


FIGURA 10. 4-odo simple

DEFINICIÓN 2.7. Dados una gráfica finita X y un punto p en X , decimos que p es de **orden n en X** , denotado por $\text{ord}(p, X) = n$, si p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n -odo simple y tiene al punto p como vértice.

Un punto p se llama **punto extremo de X** si $\text{ord}(p, X) = 1$. El conjunto de todos los puntos extremos de X se denota por $E(X)$. Un punto p se llama **punto ordinario de X** si $\text{ord}(p, X) = 2$. El conjunto de todos los puntos ordinarios de X se denota por $O(X)$. Un punto p se llama **punto de ramificación de X** si $\text{ord}(p, X) \geq 3$. El conjunto de todos los puntos de ramificación de X se denota por $R(X)$. Un punto p es un **vértice de X** si p es un punto extremo o es un punto de ramificación. El conjunto de todos los vértices de X se denota por $V(X)$.

EJEMPLO 2.8. Sean X la gráfica finita y los puntos p_1 , p_2 y p_3 de X ilustrados en la figura 11. En esta figura, las vecindades cerradas homeomorfas a un n -odo simple se representan mediante líneas de mayor grosor. Al analizar los puntos, se observa que: $\text{ord}(p_1, X) = 4$, $\text{ord}(p_2, X) = 1$ y $\text{ord}(p_3, X) = 2$. Por lo tanto, p_1 es un punto de ramificación, p_2 es un punto extremo y p_3 es un punto ordinario.

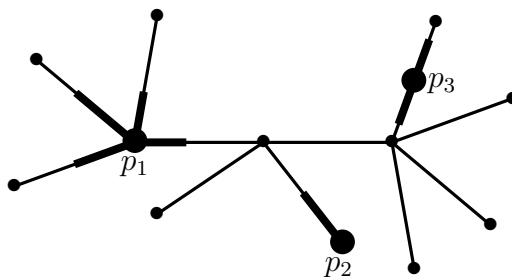


FIGURA 11.

DEFINICIÓN 2.9. Una **arista** de un árbol X es un arco que tiene como puntos extremos dos elementos de $V(X)$ y no contiene más de dos vértices de X .

El conjunto de aristas de X , se denota por $\text{edge}(X)$. Dada una arista e de X denotamos al conjunto $e - V(X)$ por $\langle e \rangle$.

Si X es un continuo con métrica d , los hiperespacios son familias de subconjuntos de X que satisfacen ciertas características particulares. A continuación, se presentan algunos de los hiperespacios más estudiados:

- (1) $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$
- (2) $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$
- (3) $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\} \ (p \in X).$
- (4) $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$

Dados un número positivo ϵ , un punto x en X y un elemento A de 2^X , se definen **la bola de radio ϵ centrada en x** , denotada por $B_\epsilon(x)$, como $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ y **la nube de radio ϵ centrada en A** , denotada por $N(\epsilon, A)$, como $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a).$

Dados A, B en 2^X , se define la **métrica de Hausdorff** H como:

$$H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

En [2, Proposición 2.1, p. 22] se expone una prueba de que H es una métrica para 2^X . Como 2^X contiene a $C(X)$, $C(p, X)$ y $C_n(X)$, estos últimos se pueden dotar de la métrica inducida por H . El conjunto 2^X dotado con la métrica H es el **hiperespacio de compactos de X** . Al dotar a los conjuntos $C(X)$, $C(p, X)$ y $C_n(X)$ con la métrica inducida por H , se les conoce respectivamente como **el hiperespacio de continuos de X** , **el hiperespacio continuos de X que contienen al punto p** y **el hiperespacio de conjuntos cerrados de X con a lo más n componentes**.

3. El hiperespacio de conjuntos de no corte

Comenzamos dando la definición de conjunto de no corte, lo que nos permitirá definir y estudiar el hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles, analizando su compacidad y conexidad.

DEFINICIÓN 3.1. *Decimos que un subconjunto cerrado no vacío A de un continuo X es un conjunto de no corte de X , si A tiene complemento conexo. De lo contrario decimos que A es un conjunto de corte de X .*

Por comodidad, decimos que p es punto de no corte de X si $\{p\}$ es un conjunto de no corte de X .

A continuación, se presentan algunas proposiciones importantes relacionadas con puntos de no corte en continuos y árboles:

PROPOSICIÓN 3.2. [13, Corolario 6.7, p. 90] *Si X es un continuo y A es un subconjunto conexo propio de X , entonces existe un punto p de $X \setminus A$ tal que p es un punto de no corte de X .*

PROPOSICIÓN 3.3. [13, Proposición 9.27, p. 153] *Un punto p de un árbol X es un punto de no corte de X , si y solo si p es un punto extremo de X .*

El hiperespacio de conjuntos de no corte de un continuo se define de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 3.4. *Para un continuo X , se denota por $NC(X)$ a la colección formada por los elementos de 2^X cuyo complemento es conexo, es decir,*

$$NC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de no corte de } X\}.$$

*Al conjunto $NC(X)$ dotado con la métrica inducida por la métrica de Hausdorff se le conoce como el **hiperespacio de conjuntos de no corte de X** .*

Después de haber definido el hiperespacio de conjuntos de no corte, nos enfocamos en un caso particular importante: el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco. A continuación, presentamos un modelo para este hiperespacio.

4. Un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco

Cada conjunto de no corte del intervalo $[0, 1]$, tiene como complemento un conjunto abierto y conexo. Dado que los conjuntos conexos del intervalo $[0, 1]$ son subintervalos, podemos clasificar los subintervalos abiertos en tres tipos: aquellos que contienen al punto 0, aquellos que contienen al punto 1 y aquellos que no contienen ni al punto 0 ni al punto 1. Estos subintervalos abiertos tienen complementos que se pueden describir de la siguiente manera: si contienen al punto 0, su complemento es un subcontinuo del intervalo $[0, 1]$ que contiene al punto 1; si contienen al punto 1, su complemento es un subcontinuo del intervalo $[0, 1]$ que contiene al punto 0; y si no contienen ni al punto 0 ni al punto 1, su complemento es la unión de dos subcontinuos, uno que contiene al 0 y otro que contiene al 1. Además, estos complementos quedan determinados de la siguiente manera: los subcontinuos que contienen al 0 están determinados por su elemento máximo; los subcontinuos que contiene al 1 están determinados por su elemento mínimo; y los conjuntos cerrados que son la unión de dos subcontinuos, uno que contiene al 0 y otro que contiene al 1, están determinados por el elemento máximo del subcontinuo que contiene al 0 y el elemento mínimo del subcontinuo que contiene al 1.

Denotamos a la colección de cerrados que se pueden expresar como la unión de dos subcontinuos, uno que contiene al 0 y otro que contiene al 1 por $C_2(0, 1, [0, 1])$. Tenemos las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} C(0, [0, 1]) &= \{[0, t] : 0 \leq t \leq 1\}. \\ C(1, [0, 1]) &= \{[t, 1] : 0 \leq t \leq 1\}. \\ C_2(0, 1, [0, 1]) &= \{[0, s] \cup [t, 1] : 0 \leq s \leq t \leq 1\}. \\ NC([0, 1]) &= C(0, [0, 1]) \cup C(1, [0, 1]) \cup C_2(0, 1, [0, 1]). \end{aligned}$$

Existe una correspondencia natural entre los elementos de $C(0, [0, 1])$ y los puntos del intervalo $[0, 1]$, donde a cada elemento $[0, t]$ se asigna al punto t . Esto implica que el intervalo $[0, 1]$ sirve como un modelo para $C(0, [0, 1])$. En este modelo, el conjunto $\{0\}$

se representa en el punto 0, mientras que el intervalo $[0, 1]$ se representa en el punto 1.

A cada elemento $[t, 1]$ de $C(1, [0, 1])$ podemos asignarle el punto $1 - t$ del intervalo $[0, 1]$. Esto establece una correspondencia entre $C(1, [0, 1])$ y el intervalo $[0, 1]$, lo que implica que el intervalo $[0, 1]$ es un modelo para $C(1, [0, 1])$. En este modelo, el conjunto $\{1\}$ se representa en el punto 0, mientras que el intervalo $[0, 1]$ se representa en el punto 1.

Consideramos la asignación de cada elemento $[0, s] \cup [t, 1]$ de $C_2(0, 1, [0, 1])$ al punto (s, t) en $\mathbb{R}^2$. Es notable que a medida que s y t se acercan, los conjuntos $[0, s] \cup [t, 1]$ se aproximan cada vez más a $[0, 1]$. Para garantizar la continuidad de esta asignación, definimos la relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto $T = \{(a, b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ de la siguiente manera: $x \sim y$ si y solo si x y y son elementos del conjunto $D = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq 1\}$, o si $x = y$. Al contraer el conjunto D a un solo punto, obtenemos el espacio cociente $T/\sim$, que garantiza la continuidad de la asignación.

De esta manera, la función $h : C_2(0, 1, [0, 1]) \rightarrow T/\sim$ definida por $h([0, s] \cup [t, 1]) = (s, t)$ para $s \neq t$, y $h([0, 1]) = \pi(D)$, donde $\pi : T \rightarrow T/\sim$ es la proyección natural, establece un homeomorfismo entre $C_2(0, 1, [0, 1])$ y $T/\sim$.

El conjunto T es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ formado por los vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Representamos el espacio cociente $T/\sim$ mediante el triángulo T , donde el conjunto D se identifica como un solo punto. Este espacio puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la figura 12, en $[0, 1]^2$.

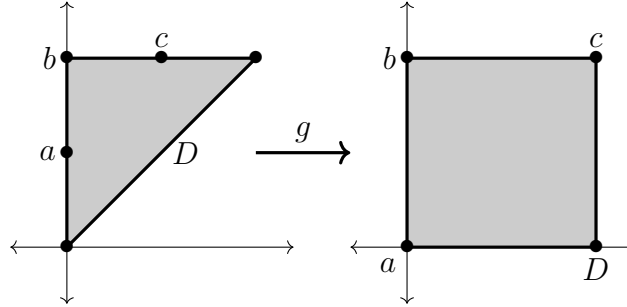


FIGURA 12.

Hemos obtenido que $[0, 1]^2$ es un modelo para $C_2(0, 1, [0, 1])$. En este modelo, $[0, 1]$ se representa en el punto $(1, 0)$, mientras que $\{0, 1\}$ se representa en el punto $(0, 1)$. Además, los conjuntos de la forma $\{0\} \cup [t, 1]$ se representan en $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$, y los conjuntos de la forma $[0, s] \cup \{1\}$ se representan en $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$.

Es importante destacar que los pares de conjuntos $C(0, [0, 1])$ y $C(1, [0, 1])$, $C(0, [0, 1])$ y $C_2(0, 1, [0, 1])$, y $C(1, [0, 1])$ y $C_2(0, 1, [0, 1])$ tienen como intersección el conjunto $\{[0, 1]\}$. La figura 13 representa un modelo para $NC([0, 1])$.

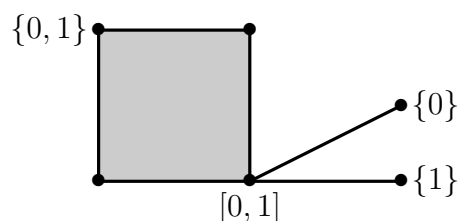


FIGURA 13.

OBSERVACIÓN 4.1. En la figura 13, observamos que el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco es compacto y conexo, lo que implica que es un continuo.

5. Compacidad y conexidad

En esta sección, demostramos que el hiperespacio de conjuntos de no corte de un árbol X está contenido en el hiperespacio de conjuntos cerrados con a lo más n componentes, donde n es el número de puntos extremos de X . Además, presentamos la demostración de que el arco es el único árbol para el cual el hiperespacio de conjuntos de no corte es compacto o conexo. En consecuencia, se sigue que el arco es el único árbol para el cual su hiperespacio de conjuntos de no corte es un continuo.

PROPOSICIÓN 5.1. [13, Corolario 5.9, p. 75] Sean X un continuo y A un subcontinuo de X . Si K es una componente de $X \setminus A$, entonces $A \cup K$ es un subcontinuo de X .

LEMA 5.2. Si F es un conjunto de no corte de X y K es una componente de F , entonces K es un conjunto de no corte de X .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X \setminus K$ no es conexo. Entonces, existen subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos, U y V , de X tales que $X \setminus K = U \cup V$. Dado que K está contenido en F , tenemos que $X \setminus F$ está contenido en $X \setminus K$. Como $X \setminus F$ es conexo, se deduce que U está contenido en F o V está contenido en F . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U está contenido en F . Por la proposición 5.1, $K \cup U$ es un conjunto conexo, lo que contradice la maximalidad de K como componente de F . Por lo tanto, K es un conjunto de no corte de X . $\square$

LEMA 5.3. Si F es un conjunto de no corte de un árbol X y K es una componente de F , entonces la frontera de K es un conjunto unipuntual.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existen puntos distintos, p y q , en la frontera de K . Dado que K es un subcontinuo de X , existe un arco, α , de p a q en K . Por el lema 5.2, $X \setminus K$ es conexo, lo que implica que $\overline{X \setminus K}$ es un subcontinuo de X . Por lo tanto, existe un arco, β , de p a q en $\overline{X \setminus K}$. Dado que $V(X)$ es finito, podemos tomar un punto x en $(\beta \setminus \{p, q\}) \cap O(X)$. Notamos que x es un punto interior de $\overline{X \setminus K}$, lo que implica que β interseca al exterior de K . Por lo tanto α es distinto de β . Esto contradice el hecho de que para cada par de puntos en X , existe un único arco que los contiene como puntos extremos. Por lo tanto la frontera de K es un conjunto unipuntual. $\square$

LEMA 5.4. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces F contiene al menos un punto extremo de X .*

DEMOSTRACIÓN: Dado que el complemento de F es un conjunto conexo, por la proposición 3.2, existe un punto de no corte de X , p , en F . Además, por la proposición 3.3, p es un punto extremo de X . Por lo tanto, F contiene al menos un punto extremo de X . $\square$

A partir de los lemas 5.2 y 5.4, obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 5.5. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces cada componente de F contiene al menos un punto extremo de X .*

Presentamos a continuación el resultado que establece la contención del hiperespacio de conjuntos de no corte en el hiperespacio de cerrados con a lo más n componentes, el cual se sigue directamente del corolario anterior.

COROLARIO 5.6. *Si X es un árbol, entonces $NC(X)$ está contenido en $C_n(X)$, donde, n es el número de puntos extremos de X .*

Seguidamente, demostramos que para cualquier árbol distinto del arco, su hiperespacio de conjuntos de no corte no es compacto.

PROPOSICIÓN 5.7. *Si X es un árbol distinto de un arco, entonces $NC(X)$ no es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Presentamos la demostración acompañada de ilustraciones que ayudan a visualizar los conceptos y procedimientos. Dado que X no es un arco, el conjunto $R(X)$ es no vacío. Sean r un elemento de $R(X)$ y $\mathcal{A} = \{e \in \text{edge}(X) : r \in e\}$. Observamos que hay al menos tres aristas de X que contienen al punto r . Consideramos el conjunto $G = \{r\} \cup \bigcup \{\langle e \rangle : e \in \mathcal{A}\}$. Dado que G es conexo, se sigue que $X \setminus G$ es un conjunto de no corte (ver figura 14).

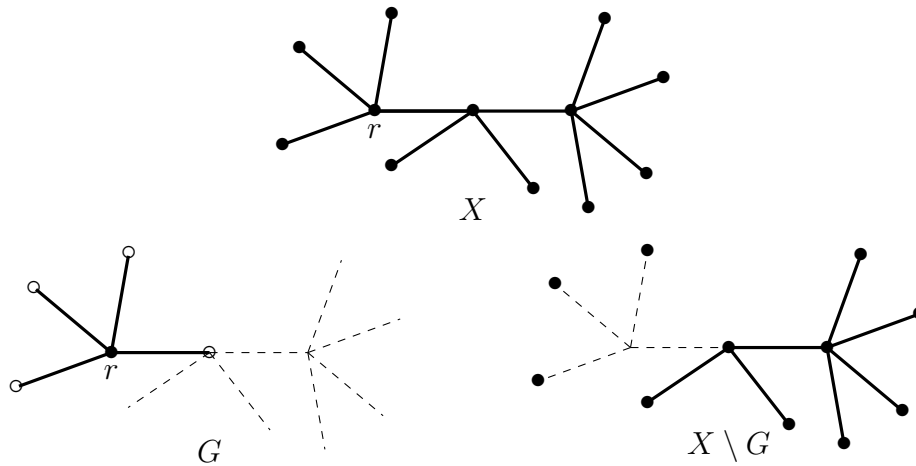


FIGURA 14.

Sean e una arista en $\mathcal{A}$ y p el extremo de e distinto de r . Dado que e es un arco, podemos identificar los elementos de e con números en el intervalo $[0, 1]$, donde p corresponde a 0 y r corresponde a 1. Para un punto t , en el intervalo $[0, 1]$ denotamos por pt al arco que va de p a t . Notamos que si $t = 0$, entonces pt coincide con $\{p\}$ y si $t = 1$, entonces pt coincide con e . Para cada entero positivo n , definimos $t_n = 1 - \frac{1}{n}$ y $G_n = (X \setminus G) \cup pt_n$. Observamos que, para cada entero positivo n , G_n es un conjunto de no corte de X (ver figura 15).

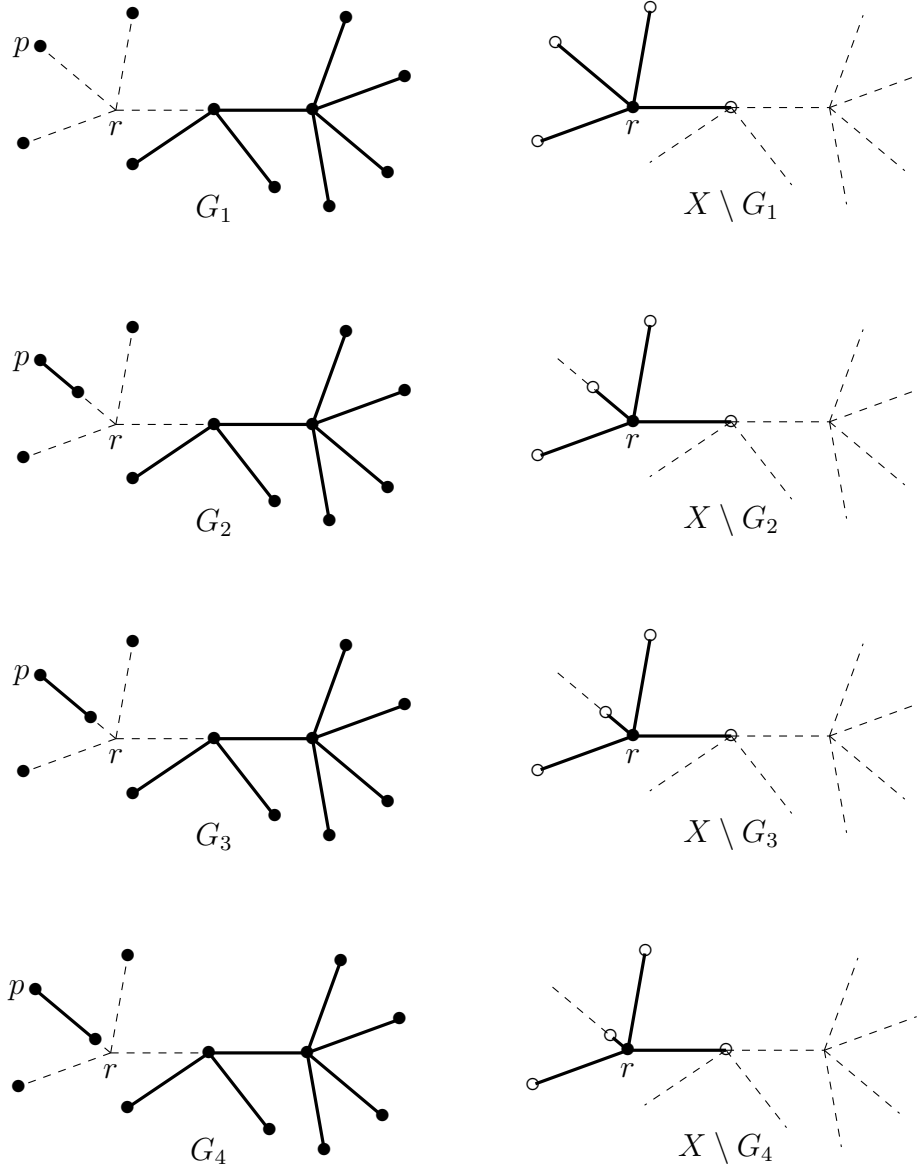


FIGURA 15.

La sucesión $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $(X \setminus G) \cup e$ en 2^X . Observamos que el complemento de $(X \setminus G) \cup e$ es $\cup\{\langle a \rangle : a \in \mathcal{A} \setminus \{e\}\}$. Dado que $\cup\{\langle a \rangle : a \in \mathcal{A} \setminus \{e\}\}$ tiene $\text{ord}(r, X) - 1$

componentes, se sigue que $(X \setminus G) \cup e$ es conjunto de corte de X . En consecuencia, concluimos que $NC(X)$ no es un conjunto compacto. $\square$

Nuestro objetivo ahora es determinar el número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles. Comenzamos estableciendo dos lemas técnicos.

LEMA 5.8. *Si p es un punto en el intervalo $[0, 1]$, entonces la función $f : [0, 1] \rightarrow C(p, [0, 1])$ definida por $f(t) = pt$, donde pt denota el arco que va de p a t , es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea p un punto en el intervalo $[0, 1]$. Como $C(p, [0, 1])$ es un espacio métrico, basta mostrar que para cualquier sucesión $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a t , la sucesión $\{f(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(t)$. Sean t un punto en $[0, 1]$ y $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $[0, 1]$ convergiendo a t . Consideramos dos casos:

Caso 1: t igual a p .

En este caso $H(pt_i, pt)$ es igual a $|t_i - t|$. Lo que implica que $\{f(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(t)$.

Caso 2: t es distinto de p .

Existe un entero positivo N tal que si n es mayor que N entonces $|t_n - t|$ es menor que $\frac{|p-t|}{2}$. En consecuencia, para toda n mayor que N se cumple que $H(pt_i, pt)$ es igual a $|t - t_n|$. Por lo tanto $\{f(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(t)$. $\square$

LEMA 5.9. *Sean X y Y continuos, F un subconjunto cerrado de X y n un entero positivo. Si para cada $1 \leq i \leq n$, $f_i : Y \rightarrow 2^X$ es una función continua, entonces la función $f : Y \rightarrow 2^X$ dada por $f(y) = F \cup \bigcup \{f_i(y) : 1 \leq i \leq n\}$ está bien definida y es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada y en Y , el conjunto $f(y)$ es unión finita de conjuntos cerrados y por lo tanto es un conjunto cerrado. Veamos ahora que f es continua. Como 2^X es un espacio métrico, basta mostrar que para cualquier sucesión $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a t , la sucesión $\{f(t_j)\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $f(t)$. Sean t un punto en Y y $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en Y convergiendo a t . Para cada $1 \leq i \leq n$, la sucesión $\{f_i(t_j)\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $f_i(t)$. Por lo tanto, la sucesión $\{f(t_j)\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $f(t)$. $\square$

A continuación presentamos una proposición que garantiza la existencia de ciertos arcos clave.

PROPOSICIÓN 5.10. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces existe un arco de F a $F \cap E(X)$ en $NC(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Presentamos la demostración acompañada de ilustraciones que ayuden a visualizar los conceptos y procedimientos. Consideramos dos casos:

Caso 1: F es distinto de X .

Este caso se divide en dos subcasos:

Caso 1.1: La frontera de F está contenida en $V(X)$. Si F está contenido en $E(X)$, definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F$ para todo t en el intervalo $[0, 1]$ (en este

caso estamos considerando la existencia de un arco degenerado, es decir un conjunto unipuntual). Ahora, supongamos que F no está contenido en $E(X)$. Sea $\mathcal{A} = \{e \in \text{edge}(X) : e \cap \text{fr}(F) \neq \emptyset \text{ y } e \subset F\}$. Para cada e en $\mathcal{A}$ denotamos por p_e al extremo de e que pertenece al interior de F y por q_e al extremo de e que es un elemento de la frontera de F . Definimos el conjunto $F' = F \setminus \bigcup \{\langle e \rangle \cup \{q_e\} : e \in \mathcal{A}\}$ (ver figura 16).

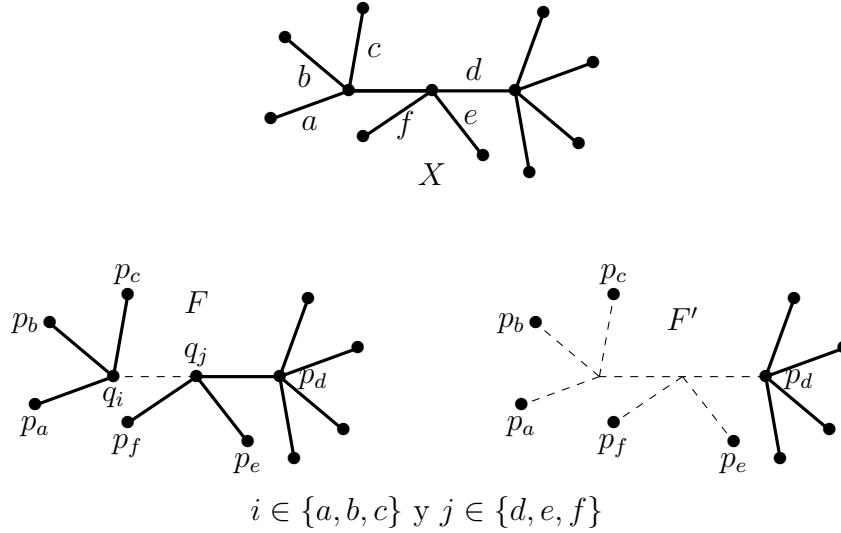
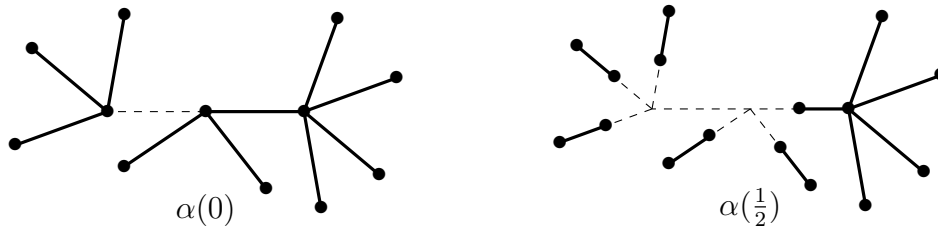


FIGURA 16.

Para cada e en $\mathcal{A}$, podemos identificar los elementos de e con números en el intervalo $[0, 1]$, donde p_e corresponde a 0 y q_e corresponde a 1. Dado un punto t , en el intervalo $[0, 1]$, denotamos por $p_e t$ al arco que va de p_e a t en e . Notamos que si $t = 0$, entonces $p_e t$ coincide con $\{p_e\}$, y si $t = 1$ entonces $p_e t$ coincide con e . Definimos $\alpha_e : [0, 1] \rightarrow C(p_e, e)$ como $\alpha_e(t) = p_e t$. Por el lema 5.8, para cada e en $\mathcal{A}$, la función α_e es continua. Observamos que $e \setminus \alpha_e(t)$ es vacío si t es igual a 1, y es un conjunto conexo que contiene a q_e si t es distinto de 1.

Ahora, definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $\alpha(t) = F' \cup \bigcup \{\alpha_e(1 - t) : e \in \mathcal{A}\}$. Por el lema 5.9, la función α es continua.

Observamos que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = (X \setminus F) \cup \bigcup \{e \setminus \alpha_e(1 - t) : e \in \mathcal{A}\}$. Se sigue que, para todo t en $[0, 1]$, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X . Por lo tanto, α es un arco de F a F' en $NC(X)$ (ver figura 17).



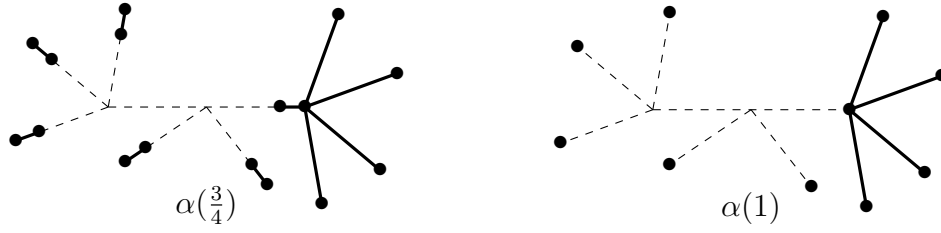


FIGURA 17.

Sea $F_1 = F'$. Si F_1 no está contenido en $E(X)$, definimos $\mathcal{A}_1 = \{e \in \text{edge}(X) : e \cap \text{fr}(F_1) \neq \emptyset \text{ y } e \subset F_1\}$. Aplicando el mismo procedimiento utilizado para F , podemos encontrar un arco α_1 de F_1 a $F'_1 = F_1 \setminus \bigcup \{\langle e \rangle \cup \{q_e\} : e \in \mathcal{A}_1\}$ en $NC(X)$ (ver figura 18).

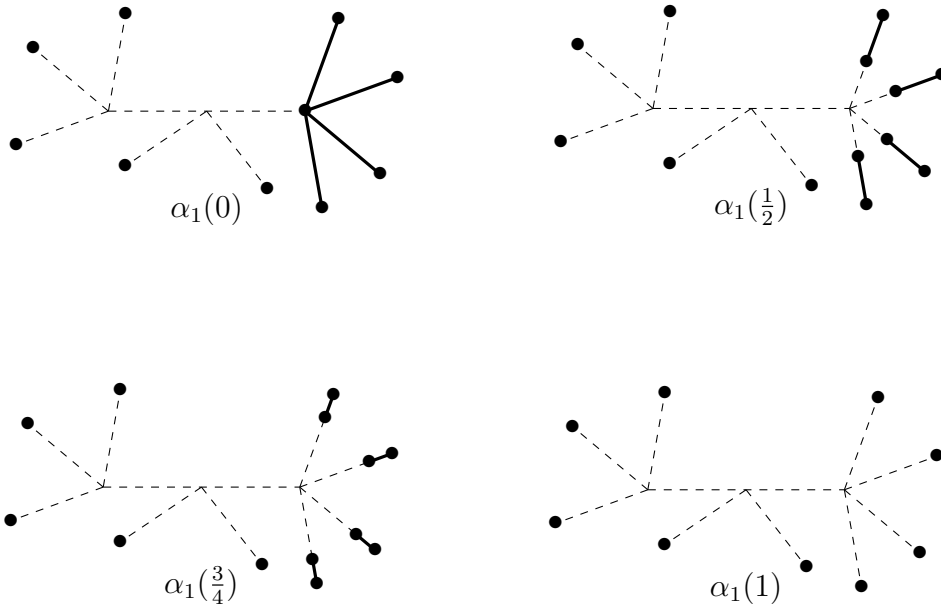


FIGURA 18.

Definimos $F_2 = F'_1$, y procedemos de manera similar. Este proceso finaliza ya que el conjunto F_{n+1} se obtiene al retirar aristas del conjunto F_n . Esto finaliza la demostración del caso 1.1.

Caso 1.2: La frontera de F no está contenida en $V(X)$. Sea $O = \text{fr}(F) \cap O(X)$. Para cada punto x en O , denotamos por e_x la arista que contiene a x y por p_x el extremo de e_x tal que $p_x x$ está contenido en F , donde, $p_x x$ denota el arco que va de p_x a x en e_x . Definimos el conjunto F' como $F' = F \setminus \bigcup \{p_x x \setminus \{p_x\} : x \in O\}$ (ver figura 19).

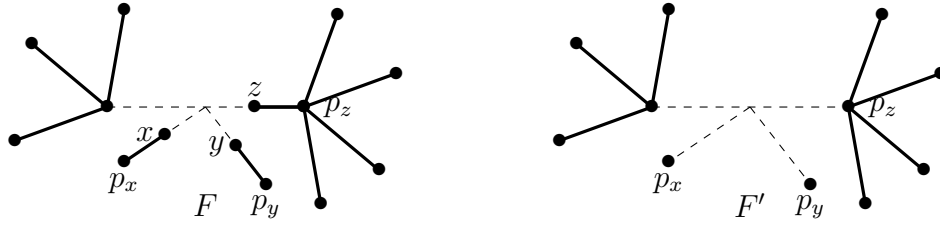


FIGURA 19.

Para cada x en O , identificamos a los elementos de $p_x x$ con números en el intervalo $[0, 1]$, donde p_x corresponde a 0 y x corresponde a 1. Dado un punto t , en el intervalo $[0, 1]$, denotamos por $p_x t$ al arco que va de p_x a t . Notamos que si $t = 0$, entonces $p_x t$ coincide con $\{p_x\}$, y si $t = 1$, entonces $p_x t$ coincide con $p_x x$. Definimos $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow C(p_x, p_x x)$ como $\alpha_x(t) = p_x t$. Por el lema 5.8, para cada x en O , la función α_x es continua. Observamos que $p_x x \setminus \alpha_x(t)$ es vacío si t es igual a 1 y es un conjunto conexo que contiene a x si t es distinto de 1.

Ahora, definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $\alpha(t) = F' \cup \bigcup \{\alpha_x(1-t) : x \in O\}$. Por el lema 5.9, la función α es continua.

Observamos que $\alpha(0) = F$, $\alpha(1) = F'$, y para cada t en $(0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = ((X \setminus F) \cup O) \cup \bigcup \{p_x x \setminus \alpha_x(1-t) : x \in O\}$. El conjunto $(X \setminus F) \cup O$ es conexo, pues está entre $X \setminus F$ y $\overline{X \setminus F}$. Además, para cada x en O y t en $(0, 1]$, el conjunto $p_x x \setminus \alpha_x(1-t)$ es conexo e interseca a O . En consecuencia, $X \setminus \alpha(t)$ es un conjunto conexo para cada t en $(0, 1]$. Por lo tanto, para todo t en $[0, 1]$, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X . Así, α es un arco de F a F' en $NC(X)$ (ver figura 20).

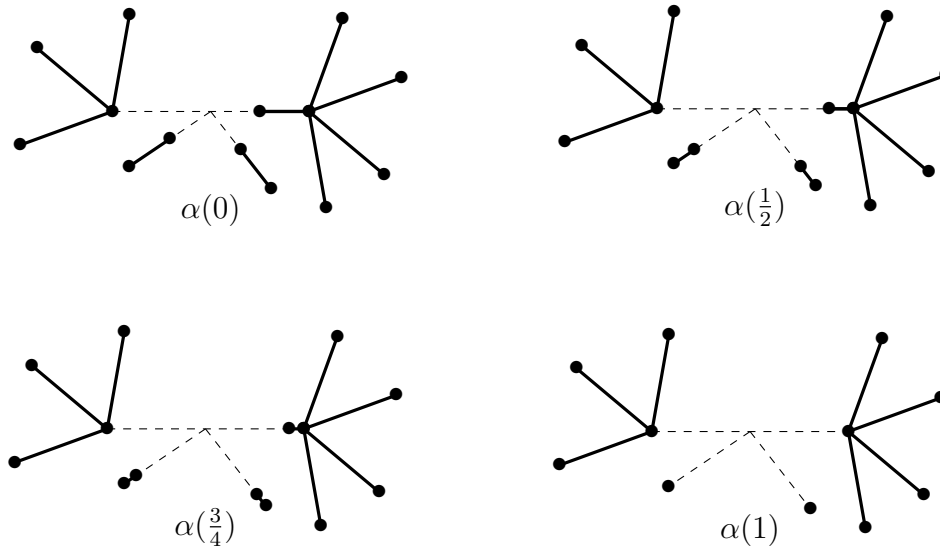


FIGURA 20.

Se tiene que $\text{fr}(F')$ está contenida en $V(X)$. Aplicando el caso 1.1 se concluye la demostración del caso 1.2.

Caso 2: F es igual a X .

Sean p un punto ordinario de X , e la arista que contiene a p , q un punto extremo de e y qp el arco que va de q a p en e . Definimos el conjunto F' como $F' = (F \setminus qp) \cup \{q, p\}$ (ver figura 21).

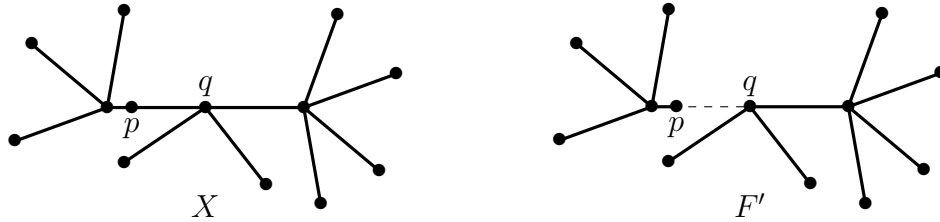
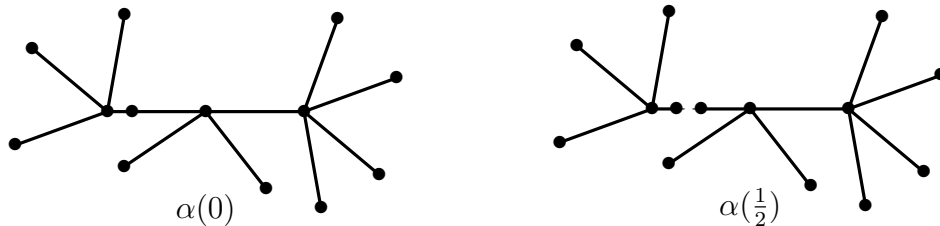


FIGURA 21.

Identificamos los elementos de qp con números en el intervalo $[0, 1]$, donde q corresponde a 0 y p corresponde a 1. Dado un punto t en el intervalo $[0, 1]$, denotamos por qt al arco que va de q a t . Notamos que si $t = 0$, entonces qt coincide con $\{q\}$, y si $t = 1$ entonces qt coincide con qp . Definimos $\alpha_p : [0, 1] \rightarrow C(q, qp)$ como $\alpha_p(t) = qt$. Por el lema 5.8, la función α_p es continua. Observamos que, para cada t en $[0, 1]$, $qp \setminus (\alpha_p(t) \cup \{p\})$ es un conjunto conexo.

Ahora, definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $\alpha(t) = F' \cup \alpha_p(1 - t)$. Por el lema 5.9, la función α es continua.

Notamos que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = qp \setminus (\alpha_p(1 - t) \cup \{p\})$. Se sigue que, para todo t en $[0, 1]$, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X . Por lo tanto, α es un arco de X a F' en $NC(X)$ (ver figura 22).



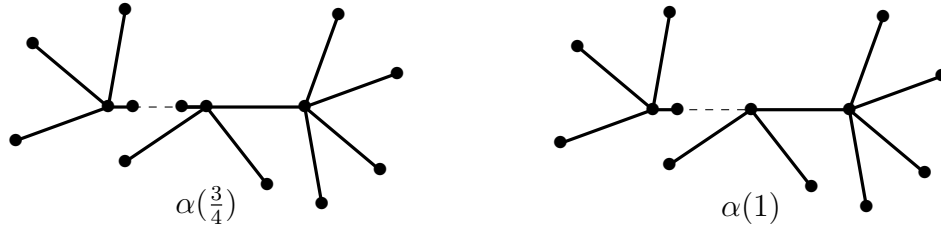


FIGURA 22.

Notamos que $\text{fr}(F') = \{q, p\}$. Aplicando el caso 1.2 se concluye la demostración del caso 2. $\square$

A continuación, presentamos dos lemas que establecen que ciertos conjuntos son componentes del hiperspacio de conjuntos de no corte.

LEMA 5.11. *Si X es un árbol y A es un subconjunto no vacío de $E(X)$ con a lo más $|E(X)| - 2$ elementos, entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$ es una componente de $NC(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean a un elemento de $E(X) \setminus A$ y $B = E(X) \setminus (A \cup \{a\})$. Para cada x en B , existe un arco, α_x , de a a x en X . Tomemos $C = \bigcup \{\alpha_x : x \in B\}$ y $U = X \setminus C$.

Afirmación 1. Si F es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces F está contenido en U .

Supongamos que F interseca a C . Entonces, existe un punto x en B tal que F interseca a α_x . Sea y un punto en $F \cap \alpha_x$. Observamos que y no es un punto extremo de X . Por lo tanto, $X \setminus \{y\}$ tiene al menos dos componentes, y a y x están en diferentes componentes de $X \setminus \{y\}$. Como y está en F , se tiene que $X \setminus F$ está contenido en $X \setminus \{y\}$. Note que $X \setminus F$ está contenido en una componente de $X \setminus \{y\}$ puesto que $X \setminus F$ es conexo. Esto implica que F contiene a todas las componentes de $X \setminus \{y\}$ salvo a una. En consecuencia, F contiene a a o F contiene a x , lo que contradice la definición de $\mathcal{A}$. Por lo tanto F está contenido en U .

Afirmación 2. $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de $NC(X)$.

Sea F un elemento de $\overline{\mathcal{A}}$ (donde $\overline{\mathcal{A}}$ denota la cerradura de $\mathcal{A}$ en $NC(X)$). Entonces, existe una sucesión, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, de elementos en $\mathcal{A}$ que converge a F . Como $F_i \cap E(X) = A$, se sigue que A está contenido en F . Por la afirmación 1, F está contenido en $\overline{U}$. Además, para cada y en $E(X) \setminus A$, se tiene que y es un elemento del interior de C , lo que implica que y no es un elemento de $\overline{U}$. Por lo tanto, $F \cap E(X)$ coincide con A . En consecuencia, F es un elemento de $\mathcal{A}$, lo que prueba que $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de $NC(X)$.

Afirmación 3. $\mathcal{A}$ es un subconjunto abierto de $NC(X)$.

Sea F un elemento de $\mathcal{A}$. Para cada x en A , denotamos por e_x a la arista de X que lo contiene. Existe un número positivo δ_1 tal que, para cada x en A , $\overline{B_{\delta_1}(x)}$ está contenida en el interior de e_x . Sea δ_2 la distancia de F a C . Por la afirmación 1, δ_2 es un número positivo. Definimos $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Mostraremos que la bola abierta de radio δ centrada en F , $B_\delta(F)$, está contenida en $\mathcal{A}$. Recordemos que $B_\delta(F) = \{D \in NC(X) : H(F, D) < \delta\}$, donde H denota la métrica de Hausdorff. Sea G un elemento de $B_\delta(F)$. Entonces, G está contenido en la nube de radio δ_2 centrada en F , lo que implica que G está contenido en U . Además, como F está contenido en la nube de radio δ_1 centrada en G , para cada z en A , existe un punto y en G tal que $d(z, y)$ es menor que δ_1 , donde d denota la métrica de X . Por la elección de δ_1 , y está en el interior de e_z , lo que implica que z es un elemento de G , pues el complemento de G es conexo y G no interseca a C . Por lo tanto, A está contenido en G y $G \cap E(X)$ coincide con A , lo que prueba que G es un elemento de $\mathcal{A}$. Esto muestra que $B_\delta(F)$ está contenida en $\mathcal{A}$, y por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un subconjunto abierto de $NC(X)$.

Finalmente, por la proposición 5.10, $\mathcal{A}$ es conexo. Por las afirmaciones 2 y 3, la proposición queda probada. $\square$

LEMA 5.12. *Si X es un árbol, entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \geq |E(X)| - 1\}$ es una componente de $NC(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Observamos que $NC(X) \setminus \mathcal{A}$ coincide con el conjunto $\{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \leq |E(X)| - 2\}$. De las afirmaciones 2 y 3 en la demostración del lema 5.11, $NC(X) \setminus \mathcal{A}$ es un subconjunto abierto y cerrado de $NC(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un subconjunto abierto y cerrado de $NC(X)$.

Para demostrar que $\mathcal{A}$ es conexo, mostraremos que si F es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces existe un arco de F a X en $\mathcal{A}$. Si $F \cap E(X)$ coincide con $E(X)$, la existencia del arco se sigue de la proposición 5.10. Supongamos que $F \cap E(X)$ tiene $|E(X)| - 1$ elementos. Sean p el único elemento en $E(X) \setminus F$, e la arista que contiene a p y q el otro extremo de e . Definimos $F' = (X \setminus e) \cup \{q\}$. Por la proposición 5.10, existe un arco de F a F' en $\mathcal{A}$.

Para concluir la demostración, construiremos un arco de F' a X en $\mathcal{A}$. Denotamos por qp al arco que va de q a p en e . Identificamos los elementos de qp con números en el intervalo $[0, 1]$, donde q corresponde a 0 y p corresponde a 1. Dado un punto t en el intervalo $[0, 1]$, denotamos por qt al arco que va de q a t . Notamos que si $t = 0$, entonces qt coincide con $\{q\}$, y si $t = 1$ entonces qt coincide con qp . Definimos $\alpha_p : [0, 1] \rightarrow C(q, qp)$ como $\alpha_p(t) = qt$. Por el lema 5.8, la función α_p es continua. Observamos que, para cada t en $[0, 1]$, $qp \setminus \alpha_p(t)$ es un conjunto conexo.

Ahora, definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F' \cup \alpha_p(t)$. Por el lema 5.9, la función α es una función continua.

Notamos que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = qp \setminus \alpha_p(t)$, lo que implica que $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X para todo t en $[0, 1]$. Por lo tanto, α es un arco de F' a X en $NC(X)$. Esto concluye la demostración del lema. $\square$

La siguiente proposición muestra que el hiperespacio de conjuntos de no corte es la unión de los conjuntos descritos en los lemas precedentes.

PROPOSICIÓN 5.13. *Si X es un árbol, entonces $NC(X) = \bigcup \{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde A recorre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea F un conjunto de no corte de X . Por el lema 5.4, $F \cap E(X)$ es no vacío. Sea $A = F \cap E(X)$. Entonces, F es un elemento de $\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$. Por lo tanto, $NC(X) = \bigcup \{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde, A recorre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$. $\square$

El teorema que sigue establece el número exacto de componentes que tiene el hiperespacio de conjuntos de no corte.

TEOREMA 5.14. *Si X es un árbol, entonces $NC(X)$ tiene $2^n - 1 - n$ componentes, donde n es el número de puntos extremos de X .*

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 5.11, si A es un subconjunto no vacío de $E(X)$ con a lo más $n - 2$ elementos, entonces $\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$ es una componente de $NC(X)$. Hay $2^n - n - 2$ subconjuntos no vacíos de $E(X)$ con a lo más $n - 2$ elementos. Por el lema 5.12, el conjunto $\{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \geq |E(X)| - 1\}$ es una componente de $NC(X)$. Por la proposición 5.13 se tiene que $NC(X) = \bigcup \{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde A recorre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$. Por lo tanto, $NC(X)$ tiene $2^n - n - 1$ componentes. $\square$

Los dos teoremas siguientes son consecuencia directa del teorema anterior y proporcionan caracterizaciones del arco y del triodo simple en términos del número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte.

TEOREMA 5.15. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El hiperespacio $NC(X)$ tiene exactamente 4 componentes.*
- (2) *El árbol X es un triodo simple.*

TEOREMA 5.16. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El hiperespacio $NC(X)$ es conexo.*
- (2) *El árbol X es un arco.*

Finalmente, presentamos el teorema que establece que el arco es el único árbol para el cual el hiperespacio de conjuntos de no corte es un continuo. Este resultado se deduce directamente de la observación 4.1, la proposición 5.7 y del teorema 5.16.

TEOREMA 5.17. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El hiperespacio $NC(X)$ es un continuo.*
- (2) *El árbol X es un arco.*

Bibliografía

- [1] R. Escobedo, C. Estrada-Obregón and J. Sánchez-Martínez, *On hyperspaces of non-cut sets*. Topology Appl. **217**, (2017), 97–106.
- [2] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [3] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Correos electrónicos:

`florencio.corona@unach.mx` (Florencio Corona Vázquez)

`escobedo@fcfm.buap.mx` (Raúl Escobedo Conde)

`game.1297@gmail.com` (Eduardo García Muñoz)

CAPÍTULO 10

Equivalencias de la propiedad de Kelley en dendroides

María de Jesús López Toriz y Paula Ivon Vidal Escobar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción	215
2. Resultados auxiliares	217
3. Equivalencias a la propiedad de Kelley	218
Bibliografía	230

1. Introducción

Un problema interesante en la teoría de continuos es la contractibilidad de sus hiperespacios, para estudiar este tópico en continuos, en 1942, J. L. Kelley en su artículo *Hyperspaces of a continuum* introduce la propiedad de Kelley, como la Propiedad 3.2 [9] pág. 26]. Recordemos que un *continuo* es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo. Sean X un continuo y un punto $x \in X$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley en x* si para cada subcontinuo K de X con $x \in K$ y para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge al punto x , se tiene que existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X que converge a K tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Diremos que un continuo tiene la *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

Más tarde, en 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik introducen el concepto de continuo límite maximal fuerte [3, Definición 3.3], con esta definición nos proporcionan una equivalencia de propiedad de Kelley (véase Teorema 2.3). Sea K un subcontinuo de un continuo X , un subcontinuo M de K se llama *continuo límite maximal fuerte de K* si existe una sucesión de subcontinuos de X , $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a M tal que para cada subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y para cada sucesión $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $M_{n_k} \subset N_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a N subcontinuo de K , se tiene que $N = M$.

Recientemente, en 2024, M. Chacón-Tirado, M. de J. López, I. Vidal-Escobar en [1, Teorema 2.1] presentan una equivalencia de la propiedad de Kelley (véase Teorema 1.1), usando los continuos irreducibles. Recordemos que un continuo X es *irreducible entre p y q* si $p, q \in X$ y ningún subcontinuo propio de X contiene a los puntos p y q . Se dice que X es *irreducible* si existen puntos p y q en X tales que X es irreducible entre p y q . Una prueba detallada del Teorema 1.1 se puede consultar en [2, Teorema 4.1, pág. 137].

TEOREMA 1.1. [1, Teorema 2.1] *Sea X un continuo. Se tiene que X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si para cada $a \in X$, para cada $I \in C(X)$ irreducible entre el punto a y algún otro punto de X , y para cada sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Nuestro trabajo se centra en los continuos conocidos como dendroides. Un continuo X es un *dendroide* si X es arco conexo y para cualesquiera A y B subcontinuos de X se cumple que $A \cap B$ es conexo. Los continuos irreducibles en un dendroide son arcos, por lo cual, en el Teorema [1.1], basta considerar el continuo irreducible I como un arco.

Sea X un dendroide, definimos el conjunto:

$$\mathcal{P}(X) = \{p \in X : \text{existe un arco } A \subset X \text{ con un punto extremo } p \text{ tal que}$$

$$\{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

En este capítulo probamos que, si X es un dendroide, $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ si y sólo si X no tiene la propiedad de Kelley (véase Teorema [3.1]). Sean X un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley y un punto $p \in \mathcal{P}(X)$, definimos la familia:

$$\mathcal{A}(p) = \{A \subset X : A \text{ es un arco con un punto extremo } p \text{ y}$$

$$\{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

Se sigue del Teorema [3.1] que, si X es un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley, entonces la familia $\mathcal{A}(p)$ es no vacía. Ahora, dados $p \in \mathcal{P}(X)$ y $A \in \mathcal{A}(p)$ definimos la familia de sucesiones:

$$\mathcal{S}(p, A) = \{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X : \{\{p_n\}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ satisface la definición de que}$$

$$\{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

Como consecuencia del Teorema [3.1] tenemos que, si X es un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley, entonces la familia $\mathcal{S}(p, A)$ es no vacía. Finalmente, dados $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ definimos la colección:

$$\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{M \in C(X) : M \cap A = \{p\} \text{ y existe una sucesión de}$$

$$\text{subcontinuos } \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } X \text{ con } p_n \in M_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ que satisface}$$

$$\text{la definición de que } M \text{ es continuo límite maximal fuerte de } M \cup A\}.$$

Nos parece interesante estudiar la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, en particular, probamos que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es arco conexo, en consecuencia, es conexo (véase el Corolario [3.8]). Por otro lado, exponemos ejemplos para mostrar que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no siempre es compacto (véase Ejemplo [3.9]). Por último, en términos de esta familia caracterizamos el conjunto de puntos de un dendroide donde no se tiene la propiedad de Kelley (véase Teorema [3.11]).

Cabe mencionar que este trabajo es parte de [6], pensando en los lectores jóvenes, en este capítulo se desarrollan con detalle las demostraciones y ejemplos.

2. Resultados auxiliares

Iniciamos esta sección con la definición de hiperespacio de un continuo. Dado un continuo X con métrica d se considera la colección de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X , denotada y definida por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

dotada con la métrica de Hausdorff, esta colección es conocida como el *hiperespacio de cerrados del continuo* X . La *métrica de Hausdorff* está definida como sigue: sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, la *nube* de radio ε alrededor de A , la cual denotamos y definimos por

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Ahora, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

para cada $A, B \in 2^X$. En [7, Teorema 2.2] se prueba que H es una métrica para la colección 2^X .

Por otro lado, también consideramos la familia de los subcontinuos de X ,

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

como subespacio de 2^X .

Dados un continuo X y una sucesión de subcontinuos $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $C(X)$ que converge a un subcontinuo M de X , en [3, pág. 75] se define la familia

$$\mathcal{M}(\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{A \in C(X) : M \subset A \text{ tal que existe una subsucesión } \{M_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\text{de } \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ y existe una sucesión } \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ en } C(X)$$

$$\text{que converge a } A \text{ tal que } M_{n_k} \subset A_k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\}.$$

Con esta familia se prueba el siguiente resultado, el cual es de mucha utilidad para nuestro trabajo.

PROPOSICIÓN 2.1. [3, Proposición 3.9] *Sean K un subcontinuo de un continuo X . Para cada sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a un subcontinuo $M \in C(K)$ existe un elemento maximal S en $C(K) \cap \mathcal{M}(\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ el cual es un continuo límite maximal fuerte de K .*

Por otra parte, también J. J. Charatonik y W. J. Charatonik introducen el concepto de continuo límite maximal [3, Definición 3.2], es decir, sea K un subcontinuo de un continuo X , un subcontinuo $M \subset K$ se llama *continuo límite maximal de K* si existe una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a M tal que, para cada sucesión $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X , con $M_n \subset N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a algún $N \in C(K)$, entonces $N = M$.

LEMA 2.2. [3, Observación 3.6] *Sean M , L y K subcontinuos de un continuo X tales que $M \subset L \subset K$. Si M es un continuo límite maximal fuerte de K , entonces M es un continuo límite maximal fuerte de L .*

DEMOSTRACIÓN: Como M es continuo límite maximal fuerte de K , existe una sucesión de subcontinuos de X , $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a M tal que para cada subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y para cada sucesión $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $M_{n_k} \subset N_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a N subcontinuo de K , se tiene que $N = M$.

Supongamos que M no es continuo límite maximal fuerte de L , entonces para cada sucesión $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a M existe una subsucesión $\{H_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y existe una sucesión $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $H_{n_k} \subset R_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a R subcontinuo de L , se tiene que $R \neq M$. En particular para la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe una subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y existe una sucesión $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $M_{n_k} \subset R_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a R subcontinuo de L , se tiene que $R \neq M$. Notemos que $R \subset L \subset K$. Como M es continuo límite maximal fuerte de K , y $R \subset K$, se tiene que $R = M$, lo cual es imposible pues $R \neq M$. Por tanto, M es continuo límite maximal fuerte de L . $\square$

Con los conceptos de continuo límite maximal y continuo límite maximal fuerte se obtiene una equivalencia a la propiedad de Kelley, la cual citamos a continuación:

TEOREMA 2.3. [3, Teorema 3.11] *Si X es un continuo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1) *X tiene la propiedad de Kelley.*
- (2) *Para cada subcontinuo K de X , se tiene que K es el único continuo límite maximal de K .*
- (3) *Para cada subcontinuo K de X , se tiene que K es el único continuo límite maximal fuerte de K .*

Dados un continuo X , A un subconjunto de X , un punto $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, $cl(A)$ denota la cerradura de A en X , $fr(A)$ denota la frontera de A en X y $B_\varepsilon(p)$ denota la bola de radio $\varepsilon > 0$ con centro en el punto p . Un subconjunto α de $C(X)$ se llama *arco ordenado* si para todo par de elementos A y B de α se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Si los extremos de α son A y B , con $A \subset B$, decimos que α es un arco ordenado de A a B .

3. Equivalencias a la propiedad de Kelley

Dado X un dendroide y dados u y v puntos en X establecemos la siguiente notación:

$[uv]$ denota el arco con puntos extremos u y v ,

$$(uv) = [uv] \setminus \{u, v\}, \quad [uv] = [uv] \setminus \{v\} \quad \text{y} \quad (uv) = [uv] \setminus \{u\}.$$

A continuación presentamos una caracterización de dendroides que no tienen la propiedad de Kelley.

TEOREMA 3.1. *Sea X dendroide. Se tiene que X no tiene la propiedad de Kelley si y sólo si existen un punto $p \in X$ y un arco $A \subset X$ con un punto extremo p tales que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos dos puntos $x, y \in X$, diremos que $x \leq_q y$ si se cumple que $x \in [qy]$; diremos que $x <_q y$ si se cumple que $x \leq_q y$ y $x \neq y$. Ahora, si $B \subset [qx]$, para algún punto $x \in X$, entonces $\inf(B)$ es la cota inferior más grande de B en $[qx]$, con el orden $\leq_q$.

Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley, entonces por el Teorema 2.3 existen subcontinuos K y M de X tales que $M \subset K$, $M \neq K$ y M es un continuo límite maximal fuerte de K . Sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ que satisface que M es un continuo límite maximal fuerte de K . Consideremos puntos $a \in K \setminus M$, $b \in M$ y sea $p = \inf([ab] \cap fr_K(M))$. Como $p \in M$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in M_n$ tal que $\lim p_n = p$. Sea S un elemento maximal de $\mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \cap C([pa]))$, por la Proposición 2.1 tenemos que S es un continuo límite maximal fuerte de $[pa]$.

Vamos a probar que $S = \{p\}$. Para esto supongamos que $S \neq \{p\}$. Como $S \in \mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\})$ existe una subsucesión $\{\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}\}$ de $\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ y existe una sucesión $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim S_k = S$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{p_{n_k}\} \subset S_k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $N_k = M_{n_k} \cup S_k$. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, N_k es un subcontinuo de X y que $\lim N_k = \lim M_{n_k} \cup S_k = M \cup S \subset M \cup [pa] \subset K$ como $a \in K \setminus M$, $\lim N_k \neq M$. Lo cual contradice que M es continuo límite maximal fuerte de K . Por lo tanto, $S = \{p\}$.

Recíprocamente, supongamos que existen un punto $p \in X$ y un arco $A \subset X$ con un punto extremo p tales que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Por el Teorema 2.3 obtenemos que X no tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Consideremos un dendroide X , definimos el conjunto:

$$\mathcal{P}(X) = \{p \in X : \text{existe un arco } A \subset X \text{ con un punto extremo } p \text{ tal que } \{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

En virtud del Teorema 3.1 tenemos la siguiente consecuencia.

COROLARIO 3.2. *Sea X dendroide. Se tiene que X no tiene la propiedad de Kelley si y sólo si $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$.*

Sean X un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley y $p \in \mathcal{P}(X)$, definimos la familia:

$$\mathcal{A}(p) = \{A \subset X : A \text{ es un arco con un punto extremo } p \text{ y } \{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

Note que, por el Teorema 3.1, si X es un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley, entonces la familia $\mathcal{A}(p)$ es no vacía. Así, dados $p \in \mathcal{P}(X)$ y $A \in \mathcal{A}(p)$ definimos la familia de sucesiones:

$$\mathcal{S}(p, A) = \{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X : \{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \text{ satisface la definición de que } \{p\} \text{ es continuo límite maximal fuerte de } A\}.$$

Como consecuencia del Teorema 3.1 se tiene que, si X es un dendroide que no tiene la propiedad de Kelley, entonces la familia $\mathcal{S}(p, A)$ es no vacía. Por último, dados $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ definimos la colección:

$$\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{M \in C(X) : M \cap A = \{p\} \text{ y existe una sucesión de}$$

subcontinuos $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X con $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que satisfice la definición de que M es continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$.

Lo primero que vamos a estudiar de esta familia es que, en el dendroide del Ejemplo 3.3 se muestra que la definición de la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende del arco A , esto es, existen arcos A y B en X con p uno de sus puntos extremos tales que $\{p\}$ es un continuo límite maximal fuerte de A y también de B y se tiene que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \neq \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

EJEMPLO 3.3. *Existe un dendroide X contenido en $\mathbb{R}^3$ tal que la definición de la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende del arco A .*

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 1), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^3$, $a = (0, 0, 0)$, $u = (0, 1, 0)$, $b = (0, 2, 0)$, $d = (0, 4, 0)$, $c = (1, 1, 0)$ y $e = (1, 2, 0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n = (0, 0, \frac{1}{n})$, $u_n = (0, 1, \frac{1}{n})$, $b_n = (0, 2, \frac{1}{n})$, $b'_n = (\frac{1}{n}, 2, \frac{1}{n})$, $p_n = (0, 3, \frac{1}{n})$, $p'_n = (\frac{1}{n}, 3, \frac{1}{n})$, $d_n = (0, 4, \frac{3n+2}{2n(n+1)})$, $c_n = (1, 1, \frac{1}{n})$, y $e_n = (1, 2, \frac{1}{n})$. Definimos los continuos $Y = [aa_1] \cup [ad] \cup [bc] \cup [pe]$ y

$$X = Y \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n p_n] \cup [u_n d_n] \cup [b_n c_n] \cup [c_n b'_n] \cup [b'_n p'_n] \cup [p'_n e_n] \right).$$

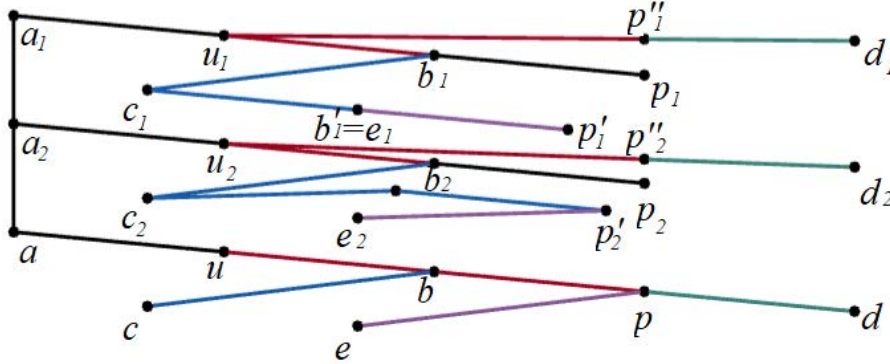


FIGURA 1. Dendroide donde $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende del arco A .

Para mostrar que la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende del arco A , definamos $p = (0, 3, 0)$, $A = [pd]$ y $B = [pe]$, A y B son arcos con un punto extremo p , $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a p ; además, $\{\{p_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $\{p\}$ y satisface la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A y de B . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A, B \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Vamos a probar que existen

$$M \in \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \setminus \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \text{ y } N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \setminus \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

Para lo cual, definimos $M = [up]$ y $N = [cp]$; además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n'' = (0, 3, \frac{4n+3}{3n(n+1)})$,

$$M_n = [u_n p_n] \cup [u_n p_n''] \text{ y } N_n = [p_n b_n] \cup [b_n c_n] \cup [c_n p_n'].$$

Notemos que

- (1) $M \cap A = \{p\} = N \cap B$.
- (2) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que M es un continuo límite maximal fuerte en $M \cup B$ y $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- (3) $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que N es un continuo límite maximal fuerte en $N \cup A$ y $p_n \in N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De lo anterior obtenemos que $M \in \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Además, M no es un continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$, así $M \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y N no es un continuo límite maximal fuerte de $N \cup B$, así $N \notin \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \not\subset \mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $\mathcal{F}(p, B, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \not\subset \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. $\square$

Ahora, veamos que el dendroide del Ejemplo 3.4 se muestra que la definición de la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende de la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, existen dos sucesiones diferentes, digamos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que convergen al punto p tales que las familias $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $\mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ son diferentes.

EJEMPLO 3.4. *Existe un dendroide X contenido en el plano Cartesiano tal que la definición de la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende de la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 2), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)$, $c = (2, 0)$, $d = (4, 0)$ y $u = (-1, -2)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = (3, \frac{1}{n})$, $q_n = (3, -\frac{1}{n})$, y $c_n = (2, -\frac{1}{n})$. Definamos

$$X = [ad] \cup [uc] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [ap_n] \cup [uc_n] \cup [c_n q_n] \right).$$

Para mostrar que la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende de la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definamos $p = (3, 0)$ y $A = [pd]$, A es un arco con un punto extremo p , $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones que convergen a p ; además, $\{\{p_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\{q_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones que convergen a $\{p\}$ y que satisfacen la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Veremos que existen

$$M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \setminus \mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \text{ y } N \in \mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \setminus \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

Para lo cual, definimos $b = (1, 0)$ y $e = (0, -\frac{4}{3})$. Además, definimos $M = [bp]$ y $N = [ep]$; para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $b_n = (1, \frac{1}{3n})$, $e_n = (0, -\frac{4}{3} - \frac{1}{3n})$,

$$M_n = [b_n p_n] \text{ y } N_n = [q_n c_n] \cup [c_n e_n].$$

Notemos que

- (1) $M \cap A = \{p\} = N \cap A$.

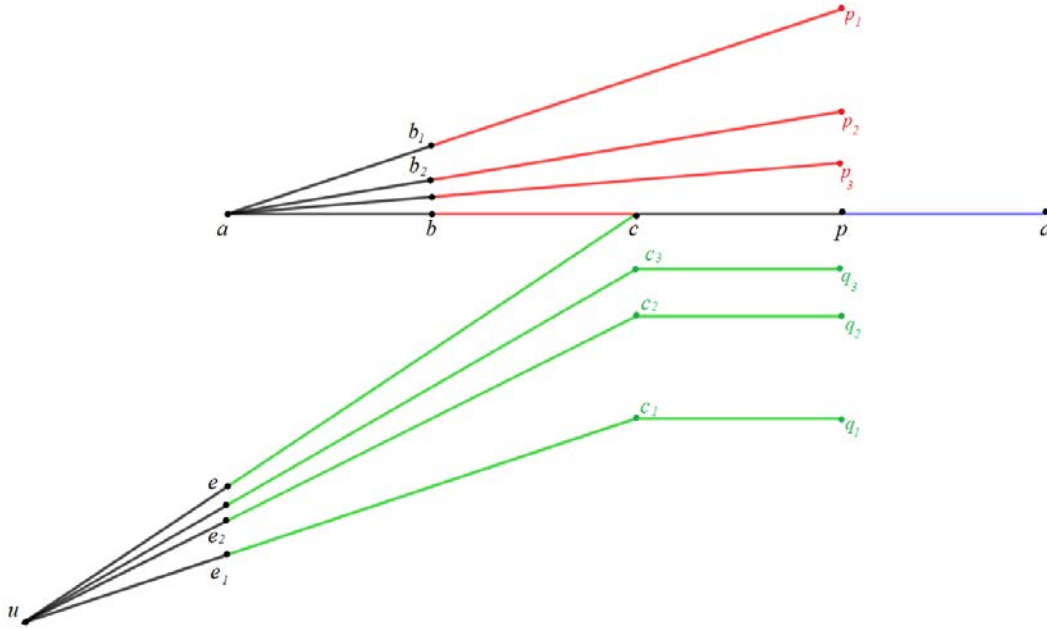


FIGURA 2. Dendroide donde $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende de la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- (2) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que M es un continuo límite maximal fuerte en $M \cup A$ y $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- (3) $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que N es un continuo límite maximal fuerte en $N \cup A$ y $q_n \in N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $N \in \mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Notemos que $q_n \notin M_n$ y $p_n \notin N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual $M \notin \mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Por tanto, $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \not\subset \mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $\mathcal{F}(p, A, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \not\subset \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. $\square$

Sea X un dendroide, es conocido que la intersección de dos elementos de $C(X)$ cuya intersección es no vacía es un elemento de $C(X)$, sin embargo, existe un dendroide X , $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ para el cual existen $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tal que $M \cap N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

EJEMPLO 3.5. *Existe un dendroide X en el espacio Euclideo, existen $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ para el cual existen $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tal que $M \cap N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.*

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 3), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^3$, $a = (4, 0, 0)$, $b = (2, 0, 0)$, $p = (0, 0, 0)$, $q = (-1, 0, 0)$, $c = (2, 2, 0)$ y $d = (2, -2, 0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (4, 0, \frac{1}{n})$, $b_n = (2 + \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{4n})$, $b'_n = (2 - \frac{1}{n}, 0, \frac{3}{4n})$, $b''_n = (2 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{4n})$, $p_n = (0, 0, \frac{1}{n})$, $c_n = (2, 2, \frac{1}{n})$, y $d_n = (2, -2, \frac{1}{n})$. Definimos el continuo

$$X = [aq] \cup [cd] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [ab_n] \cup [b_n c_n] \cup [c_n b'_n] \cup [b'_n p_n] \cup [b'_n d_n] \cup [d_n b''_n] \cup [b''_n a_n] \right).$$

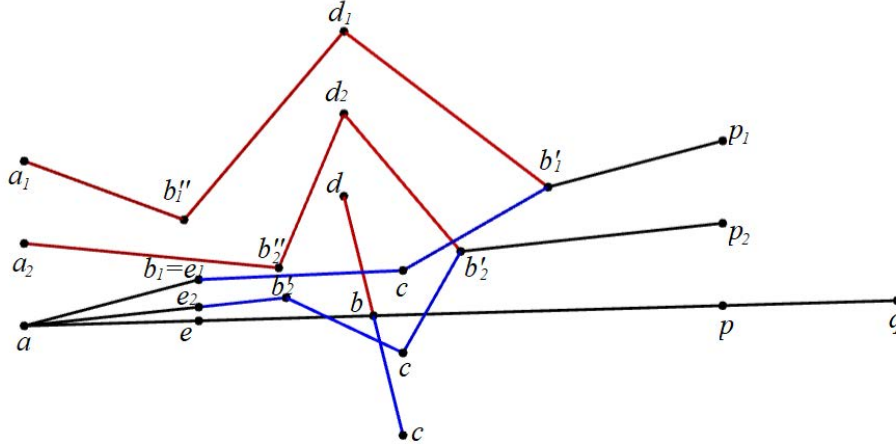


FIGURA 3. $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $M \cap N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Sea $A = [pq]$, A es un arco con un punto extremo p , $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que convergen a p ; además, $\{\{p_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $\{p\}$ y satisface la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Vamos a mostrar que existen

$M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tales que $M \cap N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Para esto definimos $e = (3, 0, 0)$, $M = [ep] \cup [bc]$ y $N = [ap] \cup [bd]$, además para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $e_n = (3, 0, \frac{1}{4n})$,

$$M_n = [e_n b_n] \cup [b_n c_n] \cup [c_n b'_n] \cup [b'_n p_n] \text{ y } N_n = [a_n b''_n] \cup [b''_n d_n] \cup [d_n b'_n] \cup [b'_n p_n].$$

Notemos que

- (1) $M \cap A = \{p\} = N \cap A$.
- (2) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que M es un continuo límite maximal fuerte en $M \cup A$ y $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- (3) $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que N es un continuo límite maximal fuerte en $N \cup A$ y $q_n \in N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, notemos que $M \cap N = [ep]$ y $[ep] \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. $\square$

Sea X un dendroide, también es conocido que la intersección no vacía de dos elementos de $\mathcal{C}(X)$ es un elemento de $\mathcal{C}(X)$, sin embargo, existe un dendroide X , $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ para el cual existen $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tal que $M \cup N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

EJEMPLO 3.6. Existe un dendroide X en el espacio Euclideo, existen $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ para el cual existen $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tal que $M \cup N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 4), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^3$, $a = (0, 0, 0)$, $v = (3, 0, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $q = (0, 2, 0)$, $d = (0, -2, 0)$ y $e = (0, -1, 0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (0, 0, \frac{1}{n})$, $a'_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{3n+2}{2n(n+1)})$, $c_n = (1, 0, \frac{2}{3n})$, $p_n = (0, 1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, 2, \frac{3n+2}{2n(n+1)})$, $d_n = (0, -2, \frac{1}{n})$ y $e_n = (0, -1, \frac{3n+2}{2n(n+1)})$. Definimos el continuo

$$X = [av] \cup [dq] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [va_n] \cup [d_n p_n] \cup [c_n a'_n] \cup [a'_n e_n] \cup [e_n q_n] \right).$$

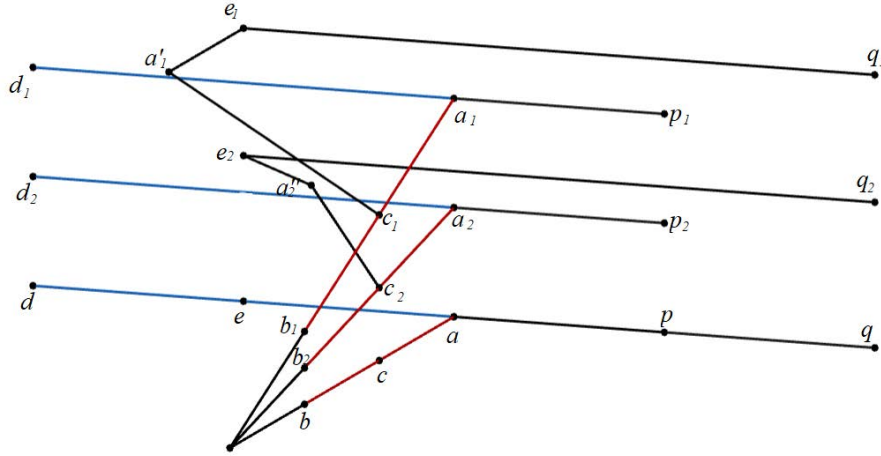


FIGURA 4. $M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $M \cup N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Sean $p = (0, 1, 0)$ y $A = [pq]$, A es un arco con un punto extremo p , $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que convergen a p ; además, $\{\{p_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $\{p\}$ y que satisfacen la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Vamos a mostrar que existen

$M, N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \cap N \neq \emptyset$ tales que $M \cup N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Para esto definimos $b = (2, 0, 0)$, $M = [dp]$ y $N = [ba] \cup [ap]$, además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $b_n = (2, 0, \frac{1}{3n})$, $M_n = [b_n a_n] \cup [a_n p_n]$ y $N_n = [d_n p_n]$. Notemos que

- (1) $M \cap A = \{p\} = N \cap A$.
- (2) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que M es un continuo límite maximal fuerte en $M \cup A$ y $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- (3) $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que N es un continuo límite maximal fuerte en $N \cup A$ y $q_n \in N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, notemos que $M \cap N = [ap]$ y $M \cup N \notin \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. $\square$

TEOREMA 3.7. *Sea X un dendroide sin la propiedad de Kelley. Si $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$, entonces $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es arco conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Primero vamos a probar que, para cada $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \neq \{p\}$, existe un arco ordenado α de $\{p\}$ a M en $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Para esto consideremos $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ con $M \neq \{p\}$. Sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ que satisface la definición de que M es continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$ y que $\{p_n\} \subset M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por [7, Teorema 15.3 y Corolario 15.4] existe un arco ordenado α_n en $C(X)$ con puntos extremos $\{p_n\}$ y M_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $C(C(X))$ y que $\lim \alpha_n = \alpha$, por [7, Definición 17.6] tenemos que

$$\alpha \in \{\beta \in C(C(X)) : \beta \text{ es un arco ordenado en } C(X)\} \cup F_1(C(X)).$$

Note que $M, \{p\} \in \alpha$ y $M \neq \{p\}$, esto implica que α es un arco ordenado en $C(X)$.

Sea $N \in \alpha$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \alpha_n$ tal que $\lim N_n = N$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es un arco ordenado con puntos extremos $\{p_n\}$ y M_n , así $\{p_n\} \subset N_n \subset M_n$, por lo cual $\{p\} \subset N \subset M$. Luego, α es un arco ordenado con puntos extremos $\{p\}$ y M .

Ahora, vamos a probar que $\alpha \subset \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Para esto sea $N \in \alpha$, como $N \subset M$, $M \cap A = \{p\}$ y $\{p\} \subset N$ tenemos que $N \cap A = \{p\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $N_n \in \alpha_n$ tal que $\lim N_n = N$. Por la Proposición 2.1 existe un elemento maximal $S \in \mathcal{M}(\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cap C(N \cup A)$ el cual es un continuo límite maximal fuerte de $N \cup A$. Vamos a probar que $S = N$. Para esto último, como $S \in \mathcal{M}(\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ tenemos que existe una sucesión $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim S_n = S$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $N_n \subset S_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $L_n = S_n \cup M_n$, puesto que $N_n \subset S_n \cap M_n$, tenemos que L_n es un continuo. Además,

$$\lim L_n = \lim S_n \cup M_n = S \cup M \subset N \cup A \cup M \subset M \cup A.$$

Como $M_n \subset L_n$, y M es un continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$ y la sucesión $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $M \cup A$ tenemos que $S \cup M = M$, luego $S \subset M$, de donde $S \cap A = \{p\}$. Tenemos entonces que $S \subset N \cup A$, $N \subset S$ y $S \cap A = \{p\} = N \cap A$, por lo cual $S = N$.

De lo anterior obtenemos que $N \cap A = \{p\}$ y existe una sucesión $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $p_n \in S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, que satisface que N es un continuo límite maximal fuerte de $N \cup A$. Esto implica que $N \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Por lo tanto, $\alpha \subset \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Con todo, podemos concluir que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es arco conexo. $\square$

COROLARIO 3.8. *Sea X un dendroide sin la propiedad de Kelley. Si $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$, entonces $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es conexo.*

Si X es un dendroide sin la propiedad de Kelley entonces $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no necesariamente es un conjunto compacto. El Ejemplo 3.9 muestra que la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no es un conjunto compacto. Por otro lado, el Ejemplo 3.10 muestra que la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ sí es un conjunto compacto.

EJEMPLO 3.9. *Existe un dendroide X en el plano Euclideo, existen $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ tales que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no es un conjunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 5), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)$ y $q = (2, 0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n = (1, \frac{1}{n})$. Definimos

$$X = [aq] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [ap_n] \right).$$

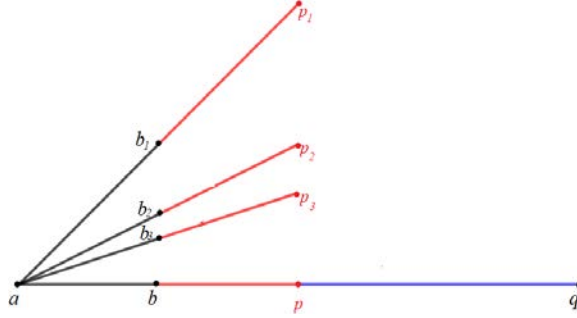


FIGURA 5. Dendroide donde $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no es compacto.

Sean $p = (1, 0)$ y $A = [pq]$ es un arco con un punto extremo p , notemos que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge al punto p ; además, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $\{p\}$ y que satisfacen la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Para mostrar que existe la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ que no es compacto. Para cada $t \in (0, 1]$ definimos $b_t = (t, 0)$ y $M_t = [b_t p]$. Sea $t \in (0, 1]$ fijo, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = (t, \frac{t}{n})$, y definimos $M_n = [b_n p_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

- (1) $M_t \cap A = \{p\}$.
- (2) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de X que satisface la definición de que M_t es un continuo límite maximal fuerte de $M_t \cup A$ y $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De lo anterior, $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{M_t \subset X : t \in (0, 1]\}$. Por tanto, $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no es un conjunto compacto. $\square$

EJEMPLO 3.10. *Existe un dendroide X en el plano Euclideo, existen $p \in \mathcal{P}(X)$, $A \in \mathcal{A}(p)$, y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ tales que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es un conjunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Para construir el dendroide X (ver la Figura 6), consideremos los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)$, $p = (1, 0)$, $q = (2, 0)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (0, \frac{1}{2n-1})$, $q_n = (2, \frac{1}{2n-1})$ y $p_n = (1, \frac{1}{2n})$. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, para cada $k > n$, sea $p_{n_k} = (1 + \frac{1}{k-n+1}, \frac{n+k}{2nk})$ y $p'_{n_k} = (1 - \frac{1}{k-n+1}, \frac{n+k}{2nk})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_n = [a_n q_n] \cup [q_n p'_{n_{n+1}}] \cup cl \left(\bigcup_{k>n} [p'_{n_k} p_{n_k}] \cup [p_{n_k} p'_{n_{k+1}}] \right),$$

notemos que A_n es un arco con puntos extremos a_n y p_n . Definimos el continuo

$$X = [aa_1] \cup [aq] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right).$$

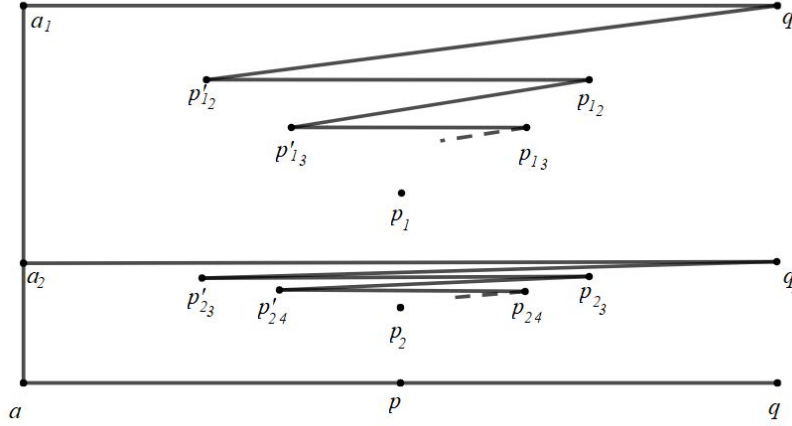


FIGURA 6. Dendroide donde existe $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ compacto.

Sea $A = [pq]$ es un arco con un punto extremo p , notemos que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge al punto p ; además, $\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ es una sucesión que converge a $\{p\}$ y que satisfacen la definición de que $\{p\}$ es continuo límite maximal fuerte de A . Notemos que $p \in \mathcal{P}(X)$, más aún $A \in \mathcal{A}(p)$, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$ y por el Teorema 3.1 el dendroide X no tiene la propiedad de Kelley.

Notenemos que $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{\{p\}\}$. Por tanto, $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es un conjunto compacto. $\square$

Sea X un continuo, definamos

$$NK(X) = \{x \in X : X \text{ no tiene la propiedad de Kelley en } x\}.$$

Dado un dendroide X caracterizamos el conjunto de puntos donde X no tiene la propiedad de Kelley en términos de la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

TEOREMA 3.11. *Sea X un dendroide, entonces,*

$$NK(X) = \bigcup_{p \in \mathcal{P}(X)} \bigcup_{A \in \mathcal{A}(p)} \bigcup_{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)} \left(\bigcup \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Primero note que, si X tiene la propiedad de Kelley entonces $NK(X)$ es vacío y, en consecuencia, se satisface el resultado.

Ahora, asumamos que X no tiene la propiedad de Kelley. Sea $x \in NK(X)$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X y un continuo $K \in C(X)$ tales que $\lim x_n = x$, $x \in K$ y para cualquier sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que satisface que $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a K .

Consideremos dos puntos $z, y \in X$, diremos que $z \leq_q y$ si se cumple que $z \in [qy]$; diremos que $z <_q y$ si se cumple que $z \leq_q y$ y $z \neq y$. Ahora, si $B \subset [qz]$, para algún punto $z \in X$, entonces $\inf(B)$ es la cota inferior más grande de B en $[qz]$, con el orden $\leq_q$.

Sea S un elemento maximal en $\mathcal{M}(\{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \cap C(K))$. Por la Proposición 2.1, tenemos que S es un continuo límite maximal fuerte de K . Notemos que $S \neq K$. Sea $a \in K \setminus S$ y note que $x \in S$. Consideremos $p = \inf([ax] \cap fr_K(S))$.

Definamos $A = [pa]$, notemos que $S \cap A = \{p\}$. Puesto que $p = \inf([ax] \cap fr_K(S))$, $p \in K$. Como $a, p \in K$, $A \subset K$. Como $A, S \subset K$, $S \cup A \subset K$. Por el Lema 2.2 tenemos que S es continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$. Sea $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ que satisface la definición de que S es un continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n \in S_n$ tal que $\lim p_n = p$. Sea R un elemento maximal en $\mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \cap C(A))$, por la Proposición 2.1, tenemos que R es un continuo límite maximal fuerte de A .

Vamos a probar que $R = \{p\}$. Para esto note que, como $R \in \mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\})$, existe una subsucesión $\{\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}\}$ de la sucesión $\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ y existe una sucesión $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tales que $\lim R_n = R$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{p_{n_k}\} \subset R_k$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $H_n = R_n \cup S_n$. Como $p_n \in R_n \cap S_n$, tenemos que H_n es un continuo. Notemos que

$$\lim H_n = \lim R_n \cup S_n = R \cup S \subset S \cup A.$$

Como $S_n \subset H_n$, S es continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$ y la sucesión $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $S \cup A$ tenemos que $S \cup R = S$, luego $R \subset S$. Entonces, $R \subset A \cap S = \{p\}$. Por lo tanto, $R = \{p\}$.

De lo anterior tenemos que $\{p\}$ es un continuo límite maximal fuerte de A .

Sea M un elemento maximal de $\mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\} \cap C(S \cup A))$. Por la Proposición 2.1, tenemos que M es un continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$. Vamos a probar que $S = M$. Como $M \in \mathcal{M}(\{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}\})$ existe una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim M_n = M$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{p_n\} \subset M_n$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $L_n = S_n \cup M_n$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in S_n \cap M_n$, esto implica que L_n es un continuo. Además, $\lim L_n = \lim S_n \cup M_n = S \cup M \subset S \cup A$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \subset L_n$, S es continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$ y la sucesión $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $S \cup A$ tenemos que $S \cup M = S$, luego $M \subset S$. Además, como $M_n \subset L_n$, para cada

$n \in \mathbb{N}$, M es continuo límite maximal fuerte de $S \cup A$ y la sucesión $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $S \cup A$ tenemos que $S \cup M = M$, luego $S \subset M$. Por lo tanto, $S = M$.

Notemos que $S \cap A = \{p\}$, de donde, $M \cap A = \{p\}$. Hemos construido un continuo M en X tal que $M \cap A = \{p\}$, M es continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$, y una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que satisface la definición de que M es continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$, tal que $p_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Como $x \in S = M$, tenemos que

$$x \in \bigcup_{p \in \mathcal{P}(X)} \bigcup_{A \in \mathcal{A}(p)} \bigcup_{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)} \left(\bigcup \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \right).$$

Para la otra contención, sea

$$x \in \bigcup_{p \in \mathcal{P}(X)} \bigcup_{A \in \mathcal{A}(p)} \bigcup_{\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)} \left(\bigcup \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \right).$$

Luego, existe $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ tal que $x \in M$, para algún $p \in \mathcal{P}(X)$, para algún arco $A \in \mathcal{A}(p)$ y para alguna sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(p, A)$. Como $M \in \mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ existe $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ que satisface la definición de que M es continuo límite maximal fuerte de $M \cup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in M_n$ tal que $\lim x_n = x$. Sea $K = M \cup A$.

Vamos a probar que para cualquier sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que satisface que $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a K . Para probar esto, supongamos por el contrario, supongamos que existe una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que $\lim K_n = K$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $N_n = K_n \cup M_n$. Note que $x_n \in K_n \cap M_n$, esto implica que N_n es un continuo. Además,

$$N_n = K_n \cup M_n \rightarrow K \cup M \subset K.$$

Como $M_n \subset N_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, M es continuo límite maximal fuerte de K y la sucesión $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en K tenemos que $K \cup M = M$, luego $K \subset M$. Lo cual es imposible, pues $M \cap A = \{p\}$. Por lo tanto, para cualquier sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ que satisface que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a K , es decir, X no tiene la propiedad de Kelley en x . Por lo tanto, $x \in NK(X)$. $\square$

En relación con los Ejemplos [3.9](#) y [3.10](#), la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ no siempre es un conjunto compacto. Concluimos este capítulo con la pregunta:

PREGUNTA 3.12. *Sea X un dendroide sin la propiedad de Kelley. ¿Hallar condiciones necesarias y suficientes sobre X , para tener que la familia $\mathcal{F}(p, A, \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es un conjunto compacto?*

Agradecimientos: Queremos agradecer a quien se debe; en particular, la labor del árbitro(a) la cual es muy importante para la realización del libro. Las autoras le agradecemos sus comentarios. La segunda autora agradece al SECIHTI por el apoyo en el programa Estancias Posdoctorales por México Convocatoria 2023(1).

Bibliografía

- [1] M. Chacón-Tirado, M. de J. López, I. Vidal-Escobar. *A property equivalent to being semi-Kelley*, Topology Appl. 350, (2024), 108901.
- [2] M. Chacón-Tirado, M. de J. López, I. Vidal-Escobar. *Equivalencias de Kelley y semi-Kelley en continuos*. Capítulo 9 en Topología y sus aplicaciones 10. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, BUAP, 2024.
- [3] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik. *A weaker form of the property of Kelley*, Topology Proc. 23, (1998), 69–99.
- [4] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [5] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52, (1942), 22–36.
- [6] M. de J. López, I. Vidal-Escobar. *Property of Kelley for dendroids*, Manuscrito.

Correos electrónicos:

mjlopez@fcmf.buap.mx (María de Jesús López Toriz),

pvidal@fcmf.buap.mx, piveavis@hotmail.com (Ivon Vidal Escobar).

CAPÍTULO 11

Hiperespacios suspensión mediante hiperespacios intersección en continuos

Florencio Corona Vázquez, José Antonio Martínez Cortez,
Russell Aarón Quiñones Estrella y Javier Sánchez Martínez
*Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas*

1. Introducción	231
2. Definiciones y notación general	232
3. El espacio $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$	234
4. El hiperespacio $C_n(X)/C_n(X; K)$ de gráficas finitas	237
5. El caso $ R(X) = 2$	247
Bibliografía	249

1. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Dado un continuo X , un *subcontinuo* de X es un subespacio no vacío de X que es cerrado y conexo. Dado un entero positivo n , consideramos los siguientes hiperespacios de X ,

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$;

todos estos dotados con la métrica de Hausdorff (véase [15, Definition 2.1, p. 11]). Por simplicidad, escribiremos $C(X)$ en lugar de $C_1(X)$.

Dados un hiperespacio $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$ y $K \in 2^X - \{X\}$ (fijo), se consideran las siguientes familias:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(X; K) &= \{A \in \mathcal{H}(X) : K \cap A \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{H}_K(X) &= \{A \in \mathcal{H}(X) : K \subset A\}.\end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{H}(X; K)$ siempre es un subcontinuo de $\mathcal{H}(X)$. Sin embargo, cuando $\mathcal{H}(X) = F_n(X)$ y $K \in 2^X - F_n(X)$, se tiene que $\mathcal{H}_K(X)$ es vacío y para evitar esto, en tal caso se considera $K \in F_n(X)$, así $\mathcal{H}_K(X)$ es un subcontinuo de $\mathcal{H}(X)$. El subespacio $\mathcal{H}(X; K)$ es llamado el *hiperespacio intersección en $\mathcal{H}(X)$* y $\mathcal{H}_K(X)$ es llamado el *hiperespacio contención para K en $\mathcal{H}(X)$* .

Al conjunto $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ lo dotamos con la topología cociente y por [29, Theorem 3.10, p. 40], $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ resulta ser un continuo. Usaremos el símbolo π_K para denotar la función (natural) cociente $\pi_K : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$, y denotaremos por $\mathcal{H}_K$ al punto correspondiente a $\mathcal{H}(X; K)$ en $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$, bajo la función π_K .

Las siguientes propiedades son una consecuencia de las definiciones previas.

OBSERVACIÓN 1.1. *Sean X un continuo, $K \in 2^X$ y n un entero positivo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) $\mathcal{H}_K(X) \subset \mathcal{H}(X; K)$.
- (2) $\mathcal{H}(X; K) = \bigcup_{p \in K} \mathcal{H}(X; \{p\})$.
- (3) Si $K \in F_1(X)$, entonces $\mathcal{H}(X; K) = \mathcal{H}_K(X)$.
- (4) $\mathcal{H}(X; K) \cap F_1(X) = F_1(K)$.
- (5) $\pi_K|_{\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)} : \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K) - \{\mathcal{H}_K\}$ es un homeomorfismo.

En relación con los cocientes entre hiperespacios de un continuo X se han estudiado algunos con anterioridad, por ejemplo, Sam B. Nadler, Jr. en 1979, comienza el estudio del *hiperespacio suspensión de X* denotado por $HS(X) = C(X)/F_1(X)$, véase [28]. Para el año 2004, R. Escobedo, M. de J. López y S. Macías retoman el estudio del hiperespacio suspensión, ver [10]. Ese mismo año, S. Macías estudia el espacio $HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X)$, llamado *n -ésimo hiperespacio suspensión de X* , continuando con el estudio de este espacio en 2006, véase [21] y [22]. Más tarde, en 2008, J. C. Macías analiza el *n -ésimo pseudo-hiperespacio suspensión de X* denotado por $PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X)$, véase [17]. En el año 2016, J. Camargo y S. Macías estudian y determinan propiedades del espacio $C_1^n(X) = C_n(X)/C_1(X)$, véase [4]. Recientemente, en [5] se realiza un estudio del hiperespacio $F_n^K(X) = F_n(X)/F_{nK}(X)$, obteniendo propiedades de aposíndesis, conexidad local, arco conexidad, unicoherencia y puntos de corte en este hiperespacio. En [2], aparece un estudio del hiperespacio $C_K^n(X) = C_n(X)/C_{nK}(X)$ en el caso de que X es una gráfica finita, y en el caso general se presentan propiedades relacionadas a aposíndesis, conexidad local, arco desconexidad y contractibilidad.

Continuando en esta línea de investigación, en este trabajo presentamos algunas propiedades topológicas del hiperespacio $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ cuando $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), C(X)\}$, esto se encuentra en la tercera sección, siendo que la segunda sección consta de definiciones y notación general que es utilizada en el presente trabajo. En la cuarta sección, se trata el caso de gráficas finitas y presentamos condiciones en X y K para garantizar que $C_n(X)$ y $C_n(X)/C_n(X; K)$ sean homeomorfos, además de desarrollar herramientas para abordar en la quinta y última sección el caso de gráficas finitas con dos puntos de ramificación y mostramos que cuando K consta de un punto extremo de la gráfica X , $C_n(X)$ y $C_n(X)/C_n(X; K)$ no pueden ser homeomorfos.

2. Definiciones y notación general

Un *arco* es cualquier espacio homeomorfo al intervalo unitario $I = [0, 1]$ y una *curva cerrada simple* es cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 . El

conjunto de todos los enteros positivos lo denotamos por $\mathbb{N}$. Dado un subconjunto A de un espacio topológico Z , denotamos la cerradura, el interior y la frontera de A en Z por $\text{Cl}_Z(A)$, $\text{Int}Z(A)$ y $\text{Fr}Z(A)$, respectivamente. Si dos espacios topológicos Y y Z son homeomorfos escribimos $Y \approx Z$. En un espacio topológico Z , una *componente* de Z es un conjunto conexo y no vacío de Z que es maximal.

Una *gráfica finita* X es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos tal que cualesquiera dos arcos, o son ajenos o se intersecan en uno o en ambos puntos finales. Si X es una gráfica finita, los arcos y los puntos finales de cada arco son llamados *aristas* y *vértices*, respectivamente. Dado $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 3$), un *m-odo simple* Y , es una gráfica finita la cual es unión de m arcos, $J_1, \dots, J_m$, tal que existe un único punto $v \in Y$ con la propiedad: $\{v\} = J_i \cap J_j$ siempre que $i \neq j$, y v es un punto final de J_i para cada $i = 1, \dots, m$. Un *árbol* es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.

El orden de un punto en una gráfica finita X , la daremos usando la definición clásica de Menger. Sea $p \in X$ y $m, n \in \mathbb{N}$, el *orden de p en X* , denotado por $\text{ord}_X(p)$, se define como $\text{ord}_X(p) \leq n$, si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto G que contiene a p cuyo diámetro es menor que ϵ tal que $\text{Fr}_X(G)$ tiene a lo más n puntos. Además, $\text{ord}_X(p) = n$ si $\text{ord}_X(p) \leq n$ y $\text{ord}_X(p) \not\leq m$, para cada $m < n$. Sea $q \in X$, se dice que:

- q es un *punto extremo* de X , si $\text{ord}_X(q) = 1$.
- q es un *punto ordinario* de X , si $\text{ord}_X(q) = 2$.
- q es un *punto de ramificación* de X , si $\text{ord}_X(q) \geq 3$.

El conjunto de puntos extremos de X , lo denotamos por $E(X)$; el conjunto de puntos ordinarios de X , se denota por $O(X)$; y el conjunto de puntos de ramificación de X , lo denotamos por $R(X)$. Observemos que para un arco y una curva cerrada simple, el conjunto de puntos de ramificación es vacío. En cualquier otro caso, podemos asumir que cada vértice de X es un punto final de X o un punto de ramificación de X ; con esta restricción, los dos puntos finales de una arista de X pueden coincidir y en este caso, la arista es una curva cerrada simple, a este tipo de aristas les llamamos *lazos*. Así, las aristas de X son arcos o curvas cerradas simples, y con esto X tiene tres tipos de aristas: lazos, aristas que tienen un punto final de X y aristas que unen puntos de ramificación.

Diremos que un continuo X es *unicoherente* si cada que A y B son subcontinuos de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un *continuo de Peano* es un continuo localmente conexo. Un continuo X se dice que es *conexo en pequeño* (*cik*) en $p \in X$, si cada vecindad de p contiene una vecindad conexa de p ; estos dos conceptos se relacionan por [11, Theorem 3.11, p. 114] como se enuncia a continuación: Un continuo es un continuo de Peano si y solo si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Sea X un continuo con métrica d . Dados $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \subset X$, usaremos la notación estándar para bolas abiertas y bolas abiertas generalizadas:

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\},$$

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } y \in A \text{ tal que } x \in B_\varepsilon(y)\}.$$

Dados A y B subconjuntos cerrados de X , la *distancia de Hausdorff* entre A y B está definida por:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Es bien sabido que H es una métrica para 2^X , véase [15, Theorem 2.2, p. 11].

Para una familia finita de subconjuntos de X , $U_1, \dots, U_r$, el símbolo $\langle U_1, \dots, U_r \rangle$ denota al conjunto

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^r U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

Se sabe que la familia

$$\{\langle U_1, \dots, U_r \rangle : \text{para cada } i \in \{1, \dots, r\}, U_i \text{ es abierto en } X, r \in \mathbb{N}\},$$

forma una base para una topología para 2^X , la cual es conocida como *topología de Vietoris*, véase, por ejemplo, [15, Definition 1.1, p. 1], además esta topología coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, véase [15, Theorem 3.2, p. 18]. Con el fin de simplificar la escritura, escribiremos $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ en lugar de $\langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap C_n(X)$.

Dada $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos, consideramos la *función inducida* $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ definida por $f^*(A) = f(A)$ para cada $A \in 2^X$. Además, si $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X), C_n(X)\}$, entonces la función $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ dada por $\mathcal{H}(f) = f^*|_{\mathcal{H}(X)}$, es una función continua (ver [15, Theorem 13.3, p. 106]).

Sean $A, B \in 2^X$, un *arco ordenado* de A a B es una función continua $\alpha : I \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(r)$ es un subconjunto propio de $\alpha(s)$, cuando $r < s$. Las condiciones para la existencia de arcos ordenados se pueden encontrar, por ejemplo, en [27, 1.2-1.8, p. 57-59].

3. El espacio $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$

En el resto del trabajo, el símbolo X denotará un continuo, K un punto en $2^X - \{X\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, consideramos que $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), C_n(X)\}$, salvo que se indique lo contrario. En el caso cuando $\mathcal{H}(X) = 2^X$, el símbolo $2^X(K)$ denota el hiperespacio $\mathcal{H}(X; K)$.

OBSERVACIÓN 3.1. $2^X - 2^X(K) = \langle X - K \rangle$ y $C_n(X) - C_n(X; K) = \langle X - K \rangle_n$.

Recordemos que un subconjunto S de un espacio topológico Z es un *conjunto de corte* de Z si $Z - S$ no es conexo. Un punto $p \in Z$ es un *punto de corte* de Z si $\{p\}$

es un conjunto de corte de Z . Diremos que $A \in 2^X$ es un *conjunto de no-corte* de X si $X - A$ es conexo.

PROPOSICIÓN 3.2. *El conjunto K es un conjunto de corte de X si y solo si $\mathcal{H}(X; K)$ es un conjunto de corte de $\mathcal{H}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos la proposición para $\mathcal{H}(X) = 2^X$, ya que la prueba es similar cuando $\mathcal{H}(X) = C_n(X)$.

Supongamos que K es un conjunto de corte de X , existen entonces U y V dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X tales que $X - K = U \cup V$. Puesto que $\langle U \rangle$ y $\langle X - K, V \rangle$ son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de 2^X y la observación 3.1, basta probar que $\langle X - K \rangle = \langle U \rangle \cup \langle X - K, V \rangle$.

Sea $A \in \langle X - K \rangle$. Como $A \cap K = \emptyset$ y $A \subset X - K = U \cup V$, tenemos que: si $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \in \langle X - K, V \rangle$; en otro caso, $A \in \langle U \rangle$. Por lo que $\langle X - K \rangle \subset \langle U \rangle \cup \langle X - K, V \rangle$. Por otro lado, sea $A \in \langle U \rangle \cup \langle X - K, V \rangle$, si $A \in \langle U \rangle$ se tiene que $A \subset U \subset X - K$; si $A \in \langle X - K, V \rangle$ entonces $A \subset X - K = U \cup V$ y $A \cap V \neq \emptyset$. En ambos casos $A \in \langle X - K \rangle$, con lo que $\langle U \rangle \cup \langle X - K, V \rangle \subset \langle X - K \rangle$. En consecuencia, $2^X(K)$ es un conjunto de corte de 2^X .

Recíprocamente, si $X - K$ es conexo, entonces $2^X - 2^X(K) = \langle X - K \rangle$ es conexo (ver [26, Proposition 4.11, p. 166]). Por lo que $X - K$ no es conexo cuando $2^X - 2^X(K)$ no es conexo, y también, K es un conjunto de corte de X . $\square$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2 y (5) de la observación 1.1.

COROLARIO 3.3. *El conjunto K es un conjunto de corte de X si y solo si $\mathcal{H}_K$ es un punto de corte de $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$.*

Analicemos ahora la unicoherencia de $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$.

Es sabido que los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ son unicoherentes, véase [27, Corollary 1.176, p. 178] y [20, Theorem 4.8, p. 244], respectivamente. Como π_K es una función monótona, el siguiente resultado se sigue de [16, Theorem 3, p. 163].

TEOREMA 3.4. *El espacio $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ es unicoherente.*

Dado que el hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ es un continuo arco conexo, por [27, theorems 1.9 and 1.12] y [20, Theorem 3.1, p. 240], además, puesto que π_K es una función continua y cerrada, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 3.5. *El espacio $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ es arco conexo.*

LEMA 3.6. *Sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X)\}$. El conjunto $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo si y solo si $X - K$ es localmente conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo. Sean $x \in X - K$ y V un abierto en X tal que $x \in V$. Como $W = V \cap (X - K)$ es abierto en X y contiene a x , tenemos que $\{x\} \in \langle W \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subset \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$. Puesto que $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo, existe $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y conexo de $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \text{Cl}_{\mathcal{H}(X)}(\mathcal{U}) \subset \langle W \rangle \cap \mathcal{H}(X)$. Fijemos $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^H(\{x\}) \cap \mathcal{H}(X) \subset \mathcal{U}$ y consideremos $T = \bigcup \text{Cl}_{\mathcal{H}(X)}(\mathcal{U})$; por [27, Lemma 1.49, p.

102], tenemos que T es un subcontinuo de X . Notemos que $x \in T \subset W \subset V$, además, si $y \in B_\epsilon(x)$ entonces $\{y\} \in B_\epsilon^H(\{x\}) \cap \mathcal{H}(X) \subset \mathcal{U}$; esto implica que $\{y\} \in \mathcal{U}$ y $y \in T$. Por lo que $x \in \text{Int}_X(T) \subset T \subset W \subset V$. Esto demuestra que $X - K$ es conexo en pequeño en x para cada $x \in X - K$, la conexidad local de $X - K$ se sigue de esto último y [11, Theorem 3.11, p. 114].

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X)\}$ y $X - K$ es localmente conexo. Sean $A \in \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ y $\mathcal{V}$ un abierto en $\mathcal{H}(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{V}$ es abierto, existen $W_1, \dots, W_m$ abiertos en X tales que $A \in \langle W_1, \dots, W_m \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subset (\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)) \cap \mathcal{V}$, nótese que podemos suponer que $W_i \subset X - K$ para cada $i = 1, \dots, m$. Dado que $X - K$ es localmente conexo, para cada $a \in A$ y cada $j \in \{1, \dots, m\}$ tales que $a \in W_j$, existe C_a^j un abierto conexo en $X - K$ tal que $a \in C_a^j \subset \text{Cl}_X(C_a^j) \subset W_j$. Por la compacidad de A , la cubierta $\{C_a^j : a \in A \cap W_j, j \in \{1, \dots, m\}\}$ de A tiene una subcubierta finita, digamos $\{C_{a_1}^{j_1}, \dots, C_{a_s}^{j_s}\}$, si dicha subcubierta es tal que $\{j_1, \dots, j_s\} \neq \{1, \dots, m\}$ agregamos elementos C_a^j hasta que esto se cumpla (esto se alcanza en a lo más $m - 1$ elecciones). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{C_{a_1}^{j_1}, \dots, C_{a_s}^{j_s}\}$ satisface $\{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, m\}$.

Si $\mathcal{H}(X) = 2^X$, el abierto $\langle C_{a_1}^{j_1}, \dots, C_{a_s}^{j_s} \rangle$ es conexo (ver [26, Proposition 4.11, p. 166]). Por lo que $\langle C_{a_1}^{j_1}, \dots, C_{a_s}^{j_s} \rangle$ es un subconjunto abierto y conexo de $\mathcal{H}(X)$ tal que $A \in \langle C_{a_1}^{j_1}, \dots, C_{a_s}^{j_s} \rangle \subset \langle W_1, \dots, W_m \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subset (\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)) \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Esto muestra que $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo.

Si $\mathcal{H}(X) = C_n(X)$, por [23, Proposition 6.1.5, p. 249], $\langle \text{Cl}_X(C_{a_1}^{j_1}), \dots, \text{Cl}_X(C_{a_s}^{j_s}) \rangle_n$ es un subcontinuo de $C_n(X)$; dicho subcontinuo contiene a A en su interior y cumple que $\langle \text{Cl}_X(C_{a_1}^{j_1}), \dots, \text{Cl}_X(C_{a_s}^{j_s}) \rangle_n \subset \langle W_1, \dots, W_m \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subset (\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)) \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Por lo tanto $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es conexo en pequeño en A , esto implica que $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo, por [11, Theorem 3.11, p. 114]. $\square$

Sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, es sabido que X es localmente conexo si y solo si $\mathcal{H}(X)$ es localmente conexo:

- cuando $\mathcal{H}(X) = 2^X$, véase [27, Theorem 1.135, p. 154];
- en el caso $\mathcal{H}(X) = C_n(X)$, véase [23, Theorem 6.1.6, p. 249];
- cuando $\mathcal{H}(X) = F_n(X)$, véase [18, Lemma 2, p. 286].

TEOREMA 3.7. Sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$.

- (1) Si X es un continuo de Peano entonces $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ es un continuo de Peano.
- (2) Si $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X)\}$ y K es un subconjunto cerrado a lo más numerable de X , el recíproco de (1) es cierto.

DEMOSTRACIÓN: La primera parte es consecuencia de [29, Proposition 8.16, p. 127], puesto que π_K es una función cerrada y continua.

Para probar (2), supongamos que $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo y K es un subconjunto cerrado a lo más numerable de X . Dado que $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K) - \{\mathcal{H}_K\}$ es localmente conexo, por (5) de la observación [1.1], $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ es localmente conexo. Por el lema [3.6], tenemos que $X - K$ es localmente conexo. De [11, Theorem 3.11, p. 114] y [29, Corollary 5.13, p. 78], X no puede ser conexo en pequeño en todos sus puntos salvo en una cantidad a lo más numerable de puntos. Como K es un

subconjunto cerrado a lo más numerable de X , tenemos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

A continuación enunciamos un lema técnico que utilizamos en el ejemplo subsecuente.

LEMA 3.8. Sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X)\}$ y $K \in C(X)$. Si W es el espacio cociente X/K , donde $p : X \rightarrow W$ es la función (natural) cociente tal que $p(K) = \{k\}$, entonces $\mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(W)/\mathcal{H}(W; \{k\})$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{H}(p) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(W)$ la función inducida por p . Notemos que $\mathcal{H}(p)(\mathcal{H}(X; K)) \subset \mathcal{H}(W; \{k\})$ ya que $p(K) = \{k\}$. Como $\pi_K : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K)$ y $\pi_{\{k\}} \circ \rho : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(W)/\mathcal{H}(W; \{k\})$ son funciones cerradas y en consecuencia funciones cociente, por [8, Theorem 4.3, p. 126], existe una función continua $\rho^* : \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K) \rightarrow \mathcal{H}(W)/\mathcal{H}(W; \{k\})$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(X) & \xrightarrow{\mathcal{H}(p)} & \mathcal{H}(W) \\ \pi_K \downarrow & & \downarrow \pi_{\{k\}} \\ \mathcal{H}(X)/\mathcal{H}(X; K) & \xrightarrow{\rho^*} & \mathcal{H}(W)/\mathcal{H}(W; \{k\}) \end{array}$$

Veamos ahora que ρ^* es un homeomorfismo. Como p es una función monótona, la función inducida $\mathcal{H}(p)$ también es monótona (véase [12, Theorem 3.2, p. 241]) y en consecuencia suprayectiva; de que el diagrama conmuta, ρ^* es suprayectiva. Ahora supongamos que $A, B \in \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X; K)$ con $A \neq B$, de que $p|_{X-K}$ es inyectiva se tiene que $\mathcal{H}(p)(A) = p(A) \neq p(B) = \mathcal{H}(p)(B)$. Finalmente, como $(\rho^*)^{-1}(\mathcal{H}(W; \{k\})) = \{\mathcal{H}(X; K)\}$ entonces ρ^* es inyectiva. Por lo tanto ρ^* es un homeomorfismo. $\square$

La hipótesis, K es un subconjunto cerrado a lo más numerable de X , en (2) del teorema [3.7] no puede ser omitida como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3.9. Sea $Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$. Consideremos $K = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\} \subset Y$ y sea k el punto correspondiente a K en el espacio cociente Y/K . Notemos que Y/K es homeomorfo a un arco y que podemos elegir el homeomorfismo $h : Y/K \rightarrow I$ tal que $h(k) = 0$. Por el lema [3.8], tenemos que $\mathcal{H}(Y)/\mathcal{H}(Y; K)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y/K)/\mathcal{H}(Y/K; \{k\})$. Además, $\mathcal{H}(Y/K)/\mathcal{H}(Y/K; \{k\})$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(I)/\mathcal{H}(I; \{0\})$, el cual es localmente conexo por el teorema [3.7]. Esto muestra que $\mathcal{H}(Y)/\mathcal{H}(Y; K)$ es localmente conexo.

4. El hiperespacio $C_n(X)/C_n(X; K)$ de gráficas finitas

En esta sección, nos enfocamos en determinar cuando una gráfica finita X satisface que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(X)/C_n(X; K)$. Antes de continuar, consideremos los siguientes subespacios de 2^X , llamados hiperespacios de conjuntos de no-corte de X :

- $NC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de no-corte de } X\}$.
- $NC^*(X) = \{A \in NC(X) : \text{Int}_X(A) = \emptyset\}$.

El lector debe tener en cuenta que aquí el hiperespacio $NC(X)$ es diferente al hiperespacio de los conjuntos de no corte que se encuentra en la literatura y que es denotado de la misma forma (ver por ejemplo [9]).

LEMA 4.1. Si $C_n(X) \approx C_n(X)/C_n(X; K)$ entonces $K \in NC(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Como $C_n(X)$ es colocalmente conexo (ver [20] Theorem 5.1, p. 245]) y es homeomorfo a $C_n(X)/C_n(X; K)$, tenemos que $C_n(X)/C_n(X; K)$ es colocalmente conexo en cada uno de sus puntos. En consecuencia, de [2] Proposition 2.4, p. 205], C_{nK} no es punto de corte de $C_n(X)/C_n(X; K)$. De esto y el corolario [3.3], $K \in NC(X)$. $\square$

En este trabajo, *dimensión* significa dimensión inductiva como se define en [13] Definition III 1, p. 24], y los símbolos $\dim(Z)$, $\dim_p(Z)$ denotan la dimensión de un espacio topológico Z y la dimensión de Z en p , respectivamente.

OBSERVACIÓN 4.2. Una consecuencia de (5) de la observación [1.1] y de [13] Corollary 2, p. 32] es la siguiente igualdad: $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X) - C_n(X; K))$.

Observemos que para cada subconjunto abierto U de X que contiene a p , $\dim_p(X) = \dim_p(U)$ (la definición de dimensión en un punto depende solo del sistema de vecindades de los puntos). Para conveniencia del lector establecemos la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 4.3.

- (1) $\dim(X) = \max\{\dim_x(X) : x \in X\}$, cuando $\dim(X)$ es finito.
- (2) $\dim_p(X) = \dim_p(U)$, para cada subconjunto abierto U de X que contiene a p .

En el resto de esta sección, el símbolo X denotará una gráfica finita, salvo que se indique lo contrario; se denota por D_K^n el conjunto

$$\{\dim_A(C_n(X)) : A \in \langle X - K \rangle_n\}.$$

Por la observación [4.3] y como $\dim(C_n(X)) < \infty$ (ver [19] Theorem 5.1, p. 270]), podemos inferir que D_K^n es un subconjunto acotado y no vacío de $\mathbb{N}$, lo que permite concluir:

OBSERVACIÓN 4.4. $\dim(\langle X - K \rangle_n) = \max D_K^n$.

Antes de calcular la dimensión del hiperespacio $C_n(X)/C_n(X; K)$, recordemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. [24] Theorem 2.4, p. 791] Las siguientes igualdades son válidas:

- (1) $\dim_A(C_n(X)) = 2n + \sum_{x \in A \cap R(X)} (\text{ord}_X(p) - 2)$, para cada $A \in C_n(X)$;
- (2) $\dim_X(C_n(X)) = \dim(C_n(X))$.

LEMA 4.6. $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \max D_K^n \leq \dim(C_n(X))$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la desigualdad es trivial, basta probar la igualdad. Por las observaciones [4.2] y [4.4] tenemos que

$$\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X) - C_n(X; K)) = \dim(\langle X - K \rangle_n) = \max D_K^n.$$

$\square$

COROLARIO 4.7. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

- (1) Si $K \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) < \dim(C_n(X))$.
- (2) Si $K \subset E(X)$, entonces $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X))$.

DEMOSTRACIÓN: Probamos (1), sea $p \in K \cap R(X)$. Para cada $A \in C_n(X) - C_n(X; K)$ se tiene que $p \notin A$, por el teorema 4.5

$$\begin{aligned} \dim_A(C_n(X)) &= 2n + \sum_{x \in A \cap R(X)} (\text{ord}_X(x) - 2) \\ &< 2n + \sum_{x \in R(X)} (\text{ord}_X(x) - 2) = \dim_X(C_n(X)) = \dim(C_n(X)). \end{aligned}$$

Por lo que $\dim(C_n(X) - C_n(X; K)) < \dim(C_n(X))$ y en consecuencia, por la observación 4.2

$$\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X) - C_n(X; K)) < \dim(C_n(X)).$$

Ahora probaremos (2), como $K \subset E(X)$, existe $A \in C(X)$ tal que $A \cap E(X) = \emptyset$ y $R(X) \subset A$. Por el teorema 4.5 $\dim(C_n(X)) = \dim_X(C_n(X)) = \dim_A(C_n(X))$. Como $C_n(X) - C_n(X; K)$ es abierto, (2) de la observación 4.3 implica que $\dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(X) - C_n(X; K))$. Con lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dim(C_n(X)) &= \dim_A(C_n(X)) = \dim_A(C_n(X) - C_n(X; K)) \\ &\leq \dim(C_n(X) - C_n(X; K)) \\ &= \dim(C_n(X)/C_n(X; K)) \leq \dim(C_n(X)). \end{aligned}$$

De esto se tiene que $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X))$. $\square$

Dado un árbol X diferente de un arco y de un m -odo simple, en [7] p. 3] los autores construyen un subárbol $T(X) \subset X$ el cual es la unión de todas las aristas de X que no tienen puntos en $E(X)$; este árbol se considera en el siguiente resultado.

TEOREMA 4.8. *Sea X un árbol diferente de un arco y de un m -odo simple. Si $K \cap T(X) \neq \emptyset$ entonces $\dim(C(X)/C(X; K)) < \dim(C(X))$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $k \in K \cap T(X)$ y consideremos dos casos:

Caso 1). Si $k \in R(X)$, por (1) del corolario 4.7, tenemos que $\dim(C(X)/C(X; K)) < \dim(C(X))$.

Caso 2). Si $k \notin R(X)$, existen $p, q \in R(X)$ tales que k es un punto de corte de la única arista A en X que tiene como vértices a p y q , y además $A \subset T(X)$. Notemos que $X - \{k\} = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son las componentes de $X - \{k\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in X_1$ y $q \in X_2$. Por otro lado, para cada $B \in C(X) - C(X; K)$ se tiene que $B \subset X_i$ para algún $i = 1, 2$. Esto implica que $p \notin B \cap R(X)$ ó $q \notin B \cap R(X)$, y del teorema 4.5 tenemos que $\dim_B(C(X)) < \dim_X(C(X)) = \dim(C(X))$. Por lo tanto $\dim(C(X)/C(X; K)) < \dim(C(X))$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que si en el teorema anterior cambiamos C por C_n , con $n \geq 2$, éste puede no cumplirse.

EJEMPLO 4.9. *Sean $n \geq 2$ y X un continuo homeomorfo a la letra mayúscula H , i.e.*

$$X := \{(\epsilon, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, \epsilon \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Para el conjunto $K = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$, nótese que $\{(0, -1)\}, \{(0, 0)\}, \{(0, 0), (1, 0)\} \in \langle X - K \rangle_n$ por lo que $D_n^K = \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ y $\max D_n^K = 2n + 2$. Por tanto, del lema 4.6, $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = 2n + 2 = \dim(C_n(X))$ para toda $n \geq 2$.

Dado un continuo X , denotamos al hiperespacio $\{A \in NC(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}$ por $NC_R(X)$.

TEOREMA 4.10. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) Si $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$, entonces $K \in NC_R(X)$.
- (2) Si $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$ para cada $K \in NC(X)$, entonces X no tiene puntos de ramificación.
- (3) Si $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$ para cada $K \in NC(X)$, entonces $X \approx I$ o $X \approx S^1$.

DEMOSTRACIÓN: (1) es consecuencia del lema 4.1 y la contrarecíproca de (1) del corolario 4.7. Para la prueba de (2), supongamos que $p \in R(X)$ y notemos que hay dos casos para $\{p\}$:

Caso 1). $\{p\} \in NC(X)$. En este caso elegimos $K = \{p\}$, por (1) del corolario 4.7 se tiene que $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) < \dim(C_n(X))$, lo cual es una contradicción.

Caso 2). $\{p\} \notin NC(X)$. Como X es localmente conexo, cada componente de $X - \{p\}$ es abierta, elegimos $K = X - C$ donde C es una componente de $X - \{p\}$. Notemos que K es una subgráfica de X tal que $p \in K$ y $K \in NC(X)$, usando nuevamente (1) del corolario 4.7 se tiene que $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) < \dim(C_n(X))$, lo cual es una contradicción. De ambos casos, se concluye que $R(X) = \emptyset$.

Finalmente, probaremos (3). Por la afirmación (2) se tiene que $R(X) = \emptyset$, esto implica que $\text{ord}_X(x) \leq 2$ para cada $x \in X$, por [29, Proposition 9.5, p. 142] se concluye la prueba. $\square$

Dado un espacio topológico Y , el *cono sobre Y* es el espacio cociente $Y \times [0, 1]/Y \times \{1\}$ el cual será denotado por $\text{Cono}(Y)$; el punto $Y \times \{1\}$ del $\text{Cono}(Y)$ es llamado *vértice del $\text{Cono}(Y)$* ; el subconjunto $Y \times \{0\}$ del $\text{Cono}(Y)$ es llamado *base del $\text{Cono}(Y)$* . Denotamos el vértice y la base del $\text{Cono}(Y)$ por v_Y y $B(Y)$, respectivamente; los puntos de $\text{Cono}(Y) - \{v_Y\}$ se denotarán por (y, s) para cada $y \in Y$ y cada $s \in [0, 1)$. La *suspensión sobre Y* , denotada por $\Sigma(Y)$, es el espacio cociente que se obtiene de $Y \times [-1, 1]$ al identificar a puntos (diferentes) $Y \times \{-1\}$ y $Y \times \{1\}$, estos puntos son llamados *vértices de $\Sigma(Y)$* y son denotados por v_{-1} y v_1 .

LEMA 4.11. *Supongamos que $X = \text{Cone}(Y)$, donde Y es un espacio métrico y compacto. Para cada $x \in Y$, elige $k_x \in [0, 1)$ tal que $K := \bigcup_{x \in Y} (\{x\} \times [0, k_x])$ es cerrado en X . Entonces*

$$\mathcal{H}(X; K) \approx \bigcup_{x \in Y} (\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : \mathcal{H}(X; B(Y)) \times I \rightarrow \mathcal{H}(X)$ una función definida por $F(A, t) = A^t = \{(y, (1-t)s + t) : (y, s) \in A\}$; la demostración de [1, Theorem 5.5, p. 356] garantiza que $F|_{\mathcal{H}(X; B(Y)) \times [0, 1]}$ es inyectiva. Puesto que $\bigcup_{x \in Y} (\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]) \subset \mathcal{H}(X; B(Y)) \times [0, 1]$ y

$$F\left(\bigcup_{x \in Y} (\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x])\right) = \bigcup_{x \in Y} F(\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]),$$

basta probar que $\bigcup_{x \in Y} F(\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]) = \mathcal{H}(X; K)$. Sean $x \in Y$ y $(A, t) \in \mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]$. Como $(x, 0) \in A$ se tiene que $(x, t) \in F(A, t)$, en consecuencia $F(A, t) \in \mathcal{H}(X; K)$ ya que $(x, t) \in \{x\} \times [0, k_x] \subset K$. Esto prueba que $F(\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]) \subset \mathcal{H}(X; K)$, para cada $x \in Y$.

Por otro lado, sea $B \in \mathcal{H}(X; K)$ y consideremos

$$I_B = \{s \in [0, 1] : \text{existe } x \in Y \text{ tal que } (x, s) \in B \cap K\}.$$

Como $B \cap K$ es compacto y no vacío en X , existen $s_B = \min I_B$ y $z \in Y$ tales que $(z, s_B) \in B \cap K$. Nótese que $0 \leq s_B \leq k_z < 1$. Ahora, si definimos B^{-1} como el conjunto $\{(x, (s - s_B)/(1 - s_B)) : (x, s) \in B\}$, entonces $B^{-1} \in \mathcal{H}(X; \{(z, 0)\})$ y $F(B^{-1}, s_B) = B$. Por lo que $\mathcal{H}(X; K) \subset F(\bigcup_{x \in Y} (\mathcal{H}(X; \{(x, 0)\}) \times [0, k_x]))$, esto concluye la prueba del lema. $\square$

Dado un continuo X y $K_1, \dots, K_m \in 2^X$, el símbolo $\mathcal{H}(X; K_1, \dots, K_m)$ denota el hiperespacio $\{A \in \mathcal{H}(X) : A \cap K_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$.

COROLARIO 4.12. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) Si $K \in C(I; \{0\}) \cup C(I; \{1\})$, entonces $C_n(I; K) \approx C_n(I; \{0\}) \times K$.
- (2) Sea $K \in C_2(I; \{0\}, \{1\})$ y supongamos que $K = K_0 \cup K_1$, donde $j \in K_j$ y $K_j \in C(I)$ para cada $j \in \{0, 1\}$, entonces $C_n(I; K) \approx (C_n(I; \{0\}) \times K_0) \cup (C_n(I; \{1\}) \times K_1)$. Además, si K_0 y K_1 son conjuntos no degenerados y ajenos, entonces $C_n(I; K) \approx C_n(I; \{0, 1\}) \times [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\text{Cono}(\{0\}) \approx I \approx \text{Cono}(\{1\})$, la prueba de (1) es consecuencia del lema 4.11.

Para probar (2), supongamos que $K_0 = [0, k_0]$ y $K_1 = [k_1, 1]$ con $0 \leq k_0 < k_1 \leq 1$. Notemos que $I \approx \text{Cono}(Y)$, donde $Y = \{0, 1\}$ es dotado con la topología discreta y $v_Y = \frac{k_0 + k_1}{2}$. Por el lema 4.11 se concluye la primera parte. Por otro lado, para la segunda parte, reparametricemos el $\text{Cono}(Y)$ de tal manera que $K_0 = \{0\} \times [0, k_0]$ y $K_1 = \{1\} \times [0, k_0]$. Por (2) de la observación 1.1 tenemos que $C_n(I; \{0\}) \cup C_n(I; \{1\}) = C_n(I; \{0, 1\})$, con esto se tiene

$$\begin{aligned} (C_n(I; \{0\}) \times [0, k_0]) \cup (C_n(I; \{1\}) \times [0, k_0]) &= (C_n(I; \{0\}) \cup C_n(I; \{1\})) \times [0, k_0] \\ &= C_n(I; \{0, 1\}) \times [0, k_0]. \end{aligned}$$

De esta igualdad y el lema 4.11 se concluye que $C_n(I; K) \approx C_n(I; \{0, 1\}) \times [0, k_0]$, completando así la prueba de (2). $\square$

TEOREMA 4.13. *Sea X un árbol. Si $n = 1, 2$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$, para todo $K \in NC(X)$.
- (2) $X \approx I$.

Además, (1) implica (2), para cada $n \geq 3$.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que (1) implica (2), para cada $n \geq 1$, aplicando directamente (3) del teorema 4.10 y usando que X es un árbol.

Veamos que (2) implica (1), para $n = 1, 2$. Supongamos que $X = I$ y notemos que $NC(I) = C(I; \{0\}) \cup C(I; \{1\}) \cup C_2(I; \{0\}, \{1\})$. Es bien conocido que $C(I)$

es homeomorfo a una 2-celda (ver [15, Example 5.1, p. 33]) y por [14, Lemma 2.2, p. 349] $C_2(I) \approx I^4$. Observemos que $C(I; \{1\})$ y $C(I; \{0\})$ son arcos tales que $C(I; \{0\}) \cap C(I; \{1\}) = \{I\}$, de esto último $C(I; \{0\}) \cup C(I; \{1\}) = C(I; \{0, 1\})$ es un arco. En la demostración de [14, Lemma 2.2, p. 349] está probado que $C_2(I; \{1\})$ es homeomorfo al cono sobre I^2 y por lo tanto a una 3-celda. Esto mismo es cierto para $C_2(I; \{0\})$, ya que es homeomorfo a $C_2(I; \{1\})$. Ahora, como $C_2(I; \{0\}) \cap C_2(I; \{1\}) = C_2(I; \{0\}, \{1\})$ y por (2) de la observación 1.1 $C_2(I; \{0\}) \cup C_2(I; \{1\}) = C_2(I; \{0, 1\})$, nuevamente de la prueba de [14, Lemma 2.2, p. 349] $C_2(I; \{0, 1\})$ puede ser obtenido al pegar dos conos por su base común $C_2(I; \{0\}, \{1\}) \approx I^2$, por lo que $C(I; \{0, 1\})$ es una 3-celda.

Puesto que $\sum(I^m) \approx I^{m+1}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, usando el corolario 4.12 para $n = 1, 2$, tenemos que

- $C_n(I)/C_n(I; K) \approx \sum(C_n(I; \{0\})) \approx I^{2n}$, si $K \in C(I; \{0\}) \cup C(I; \{1\})$;
- $C_n(I)/C_n(I; K) \approx \sum(C_n(I; \{0, 1\})) \approx I^{2n}$, si $K \in C_2(I; \{0\}, \{1\})$.

□

PREGUNTA 4.14. ¿Es cierto que (2) implica (1) en el teorema 4.13 para $n \geq 3$?

TEOREMA 4.15. Sea X una gráfica finita la cual no es un árbol. Las siguientes afirmaciones son equivalentes, para $n = 1$.

- (1) $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$, para cada $K \in NC(X)$.
- (2) $X \approx S^1$.

Además, (1) implica (2) para cada $n \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN: De (3) del teorema 4.10 es claro que (1) implica (2) para cada $n \geq 1$.

Para probar que (2) implica (1), supongamos que $X \approx S^1$ y $n = 1$. Notemos que X/K es homeomorfo a S^1 , para cada $K \in NC(X)$. Sean $h : X/K \rightarrow S^1$ un homeomorfismo y $p \in S^1$ el punto correspondiente a K bajo h . Por el lema 3.8 tenemos que $C(X)/C(X; K) \approx C(S^1)/C(S^1; \{p\})$; del modelo geométrico de $C(S^1)$ (ver [15, Example 5.2, p.35]) es fácil obtener que $C(S^1)/C(S^1; \{p\}) \approx C(X)$. Por lo que $C(X)/C(X; K) \approx C(X)$. □

PREGUNTA 4.16. ¿Es cierto que (2) implica (1) en el teorema 4.15 para $n \geq 2$?

Antes de continuar, consideremos los siguientes conjuntos que servirán para el resto del trabajo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2n} &= \{A \in C_n(X) : \dim_A(C_n(X)) = 2n\}, \\ \mathcal{D}_X &= \{A \in C_n(X) : \dim_A(C_n(X)) = \dim_X(C_n(X))\}, \\ \mathcal{D}_{2n}^K &= \{A \in C_n(X)/C_n(X; K) - \{C_{nK}\} : \dim_A(C_n(X)/C_n(X; K)) = 2n\}, \\ \mathcal{D}_X^K &= \{A \in C_n(X)/C_n(X; K) : \dim_A(C_n(X)/C_n(X; K)) = \mathfrak{X}_K\}, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{X}_K = \dim_{\pi_K(X)}(C_n(X)/C_n(X; K))$.

OBSERVACIÓN 4.17. $\mathcal{D}_{2n}$ y $\mathcal{D}_X$ son subconjuntos de $C_n(X)$; $\mathcal{D}_{2n}^K$ y $\mathcal{D}_X^K$ son subconjuntos de $C_n(X)/C_n(X;K)$, notemos que todos estos conjuntos son no vacíos.

El siguiente resultado muestra algunas propiedades de los subespacios $\mathcal{D}_{2n}$ y $\mathcal{D}_X$.

LEMA 4.18. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) Si $A \in C_n(X)$ entonces, $A \cap R(X) = \emptyset$ si y solo si $A \in \mathcal{D}_{2n}$.
- (2) Si $U = X - R(X)$ entonces $\langle U \rangle_n = \mathcal{D}_{2n}$.
- (3) Si $A \in C_n(X)$ entonces, $R(X) \subset A$ si y solo si $A \in \mathcal{D}_X$.
- (4) $\mathcal{D}_X$ es un subconjunto cerrado, arco conexo y no degenerado de $C_n(X)$.

DEMOSTRACIÓN: La prueba de las primeras tres afirmaciones son una consecuencia del teorema 4.5.

Para la prueba de (4), consideremos $z \in X$ tal que $z \in E(X)$ o z está en un lazo de X , y para el cual existe $\epsilon > 0$ con $B_\epsilon(z) \cap ((E(X) - \{z\}) \cup R(X)) = \emptyset$. Como $G = X - B_\epsilon(z)$ es una subgráfica de X y $R(X) \subset G$, tenemos que $G \in \mathcal{D}_X$, es decir, $\mathcal{D}_X$ es un conjunto no degenerado.

Ahora, veamos que $\mathcal{D}_X$ es arco conexo. Sea $A \in \mathcal{D}_X$. Por [15, Theorem 15.3, p. 120] existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = X$. De (3) se tiene que $R(X) \subset A$, por lo que $R(X) \subset \alpha(t)$ para toda $t \in [0, 1]$, es decir, $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{D}_X$, esto concluye la arco conexidad de $\mathcal{D}_X$.

Para terminar la prueba, sea $B \notin \mathcal{D}_X$. Nuevamente por (3) existe $r \in R(X) - B$; con lo que $X - \{r\}$ es abierto en X que contiene a B . Así $B \in \langle X - \{r\} \rangle_n \subset C_n(X) - \mathcal{D}_X$ y $\langle X - \{r\} \rangle_n$ es abierto en $C_n(X)$. Por lo tanto $\mathcal{D}_X$ es cerrado en $C_n(X)$. $\square$

Es bien conocido que una gráfica finita X es un arco o una curva cerrada simple si y solo si $R(X) = \emptyset$ (ver por ejemplo [29, Proposition 9.5, p. 142]), usando este hecho y el lema 4.18 se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 4.19. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{2n}$ si y solo si $X \approx I$ o $X \approx S^1$.
- (2) $R(X) \neq \emptyset$ si y solo si $\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{2n} = \emptyset$.

LEMA 4.20. Sean X un continuo y $\{C_1, \dots, C_r\}$ una familia finita de subconjuntos conexos, no vacíos y disjuntos a pares de X . Si $r \leq n$ entonces el conjunto $\langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$ es un subconjunto conexo de $C_n(X)$.

DEMOSTRACIÓN: De [25, Lemma 1, p. 204] se tiene que $W = \langle C_1, \dots, C_r \rangle_n \cap F_n(X)$ es un subconjunto conexo de $C_n(X)$ contenido en $\langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$. Sea $A \in \langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$ y supongamos que $A_1, \dots, A_m$ son las componentes de A . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ elegimos $a_i \in A_i$, nótese que $r \leq m \leq n$ y $\{a_1, \dots, a_m\} \in \langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$. Probaremos que A está en la misma componente que W , para esto por [15, Theorem 15.3, p. 120] existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $\alpha(1) = A$, más aún $\alpha([0, 1]) \subset \langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$. Por lo que $W \cup \alpha([0, 1])$ es un subconjunto conexo de $\langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$ que contiene a A . Por lo tanto $\langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$ es subconjunto conexo en $C_n(X)$. $\square$

PREGUNTA 4.21. ¿El conjunto $\langle C_1, \dots, C_r \rangle_n$ es conexo, donde $r \leq n$ y $C_1, \dots, C_r$ son subconjuntos conexos de X ?

LEMA 4.22. Sea $r \leq n$. Si $e_1, \dots, e_r$ son aristas de X entonces el conjunto

$$\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$$

es una componente de $\mathcal{D}_{2n}$. Además, cada componente de $\mathcal{D}_{2n}$ tiene esta forma.

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 4.20, $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ es conexo y por (1) del lema 4.18, $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n \subset \mathcal{D}_{2n}$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $\mathcal{D}_{2n}$ que contiene a $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$. Fijemos $B \in \langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$. Como $B \in \langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n \subset \mathcal{C}$ se tiene que $B \cap \text{Int}_X(e_i) \neq \emptyset$, $B \subset \bigcup_{i=1}^r \text{Int}_X(e_i) \subset \bigcup \mathcal{C}$ y en consecuencia $\bigcup \mathcal{C} \cap \text{Int}_X(e_i) \neq \emptyset$, para cada $i = 1, \dots, r$. Puesto que $\mathcal{C} \cap C_r(X) \neq \emptyset$, por [6, Lemma 2.1, p. 818] tenemos que $\bigcup \mathcal{C}$ tiene a lo más r componentes; supongamos que $C_1, \dots, C_s$ son las componentes de $\bigcup \mathcal{C}$, donde $s \leq r$.

Si $s < r$ existirían una componente C_k y dos aristas (diferentes) e_i, e_j tales que C_k contiene a $\text{Int}_X(e_i)$ y $\text{Int}_X(e_j)$. Como $\text{Int}_X(e_i) \cap \text{Int}_X(e_j) = \emptyset$, se tiene que $C_k \cap R(X) \neq \emptyset$. Por lo que existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $R(X) \cap D \neq \emptyset$, del lema 4.5 tenemos que $\dim_D(C_n(X)) > 2n$, lo cual es una contradicción. Así $\bigcup \mathcal{C}$ tiene exactamente r componentes.

Puesto que $\text{Int}_X(e_i)$ es una componente de $X - R(X)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C_i \subset \text{Int}_X(e_i)$, para cada $i = 1, \dots, r$. Esto implica que $\mathcal{C} \subset \langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ y también que $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ es una componente de $\mathcal{D}_{2n}$.

Para finalizar la prueba, basta notar que la unión de todos los conjuntos de la forma $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ es $\mathcal{D}_{2n}$. $\square$

El símbolo $\mathcal{E}(X)$ denotará al conjunto de todas las aristas de la gráfica X .

En general, dado un espacio topológico Z , denotamos por $\pi_0(Z)$ el conjunto de todas las componentes de Z .

COROLARIO 4.23. Si X tiene m aristas entonces $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n})| = \sum_{i=1}^n \binom{m}{i}$. Consecuentemente, si $m \leq n$ entonces $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n})| = 2^m - 1$.

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 4.22, el conjunto $\mathcal{D}_{2n}$ tiene tantas componentes como número de elecciones de a lo más n elementos de $\mathcal{E}(X)$. Nótese que hay $\binom{m}{i}$ elecciones de exactamente i elementos, lo que permite concluir la prueba. $\square$

TEOREMA 4.24. Sea X es un árbol. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) X es un m -odo simple.
- (2) $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$, para cada $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n})$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que X es un m -odo simple si y solo si $|R(X)| = 1$, probaremos que $|R(X)| = 1$ si y solo si $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$, para cada $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n})$.

Para probar esto, consideremos $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n})$, por el lema 4.22, $\mathcal{C}$ es de la forma $\langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$, donde $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{E}(X)$ y $1 \leq r \leq n$. Sea $v \in R(X)$. Como $|R(X)| = 1$ se tiene que $v \in e$ para cada arista $e \in \mathcal{E}(X)$, esto implica que $\{v\} \in \langle e_1, \dots, e_r \rangle_n$ y $\{v\} \in \mathcal{D}_X$. Por lo que $\{v\} \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X$.

Recíprocamente, supongamos que $|R(X)| > 1$. Como X es un árbol, $E(X) \neq \emptyset$; elegimos $e \in \mathcal{E}(X)$ tal que $e \cap E(X) \neq \emptyset$. Por el lema 4.22, $\langle \text{Int}_X(e) \rangle_n$ es una componente de $\mathcal{D}_{2n}$. Puesto que $|e \cap R(X)| = 1$, si $A \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\langle \text{Int}_X(e) \rangle_n)$, entonces $|A \cap R(X)| \leq 1$.

Por lo que $\dim_A(C_n(X)) < \dim_X(C_n(X))$ y por tanto $\text{Cl}_{C_n(X)}(\langle \text{Int}_X(e) \rangle_n) \cap \mathcal{D}_X = \emptyset$. $\square$

En el teorema 4.24, la hipótesis: X es un árbol, no puede ser omitida en (2) implica (1), ya que si X es homeomorfo a la letra griega θ entonces $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$, para cada $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n})$.

A continuación, enfocamos nuestra atención en las colecciones $\mathcal{D}_{2n}^K$ y $\mathcal{D}_X^K$ como subespacios de $C_n(X)/C_n(X; K)$.

Recordemos que $\pi_K(C_n(X; K)) = \{C_{nK}\}$, por la observación 4.2 se tiene la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 4.25. *Las igualdades siguientes son válidas:*

- (1) $\dim_{C_{nK}}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim(C_n(X)/C_n(X; K))$.
- (2) $\dim_{\pi_K(A)}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \dim_{C_{nK}}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \mathfrak{X}_K$, para todo $A \in C_n(X; K)$.

PROPOSICIÓN 4.26. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) Si $X \approx I$ o $X \approx S^1$, entonces $\mathfrak{X}_K = 2n$.
- (2) Si $X \not\approx I$, $X \not\approx S^1$ y $K \in 2_{R(X)}^X$, entonces $\mathfrak{X}_K = 2n$.

DEMOSTRACIÓN: En cualquier caso, se tiene que $\dim(C_n(X)/C_n(X; K)) = 2n$ por el lema 4.6, así la observación 4.25 permite concluir que $\mathfrak{X}_K = 2n$. $\square$

LEMA 4.27. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

- (1) Si $U = X - (R(X) \cup K)$, entonces $\pi_K(\langle U \rangle_n) = \mathcal{D}_{2n}^K$. Más aún, $\pi_K(\mathcal{D}_{2n} - C_n(X; K)) = \mathcal{D}_{2n}^K$.
- (2) Si $\mathcal{D}_X - C_n(X; K) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D}_X^K$ es un subconjunto no degenerado de $C_n(X)/C_n(X; K)$ y $\pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K) = \mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos (1), como $U \subset X - R(X)$, por (2) del lema 4.18 se tiene que $\langle U \rangle_n \subset \mathcal{D}_{2n}$. Notemos que $\langle U \rangle_n = \mathcal{D}_{2n} - C_n(X; K)$, esto implica que $\pi_K(\langle U \rangle_n) \subset \mathcal{D}_{2n}^K$. Para probar la otra contención, sea $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_{2n}^K$ y notemos que $\mathcal{D}_{2n}^K \subset C_n(X)/C_n(X; K) - \{C_{nK}\}$. Por (5) de la observación 1.1 tenemos que $\pi_K^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathcal{D}_{2n} - C_n(X; K) = \langle U \rangle_n$, con esto la prueba de (1) está completa.

Para probar (2), sea $A \in \mathcal{D}_X - C_n(X; K)$. Como $\dim_A(C_n(X)) = \dim_X(C_n(X))$, por (5) de la observación 1.1 se tiene que $\dim_{\pi_K(A)}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \mathfrak{X}_K$. De esta manera, $C_{nK}, \pi_K(A) \in \mathcal{D}_X^K$, es decir, $\mathcal{D}_X^K$ es un subconjunto no degenerado de $C_n(X)/C_n(X; K)$. Probemos la segunda parte de (2), notemos que para cada $A \in \mathcal{D}_X$ se tiene que $\dim_{\pi_K(A)}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \mathfrak{X}_K$, esto implica que $\pi_K(\mathcal{D}_X) \subset \mathcal{D}_X^K$; por (2) de la observación 4.25, $\pi_K(C_n(X; K)) \subset \mathcal{D}_X^K$. En consecuencia $\mathcal{D}_X \cup C_n(X; K) \subset \pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K)$. Ahora, si $A \in \pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K)$, existe $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_X^K$ tal que $\pi_K(A) = \mathcal{B}$. Si $\mathcal{B} \neq C_{nK}$, por (5) de la observación 1.1 $A \in C_n(X) - C_n(X; K)$ y $\dim_A(C_n(X)) = \dim_{\mathcal{B}}(C_n(X)/C_n(X; K)) = \mathfrak{X}_K$, entonces $A \in \mathcal{D}_X$. En el otro caso, si $\mathcal{B} = C_{nK}$, entonces $A \in C_n(X; K)$. Por lo tanto $\pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K) = \mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)$. $\square$

LEMA 4.28. *Si $K \subset E(X)$, entonces las siguientes se cumplen:*

- (1) $\mathfrak{X}_K = \dim_X(C_n(X))$.
- (2) $\mathcal{D}_X^K$ es un subconjunto no degenerado de $C_n(X)/C_n(X; K)$ y $\pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K) = \mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)$.

DEMOSTRACIÓN: La igualdad en (1) es consecuencia de (2) del corolario 4.7 y la observación 4.25.

Para probar (2), fijemos $\epsilon > 0$ tal que $N(K, \epsilon) \cap R(X) = \emptyset$ y $N(K, \epsilon) \cap E(X) = K$. Como $Y = X - N(K, \epsilon)$ es un elemento de $C_n(X) - C_n(X; K)$ y $R(X) \subset Y$ entonces $\dim_Y(C_n(X)) = \dim_X(C_n(X))$, en consecuencia $Y \in \mathcal{D}_X - C_n(X; K)$. La prueba ahora se sigue de (2) del lema 4.27. $\square$

TEOREMA 4.29. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $X \approx I$ o $X \approx S^1$.
- (2) $\mathcal{D}_{2n}^K \subset \mathcal{D}_X^K$, para cada K .

DEMOSTRACIÓN: Veamos (1) implica (2). Supongamos que $X \approx I$ o $X \approx S^1$, por el corolario 4.19, $\mathcal{D}_{2n} = \mathcal{D}_X$. Por lo que $\mathcal{D}_{2n} - C_n(X; K) \subset \mathcal{D}_X$, implicando que $\pi_K(\mathcal{D}_{2n} - C_n(X; K)) \subset \pi_K(\mathcal{D}_X) \subset \mathcal{D}_X^K$. Así de (1) del lema 4.27, se tiene que $\mathcal{D}_{2n}^K \subset \mathcal{D}_X^K$.

Recíprocamente, supongamos que X no es un arco, ni una curva cerrada simple, es decir, $R(X) \neq \emptyset$. Consideremos $K \in 2^X$ tal que $K \cap R(X) = \emptyset$ y sea $v \in R(X)$. Notemos que $\{v\} \in C_n(X) - C_n(X; K)$, del teorema 4.5, tenemos que $\dim_{\{v\}}(C_n(X)) > 2n$. De esto y (5) de la observación 1.1, se concluye que $\dim_{\pi_K(\{v\})}(C_n(X)/C_n(X; K)) > 2n$. Por lo que $\dim_{\mathcal{A}}(C_n(X)/C_n(X; K)) > 2n$, para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{D}_X^K$, lo cual implica $\mathcal{D}_{2n}^K \cap \mathcal{D}_X^K = \emptyset$. $\square$

La demostración del siguiente teorema, se sigue de hacer una ligera modificación en la prueba del lema 4.22.

TEOREMA 4.30. *Si $e_1, \dots, e_r \in \pi_0(X - (R(X) \cup K))$ con $r \leq n$, entonces $\pi_K(\langle e_1, \dots, e_r \rangle_n)$ es una componente de $\mathcal{D}_{2n}^K$. Más aún, toda componente de $\mathcal{D}_{2n}^K$ tiene esta forma.*

Esencialmente, la misma prueba del corolario 4.23 funciona para la primera parte del siguiente resultado, la segunda parte es una consecuencia trivial de la primera.

COROLARIO 4.31. *Si $|\pi_0(X - (R(X) \cup K))| = m$, entonces $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n}^K)| = \sum_{i=1}^n \binom{m}{i}$. Consecuentemente, si $m \leq n$ entonces $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n}^K)| = 2^m - 1$.*

TEOREMA 4.32. *Sea $K \subset E(X)$. Si $\mathcal{C}$ es una componente $2n$ -dimensional de $C_n(X) - C_n(X; K)$, entonces*

$$Cl_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap (C_n(X; K) \cup \mathcal{D}_X) = \emptyset \text{ si y solo si } Cl_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una componente $2n$ -dimensional de $C_n(X) - C_n(X; K)$ y supongamos que $Cl_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap (C_n(X; K) \cup \mathcal{D}_X) = \emptyset$. Puesto que $\pi_K|_{C_n(X) - C_n(X; K)}$ es un homeomorfismo, se tiene que $Cl_{C_n(X)}(\mathcal{C}) = \pi_K^{-1}(Cl_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})))$. Como $K \subset E(X)$, por (2) del lema 4.28 se sigue que $\pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K) = \mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)$. De las dos

igualdades previas tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap (C_n(X; K) \cup \mathcal{D}_X) &= \pi_K^{-1}(\text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C}))) \cap \pi_K^{-1}(\mathcal{D}_X^K) \\ &= \pi_K^{-1}(\text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K). \end{aligned}$$

Por lo que $\text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K = \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K = \emptyset$, probaremos que $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X$ y $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap C_n(X; K)$ son conjuntos vacíos.

Si $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$, como

$$\begin{aligned} \pi_K(\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X) &\subset \pi_K(\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})) \cap \pi_K(\mathcal{D}_X) \\ &\subset \text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K, \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, si $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap C_n(X; K) \neq \emptyset$ entonces $C_{n_K} \in \pi_K(\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})) \subset \text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C}))$. Por la observación 4.25 y el lema 4.28 tenemos que $C_{n_K} \in \text{Cl}_{C_n(X)/C_n(X; K)}(\pi_K(\mathcal{C})) \cap \mathcal{D}_X^K$, lo cual es una contradicción. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

TEOREMA 4.33. *Supongamos que X es diferente de una curva cerrada simple.*

Si $C_n(X)/C_n(X; K) \approx C_n(X)$, para cada $K \in NC_R(X)$, entonces X es un árbol.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X tiene m aristas, es decir, $|\mathcal{E}(X)| = m$; por el corolario 4.23 se tiene $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n})| = \sum_{i=1}^n \binom{m}{i}$.

Por otro lado, supongamos que existe Y un subcontinuo de X tal que Y es homeomorfo a S^1 . Elegimos $p \in \text{Int}_X(e) \subset e \subset Y$, donde e es una arista de X , notemos que $K = \{p\} \in NC_R(X)$ y $|\pi_0(X - (R(X) \cup K))| = m+1$. Por el corolario 4.31 tenemos que $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n}^K)| = \sum_{i=1}^n \binom{m+1}{i}$; así $|\pi_0(\mathcal{D}_{2n})| \neq |\pi_0(\mathcal{D}_{2n}^K)|$ y en consecuencia $C_n(X)/C_n(X; K) \not\approx C_n(X)$. $\square$

5. El caso $|R(X)| = 2$

En esta sección, X denotará un árbol con m aristas y dos puntos de ramificación, v_1, v_2 , cuyo orden es p y q , respectivamente. Notemos que bajo estas condiciones $m \geq 5$. Los siguientes subconjuntos de $\mathcal{E}(X)$: $\mathcal{E}_1 = \{e \in \mathcal{E}(X) : v_1 \in e\}$ y $\mathcal{E}_2 = \{e \in \mathcal{E}(X) : v_2 \in e\}$ cumplen las siguientes condiciones:

- (1) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ y $|\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2| = 1$.
- (2) $|\mathcal{E}_1| + |\mathcal{E}_2| - |\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2| = m$, es decir, $(p + q - 1 = m)$.

De acuerdo al lema 4.22, se establece la siguiente proposición que permite ubicar las componentes de $\mathcal{D}_{2n}$ (en $C_n(X)$) respecto a $\mathcal{D}_X$, donde suponemos que $1 \leq r \leq n$ y $0 \leq s < n$.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea $e_0 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Para cada $j \in \{1, 2\}$ sea $\mathcal{E}_j^* = \mathcal{E}_j - \{e_0\}$.*

- (1) *Si $\mathcal{C} = \langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ con $e_i \in \mathcal{E}_1^*$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X = \emptyset$. Una afirmación similar, se cumple para $\mathcal{E}_2^*$.*
- (2) *Si $\mathcal{C} = \langle \text{Int}_X(e_0), \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_s) \rangle_n$ con $e_i \in \mathcal{E}_1^* \cup \mathcal{E}_2^*$, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, entonces $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$.*

(3) Supóngase que $n \geq 2$ y $\mathcal{C} = \langle \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_r) \rangle_n$ con $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{E}_1^* \cup \mathcal{E}_2^*$. Si $\{e_1, \dots, e_r\} \cap \mathcal{E}_1^* \neq \emptyset \neq \{e_1, \dots, e_r\} \cap \mathcal{E}_2^*$ entonces $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos (1), si $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{E}_1^*$, nótese que $(\bigcup_{i=1}^r e_i) \cap \{v_2\} = \emptyset$. Así, para cada $A \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C})$, como $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) = \langle e_1, \dots, e_r \rangle_n$, se tiene que $A \cap \{v_2\} = \emptyset$; esto implica que $R(X) \not\subset A$ y en consecuencia, por (3) del lema 4.18, $A \notin \mathcal{D}_X$. Por lo que $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X = \emptyset$.

La prueba de (2) es trivial, ya que $e_0 \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X$.

Para probar (3), sin pérdida de generalidad supongamos que $e_1, \dots, e_{k-1} \in \mathcal{E}_1^*$ y $e_k, \dots, e_r \in \mathcal{E}_2^*$; bajo este supuesto $(\bigcup_{i=1}^{k-1} e_i) \cap \{v_1\} \neq \emptyset$ y $(\bigcup_{i=k}^r e_i) \cap \{v_2\} \neq \emptyset$. Por tanto $\{v_1, v_2\} \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X$. $\square$

Observemos que la proposición anterior clasifica las componentes de $\mathcal{D}_{2n}$, lo que permite establecer la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.2. *El conjunto $\{\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n}) : \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}_X = \emptyset\}$ tiene exactamente $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-1}{i} \right)$ elementos.*

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición 5.1 las componentes que se deben contar son todas aquellas que son como en (1) de dicha proposición. Similarmente a la prueba del corolario 4.23 se tiene que $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-1}{i} \right)$ es el número de componentes cuya cerradura es ajena a $\mathcal{D}_X$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea $K = \{a\} \subset E(X)$. Supóngase que $a \in e$ y $e \in \mathcal{E}_2$, entonces el conjunto $\{\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{D}_{2n}) : \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)) = \emptyset\}$ tiene exactamente $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-2}{i} \right)$ elementos.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba consiste en contar las componentes de $\mathcal{D}_{2n}$ cuya cerradura es ajena a $\mathcal{D}_X \cup C_n(X; K)$. Por la proposición 5.2, basta identificar todas las componentes cuya cerradura no es ajena a $C_n(X; K)$, para esto establecemos la siguiente:

Afirmación. Si $\mathcal{C} = \langle \text{Int}_X(e), \text{Int}_X(e_1), \dots, \text{Int}_X(e_s) \rangle_n$, donde $e_1, \dots, e_s \in \mathcal{E}_2^*$, entonces $\text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap C_n(X; K) \neq \emptyset$.

En efecto, notemos que $e \in \text{Cl}_{C_n(X)}(\mathcal{C}) \cap C_n(X; K)$.

Ahora, puesto que $|\mathcal{E}_2^* - \{e\}| = q - 2$, se sigue la prueba como en la proposición 5.2. $\square$

TEOREMA 5.4. *Si $K = \{a\} \subset E(X)$, entonces $C_n(X)/C_n(X; K) \not\approx C_n(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese que $K \in NC_R(X)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in e$ y $e \in \mathcal{E}_2$. Respecto a $C_n(X)/C_n(X; K)$, por el teorema 4.32 y la proposición 5.3, hay $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-2}{i} \right)$ componentes de $\mathcal{D}_{2n}^K$, cuya cerradura en $C_n(X)/C_n(X; K)$ es ajena a $\mathcal{D}_X^K$.

Por otro lado, respecto a $C_n(X)$, por la proposición 5.2 se tienen $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-1}{i} \right)$ componentes de $\mathcal{D}_{2n}$, cuya cerradura en $C_n(X)$ es ajena a $\mathcal{D}_X$.

Puesto que los homeomorfismos preservan la dimensión y el número de componentes, como $\sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-2}{i} \right) \neq \sum_{i=1}^n \left(\binom{p-1}{i} + \binom{q-1}{i} \right)$, entonces $C_n(X)/C_n(X; K)$ no puede ser homeomorfo a $C_n(X)$. $\square$

Finalizamos este trabajo con la siguiente pregunta.

PREGUNTA 5.5. Sea X una gráfica finita y $n \geq 2$. ¿Si $|R(X)| \geq 3$, es cierto que existe $K \in NC_R(X)$ tal que $C_n(X)/C_n(X; K) \not\approx C_n(X)$?

Bibliografía

- [1] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Fuentes-Montes de Oca, and F. Orozco-Zitli, *Making holes in the cone, suspension and hyperspaces of some continua*, Comment. Math. Univ. Carolinae **59** (2018), 343-364.
- [2] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, and J. A. Martínez-Cortez, *On the hyperspace $C_n(X)/C_{nK}(X)$* , Comment. Math. Univ. Carolinae **62** (2021), 201-224.
- [3] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), 875-882.
- [4] J. Camargo, S. Macías, *Quotients of n -fold hyperspaces*, Topology Appl. **197** (2016), 154-166.
- [5] E. Castañeda-Alvarado, R. C. Mondragón-Álvarez, N. Ordoñez and F. Orozco-Zitli, *The hyperspace $F_n^K(X)$* , Bull. Iranian Math. Soc. **47** (2020), 659-678.
- [6] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math., **36** (2006), 811-856.
- [7] F. Corona-Vázquez, R.A. Quiñones-Estrella, J. Sánchez-Martínez, and R. Toalá-Enríquez, *Uniqueness of the hyperspaces $C(p, X)$ in the class of trees*, Topology Appl. **269** (2020), 106926.
- [8] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston (1966).
- [9] R. Escobedo, C. Estrada-Obregón, and J. Sánchez-Martínez, *On hyperspaces of non-cut sets*, Topology Appl. **217**, (2017), 97-106.
- [10] R. Escobedo, Ma. de J. López, and S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl. **138** (2004), 109-124.
- [11] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, (1961).
- [12] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., **21** (1997), 239-250.
- [13] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, vol. 4, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.
- [14] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glas. Mat. Ser. III **37**(57) (2002), 347-363.
- [15] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.
- [16] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, Inc. 1968.
- [17] J. C. Macías, *On the n -fold pseudo-hyperspace suspension of continua*, Glas. Mat. Ser. III **43**(63) (2008), 439-449.
- [18] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc. **22** (1997), 181-296.
- [19] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc. **25** (2000), 255-276.
- [20] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. **109** (2001), 237-256.
- [21] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. **138** (2004), 125-138.
- [22] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua. II*, Glas. Mat. Ser. III **41**(61) (2006), 335-343.
- [23] S. Macías, *Topics on continua*, Springer Verlag, (2018).
- [24] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. **32** (2006), 783-799.

- [25] J. M. Martínez-Montejano, *Mutual aposyndesis of symmetric products* Topology Proc. **24** (1999), 203-213.
- [26] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152–182.
- [27] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1978.
- [28] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspaces suspensions*, Houston J. Math. **5** (1979), 125-132.
- [29] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Correos electrónicos:

florencio.corona@unach.mx (Florencio Corona Vázquez),
jose.cortez@unach.mx (José Antonio Martínez Cortez),
russell.quinones@unach.mx (Russell Aarón Quinones Estrella),
jsanchezm@unach.mx (Javier Sánchez Martínez).

CAPÍTULO 12

Algunas funciones especiales entre continuos que preservan la propiedad de Kelley

María de Jesús López Toriz, Andrés Alejandro Olivares Jorge
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México
Gerardo Hernández Valdez
Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León, México

1. Introducción	251
2. Preliminares	252
3. Propiedad de Kelley	256
4. Funciones confluentes	259
5. Funciones abiertas y monótonas	260
6. Funciones refinables	262
7. Algunas funciones especiales que preservan la propiedad de Kelley	263
Bibliografía	268

1. Introducción

En 1942, J. L. Kelley introdujo la propiedad de Kelley en continuos (un *continuo* es un espacio métrico, con más de un punto, compacto y conexo). Sean X un continuo y un punto $x \in X$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley en x* si para cada subcontinuo K de X con $x \in K$ y para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge al punto x , se tiene que existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X que converge a K tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Diremos que un continuo tiene la *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos. Este concepto fue introducido para estudiar la contractibilidad de los hiperespacios de continuos; de hecho, un tema importante en el desarrollo de la teoría de continuos y sus hiperespacios fue la *contractibilidad de hiperespacios de continuos*, véase [12, Capítulo XVI].

En relación con la propiedad de Kelley, en 1978, S.B. Nadler, Jr. preguntó lo siguiente:

PREGUNTA 1.1. [12, Pregunta 16.38] ¿Qué tipos de funciones preservan la propiedad de Kelley?

Una de las herramientas importantes en la Teoría de los Continuos son las *funciones especiales entre continuos*, es decir, las funciones continuas y suprayectivas entre continuos que cumplen una propiedad particular. A través de estas funciones especiales podemos obtener información acerca de los continuos. Note que este Problema 1.1,

propuesto por Nadler es muy general. La idea de este capítulo es recopilar los resultados en la teoría de los continuos, que existen en la literatura, que resuelven el Problema 1.1. Particularmente, se estudiarán las funciones confluentes, abiertas, monótonas, refinables y retractos. Específicamente, vamos a exponer los resultados siguientes:

Consideremos X un continuo con la propiedad de Kelley, Y un continuo y la familia de funciones suprayectivas y continuas

$$\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es confluente, abierta, monótona, refinable o retracto}\}.$$

Si X es un continuo con la propiedad de Kelley y $f \in \mathcal{F}$, entonces Y tiene la propiedad de Kelley, véase los Teoremas 7.2, 7.5, 7.6, 7.7 y 7.9.

Cabe señalar que estos resultados fueron probados por Wardle y Kato. Wardle en 1977, lo demostró para las funciones confluentes [14, Teorema 4.3]; para las funciones abiertas [14, Corolario 4.5]; para las funciones monótonas [14, Corolario 4.4] y para retractos [14, Teorema 2.9]; Kato en 1986, lo demostró para las funciones refinables [8, Teorema 2.1].

El capítulo está dividido en siete secciones. La Sección 2 contiene los preliminares necesarios, sobre la teoría de los hiperespacios de continuos, para desarrollar nuestro trabajo. En la Sección 3 definimos el ente importante de nuestro trabajo, *la propiedad de Kelley*, de manera global y puntual, así como los resultados necesarios con los cuales probamos que las funciones *confluentes* preservan la propiedad de Kelley. La Sección 4, refiere a las funciones *confluentes*, citamos la definición de éstas; además, usamos los conceptos de: *función confluente en un punto* (véase la Definición 4.2) y *función confluente relativa en un punto* (véase la Definición 4.3). En la Sección 5, definimos las funciones *abiertas* y *monótonas*, probamos que estas funciones son también funciones confluentes. De esta manera, demostramos que las funciones abiertas y monótonas preservan la propiedad de Kelley. En la Sección 6, damos el concepto de función *refinable* y citamos los lemas necesarios para probar que las funciones refinables preservan la propiedad de Kelley. La última sección está dedicada a probar que las funciones que pertenecen a la colección $\mathcal{F}$ preservan la propiedad de Kelley.

2. Preliminares

Dados un continuo (X, d) , un punto $a \in X$ y un subconjunto cerrado A de X , algunos conjuntos elementales son la bola (nube o bola generalizada) con centro en a (A) de radio $r > 0$, los cuales se definen, respectivamente, como

$$B_d(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

$$N_d(r, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < r\}.$$

El subíndice de la métrica se obviará cuando no exista confusión.

Un hiperespacio de un continuo X es un subconjunto $\mathcal{H}$ del conjunto potencia de X , $\mathcal{P}(X)$, que cumple alguna propiedad. Sean $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, algunos hiperespacios importantes son

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$$

y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}.$$

A las colecciones 2^X , $C(X)$, $C(p, X)$ y $F_n(X)$ se les conoce como el hiperespacio de los subconjuntos cerrados no vacíos de X , el hiperespacio de subcontinuos de X , el hiperespacio de los anclados de p en X y el n -ésimo producto simétrico de X , respectivamente. Los hiperespacios están dotados de la **métrica de Hausdorff** la cual se define como

$$H(A, B) = \inf_{r>0} \{A \subset N(r, B) \quad \wedge \quad B \subset N(r, A)\}$$

para cada $A, B \in 2^X$. En [7, Teorema 2.2] se demuestra que H es una métrica para 2^X . Para ver un amplio estudio sobre los hiperespacios 2^X , $C(X)$ y $F_n(X)$ véase [5], [7], [12] y [13]. En [11] se introdujo el hiperespacio $C(p, X)$.

Dados un continuo (X, d) y $A, B \subseteq X$, definimos la distancia de A al conjunto B como

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

En el caso en que $A = \{p\}$ para algún $p \in X$, si no hay ambigüedad, simplemente denotaremos $d(\{p\}, B) = d(p, B)$.

LEMA 2.1. Sean (X, d) un continuo, $A, B, C \in 2^X$. Se cumple que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $A, B, C \in 2^X$, $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$. Note que $d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \leq d(a, b)$. Se tiene que $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, de donde, $d(a, b)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(a, c) + d(c, b) : a \in A, b \in B, c \in C\}$. Luego

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq \inf \{d(a, c) + d(c, b) : a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= \inf \{d(a, c) : a \in A, c \in C\} + \inf \{d(c, b) : b \in B, c \in C\} \\ &= d(A, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Así, el lema está probado. □

Por otro lado, se define la **métrica de Darboux** como sigue:

$$D(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}, \sup_{b \in B} \{d(b, A)\} \right\}$$

para cada $A, B \in 2^X$.

Otra manera de visualizar la métrica de Hausdorff es a través de la métrica de Darboux, en el Lema 2.2, probamos que éstas coinciden; con este resultado demostramos el Lema 2.3; incluimos las demostraciones dado que en los textos están citadas como ejercicios.

LEMA 2.2. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Se tiene que $D(A, B) = H(A, B)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$. Primero veamos que $D(A, B) \leq H(A, B) + \varepsilon$. Consideremos $\delta = H(A, B) + \varepsilon$. Se tiene que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Notemos que para cada $a \in A$ se tiene que $d(a, B) < \delta$. Se sigue que $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq \delta$. Análogamente, $\sup_{b \in B} \{d(b, A)\} \leq \delta$. Debido a que ε es arbitrario, se obtiene que $D(A, B) \leq H(A, B)$.

Ahora verifiquemos que $H(A, B) \leq D(A, B) + \varepsilon$. Consideremos $\lambda = D(A, B) + \varepsilon$. Veamos que $A \subset N(\lambda, B)$. Sea $a_0 \in A$. Observemos que

$$\inf_{b \in B} \{d(a_0, b)\} = d(a_0, B) \leq \sup_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq D(A, B) < \lambda.$$

Por definición de ínfimo, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) < \lambda$. Esto implica que $A \subset N(\lambda, B)$. Análogamente, $B \subset N(\lambda, A)$. Por lo tanto, $H(A, B) < \lambda$. Como ε es arbitrario, se concluye que $H(A, B) \leq D(A, B)$. $\square$

LEMA 2.3. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Entonces existen $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $d(a_0, b_0) = H(A, B)$.

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad, supondremos $D(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$.

Como $A \in 2^X$ y la métrica d es función continua, entonces existe $a_0 \in A$ de modo que $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = d(a_0, B)$. Así $D(A, B) = d(a_0, B)$. Como $B \in 2^X$, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) = d(a_0, B)$. En consecuencia, $D(A, B) = d(a_0, b_0)$. Por el Lema 2.2, se obtiene que $H(A, B) = d(a_0, b_0)$. $\square$

A continuación se expondrán algunos resultados sobre funciones continuas, las cuales usaremos en este trabajo.

DEFINICIÓN 2.4. Sean X y Y continuos y $f : X \rightarrow 2^Y$ una función, decimos que:

- (1) La función f es **semicontinua inferiormente** en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $U \subset X$ vecindad de x_0 tal que $f(x_0) \subset N(\varepsilon, f(x))$, para cada $x \in U$.
- (2) La función f es **semicontinua superiormente** en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $U \subset X$ vecindad de x_0 tal que $f(x) \subset N(\varepsilon, f(x_0))$, para cada $x \in U$.

LEMA 2.5. Sean X y Y continuos y $f : X \rightarrow 2^Y$ una función. Se tiene que f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0 , si y sólo si, f es continua en x_0 .

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que f es semicontinua superiormente e inferiormente en x_0 , si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$ y $f(x_0) \subset N(f(x), \varepsilon)$, para cada $x \in B(x_0, \delta)$. Esto implica que $H(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, para cada $x \in B(x_0, \delta)$. Así, f es continua en x_0 .

Ahora, suponga que f es continua en x_0 , es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $f(x) \in B_H(f(x_0), \varepsilon)$. Esto implica que $H(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Se sigue que $f(x) \subset N(\varepsilon, f(x_0))$ y $f(x_0) \subset N(\varepsilon, f(x))$, así f es semicontinua superiormente en x_0 y semicontinua inferiormente en x_0 . $\square$

Un concepto importante en los hiperespacios son los límite superior y límite inferior, los cuales definimos a continuación.

DEFINICIÓN 2.6. Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X , definimos:

$$\liminf\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \text{para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq N \end{array} \right\}$$

y

$$\limsup\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \text{para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe un conjunto infinito } J \subset \mathbb{N} \\ \text{tal que } B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in J \end{array} \right\}.$$

Los siguientes resultados son de utilidad para desarrollar nuestro trabajo, las demostraciones de éstos las omitimos, sin embargo, citamos una referencia para las pruebas.

PROPOSICIÓN 2.7. [3] Proposición 2.4, p. 80] Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X , entonces

- (1) $x \in \liminf\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si existe sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $x_n \rightarrow x$.
- (2) $x \in \limsup\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si existen una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ creciente y una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y $x_{n_k} \rightarrow x$.

La relación que hay entre los límites superior e inferior y la continuidad de una función es muy estrecha; esto lo citamos a continuación.

PROPOSICIÓN 2.8. [1] Teorema 1.15] Sean X y Y continuos y $f : X \rightarrow 2^Y$ una función. Entonces

- (1) La función f es semicontinua inferiormente en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \rightarrow x_0$ se tiene que $f(x_0) \subset \liminf\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) La función f es semicontinua superiormente en x_0 si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \rightarrow x_0$ se tiene que $\limsup\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(x_0)$.

Una función que trabajaremos más adelante es la del siguiente lema.

LEMA 2.9. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces la función $f^{-1} : F_1(Y) \rightarrow 2^X$ definida por $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es semicontinua superiormente.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que f^{-1} está bien definida. Sean $\{y_1\}, \{y_2\} \in F_1(Y)$ tales que $\{y_1\} = \{y_2\}$. Luego, $y_1 = y_2$. Por tanto,

$$f^{-1}(\{y_1\}) = \{x \in X : f(x) = y_1\} = \{x \in X : f(x) = y_2\} = f^{-1}(\{y_2\}).$$

Para ver que f^{-1} es semicontinua superiormente, sean $\{y\} \in F_1(Y)$ y $\{\{y_n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $F_1(Y)$ tal que $\{y_n\} \rightarrow \{y\}$. Por Proposición 2.8, basta probar que $\limsup\{f^{-1}(\{y_n\})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(\{y\})$. Para esto sea $x \in \limsup\{f^{-1}(\{y_n\})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por Proposición 2.7, existen una sucesión creciente de números naturales, $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, y una sucesión de puntos $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X , tales que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in f^{-1}(\{y_{n_k}\})$, de modo que $x_{n_k} \rightarrow x$. Como f es continua, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Debido a que $\{y_{n_k}\} \rightarrow \{y\}$, entonces $f(x) = y$. Se sigue que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Por lo tanto, $\limsup\{f^{-1}(\{y_n\})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(\{y\})$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.10. [10, Proposición 1.30] Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en 2^X que convergen a A y a B , respectivamente. Se tiene que

- (1) Si $A_n \subseteq B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subseteq B$.
- (2) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Un resultado fundamental en la teoría de continuos es el siguiente, una prueba de éste la puede consultar en [6, Teorema 3.3] o [13, Teorema 5.2].

TEOREMA 2.11 (del Cable Cortado). Sean X un espacio métrico compacto, A y B subconjuntos cerrados de X . Si ningún subconjunto conexo de X intersecta a A y a B (equivalentemente, ninguna componente de X lo hace), entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados de X , ajenos, $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.

Otra herramienta importante en los hiperespacios son las funciones inducidas, las cuales definimos a continuación. Consideremos X y Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función, de manera natural se puede considerar su función inducida entre los hiperespacios de cerrados como sigue:

$$\hat{f} : 2^X \rightarrow 2^Y \quad \text{tal que} \quad A \mapsto f(A),$$

para cada $A \in 2^X$.

La primera propiedad que usaremos de las funciones inducidas es la que sigue.

TEOREMA 2.12. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces su función inducida $\hat{f}$ también es continua.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que f es uniformemente continua, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d_X(a, b) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Tomemos $A, B \in 2^X$ de modo que $H(A, B) < \delta$. Sea $y \in f(A)$, luego existe $a \in A$ tal que $y = f(a)$. Como $A \subset N(\delta, B)$, entonces $a \in N(\delta, B)$. Se sigue que existe $b \in B$ de manera que $d_X(a, b) < \delta$, de aquí se sigue que $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Como $f(b) \in f(B)$ se tiene que $y \in N(\varepsilon, f(B))$. Esto implica que $f(A) \subset N(\varepsilon, f(B))$. La contención $f(B) \subset N(\varepsilon, f(A))$ es análoga. Por lo tanto, $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. $\square$

3. Propiedad de Kelley

En esta sección recopilamos las definiciones y resultados necesarios sobre la propiedad de Kelley para desarrollar las demostraciones de que las funciones: confluentes, abiertas, monótonas, refinables y los retracts, preservan la propiedad de Kelley.

En 1942, J. L. Kelley define el concepto de *propiedad 3.2* (véase [9, pág. 26]), lo que actualmente se conoce como *propiedad de Kelley*, la cual enunciamos a continuación:

DEFINICIÓN 3.1. Un continuo (X, d) se dice que tiene la propiedad de Kelley si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si para cualesquiera puntos $a, b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para cada $A \in C(a, X)$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$.

Tiempo después, en 1977 R. W. Wardle introduce la definición de propiedad de Kelley de manera puntual (véase [14] II, págs. 291 y 292)], la cual enunciamos a continuación:

DEFINICIÓN 3.2. *Un continuo (X, d) , se dice que tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para cada $A \in C(a, X)$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$.*

Note que un continuo X tiene la propiedad de Kelley (como en la Definición 3.1) si y sólo si, X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos (como en la Definición 3.2). Por otro lado, otra equivalencia que se conoce de la propiedad de Kelley es en términos de sucesiones como se muestra en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.3. *Sean (X, d) un continuo y $a \in X$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1) *X tiene la propiedad de Kelley en el punto a .*
- (2) *Para cada $A \in C(a, X)$ y para cada sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $a_n \rightarrow a$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $A_n \in C(a_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \rightarrow A$.*

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $A \in C(a, X)$ y $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $a_n \rightarrow a$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $A_n \in C(a_n, X)$ tal que

$$H(A, A_n) = \min\{H(A, B) : B \in C(a_n, X)\}.$$

Note que $C(a_n, X) \in C(C(X))$, luego $C(a_n, X)$ es subconjunto compacto en $C(X)$. Por consiguiente el mínimo existe. Veamos que $A_n \rightarrow A$. Para esto sea $\varepsilon > 0$. Como X tiene la propiedad de Kelley en a , entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $b \in X$ con $d(a, b) < \delta$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$.

Dado que $a_n \rightarrow a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B(a, \delta)$ siempre que $n \geq N$. Luego, para cada $n \geq N$, existe $A'_n \in C(a_n, X)$ tal que $H(A, A'_n) < \varepsilon$. Por definición de A_n , tenemos que

$$H(A, A_n) \leq H(A, A'_n) < \varepsilon$$

para cada $n \geq N$. Por lo tanto, $A_n \rightarrow A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que (1) no se cumple. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existen $b \in B(a, \delta)$ y $A \in C(a, X)$ tal que para cada $B \in C(b, X)$ sucede que $H(A, B) \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a $\delta_n = \frac{1}{n}$. Se sigue que existen $b_n \in B(a, \delta_n)$ y $A_n \in C(a, X)$ de modo que para cada $B_{b_n} \in C(b_n, X)$ se tiene que $H(A_n, B_{b_n}) \geq \varepsilon$. Como $C(a, X)$ es compacto, sin pérdida de generalidad, existe $A \in C(a, X)$ tal que $A_n \rightarrow A$.

Debido a que $b_n \rightarrow a$ y $A \in C(a, X)$, por hipótesis, existe una sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $B_n \in C(b_n, X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B_n \rightarrow A$. Como $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow A$, para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego $H(A_n, B_n) \leq H(A_n, A) + H(B_n, A) < \varepsilon$. Esto contradice la elección de los A_n . Por lo tanto, se cumple (1). $\square$

Una variante de la propiedad de Kelley es cuando se considera de manera puntual dentro de subconjuntos cerrados. Esto nos lleva a dar las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.4. Sean (X, d) un continuo y $A \in 2^X$. Decimos que X **tiene la propiedad de Kelley en un punto** $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para cada $K \in C(a, X)$, existe $L \in C(b, X)$ de modo que $H(K, L) < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 3.5. Sean (X, d) un continuo y $A \in 2^X$. Decimos que X **tiene la propiedad de Kelley en A** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $a \in A$ y $b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para cada $K \in C(a, X)$, existe $L \in C(b, X)$ de modo que $H(K, L) < \varepsilon$.

OBSERVACIÓN 3.6. Sean X un espacio métrico compacto y dos sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X . Como X es compacto, existe una subsucesión, $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, convergente de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora, consideremos la sucesión $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, ésta tiene una subsucesión convergente, digamos $\{b_{n_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Note que la subsucesión $\{a_{n_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ también es convergente y el límite de $\{a_{n_{k_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es el mismo que el de $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Las variaciones de las Definiciones 3.4 y 3.5 nos lleva a demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 3.7. Sean (X, d) un continuo y $A \in 2^X$. Entonces X tiene la propiedad de Kelley en A si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de A .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la necesidad es inmediata.

Veamos la suficiencia. Para esto procederemos por contradicción. Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley en A . Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existen $a_\delta \in A$ y $b_\delta \in X$ con $d(a_\delta, b_\delta) < \delta$ y además existe $K_\delta \in C(a_\delta, X)$ de modo que para cualquier $L_\delta \in C(b_\delta, X)$ sucede que $H(K_\delta, L_\delta) \geq \varepsilon$.

Particularmente, si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n \in A$, $b_n \in X$ con $d(a_n, b_n) < \delta_n$ y además existe $K_n \in C(a_n, X)$ de modo que:

$$(12.1) \quad \text{para cualquier } L_n \in C(b_n, X), \text{ se cumple que } H(K_n, L_n) \geq \varepsilon.$$

Sabiendo que A , X y $C(X)$ son espacios métricos y compactos, por la Observación 3.6, podemos suponer que existen $a \in A$, $b \in X$ y $K_0 \in C(X)$, subsucesiones $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{K_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a a , b y K_0 , respectivamente. Debido a que la sucesión $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a a y $a_{n_m} \in K_{n_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, por la Proposición 2.10 tenemos que $a \in K_0$.

Por hipótesis, X tiene la propiedad de Kelley en $a \in A$, así para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que si $x \in X$ con $d(x, a) < \delta_0$ y $J \in C(a, X)$, existe $M \in C(x, X)$ de modo que $H(J, M) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por continuidad de la métrica y la convergencia de sucesiones tenemos que

$$d(a_{n_m}, b_{n_m}) \longrightarrow d(a, b).$$

Recordemos que $d(a_{n_m}, b_{n_m}) < \frac{1}{n_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $d(a_{n_m}, b_{n_m}) \longrightarrow 0$. Por lo tanto, $d(a, b) = 0$ y así $a = b$. Esto implica que $b_{n_m} \longrightarrow a$. Como $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a a , para δ_0 , existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_{n_m}, a) < \delta_0$ si $m \geq N_1$. Por otro lado, como $K_{n_m} \longrightarrow K_0$, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(K_{n_m}, K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $m \geq N_2$.

Consideremos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Sea $m \geq N$. Como $K_0 \in C(a, X)$ y $d(b_{n_m}, a) < \delta$, existe $L \in C(b_{n_m}, X)$ de modo que $H(K_0, L) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$H(K_{n_m}, L) \leq H(K_{n_m}, K_0) + H(K_0, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que existe $L \in C(b_{n_m}, X)$ tal que $H(K_{n_m}, L) < \varepsilon$. Esto contradice que para $L \in C(b_{n_m}, X)$ sucede que $H(K_{n_m}, L) \geq \varepsilon$, véase la ecuación (12.1). Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley en A . $\square$

En la tesis de G. Acosta se pueden revisar otras propiedades sobre la propiedad de Kelley, en continuos y sus hiperespacios, [1].

4. Funciones confluentes

En esta sección recopilamos las definiciones y resultados necesarios para exponer la prueba de que las funciones confluentes preservan la propiedad de Kelley. Primero citamos la definición de función confluyente.

DEFINICIÓN 4.1. Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos se dice **confluyente**, si para cada $Q \in C(Y)$ y para cualquier componente K de $f^{-1}(Q)$ se satisface que $f(K) = Q$.

A continuación se mencionan dos formas distintas de definir una función confluyente de manera puntual.

DEFINICIÓN 4.2. [4, pág. 2] Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos se dice **confluyente en** $y_0 \in Y$, si para cada $Q \in C(y_0, Y)$ y para cualquier componente K de $f^{-1}(Q)$ se satisface que $f(K) = Q$.

DEFINICIÓN 4.3. [4, pág. 2] Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos se dice **confluyente relativa en** $x_0 \in X$, si para cada $Q \in C(f(x_0), Y)$ y la componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $x_0 \in K$ satisface que $f(K) = Q$.

Ahora se darán unos resultados que relacionan las Definiciones 4.1, 4.2 y 4.3, éstos nos proporcionarán equivalencias a que una función sea confluyente. En relación con este tópico véase [2].

TEOREMA 4.4. Sean X y Y continuos. La función $f : X \longrightarrow Y$ es confluyente si y sólo si f es confluyente en cada punto de Y .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es confluyente. Sean $y_0 \in Y$, $Q \in C(y_0, Y)$ y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Por hipótesis, se tiene que $f(K) = Q$. Por lo tanto, f es confluyente en y_0 , así f es confluyente cada punto de Y .

Ahora, supongamos que f es confluyente en cada punto de Y . Sean $Q \in C(Y)$ y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Como $Q \neq \emptyset$, consideremos un punto $y_0 \in Q$. Note que $Q \in C(y_0, Y)$. Por hipótesis, se tiene que $f(K) = Q$. $\square$

TEOREMA 4.5. Sean X y Y continuos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es confluyente si y sólo si f es confluyente relativa en cada punto de X .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es confluyente. Sean $x_0 \in X$, $Q \in C(f(x_0), Y)$ y K la componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $x_0 \in K$. Por hipótesis, tenemos que $f(K) = Q$. Por lo tanto, f es confluyente relativa en x_0 . Así, f es confluyente relativa en cada punto de X .

Ahora, supongamos que f es confluyente relativa en cada punto de X . Sean $Q \in C(Y)$ y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Consideremos un punto $x_0 \in K$. Note que $f(x_0) \in Q$, así $Q \in C(f(x_0), Y)$. Por hipótesis, tenemos que $f(K) = Q$. Como x_0 era un punto arbitrario se sigue que f es confluyente. $\square$

5. Funciones abiertas y monótonas

La definición de función confluyente parece ser muy general, es natural preguntarse si existen casos particulares de este tipo de funciones, como veremos la respuesta es afirmativa. En esta sección se abordarán dos clases de funciones las cuales están contenidas en la clase de las funciones confluentes, a saber, las funciones abiertas y monótonas.

DEFINICIÓN 5.1. Sean X y Y continuos, una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva, se dice **abierta** si la imagen de cualquier conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y .

Antes de proceder al teorema que relaciona las funciones abiertas con las confluentes se proporciona un lema previo que resultará útil a la hora de probar este hecho.

LEMA 5.2. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función abierta. Si Z es cualquier subconjunto de Y , entonces

$$f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$$

es una función abierta.

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por $g = f|_{f^{-1}(Z)}$. Sea W un conjunto abierto de $f^{-1}(Z)$. Tenemos que existe $U \in \tau_X$ tal que $W = U \cap f^{-1}(Z)$. Afirmamos que $g(W) = f(U) \cap Z$. Para probar esto; notemos que

$$\begin{aligned} g(W) &= g(U \cap f^{-1}(Z)) = f(U \cap f^{-1}(Z)) \\ &\subseteq f(U) \cap f(f^{-1}(Z)) \\ &= f(U) \cap Z. \end{aligned}$$

Sea $y \in f(U) \cap Z$. Existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Entonces $x \in U \cap f^{-1}(Z) = W$. Se sigue que $y \in f(W)$, quedando demostrada la afirmación. Por otro lado, como f es abierta, entonces $f(U) \in \tau_Y$. Se sigue que $f(U) \cap Z$ es abierto en Z . Por lo tanto, g es una función abierta. $\square$

TEOREMA 5.3. Las funciones abiertas son confluentes.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \rightarrow Y$ una función abierta entre continuos. Supongamos que f no es confluyente. Es decir, existen $Q \in C(Y)$ y K componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) \neq Q$. Note que $f(K) \subset Q$, de aquí se sigue que existe $p \in Q \setminus f(K)$. Se tiene que $K \cap f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$. Notemos que K y $f^{-1}(\{p\})$ son conjuntos cerrados en $f^{-1}(Q)$.

Como K es componente de $f^{-1}(Q)$ y $K \cap f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, por Teorema 2.11 del Cable Cortado existen G y H conjuntos cerrados en $f^{-1}(Q)$ que cumplen:

- (1) G y H son no vacíos y ajenos.
- (2) $K \subseteq G$ y $f^{-1}(\{p\}) \subseteq H$.
- (3) $f^{-1}(Q) = G \cup H$.

Notemos que G es un cerrado en X , así G es compacto. Luego, $f(G)$ es compacto. Por otro lado, como f es abierta, por el Lema 5.2, se tiene que $f|_{f^{-1}(Q)}$ es abierta. Como $G = f^{-1}(Q) \setminus H$ es abierto en $f^{-1}(Q)$, entonces $f|_{f^{-1}(Q)}(G) = f(G)$ es abierto en Q . Además, como $G \neq \emptyset$ se tiene que $f(G) \neq \emptyset$. Note que $G \cap f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$, se sigue que $p \notin f(G)$ y así $f(G) \neq Q$. Es decir, G es un conjunto abierto, cerrado y no trivial, esto contradice la conexidad de Q . Por lo tanto, f es confluyente. $\square$

Ahora, procederemos con la clase de las funciones monótonas.

DEFINICIÓN 5.4. Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos, se dice **monótona** si para cada $y \in Y$ sucede que $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Similarmente como el caso de las funciones abiertas, enunciaremos un resultado previo y nuestro resultado de interés será una consecuencia inmediata.

TEOREMA 5.5. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función monótona entre continuos, entonces para cada $Q \in C(Y)$ sucede que $f^{-1}(Q) \in C(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $Q \in C(Y)$. Es claro que $f^{-1}(Q)$ es compacto y no vacío. Veamos que es conexo, para esto supongamos que no es conexo. Es decir, existen A y B conjuntos cerrados en X , no vacíos y ajenos tales que $f^{-1}(Q) = A \cup B$. Sea $p \in Q$, por hipótesis, f es una función monótona, luego $f^{-1}(\{p\})$ es conexo. Se tiene que

$$f^{-1}(\{p\}) \subseteq A \quad \text{o bien} \quad f^{-1}(\{p\}) \subseteq B.$$

Consideremos los siguientes conjuntos auxiliares y demostraremos que forman una separación para Q :

$$Q_1 = \{p \in Q : f^{-1}(\{p\}) \subseteq A\}$$

y

$$Q_2 = \{p \in Q : f^{-1}(\{p\}) \subseteq B\}.$$

Si $z \in Q$, entonces $z \in Q_1 \cup Q_2$. Se cumple que $Q = Q_1 \cup Q_2$. Veamos que Q_1 y Q_2 son conjuntos no vacíos. Supongamos que $Q_2 = \emptyset$, entonces para cada $z \in Q$ se tiene que $f^{-1}(\{z\}) \subseteq A$. Además

$$\bigcup_{p \in Q} f^{-1}(\{p\}) = f^{-1} \left(\bigcup_{p \in Q} \{p\} \right) = f^{-1}(Q) \subseteq A.$$

Por otro lado, como $f^{-1}(Q) = A \cup B$, se sigue que $A \cup B \subseteq A$, esto implica que $B = \emptyset$ lo cual es una contradicción pues $B \neq \emptyset$. Por lo tanto, Q_1 y Q_2 no son vacíos.

Afirmamos que Q_1 y Q_2 son ajenos. Para probar esto suponga lo contrario, es decir, suponga que existe $z \in Q_1 \cap Q_2$. Note que $f^{-1}(\{z\}) \subseteq A$ y $f^{-1}(\{z\}) \subseteq B$, esto implica que $A \cap B \neq \emptyset$, esta contradicción prueba que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Finalmente, veamos que Q_1 y Q_2 son cerrados. Para esto afirmamos que la igualdad $Q_1 = f(A) \cap Q$ se cumple. Sea $p \in Q_1$, entonces $f^{-1}(\{p\}) \subset A$. Luego $\{p\} = f(f^{-1}(\{p\})) \subseteq f(A)$. Es decir, $Q_1 \subseteq f(A) \cap Q$. Ahora, considere un punto $y \in f(A) \cap Q$, entonces existe $x \in A$ tal que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Luego $f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset$, como $f^{-1}(\{y\})$ es conexo; se sigue que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$ y así $y \in Q_1$. Demostrando así la afirmación.

Por último, como f es continua, $f(A)$ es compacto y así $f(A)$ es un cerrado en Y , de donde Q_1 es cerrado en Y . Similarmente, se prueba que Q_2 es cerrado en Y .

Por lo tanto, los conjuntos Q_1 y Q_2 forman una separación para Q . Dado que Q es conexo, esto es una contradicción. Por lo tanto, $f^{-1}(Q)$ es conexo. $\square$

TEOREMA 5.6. *Las funciones monótonas son confluentes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \rightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Sean $Q \in C(Y)$ y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Por hipótesis, f es monótona, se sigue del Teorema 5.5 que $f^{-1}(Q) \in C(X)$. En particular, $f^{-1}(Q)$ es conexo, luego, $f^{-1}(Q) = K$. Por lo tanto, $Q = f(K)$. Así, f es confluente. $\square$

6. Funciones refinables

En esta sección recopilamos las definiciones y resultados necesarios para exponer la prueba de que las funciones refinables preservan la propiedad de Kelley. Antes de enunciar lo que es una función refinable recordamos un concepto clave. Dadas dos funciones entre espacios métricos, $f, g : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$, la distancia entre ellas se define como

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in X} \{d_Y(f(x), g(x))\}.$$

A lo largo de esta sección se omitirá el subíndice de la métrica si no hay ambigüedad, en el caso contrario se especificará.

DEFINICIÓN 6.1. *Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos, se dice **refinable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $g_\varepsilon : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva tal que:*

- (1) *para cada $y \in Y$, $\text{diam}(g_\varepsilon^{-1}(\{y\})) < \varepsilon$.*
- (2) *$d^*(f, g_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Si la función g_ε satisface (1) de la Definición 6.1, entonces se le conoce como ε -función. Si además cumple (2) de la Definición 6.1, diremos que g_ε es un ε -refinamiento de f . La noción intuitiva de una ε -función es la de medir que tan cerca está de ser inyectiva. Pues si $\text{diam}(g_\varepsilon^{-1}(\{y\})) = 0$, entonces $|g_\varepsilon^{-1}(\{y\})| = 1$.

LEMA 6.2. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función refinable y f_n un $\frac{1}{n}$ -refinamiento de f , para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $H(f(A), f_n(A)) < \frac{1}{n}$, para cada $A \in 2^X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $y \in f(A)$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Se tiene que $f_n(x) \in f_n(A)$, como f_n es un $\frac{1}{n}$ -refinamiento, entonces

$$d(y, f_n(x)) = d(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{n}.$$

Esto implica que $f(A) \subset N(\frac{1}{n}, f_n(A))$. Para obtener la contención $f_n(A) \subset N(\frac{1}{n}, f(A))$ se realiza un proceso análogo tomando $y \in f_n(A)$. Por lo tanto, $H(f(A), f_n(A)) < \frac{1}{n}$. $\square$

Algunos resultados auxiliares que se utilizarán para probar el Teorema 7.7 son los siguientes. Se omitirán las demostraciones de los siguientes cuatro lemas, cuyas pruebas se pueden consultar en [10].

LEMA 6.3. [10, Lema 2.11] Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función refinable y f_n un $\frac{1}{n}$ -refinamiento de f , para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $q \in Y$ y $\{f_n^{-1}(\{q\})\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $C \in 2^X$, entonces existe $p \in X$ tal que $C = \{p\}$ y $f(p) = q$.

LEMA 6.4. [10, Lema 2.1] Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow Y$ una $\frac{1}{n}$ -función. Si $H \in C(Y)$ tal que $\{f_n^{-1}(H)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $C \in 2^X$, entonces $C \in C(X)$.

LEMA 6.5. [10, Lema 2.2] Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función refinable y f_n un $\frac{1}{n}$ -refinamiento de f , para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $C \in 2^X$ y $H \in C(Y)$ son tales que $\{f_n^{-1}(H)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C , entonces $f(C) = H$ y $f^{-1}(\text{inte}(H)) \subseteq C$.

LEMA 6.6. [10, Proposición 1.10] Sea $\varepsilon > 0$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una ε -función, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $Z \subset Y$ con $\text{diam}(Z) < \delta$, se cumple que $\text{diam}(f^{-1}(Z)) < \varepsilon$.

7. Algunas funciones especiales que preservan la propiedad de Kelley

Como lo mencionamos en la Introducción, esta parte la dedicamos a exponer las demostraciones de que las funciones confluentes, abiertas, monótonas, refinables y re-tractos preservan la propiedad de Kelley.

TEOREMA 7.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluyente en $y_0 \in Y$. Si X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(\{y_0\})$, entonces Y tiene la propiedad de Kelley en y_0 .

DEMOSTRACIÓN: Como f es continua, por Teorema 2.12, la función inducida

$$\hat{f} : C(X) \longrightarrow C(Y)$$

$$A \longmapsto f(A)$$

es continua. Sea $\varepsilon > 0$, como $C(X)$ es compacto, entonces $\hat{f}$ es uniformemente continua. Esto implica que existe $\varepsilon_1 > 0$ de modo que si $K, L \in C(X)$ con $H(K, L) < \varepsilon_1$, entonces $H(\hat{f}(K), \hat{f}(L)) < \varepsilon$.

Note que $f^{-1}(\{y_0\}) \in 2^X$, por hipótesis, X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(\{y_0\})$. Luego, por Teorema 3.7, X tiene la propiedad de Kelley en $f^{-1}(\{y_0\})$. Para $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $a \in f^{-1}(\{y_0\})$ y $b \in X$ con $d(a, b) < \delta_1$, y para cada $A \in C(a, X)$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon_1$.

Por Lema 2.9, se tiene que $f^{-1} : F_1(Y) \longrightarrow 2^X$ es semicontinua superiormente, en particular lo es en el punto y_0 . Es decir, para $\delta_1 > 0$ existe una vecindad U de y_0 tal que

$$(12.1) \quad f^{-1}(\{y\}) \subseteq N(\delta_1, f^{-1}(\{y_0\}))$$

para cada $y \in U$. Consideremos $\delta > 0$ de modo que $B(y_0, \delta) \subset U$.

Veamos que δ satisface la definición de la propiedad de Kelley en y_0 . Para esto sean $y \in Y$ tal que $d(y, y_0) < \delta$ y $P \in C(y_0, Y)$. Como f es suprayectiva, existe $x^* \in X$ de modo que $y = f(x^*)$, así $x^* \in f^{-1}(\{y\})$. Debido a que $d(y, y_0) < \delta$, se obtiene que $y \in B(y_0, \delta) \subset U$. Se sigue de (12.1) que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq N(\delta_1, f^{-1}(\{y_0\}))$.

Por otro lado, $x^* \in f^{-1}(\{y\})$ y $N(\delta_1, f^{-1}(\{y_0\})) = \{x \in X : d(x, f^{-1}(\{y_0\})) < \delta_1\}$. Como $f^{-1}(\{y\}) \subset N(\delta_1, f^{-1}(\{y_0\}))$ y $x^* \in f^{-1}(\{y\})$, existe $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$ tal que $d(x^*, x_0) < \delta_1$. Es claro que $f(x_0) = y_0 \in P$, así $x_0 \in f^{-1}(P)$. Consideremos a K la componente de $f^{-1}(P)$ con $x_0 \in K$. Como f es confluyente en y_0 , se tiene que $f(K) = P$. Más aún, $\hat{f}(K) = P$.

Notemos que $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$, $K \in C(x_0, X)$ y que $d(x^*, x_0) < \delta$. Por definición de δ_1 , existe $L \in C(x^*, X)$ tal que $H(K, L) < \varepsilon_1$. Por la elección de ε_1 , sucede que

$$H(P, \hat{f}(L)) = H(\hat{f}(K), \hat{f}(L)) < \varepsilon.$$

Además, $\hat{f}(L) \in C(f(x^*), Y) = C(y, Y)$ y $d(y, y_0) < \delta$. Por lo tanto, Y tiene la propiedad de Kelley en y_0 . $\square$

TEOREMA 7.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluyente. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y también tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es confluyente, por Teorema 4.4, f es confluyente en cada punto de Y . Sea $y \in Y$, como X tiene la propiedad de Kelley, en particular tiene la propiedad de Kelley en $f^{-1}(\{y\})$. Por Teorema 7.1, Y tiene la propiedad de Kelley en y . Ya que y era un punto arbitrario, se tiene que Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Otras formas de enunciar el Teorema 7.2, son de las siguientes maneras:

COROLARIO 7.3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluyente en cada punto de Y . Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y también tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es confluyente en cada punto de Y , por Teorema 4.4, f es confluyente. Por Teorema 7.2, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

COROLARIO 7.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluyente relativa en cada punto de X . Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y también tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es confluyente relativa en cada punto de X , por Teorema 4.5, f es confluyente. Por Teorema 7.2, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Como consecuencia de que las funciones abiertas y monótonas son confluentes, obtenemos que éstas funciones preservan la propiedad de Kelley.

TEOREMA 7.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y también tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es abierta, por Teorema 5.3, f es confluente. Por el Teorema 7.2, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

TEOREMA 7.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y también tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es monótona, por Teorema 5.6, f es confluente. Por el Teorema 7.2, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Otro resultado de nuestro interés es el siguiente, donde probamos que las funciones refinables preservan la propiedad de Kelley.

TEOREMA 7.7. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función refinable. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

DEMOSTRACIÓN: Se procederá por contradicción. Supongamos que Y no tiene la propiedad de Kelley. Así, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, si $a, b \in Y$ con $d(a, b) < \delta$, existe $A \in C(a, Y)$ tal que, para cada $B \in C(b, Y)$ se cumple que $H(A, B) \geq \varepsilon_0$.

De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\delta_n = \frac{1}{n}$, $a_n, b_n \in Y$ con $d(a_n, b_n) < \delta_n$, existe $A_n \in C(a_n, Y)$ tal que, para cada $B \in C(b_n, Y)$ se cumple que $H(A_n, B) \geq \varepsilon_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $B_n \in C(b_n, Y)$. Se tiene que $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon_0$. Como Y y $C(Y)$ son compactos, podemos suponer que existen $b \in Y$ y $A \in C(Y)$ tales que $b_n \longrightarrow b$ y $A_n \longrightarrow A$. Debido a que $d(a_n, b_n) < \delta_n$ y $a_n \in A_n$, se tiene que $d(b_n, A_n) \leq \delta_n$. Note que

$$\begin{aligned} d(b, A) &= \lim\{d(b_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \\ &= d(\lim\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \lim\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \\ &\leq \lim\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \lim\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$(12.2) \quad b \in A.$$

Puesto que $A_n \longrightarrow A$, fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, para cada $n \geq N$. Vamos a probar que:

$$(12.3) \quad \text{si } n \geq N \text{ y } B \in C(b_n, Y), \text{ entonces } H(A, B) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Para esto sean $n \geq N$ y $B \in C(b_n, Y)$. Supongamos por el contrario, es decir, $H(A, B) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Note que

$$\begin{aligned} H(A_n, B) &\leq H(A_n, A) + H(A, B) \\ &< \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Esto contradice que $H(A_n, B) \geq \varepsilon_0$. Por lo tanto, la afirmación en (12.3) está probada.

Por hipótesis, f es refinable, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n un $\frac{1}{n}$ -refinamiento de f . Como 2^X es compacto, podemos suponer que existen $A_0, D \in 2^X$ tales que $f_n^{-1}(A) \rightarrow A_0$ y $f_n^{-1}(\{b\}) \rightarrow D$. Como $b \in A$ (véase (12.2)), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{-1}(\{b\}) \subseteq f_n^{-1}(A)$. Así, por la Proposición 2.10, $D \subseteq A_0$. Del Lema 6.3, existe $a_0 \in X$ tal que $D = \{a_0\}$. Es decir, se tiene lo siguiente:

$$(12.4) \quad f_n^{-1}(A) \rightarrow A_0 \quad \text{y} \quad f_n^{-1}(\{b\}) \rightarrow \{a_0\} \subseteq A_0.$$

Del Lema 6.4 obtenemos que $A_0 \in C(X)$.

Note que f es continua, por el Teorema 2.12, tenemos que la función inducida $\hat{f}$ es continua. Fijemos $\delta_1 > 0$ de modo que satisface la condición de continuidad uniforme de la función inducida $\hat{f}$ para $\frac{\varepsilon_0}{4}$. Ahora, para $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ que satisface la propiedad de Kelley en X . Por (12.4), podemos fijar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(12.5) \quad \frac{1}{k} < \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{4}, \frac{\delta_2}{3} \right\} \quad \text{y} \quad H(f_k^{-1}(A), A_0) < \frac{\delta_2}{3}.$$

Por el Lema 6.6, para $\frac{1}{k} > 0$, como f_k es una $\frac{1}{k}$ -función, existe $\delta > 0$ tal que para cada $Z \subset Y$ con $\text{diam}(Z) < \delta$, se tiene que $\text{diam}(f_k^{-1}(Z)) < \frac{1}{k}$. Por otro lado, como $b_n \rightarrow b$, fijemos $m \geq N$ de modo que, para cada $n \geq m$, $b_n \in B(b, \frac{\delta}{2})$. Consideremos

$$Z = \{b\} \cup \{b_n : n \geq m\}.$$

Entonces $\text{diam}(Z) < \delta$. Así,

$$(12.6) \quad \text{diam}(f_k^{-1}(Z)) < \frac{1}{k} < \frac{\delta_2}{3}.$$

Ahora, fijemos un punto $a_m \in f_k^{-1}(\{b_m\})$. Notemos que $a_m \in f_k^{-1}(Z)$. Luego

$$(12.7) \quad d(a_m, f_k^{-1}(\{b\})) < \frac{\delta_2}{3}.$$

Por otro lado, note que $f_k^{-1}(\{b\}) \subset f_k^{-1}(Z)$. Por (12.6) obtenemos que

$$(12.8) \quad \text{diam}(f_k^{-1}(\{b\})) < \frac{\delta_2}{3}.$$

Vamos a probar que $d(a_m, a_0) < \delta_2$. En efecto, primero usamos el Lema 2.1 para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(a_m, a_0) &= d(\{a_m\}, \{a_0\}) \\ &\leq d(\{a_m\}, f_k^{-1}(\{b\})) + d(f_k^{-1}(\{b\}), \{a_0\}) \\ &\leq d(\{a_m\}, f_k^{-1}(\{b\})) + d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) + d(A_0, \{a_0\}) \\ &\leq d(\{a_m\}, f_k^{-1}(\{b\})) + d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) + d(A_0, \{a_0\}) + \text{diam}(f_k^{-1}(\{b\})). \end{aligned}$$

Ahora, veamos que:

$$(12.9) \quad d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) < \frac{\delta_2}{3}.$$

Para probar (12.9), primero note lo siguiente:

- (1) Como $b \in A$ (véase (12.2)), entonces $f_k^{-1}(\{b\}) \subset f_k^{-1}(A)$. Por la definición de métrica de Darboux, se sigue que $d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) \leq D(f_k^{-1}(A), A_0)$.
- (2) Por el Lema 2.2, se tiene que $D(f_k^{-1}(A), A_0) = H(f_k^{-1}(A), A_0)$.

(3) Por la segunda condición en (12.5), $H(f_k^{-1}(A), A_0) < \frac{\delta_2}{3}$.

De aquí se sigue

$$d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) \leq D(f_k^{-1}(A), A_0) = H(f_k^{-1}(A), A_0) < \frac{\delta_2}{3}.$$

Con lo cual (12.9) está probada.

Por otro lado, como $a_0 \in A_0$, así $d(A_0, a_0) = 0$. Además, por (12.7), (12.9) y (12.8) se sigue que

$$\begin{aligned} d(a_m, a_0) &\leq d(\{a_m\}, f_k^{-1}(\{b\})) + d(f_k^{-1}(\{b\}), A_0) + \text{diam}(f_k^{-1}(\{b\})) \\ &< \frac{\delta_2}{3} + \frac{\delta_2}{3} + \frac{\delta_2}{3} \\ &= \delta_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(a_m, a_0) < \delta_2$.

Por otra parte, debido a que δ_2 satisface la propiedad de Kelley en X , para $A_0 \in C(a_0, X)$, existe $E \in C(a_m, X)$ tal que $H(A_0, E) < \delta_1$. Dado que $a_m \in f_k^{-1}(\{b_m\})$, entonces $f_k(a_m) = b_m \in f_k(E) \in C(b_m, Y)$. Como $H(A_0, E) < \delta_1$, entonces

$$H(\hat{f}(A_0), \hat{f}(E)) = H(f(A_0), f(E)) < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Debido a que f_k es $\frac{1}{k}$ -refinamiento de f , se tiene que $d^*(f, f_k) < \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Esto implica que $H(f(A_0), f_k(E)) < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Note que $A_0 \in 2^X$. El Lema 6.5 implica que $f(A_0) = A$ y $f^{-1}(\text{int}(A)) \subseteq A_0$. Luego,

$$\begin{aligned} H(A, f_k(E)) &= H(f(A_0), f_k(E)) \\ &\leq H(f(A_0), f(E)) + H(f(E), f_k(E)) \\ &< \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, consideremos $B = f_k(E)$. Se tiene que $m \geq N$, $B \in C(b_m, Y)$ y $H(A, B) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, lo cual contradice la afirmación en (12.3). Por lo tanto, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Para concluir nuestro capítulo, vamos a exponer el resultado relacionado con las retracciones. Siguiendo con la temática de nuestro estudio sobre funciones que preservan la propiedad de Kelley; en lo que sigue de esta sección, probamos que los retratos de los continuos con la propiedad de Kelley, también tienen la propiedad de Kelley.

DEFINICIÓN 7.8. Sean X un continuo y $Y \subseteq X$. Diremos que Y es un **retracto** de X si existe una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(y) = y$, para cada $y \in Y$. A la función f se le conoce como **retracción**.

TEOREMA 7.9. Si X tiene la propiedad de Kelley y Y es un retracto de X , entonces Y tiene la propiedad de Kelley.

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : X \rightarrow Y$ una retracción y $\varepsilon > 0$. Note que f es continua, por el Teorema 2.12, tenemos que $\hat{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$ es continua, luego $\hat{f}$ es uniformemente continua. Esto es, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ con $H(A, B) < \delta_1$, entonces $H(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) < \varepsilon$. Por otro lado, como X tiene la propiedad de Kelley, existe $\delta_2 > 0$

tal que si $a, b \in X$ con $d(a, b) < \delta_2$ y para cada $A \in C(a, X)$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \delta_1$.

Vamos a probar que δ_2 satisface la propiedad para que Y tenga la propiedad de Kelley. Para esto sean $a, b \in Y$ tales que $d(a, b) < \delta_2$ y $A \in C(a, Y)$. Como $Y \subseteq X$ se tiene que $A \in C(a, X)$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \delta_1$. En virtud de la continuidad uniforme de $\hat{f}$ se sigue que $H(\hat{f}(A), \hat{f}(B)) = H(A, \hat{f}(B)) < \varepsilon$. Por otro lado, por hipótesis, f es una retracción, luego

$$b = f(b) \in f(B) = \hat{f}(B) \in C(b, Y).$$

Por lo tanto, Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Finalizamos este capítulo enunciando un problema, que se encuentra hasta nuestro conocimiento, abierto sobre la preservación de la propiedad de Kelley. Para esto necesitamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 7.10. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre continuos se dice **juntadora** si para cada $Q \in C(Y)$ y para cualesquiera componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$ se satisface que $f(K_1) \cap f(K_2) \neq \emptyset$.

PREGUNTA 7.11. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función juntadora con X un continuo que tiene la propiedad de Kelley, ¿el continuo Y tiene la propiedad de Kelley?

Es de resaltar que estudiar el Problema [1.1](#) para otras clases de funciones puede ser una buena línea de investigación.

Agradecimientos: Una parte esencial para la publicación de este libro es, sin duda, la labor invaluable de las(os) árbitras(os). Los autores le agradecen su valioso tiempo, trabajo y sus atinados comentarios, con éstos el trabajo tuvo está presentación, además, nuestros queridos lectores disfrutarán el contenido de este capítulo.

Bibliografía

- [1] G. Acosta García. *Hiperespacios y la propiedad de Kelley*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, 1994.
- [2] A. A. G. Aguilar Martínez. *Sobre la propiedad de Kelley y suavidad de un continuo*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002.
- [3] F. Barragán, M. de J. López. *Funciones especiales entre continuos*. Capítulo 5 en Topología y Sistemas Dinámicos III. Editores: J. Juan Angoa, J. Arrazola, Raúl Escobedo, A. Illanes, Mauricio Osorio, J. Poisot, G. Sienna, A. Tamariz. Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, BUAP, 2010, ISBN 9786074871104.
- [4] J.J. Charatonik and W.J. Charatonik. *On projections and limit mappings of inverse systems of compact spaces*. Topology and its Applications 16 (1983), 1–9.
- [5] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [6] A. Illanes. *Continuum Theory*, Springer, 2025.
- [7] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

- [8] H. Kato. *Concerning a property of J. L. Kelley and refinable maps*. Math. Japonica, 31 (1986), 711–719.
- [9] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52, (1942), 22–36.
- [10] J. Otero González. *Funciones Refinables*, Tesis de maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2009.
- [11] P. Pellicer Covarrubias. *The hyperspaces $C(p, X)$* . Topology Proc. 27 (1) (2003), 259–285.
- [12] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.
- [13] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [14] R. W. Wardle. *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. vol. 3, no. 2, (1977), 291–299.

Correos electrónicos:

mjlopez@fcfm.buap.mx (María de Jesús López Toriz)

andresolivares105@outlook.com (Andrés Alejandro Olivares Jorge)

gerardo.hernandezvld@uanl.edu.mx (Gerardo Hernández-Valdez)

Topología y sus aplicaciones 12
Editores: José Juan Angoa Amador
Agustín Contreras Carreto
Raúl Escobedo Conde
María de Jesús López Toriz
15 de septiembre de 2026
Formato: PDF
Peso: 5.2 MB